



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Меретин А.С., [Савенков Е.Б.](#)

Вычислительный алгоритм  
для описания эволюции  
термопороупругой среды с  
учетом разрушения

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Меретин А.С., Савенков Е.Б. Вычислительный алгоритм для описания эволюции термопороупругой среды с учетом разрушения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 82. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2019-82](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-82)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-82>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

А.С. Меретин, Е.Б. Савенков

**Вычислительный алгоритм для описания эволюции  
термопороупругой среды с учетом разрушения**

Москва, 2019



# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>4</b>
2.1	Система уравнений . . . . .	4
2.2	Граничные условия . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Слабая постановка задачи</b>	<b>7</b>
3.1	Пространственная аппроксимация системы уравнений . . . . .	10
3.2	Дискретизация по времени и решение нелинейной системы . . . . .	12
3.3	Решение системы линейных алгебраических уравнений . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Программный комплекс</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Результаты моделирования</b>	<b>18</b>
5.1	Термопороупругость . . . . .	18
5.2	Моделирование развития повреждаемости вблизи нагнетательной скважины . . . . .	27
5.3	Моделирование термического воздействия на пласт с добывающей и нагнетательной скважиной . . . . .	28
5.4	Моделирование работы скважины в слоистом пласте . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>34</b>

## 1 Введение

В работе [1] была представлена термодинамически согласованная математическая модель для описания эволюции термопороупругой среды с учетом континуального разрушения. Предполагается, что среда состоит из двух континуумов — пористого деформируемого скелета и однофазного слабосжимаемого флюида. Модель включает в себя учет деформационных, фильтрационных и неизотермических эффектов. Разрушение учитывается в рамках теории континуального разрушения. В рамках данного подхода для описания степени разрушения вводится параметр повреждаемости  $D$ .

В настоящей работе представлен вычислительный алгоритм решения предложенной системы уравнений термопороупругости с учетом разрушения, основанный на методе конечных элементов. Описан программный комплекс, реализованный с использованием данного алгоритма. Приведены результаты расчетов, в том числе валидационного характера.

## 2 Математическая модель

### 2.1 Система уравнений

Система уравнений состоит из основных законов сохранения (массы, импульса, энергии) и имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\
 \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\
 \frac{\partial (m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} \right) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{w}) - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\
 \mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \operatorname{grad}(p), \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T), \quad \tau \frac{\partial D}{\partial t} &= \tilde{F}(\chi),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\boldsymbol{\xi}$  — вектор перемещений скелета,  $m_\alpha$  — масса фазы  $\alpha$  в некотором элементарном объеме,  $\rho_f$  — плотность флюида,  $\mathbf{w}$  — вектор фильтрации,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений,  $e_\alpha$  — удельная внутренняя энергия,  $\phi$  — пористость,  $p$  — поровое давление,  $\mathbf{q}$  — вектор потока тепла,  $\mathbf{k}$  — тензор проницаемости,  $\mu$  — вязкость флюида,  $\boldsymbol{\kappa}$  — коэффициент теплопроводности,  $T$  — температура,  $D$  — параметр повреждаемости,  $\tau$  — время релаксации.

Для замыкания системы уравнений (1) используются определяющие соотношения, удовлетворяющие принципу термодинамической согласованности. Данные соотношения были получены с использованием процедуры Колмана-Нолла с учетом второго закона термодинамики и имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
 \Delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}(1 - D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \Delta D, \\
 \Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T, \\
 \Delta S_s &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T, \\
 \Delta Y &= \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\
 \Delta \frac{1}{\rho_f} &= \frac{1}{K_f} \Delta p - \alpha_f \Delta T, \\
 \Delta S_f &= -\alpha_f \Delta p + \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mathbf{C}$  — тензор упругих коэффициентов,  $\mathbf{b}$  — коэффициент Био,  $M$  — модуль Био,  $\alpha$  — коэффициент термического расширения,  $C_p$  — теплоемкость,  $Y$  — диссипативная сила, связанная с повреждаемостью,  $K_f$  — модуль сжатия флюида.

