



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 84 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Васильев А.А., Жогов А.Г.,
Косарев О.С., Марков М.Б.,
Потапенко А.И., Ульяновков Р.В.,
Тараканов И.А.

Экспериментальная
проверка математической
модели переноса фотонов и
электронов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Экспериментальная проверка математической модели переноса фотонов и электронов / А.А.Васильев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 84. 17 с. doi:[10.20948/prepr-2019-84](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-84)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-84>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**А.А. Васильев, А.Г. Жогов, О.С. Косарев, М.Б. Марков,
А.И. Потапенко, Р.В. Ульяновков, И.А. Тараканов**

**Экспериментальная проверка
математической модели переноса
фотонов и электронов**

Москва – 2019

**Васильев А.А., Жогов А.Г., Косарев О.С., Марков М.Б., Потапенко А.И.,
Ульянников Р.В., Тараканов И.А.**

Экспериментальная проверка математической модели переноса фотонов и электронов

Проведены физический и вычислительный эксперименты по определению коэффициента ослабления потока фотонов заданного спектра пакетами разнородных материалов. Вычислительный эксперимент выполнен на основе суперкомпьютерной квазистационарной модели переноса излучения, ориентированной на гетерогенный вычислительный кластер. Физические эксперименты проведены на передвижной рентгенодиагностической установке. Выявлено удовлетворительное совпадение результатов эксперимента и расчета.

Ключевые слова: ионизирующее излучение, коэффициент ослабления, эксперимент, суперкомпьютерный расчет

**Vasilev A.A., Zhogov A.G., Kosarev O.S., Markov M.B., Potapenko A.I.,
Ulyanikov R.V., Tarakanov I.A.**

Experimental verification of the mathematical model of photon and electron transport

Physical and computational experiments are carried out to determine the attenuation coefficient of the photon flux of a given spectrum by packets of dissimilar materials. The computational experiment was carried out on the basis of a supercomputer quasistationary radiation transport model oriented to a heterogeneous computing cluster. Physical experiments were carried out on a mobile x-ray diagnostic unit. A satisfactory agreement between the results of the experiment and calculation was revealed.

Key words: ionizing radiation, attenuation coefficient, experiment, supercomputer calculation

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-01-00301).

Оглавление

Введение	3
1 Математическая модель.....	4
2 Физико-геометрическая модель экспериментов	6
3 Результаты расчетов и сравнение с экспериментом.....	9
Заключение.....	15
Библиографический список.....	15

Введение

Распространение фотонов и электронов высокой энергии в веществе сопровождается рассеянием. Фотоны испытывают комптоновское и когерентное рассеяния, фотопоглощение, порождают электронно-позитронные пары. Электроны ионизируют и возбуждают среду, рассеиваются упруго, генерируют тормозное излучение [1,2].

Развитие суперкомпьютеров и технологий параллельных вычислений в последние годы стало основой создания математических моделей переноса излучения, использующих прямое моделирование рассеяния. Примером является статистическая модель [3], разработанная в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН для расчета параметров потоков электронов и фотонов на гетерогенном вычислительном кластере K-100 [4]. Он использует для вычислений не только центральные, но и графические процессоры. Особенности модели являются учет каскадных процессов и прямое моделирование столкновений электронов. Проблема заключается в том, что сечения рассеяния электронов обратно пропорциональны энергии, передаваемой среде. Наиболее вероятны столкновения с малой передачей импульса [5-8]. В результате электрон до термализации успевает совершить много столкновений. Моделирование электронных столкновений требует объема вычислений, нереализуемого на доступных в России однородных кластерах. Алгоритм моделирования дополнительно усложняется тормозным излучением, в результате которого электроны образуют фотоны [9].

Малые изменения импульса электронов при рассеянии и каскадный характер рассеяния чрезвычайно усложняют распределение вычислений между процессорами гетерогенного кластера. Сложная организация передачи данных является очевидным источником ошибок вычислений.

Следует также отметить, что прямое моделирование столкновений подразумевает использование данных о сечениях рассеяния. Их источником являются зарубежные базы данных. Рассматриваемая модель использует данные базы Evaluated Nuclear Data File (ENDF). Основным источником этих данных является Национальный центр ядерных данных (National Nuclear Data Center, <http://www.nndc.bnl.gov/>). Интерпретация и обработка этих данных является дополнительным источником ошибок.

Указанные источники ошибок делают особенно актуальной проблему экспериментальной проверки модели. Ее авторы уделяют этому большое внимание, используя для этого любые доступные экспериментальные данные (например, [10]). Но совпадение с любым экспериментом является лишь необходимым условием правильности модели. Поэтому продолжение экспериментальной проверки является необходимым условием развития модели.

Данная работа содержит результаты экспериментальной проверки модели на данных о поглощении излучения рентгеновской установки сложными преградами. Она организована следующим образом. Задаются элементный состав и размеры экспериментальных преград. Данные номинальные параметры используются напрямую для постановки вычислительного эксперимента. Параллельно

по заданным размерам и элементному составу изготавливается несколько преград для физического эксперимента. Поскольку изготовление связано со сложными технологическими процессами, образцы отличаются как друг от друга, так и от номинальной преграды. Экспозиционная доза рентгеновского излучения измеряется детекторами заданной конструкции до и после прохождения преграды. Физические эксперименты проводятся для каждой изготовленной преграды. Измеренные данные усредняются. Результаты вычислительного эксперимента сравниваются с усредненными экспериментальными данными.

1 О математической модели

Решение кинетического уравнения методом Монте-Карло состоит в сведении его к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Ядро интегрального оператора интерпретируется как плотность вероятности перехода в фазовом пространстве. Процесс переноса представляется однородной марковской цепью столкновений частиц с атомами вещества, в результате которых может произойти поглощение или рассеяние [11, 12].

В квазистационарном приближении [13-15] состояние частицы описывается переменными $x = (\mathbf{r}, \Omega, E)$, где \mathbf{r}, Ω, E – координаты, направление движения и энергия соответственно. Интегро-дифференциальное уравнение для плотности потока частиц $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E)$ сводится к интегральному уравнению Фредгольма [15]:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) = & \Phi_0(\mathbf{r}, \Omega, E) + \\ & \int_0^\infty d\xi \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi\Omega, \mathbf{r}, E)\} \int d\Omega' \int dE' \mu_s(\mathbf{r} - \xi\Omega, \Omega', E', E), \\ & \Phi(\mathbf{r} - \xi\Omega, \Omega', E') \end{aligned}$$

где: $\Phi_0(\mathbf{r}, \Omega, E) = \int_0^\infty d\xi \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi\Omega, \mathbf{r}, E)\} S(\mathbf{r} - \xi\Omega, \Omega, E)$

(1.1)

Здесь $S(\mathbf{r}, \Omega, E)$ – источник излучения; $\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}, E) = \int_0^\xi \mu(\mathbf{r} - \xi'\Omega, E) d\xi'$ –

оптическое расстояние (глубина) между точками r и $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \xi\Omega$; μ, μ_s – полное и дифференциальное макроскопические сечения рассеяния частиц. Формула (1.1) описывает поток нерассеянных частиц.

Процесс прохождения частицы через вещество представляется ее траекторией – последовательностью элементарных актов взаимодействия с атомами вещества. Такое представление удобно для моделирования переноса излучения

методом Монте-Карло. Для этого рассматриваемое уравнение переноса преобразуют к виду:

$$Q(x) = Q_1(x) + \int_0^{\infty} d\xi \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, E)\} \int d\mathbf{\Omega}' \int dE' \mu_s(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', E', E) \frac{\mu(x)}{\mu(x')} Q(x'). \quad (1.2)$$

В уравнении (1.2) величина $Q(x) = \mu(x)\Phi(x)$ выражает плотность столкновений, а $Q_1(x) = \mu(x)\Phi_0(x)$ – плотность первых столкновений. Ядро интегрального оператора $k = \exp\{-\tau(\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, E)\} \mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}, E', E) \mu(x)/\mu(x')$ выражает плотность вероятности перехода $x \rightarrow x'$. Величина $k \cdot d\xi d\mathbf{\Omega}' dE'$ это вероятность перехода из точки $x' = (\mathbf{r} - \xi\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', E')$ в точку $x = (\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E)$.

Перенос частиц, сопровождающийся рождением медленных частиц в каскадных процессах, например, рождением электронов при комптоновском рассеянии или фотопоглощении, описывается системой интегральных уравнений. Источники медленных частиц $S_2(x)$ представляются формулой:

$$S_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E) = \int dE' \int d\mathbf{\Omega}' k_2(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', E', E) Q(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', E'),$$

где $Q(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', E')$ – плотность столкновений первичных частиц с энергией E' и направлением движения $\mathbf{\Omega}'$, а $k_2(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', E', E) dE' d\mathbf{\Omega}'$ – вероятность рождения медленных частиц с энергией E в направлении $\mathbf{\Omega}$.

Задачей моделирования переноса является вычисление функционалов распределения частиц ионизирующего излучения [2, 6], для чего и используется метод Монте-Карло.

При моделировании развития фотонно-электронного каскада рассматриваются два типа частиц: фотоны и электроны.

Для фотонов учитываются следующие типы столкновительных процессов с атомами вещества:

- когерентное рассеяние;
- комптоновское (некогерентное) рассеяние;
- фотопоглощение квантов (фотоионизация атомов).

Для электронов рассматриваются следующие процессы взаимодействия с веществом:

- упругое рассеяние на атомах вещества, приводящее к отклонению электрона от первоначального направления движения;
- возбуждение атомов, сопровождающееся малыми потерями энергии электрона;
- ионизационные столкновения или ударная ионизация (электроионизация) с появлением вторичного электрона;

- радиационное торможение в кулоновском поле атома с генерацией фотона тормозного излучения.

2 Физико-геометрическая модель экспериментов

Экспериментальные данные по поглощению рентгеновского излучения образцами из сложных материалов получены на передвижной рентгенодиагностической установке (ПРДУ).