Выражение для внутренней энергии скелета имеет вид:

$$\Delta E_s = \Delta E_{s\varepsilon} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} + \Delta E_{sD},$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta E_{s\varepsilon} &= \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\Delta E_{sp} &= \left[ \frac{1}{N} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p, \\
\Delta E_{sT} &= \left[ -\alpha_\varphi \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T, \\
\Delta E_{sD} &= - \left[ \mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \Delta \mathbf{D}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Выражение для внутренней энергии флюида имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta E_f &= \left[ \frac{\phi}{K_f} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \phi \alpha_f \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \\
&\quad - \left[ \phi \alpha_f \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T. \tag{4}
\end{aligned}$$

Фильтрационно-емкостные свойства среды (пористость  $\phi$  и проницаемость  $\mathbf{k}$ ) и свойства флюида (вязкость  $\mu$ , плотность  $\rho_f$ ) будем считать зависящими от вектора термодинамических параметров системы  $\chi = \{\boldsymbol{\xi}, p, T, D\}$ . В представленной модели реализован учет эффектов увеличения проницаемости при разрушении и изменения вязкости от температуры.

Для моделирования зависимости проницаемости от параметра повреждаемости используется формула [2]:

$$\begin{aligned}
k(D) &= k_0 + k_1^i(D)I - k_2^i(D)I, \\
k_1^i &= \frac{k_{\max} - k_o^i}{1 + \exp[-\nu_1 (D^i - D_1)]}, \quad k_2^i = \frac{k_{\max} - k_f}{1 + \exp[-\nu_2 (D^i - D_2)]}, \tag{5}
\end{aligned}$$

где  $k_0$  — проницаемость неповрежденной среды.

Для описания зависимости вязкости от температуры используется корреляция Беггса-Робинсона [3]:

$$\mu = 10^X - 1, \quad X = 10^Z T^{-1.163}, \quad Z = 3.0324 - 0.02023 \gamma_0, \tag{6}$$

где  $\mu$  — вязкость нефти в сП (1 сП = 0.001 Па·с),  $\gamma_0$  — удельная плотность нефти в  ${}^0API$ , которая рассчитывается через относительную плотность нефти  $\rho_r = \rho_o / \rho_w$  ( $\rho_o$  и  $\rho_w$  — плотности нефти и воды в кг/м<sup>3</sup> соответственно) по формуле  $\gamma_0 = 141.5 / \rho_r - 131.5$ .

Последнее уравнение в системе (1) задает динамику изменения параметра повреждаемости. В качестве такого уравнения использовалась формула, основанная на явной зави-

симости параметра повреждаемости от деформации породы [2]:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_c, \\ \frac{D_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c} \tilde{\varepsilon} - D_{\text{off}} \frac{\varepsilon_c}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c}, & \text{если } \tilde{\varepsilon}_c \leq \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \\ D_{\text{lim}} - (D_{\text{lim}} - D_{\text{off}}) \frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}}, & \text{если } \tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\tilde{\varepsilon}$  определяется как

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},$$

где  $\varepsilon_i, i = \overline{1, 3}$  — главные деформации.

В этом случае формально имеем:

$$F(\varepsilon) = \frac{\tilde{F}(\varepsilon)}{\tau} = \frac{\partial D}{\partial t} = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_c, \\ \frac{D_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t}, & \text{если } \tilde{\varepsilon}_c \leq \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \\ (D_{\text{lim}} - D_{\text{off}}) \frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}^2} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t}, & \text{если } \tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\tau$  — время релаксации.

## 2.2 Граничные условия

Первичными неизвестными системы уравнений (1) являются перемещения  $\boldsymbol{\xi}$ , давление  $p$  и температура  $T$ . Задача рассматривается трехмерной области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ , на которой для каждого параметра определены граничные условия Дирихле ( $\partial\Omega_D$ ) или Неймана ( $\partial\Omega_N$ ),  $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ . Основные типы граничных условий для данной задачи:

условие Дирихле:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}|_{\partial\Omega_D} &= 0 & \text{— жестко закрепленная граница области,} \\ p|_{\partial\Omega_D} &= \tilde{p} & \text{— заданное давление на границе области,} \\ T|_{\partial\Omega_D} &= \tilde{T} & \text{— заданная температура на границе области;} \end{aligned}$$

условие Неймана:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= \tilde{\mathbf{t}} & \text{— заданный вектор напряжения на границе области,} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= \tilde{q} & \text{— заданный поток флюида через границу области,} \\ \mathbf{q}_T \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= \tilde{q}_T & \text{— заданный поток тепла через границу области.} \end{aligned}$$

Стоит отметить, что для каждой переменной области  $\partial\Omega_N$  и  $\partial\Omega_D$  — свои, то есть для

переменной  $\alpha : \partial\Omega = \partial\Omega_N^{(\alpha)} \cup \partial\Omega_D^{(\alpha)}$ . Однако для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что они совпадают.