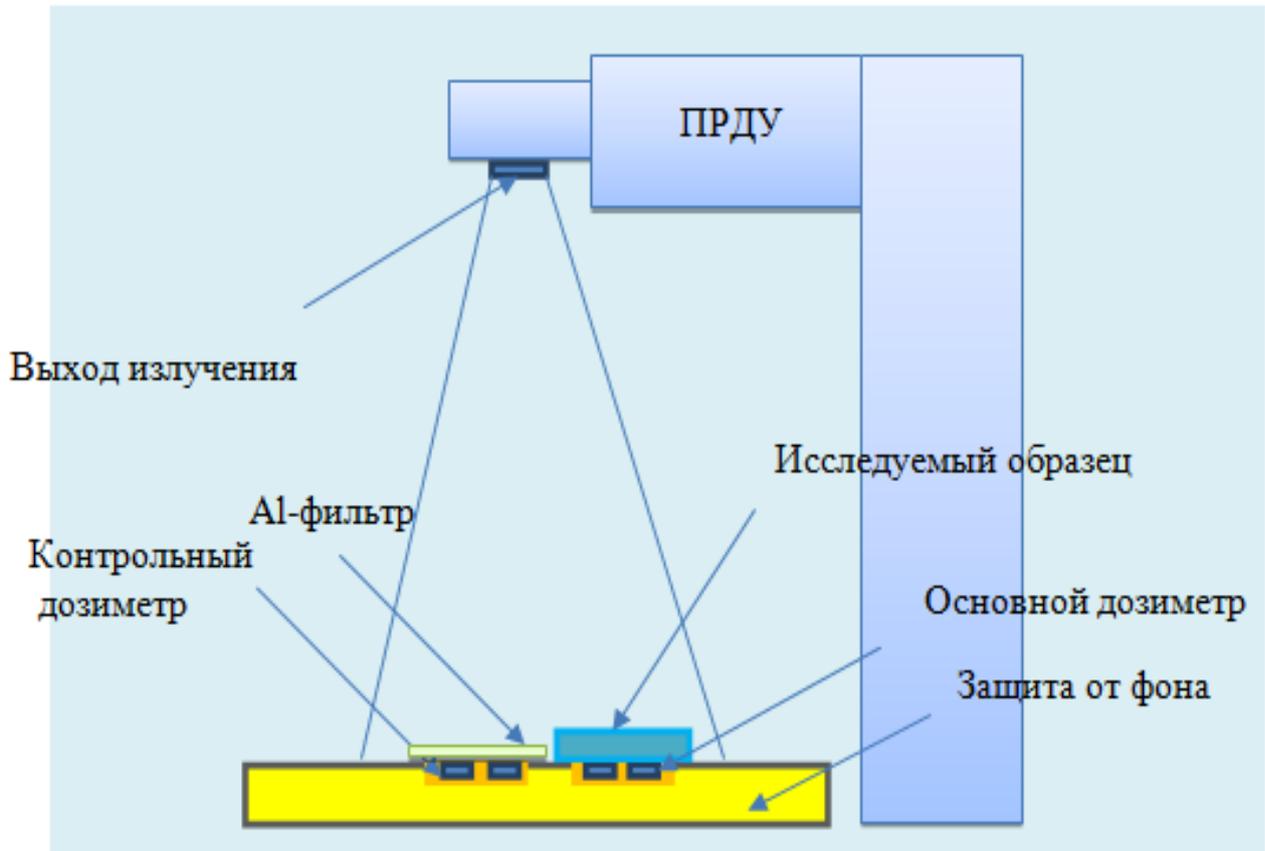


Рисунок 2.1. Схема проведения экспериментальных исследований

Поглощенная доза D измерялась термолюминесцентной системой с дозиметрами типа HARSHAW.

Дозиметр состоит из металлического слайда с четырьмя термолюминесцентными детекторами (ТЛД). Из них два элемента ТЛД-600 и два – ТЛД-700. Оба элемента обогащены различными изотопами лития.

Все четыре элемента изначально имеют примерно одинаковую чувствительность к гамма-электронному излучению. В процессе калибровки системы для каждого ТЛД определяются индивидуальные коэффициенты коррекции, что обеспечивает заданный разброс и воспроизводимость результатов.

Схема проведения экспериментальных исследований приведена на рисунке 2.1. Внутри бокса установки под источником помещен трафарет с тре-

мя дозиметрами системы «Vicron». Для измерения мощности дозы внутри установки проведена ионизационная камера «БМК-06» от универсального дозиметра «ДКС-101». Для контроля показаний камеры БМК-06 в том же месте размещен дозиметр 2 (рисунок 2.2).

Контрольный дозиметр в ходе измерений накрыт фильтром из алюминия толщиной 1 мм (рисунок 2.3). Этот фильтр препятствует проникновению фотоэлектронов в ТЛД для предотвращения превышения допустимой дозы.

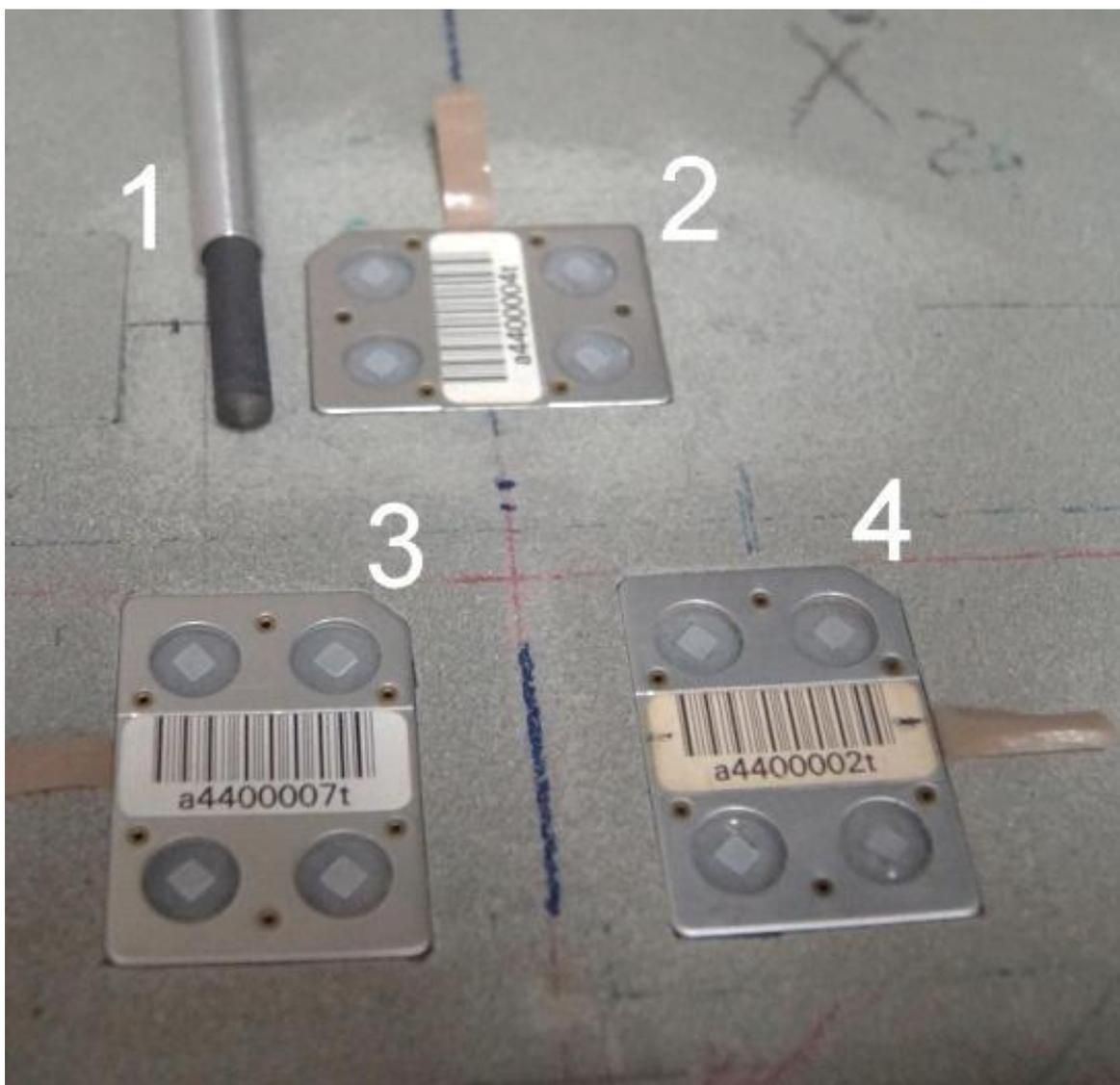


Рисунок 2.2. Схема расположения дозиметров. 1 – камера БМК-06; 2 – открытый дозиметр; 3 – контрольный дозиметр; 4 – основной дозиметр

Для расчетов коэффициента ослабления фильтром проводилось облучение дозиметров без образца. Коэффициент рассчитывался путем вычисления отношения показаний основного дозиметра к показанию контрольного дозиметра, накрытого алюминиевым листом.

Значение кратности ослабления экспозиционной дозы излучения в исследуемом объекте определяется как

$$K_{D_3} = K_{0cp} (D_{0_3} / D_3), \quad (2.1)$$

где K_{D_3} – кратность ослабления экспозиционной дозы излучения образцом, отн.ед.; D_{0_3} – измеренное значение экспозиционной дозы излучения в контрольном ТЛД, Р; D_3 – измеренное значение экспозиционной дозы излучения в основном ТЛД, Р; K_{0cp} – значения кратности ослабления поглощенной дозы фильтром.