### 3 Слабая постановка задачи

В дальнейшем будем аппроксимировать систему уравнений (1) с помощью метода конечных элементов. Для этого сначала рассмотрим слабую постановку задачи. Пусть  $V_\alpha$  — пространство достаточно гладких (вектор)функций в области  $\Omega$ , причем  $\boldsymbol{\xi} \in V_\xi, p \in V_p, T \in V_T$ . Введем пробную функцию  $\mathbf{v}$  в пространстве  $V_\alpha^0 \subset V$ , где  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{v} \in V_\alpha : \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = 0\}$ . В этом случае система уравнений в слабой постановке имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) \right] d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} \right) + \operatorname{div}(p\mathbf{w}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_T) \right] d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Симметричные тензоры деформаций и напряжений представим с помощью векторных обозначений Фойгта [4]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \right]^T, \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \left[ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz} \right]^T.$$

В этом случае тензор 4-го ранга упругих коэффициентов может быть записан в виде матрицы размерностью  $6 \times 6$ . Предполагая, что упругие свойства материала изотропны, тензор упругих коэффициентов можно записать через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  в виде:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим следующие интегралы:

$$I_1 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) d\Omega, \quad I_2 = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega,$$

$$I_3 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) d\Omega, \quad I_4 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(p\mathbf{w}) d\Omega, \quad I_5 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega.$$

Введем следующий дифференциальный оператор, который является матричным представлением оператора деформации:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T,$$

то есть  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\boldsymbol{\xi}$ , где  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y, \xi_z]^T$ .

Тогда в соответствии с формулой Грина данные интегралы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \rho_f \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \rho_f \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS, \\ I_2 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} dS, \\ I_3 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \rho_f e_f \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \rho_f e_f \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS, \\ I_4 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T p \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v p \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS, \\ I_5 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \mathbf{q}_T \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

С учетом данных выражений система уравнений (9) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{t}} dS = 0, \\ & \int_{\Omega} v \frac{\partial m_f}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \tilde{q} dS = 0, \\ & \int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T p \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{v})^T \mathbf{q} d\Omega + \\ & + \int_{\partial\Omega_N} v \frac{1}{\phi} E_f \tilde{q} dS + \int_{\partial\Omega_N} v p \tilde{q} dS + \int_{\partial\Omega_N} v q_T dS = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Предположим, что начальный тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^0$  постоянен для всего объема, а начальные деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  равны нулю. Тогда, используя определяющие соотношения для

тензора напряжений и массы флюида, из (10) получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T : \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T \mathbf{b} p d\Omega - \\
& \quad - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T T d\Omega = \int_{\partial\Omega_N} v^T \tilde{\mathbf{t}} dS, \\
& \int_{\Omega} v \mathbf{b} : \mathbf{L} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} v \alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \\
& \quad + \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad}(p) d\Omega = - \int_{\partial\Omega_N} v \tilde{q} d\Omega, \\
& \int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} \right] - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T p \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T \mathbf{q}_T d\Omega = \\
& \quad = - \int_{\partial\Omega_N} v \rho_f e_f \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} v p \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} v \tilde{q}_T dS.
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим первое подынтегральное выражение в последнем уравнении системы (11). Воспользовавшись выражениями для внутренней энергии скелета (3), найдем её производную по времени:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_s}{\partial t} &= \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\
& \quad + \left[ \frac{1}{N} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_{\varphi} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ \frac{1}{N} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_{\varphi} \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \Delta p + \\
& \quad + \left[ -\alpha_{\varphi} \left( p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left( T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \left[ -\alpha_{\varphi} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{C_{ps}}{T^0} \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \Delta T - \\
& \quad - \left[ \mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \frac{\partial D}{\partial t} - \left[ \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \right] \Delta D = \\
& \quad = \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - \Delta D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\
& \quad + \left[ \frac{1}{N} p - \alpha_{\varphi} T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ -\alpha_{\varphi} p + \frac{C_{ps}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t} - \left[ \mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} : \left( \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \frac{\partial D}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Аналогично для внутренней энергии флюида (4) получим:

$$\frac{\partial E_f}{\partial t} = \left[ \frac{\phi}{K_f} p - \phi \alpha_f T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ -\phi \alpha_f p + \frac{C_{pf}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Таким образом, в соответствии с введенными ранее обозначениями, а также предполагая, что  $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0$ ,  $D^0 = 0$  и  $\mathbf{Y}^0 = 0$ , производная суммарной внутренней энергии системы по