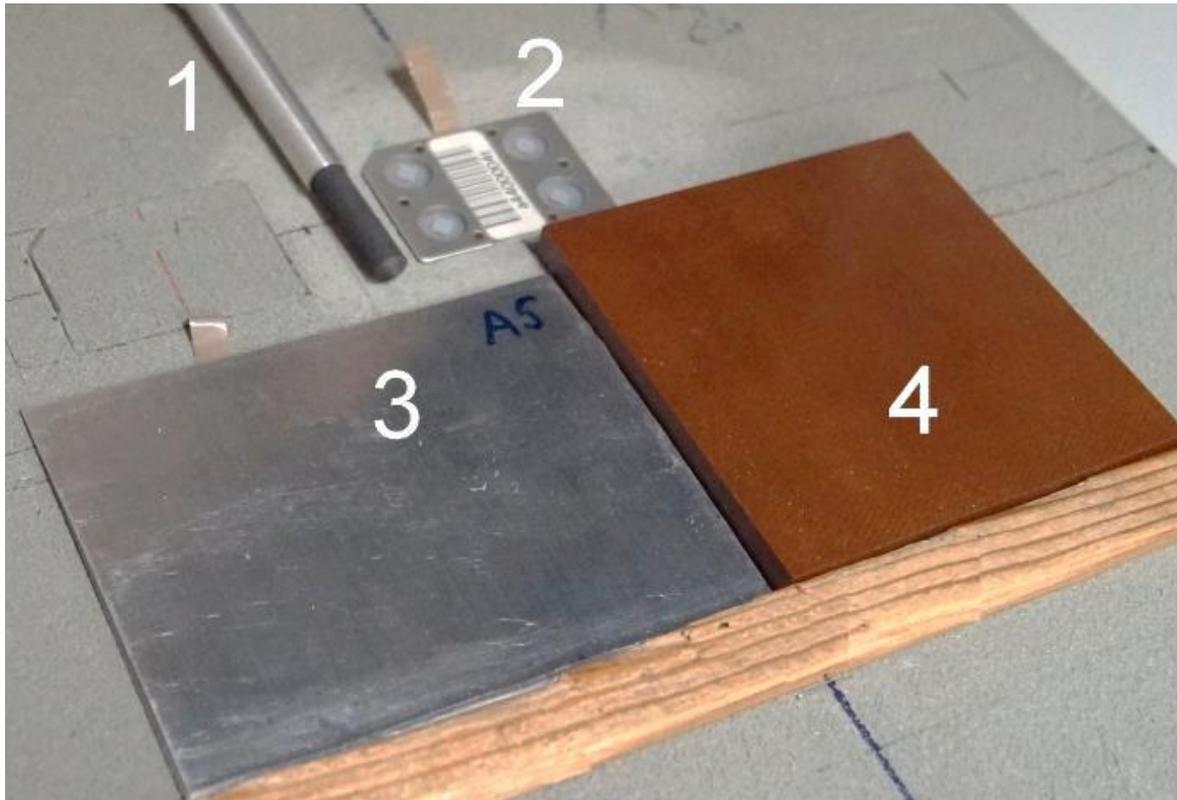


Рисунок 2.3. Схема расположения исследуемого образца. 1 – камера БМК-06; 2 – открытый дозиметр, 3 – Al-пластина; 4 – образец

В физико-геометрическую модель численного эксперимента, помимо исследуемого образца, включены контрольный и основной ТЛД, алюминиевая фольга, а также открытый ТЛД. Коэффициент ослабления рентгеновского излучения вычислялся по формуле (2.1).

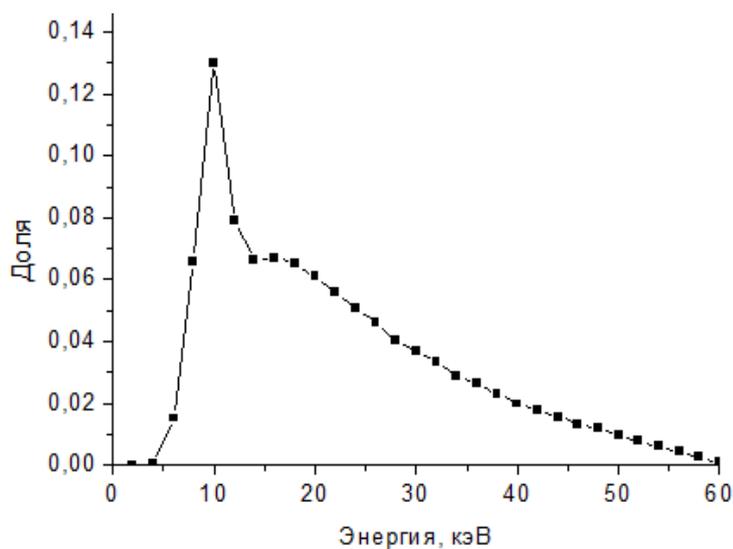


Рисунок 2.4. Спектр рентгеновского излучения ПРДУ

Вместо экспозиционной дозы в формулу подставлялось энерговыделение в соответствующем ТЛД.

Спектр рентгеновских квантов ПРДУ представлен на рисунке 2.4.

3 Результаты расчетов и сравнение с экспериментом

Расчеты проводились на гибридном вычислительном комплексе К-100.

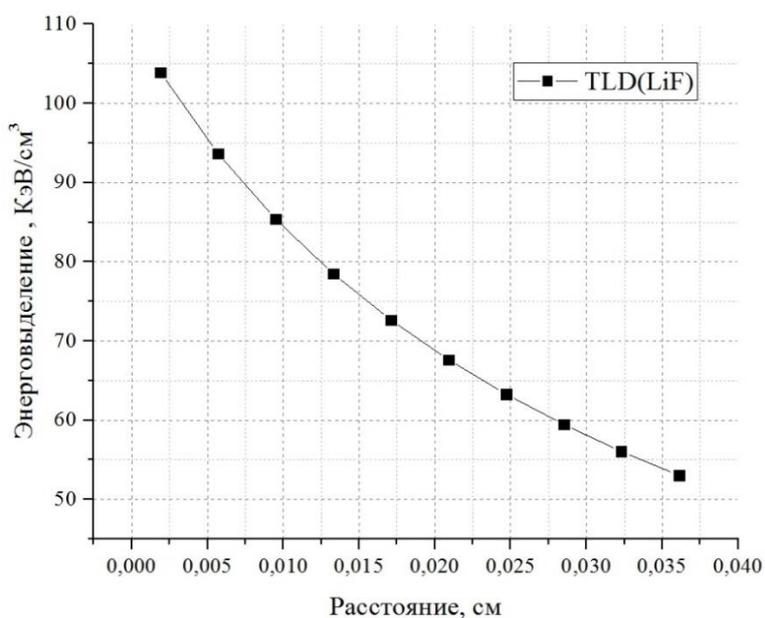


Рисунок 3.1. Распределение энерговыделения по толщине детектора

Коэффициент ослабления является относительной величиной. Поэтому все расчетные данные получены для падающего потока в 1 квант/см².

Результаты вычисления энерговыделения в отдельно взятом ТЛД представлены на рисунке 3.1.

В эксперименте кратность ослабления $K_{0\text{cp}}$ составила 13.91. В расчетах получен коэффициент ослабления, равный 12.28.

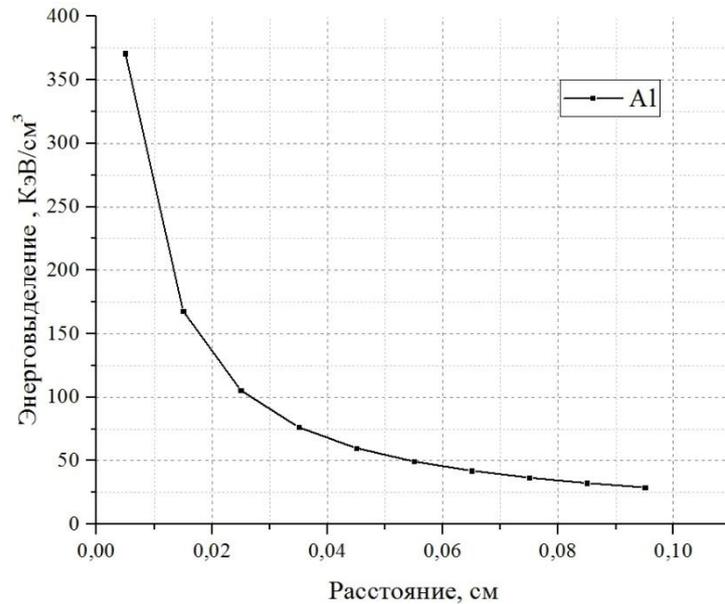


Рисунок 3.2. Распределение энерговыделения по толщине алюминиевого фильтра

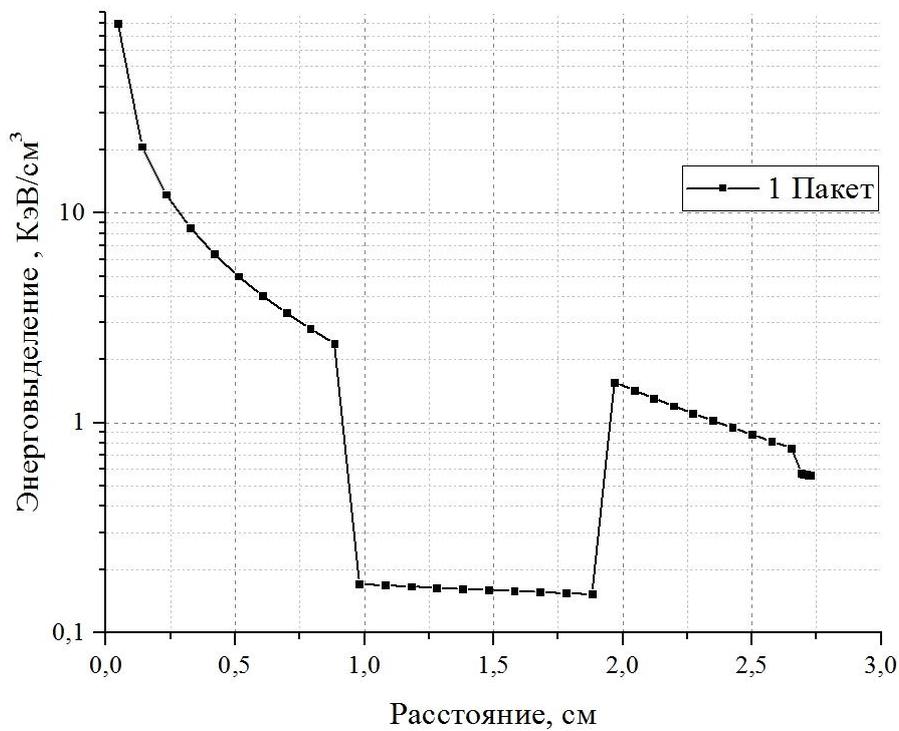


Рисунок 3.3. Распределение энерговыделения по толщине преграды 1

График рассчитанного распределения энерговыделения по толщине алюминиевой пластины приведен на рисунке 3.2.