времени имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} = & \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\ & + \left[ \frac{1}{M} p - \alpha_m T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ -\alpha_m p + \frac{C_{ps} + C_{pf} T}{T^0} \right] \frac{\partial T}{\partial t} - \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] \frac{\partial D}{\partial t}. \end{aligned}$$

Поскольку производная параметра повреждаемости по времени по сути описывает развитие повреждаемости, задаваемое законом (8), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} = & \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\ & + \left[ \frac{1}{M} p - \alpha_m T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ -\alpha_m p + \frac{C_{ps} + C_{pf} T}{T^0} \right] \frac{\partial T}{\partial t} - \left[ \frac{1}{2} F(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

### 3.1 Пространственная аппроксимация системы уравнений

Рассмотрим пространственную аппроксимацию системы уравнений (11). Для этого введем конечномерные пространства  $V_\alpha^h \subset V_\alpha, V_\alpha^{0,h} \subset V_\alpha^0$ , причем  $V_\alpha^h = \text{span}(\phi_i^{(\alpha)})$ , где  $\phi_i^{(\alpha)}$  — базисные функции. Тогда для произвольной функции  $f$  имеем:

$$f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \phi_i^{(\alpha)} f_i, \quad f = \boldsymbol{\xi}, p, T.$$

Соответственно, аппроксимация системы (11) в матричном виде записывается как

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\xi\xi} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}_{\xi p} p + \mathbf{A}_{\xi T} T &= \mathbf{f}_\xi, \\ \mathbf{A}_{p\xi} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{A}_{pp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{A}_{pT} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{B}_{pp} p &= \mathbf{f}_p, \\ \mathbf{A}_{T\xi} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{A}_{Tp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{A}_{TT} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{B}_{T\xi} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_{Tp} p + \mathbf{B}_{TT} T &= \mathbf{f}_t, \end{aligned} \tag{12}$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\xi\xi} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\boldsymbol{\phi}_\xi)^T \mathbf{C}(1 - D) (\mathbf{L}\boldsymbol{\phi}_\xi) d\Omega, \quad \mathbf{A}_{\xi p} = \mathbf{A}_{p\xi}^T = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\boldsymbol{\phi}_\xi)^T \mathbf{b}\boldsymbol{\phi}_p d\Omega, \\ \mathbf{A}_{\xi T} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\boldsymbol{\phi}_\xi)^T \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\alpha}_T \boldsymbol{\phi}_T d\Omega, \quad \mathbf{B}_{pp} = \int_{\Omega} (\text{grad } \boldsymbol{\phi}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu} (\text{grad } \boldsymbol{\phi}_p) d\Omega, \\ \mathbf{A}_{pp} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_p^T \frac{1}{M} \boldsymbol{\phi}_p d\Omega, \quad \mathbf{A}_{pT} = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_p^T \alpha_m \boldsymbol{\phi}_T d\Omega, \\ \mathbf{A}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_T^T (\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T) (\mathbf{L}\boldsymbol{\phi}_\xi) d\Omega, \\ \mathbf{A}_{Tp} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_T^T \left( \frac{1}{M} p - \alpha_m T \right) \boldsymbol{\phi}_p d\Omega, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{TT} &= \int_{\Omega} \phi_T^T \left[ -\alpha_m p + (C_{ps} + C_{pf}) \frac{T}{T^0} \right] \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{B}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \left[ \frac{1}{2} F(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] (\mathbf{L} \phi_{\xi}) d\Omega, \\
\mathbf{B}_{Tp} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \left\{ E_f^0 + \left[ \frac{1}{K_f} p - \alpha_f T \right] \Delta p - \left[ \alpha_{fp} - \frac{C_{pf}}{\phi} \right] \Delta T \right\} \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega, \\
\mathbf{B}_{TT} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \boldsymbol{\kappa} \text{grad } \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{f}_{\xi} &= \int_{\partial\Omega_N} \phi_{\xi}^T \tilde{\mathbf{t}} dS, \quad \mathbf{f}_p = - \int_{\partial\Omega_N} \phi_p^T \tilde{q} d\Omega, \\
\mathbf{f}_T &= - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T \rho_f e_f \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T p \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T \tilde{q} dS.
\end{aligned}$$