Таблица 3.1

Результаты экспериментов со сложными преградами

№ образца преграды	D_{O_3}, P	D_3, P	K_{D_3}	№ образца преграды	D_{O_3}, P	D_3, P	K_{D_3}
1.1	11,17	1,17	132,82	2.1	11,71	0,14	1163,69
	11,96	1,16	143,44		12,15	0,14	1207,42
	13,25	1,1	167,58		12,2	0,13	1305,65
	11,01	1,2	127,65		10,99	0,14	1092,14
1.2	10,49	1,07	136,40	2.2	35,77	0,39	1276,04
	10,53	1,17	125,21		38,28	0,41	1298,97
	20,2	1,53	183,68		38,02	0,41	1290,14
	10,46	1,08	134,75		37,18	0,42	1231,60
1.3	11,23	1,05	148,80	2.3	35,95	0,42	1190,86
	11,95	1,15	144,57		35,16	0,4	1222,92
	13,31	1,17	158,27		35,9	0,36	1387,40
	11,12	1,07	144,59		32,2	0,4	1119,97
3.1	12,26	0,11	1550,63	3.2	36,09	0,28	1793,24
	12,59	0,11	1592,37		37,65	0,31	1689,71
	12,57	0,1	1748,82		37,07	0,27	1910,16
	11,66	0,11	1474,74		33,22	0,28	1650,64
3.3 30 мин	71,1	0,66	1498,77	3.3 30 мин	74,94	0,58	1797,61
	72,69	0,65	1555,86				

В таблицах 3.1 и 3.2 представлены результаты измерений и расчетов коэффициента ослабления в преградах. Указаны эксперименты, в которых облучение продолжалось в течение 1800 с. Эксперименты проводились на трех одинаковых образцах каждой преграды.

Таблица 3.2

Экспериментальные и расчетные значения коэффициента ослабления сложными преградами

№	KDэ		№	KDэ		№	KDэ	
	Эксп.	Расч.		Эксп.	Расч.		Эксп.	Расч.
1.1	142,88	129,14	2.1	1192,23	1176,089	3.1	1591,64	1619,96
1.2	145,01		2.2	1274,19		3.2	1760,94	
1.3	149,06		2.3	1230,29		3.3	1570,01	

В рамках исследований получены коэффициенты ослабления для преград из одного материала. В таблице 3.3 представлено сравнение экспериментальных и расчетных исследований.

Таблица 3.3

Результаты экспериментов с однородными преградами

№ образца преграды	$D_{Oэ}, P$	$Dэ, P$	$K_{Dэ}$	№ образца преграды	$D_{Oэ}, P$	$Dэ, P$	$K_{Dэ}$
1.1	12,07	28,13	5,97	2.1	12,1	3,13	53,78
	12,53	30,92	5,64		12,65	3,35	52,54
	12,36	27,85	6,17		12,79	3,46	51,43
	11,63	28,56	5,67		12,28	3,55	48,13
1.2	11,78	26,35	6,22	2.2	11,91	3,33	49,71
	11,64	27,34	5,92		12,28	3,20	53,39
	12,12	25,59	6,59		12,35	3,07	55,97
	11,04	25,01	6,14		11,39	3,34	47,44
1.3	11,40	26,91	5,89	2.3	11,69	3,03	53,68
	11,48	28,90	5,53		11,90	3,20	51,74
	11,78	23,89	6,86		12,09	3,06	54,97
	10,80	26,90	5,59		11,57	3,90	41,27
3.1	36,49	0,67	757,72	4.1	10,88	0,27	560,63
	37,8	0,66	796,82		11,84	0,28	588,31
	37,17	0,61	847,76		11,47	0,26	613,76

№ образца преграды	D_{O_3}, P	D_3, P	K_{D_3}	№ образца преграды	D_{O_3}, P	D_3, P	K_{D_3}
	33,85	0,66	713,55		10,57	0,29	507,09
3.2	35,25	0,64	766,28	4.2	34,94	0,85	571,89
	35,97	0,63	798,15		35,17	0,84	582,51
	37,32	0,56	932,17		34,48	0,78	615,01
	34,08	0,63	752,61		32,05	0,87	512,53
3.3	34,94	0,66	736,53	4.3	34,29	0,89	536,03
	35,41	0,64	769,76		35,69	0,87	570,74
	35,92	0,59	847,02		36,53	0,81	627,44
	32,26	0,64	701,28		33,56	0,92	507,51
5.1	11,58	33,01	4,88	6.1	11,49	10,56	15,14
	11,49	37,24	4,29		11,56	10,65	15,10
	11,41	52,73	3,01		11,95	17,14	9,70
	11,23	35,42	4,41		11,40	13,07	12,13
5.2	11,60	27,41	5,89	6.2	12,07	13,70	12,26
	11,98	55,79	2,99		12,48	12,04	14,42
	12,08	44,15	3,81		12,51	16,19	10,75
	11,48	36,17	4,42		12,01	16,78	9,96
5.3	12,11	37,92	4,44	6.3	11,80	10,85	15,13
	12,29	27,37	6,25		12,52	12,81	13,60
	12,83	63,56	2,81		12,54	14,93	11,69
	11,94	42,63	3,90		11,91	13,26	12,50
7.1	11,67	2,92	55,60	8.1	11,66	13,56	11,96
	11,78	3,11	52,70		11,75	15,70	10,41
	12,14	2,86	59,06		11,98	17,67	9,43
	11,36	3,05	51,82		11,23	15,42	10,13
7.2	12,53	3,27	53,31	8.2	11,28	13,78	11,39
	12,29	3,22	53,10		12,06	16,74	10,02

№ образца преграды	D_{O_3}, P	D_3, P	K_{D_3}	№ образца преграды	D_{O_3}, P	D_3, P	K_{D_3}
	12,40	3,12	55,29		12,23	17,08	9,96
	11,80	3,14	52,28		11,20	11,77	13,24
7.3	11,97	3,18	52,37	8.3	12,03	14,77	11,33
	12,33	3,29	52,14		12,22	15,17	11,21
	12,23	2,99	56,91		12,42	17,53	9,86
	11,22	3,15	49,56		11,63	14,99	10,79

Таблица 3.4

Экспериментальные и расчетные значения коэффициента ослабления однородными преградами

№	KDэ		№	KDэ	
	Эксперимент	Расчет		Эксперимент	Расчет
1.1	5,86	5,62	2.1	51,47	55,84
1.2	6,22		2.2	51,63	
1.3	5,97		2.3	50,41	
3.1	778,96	765,05	4.1	567,45	541,31
3.2	812,30		4.2	570,49	
3.3	763,65		4.3	560,43	
5.1	4,15	2,14	6.1	13,02	7,24
5.2	4,27		6.2	11,85	
5.3	4,35		6.3	13,23	
7.1	54,79	33,73	8.1	10,49	4,89
7.2	53,50		8.2	11,15	
7.3	52,74		8.3	10,80	

Необходимость введения в физико-геометрическую модель численного эксперимента дозиметрической системы обусловлена существенностью радиационных процессов в детекторах.

Заключение

Представлен результат применения очередного подхода к экспериментальной проверке математической модели переноса излучения.

Экспериментальные данные получены в прямых измерениях экспозиционной дозы рентгеновского излучения в термолюминесцентных дозиметрах. Измерения проводились для падающего и преодолевшего преграду излучений в различных конфигурациях дозиметрической системы.

Математическое моделирование проведено путем решения кинетических уравнений для фотонов и электронов в квазистационарном приближении. Расчеты выполнялись на гибридном вычислительном кластере К-100.

В большинстве случаев экспериментальные и расчетные данные совпадают с точностью до 10 процентов. Учитывая погрешности физико-геометрической модели эксперимента, можно сказать, что расчет не противоречит эксперименту.

Практически для всех преград расчетный коэффициент ослабления оказались меньше экспериментально измеренного. Это наводит на вывод о том, что в условиях физических и вычислительных экспериментов имеет место некоторое систематическое расхождение. Данный факт подтверждается тем, что существенные расхождения, почти в два раза, выявлены для однородных преград с низкой поглощающей способностью. Данные расхождения обусловлены, по видимому, проблемами соответствия данных преград и их физико-геометрических моделей.

Библиографический список

1 L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th Edition, Butterworth–Heinemann, Vol. 2, (1975).

2 W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford: Clarendon Press, (1954).

3 M. E. Zhukovskii, S. V. Podolyako, R. V. Uskov, «Model of individual collisions for description of electron transport in matter», *Math. Models Comput. Simul.*, 4:1 (2012), 101–109.

4 Официальный сайт МГБК К-100 www.kiam.ru

5 N. F. Mott, H. S. W. Massey, *The theory of atomic collisions*, Oxford: Clarendon Press, (1965).

6 H. S. W. Massey, E. H. S. Burhop, *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, Oxford: Clarendon Press, (1969).

7 M. Gryzinski, «Classic Theory of Electronic and Ionic Inelastic Collisions», *Phys. Rev.* 115 (2), 374-383 (1959).

8 Yong-Ki Kim, M. E. Rudd, «Theory for Ionization of Molecules by Electrons» *Phys. Rev.* 50, 3954-3967 (1994).

9 H. Davies, H.A. Bethe and L.C. Maximon, «Theory of bremsstrahlung and pair production. Integral cross section for pair production», *Phys. Rev.* 93, 788-795

(1954).

10 M. E. Zhukovskiy, M. B. Markov, S. V. Podolyako, I. A. Tarakanov, R. V. Uskov, A. M. Chlenov and V. F. Zinchenko, «Researching the spectrum of bremsstrahlung generated by the RIUS-5 electron accelerator», *Mathematica Montisnigri*, 35, 54-67 (2016).

11 Г.А. Михайлов Весовые методы Монте-Карло. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

12 Г.И. Марчук, Г.А. Михайлов, М.А. Назаралиев и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. – Новосибирск: Наука, 1976.

13 С.М. Ермаков Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971.

14 Б.А. Каргин, Г.А. Михайлов Интегральное уравнение переноса. Метод и алгоритмы Монте-Карло для задач переноса излучения. – В кн.: Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Под ред. Ю.П.Попова. 2008, Том VII-1, Математическое моделирование в низкотемпературной плазме, М.: Янус-К, С. 540-552.

15 А.М. Кольчужкин, В.В. Учайкин Введение в теорию прохождения частиц через вещество. – М.: Атомиздат, 1978.