В матричном виде систему (12) можно записать как

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t \\ \partial p / \partial t \\ \partial T / \partial t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\xi\xi} & -\mathbf{A}_{\xi p} & \mathbf{A}_{\xi T} \\ 0 & \mathbf{B}_{pp} & 0 \\ \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\xi} \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}.$$

Первая матрица системы, которую в результате необходимо будет обращать для решения системы на временном слое, несимметрична. Для её симметризации продифференцируем первое уравнение по времени. Получим:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t \\ \partial p / \partial t \\ \partial T / \partial t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{pp} & 0 \\ \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial \mathbf{f}_{\xi} / \partial t \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Вычисление интегралов в уравнении (13) производится с использованием квадратурных формул Гаусса второго порядка [5].

Для дискретизации уравнения (15) по пространству использовалась тетраэдральная сетка с квадратичными базисными функциями для перемещений и линейными для давления и температуры (элементы Тейлора-Худа [6], рисунок 2). Линейные базисные функции вычисляются по формуле  $\phi_{p,T}^{(i)} = N_i$ , где  $N_i$  —  $i$ -я барицентрическая координата рассматриваемой точки. Квадратичные базисные функции вычисляются как  $\phi_{\xi}(i) = N_i(2N_i^2 - 1)$  для неизвестных, расположенных в узлах тетраэдра, и  $\phi_{\xi}^{(ij)} = 4N_i N_j$  для неизвестных, находящихся в центре ребра, расположенного между узлами  $i$  и  $j$ . Графики данных функций в одномерном случае представлены на рисунке 1.

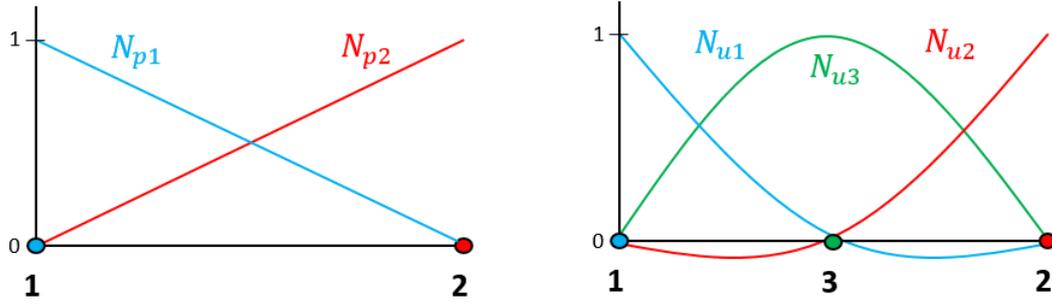


Рис. 1. Линейные (слева) и квадратичные (справа) базисные функции

Использование элементов Тейлора-Худа обеспечивает выполнение  $\inf - \sup$  условий (условия Ладыженской-Бабушки-Бреззи, [7]), которые необходимы для устойчивости решения уравнений пороупругости. Рассмотрим подробнее данные условия. Пусть  $V$  и  $Q$  — гильбертовы пространства,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  и  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  — билинейные формы, а  $f \in V^*$ ,  $g \in Q^*$ , где  $V^*$  и  $Q^*$  — пространства, сопряженные пространствам  $V$  и  $Q$ . Рассмотрим задачу нахождения седловой точки: для пар  $a$  и  $b$  найти  $u \in V$  и  $p \in Q$ , такие, что для любых  $v \in V$  и  $q \in Q$ :

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle, \\ b(u, q) &= \langle g, q \rangle. \end{aligned}$$

Предположим, что существует такое  $\alpha$ , что  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$  для любого  $v$ , такого что  $b(v, q) = 0$  для любого  $q \in Q$ . В этом случае, если  $b$  удовлетворяет  $\inf - \sup$  условию:

$$\sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q,$$

то для любого  $q$  существует единственное решение задачи седловой точки, непрерывно зависящее от  $f$  и  $g$ .

### 3.2 Дискретизация по времени и решение нелинейной системы

Для аппроксимации системы уравнений по времени будем использовать полностью неявную схему относительно перемещений  $\xi$ , давления  $p$  и температуры  $T$ . Параметр повреждаемости  $D$  будет учитываться явным образом. Пусть  $f = f(t)$  — значение какой-либо величины в момент времени  $t$ , тогда  $\hat{f} = f(t + \Delta t)$  — её значение в момент времени  $t + \Delta t$ .

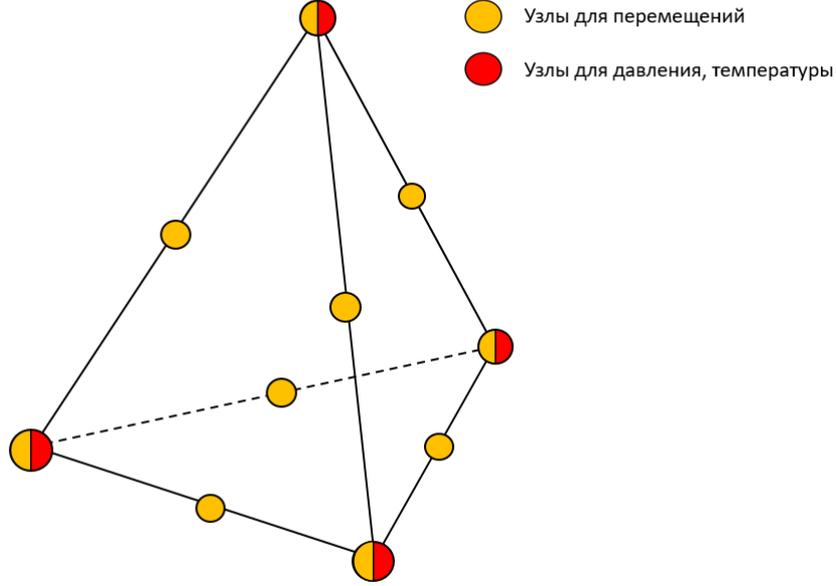


Рис. 2. Элемент Тейлора-Худа.

Соответственно, система уравнений (14) после аппроксимации по времени примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} + \Delta t \mathbf{B}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} + \Delta t \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} + \Delta t \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} + \Delta t \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{p} \\ \hat{T} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ p \\ T \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -\Delta \mathbf{f}_{\xi} / \Delta t \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

В связи с тем, что коэффициенты матрицы  $\mathbf{B}_{Tp}$  зависят от давления и температуры, то система уравнений (15) является нелинейной. Для её решения используется метод Ньютона. Суть данного метода заключается в итерационном поиске решения нелинейной системы уравнений  $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = 0$  по формуле:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^k) \mathbf{R}(\mathbf{X}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbf{R}$  — рассматриваемая система нелинейных уравнений с вектором решения  $\mathbf{X}$  и якобианом  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{R}(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}$ . Критерием сходимости итерационного процесса является одновременное выполнение условий:

$$\|\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k\| < \varepsilon_1, \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}^k) < \varepsilon_2,$$

где  $0 \leq \varepsilon_{1,2} \leq 1$  — параметры, определяющие точность решения,  $\|\cdot\|$  — подходящая норма.

Вычислим якобиан рассматриваемой системы уравнений. Для этого запишем систе-

му (15) в виде

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{A}_{\xi\xi}\Delta\xi + \mathbf{A}_{\xi p}\Delta p - \mathbf{A}_{\xi T}\Delta T + \Delta\mathbf{f}_\xi = 0, \\
& \mathbf{A}_{\xi p}^T\Delta\xi + \mathbf{A}_{pp}\Delta p + \mathbf{A}_{pT}\Delta T + \Delta t\mathbf{B}_{pp}\hat{p} - \Delta t\mathbf{f}_p = 0, \\
& \mathbf{A}_{T\xi}\Delta\xi + \mathbf{A}_{Tp}\Delta p + \mathbf{A}_{TT}\Delta T + \Delta t\mathbf{B}_{T\xi}\hat{\xi} + \Delta t\mathbf{B}_{Tp}\hat{p} + \Delta t\mathbf{B}_{TT}\hat{T} - \Delta t\mathbf{f}_T = 0.
\end{aligned}$$

С учетом вида матриц (13) якобиан данной системы имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} + \Delta t\mathbf{B}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{J}_{T\xi} & \mathbf{J}_{Tp} & \mathbf{J}_{TT} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{T\xi} &= \mathbf{A}_{T\xi} + \Delta t\mathbf{B}_{T\xi} + (\partial\mathbf{A}_{T\xi}/\partial\xi)\Delta\xi + \Delta t\mathbf{B}_{T\xi}\hat{\xi}, \\
\mathbf{J}_{Tp} &= \mathbf{A}_{Tp} + \Delta t\mathbf{B}_{Tp} + (\partial\mathbf{A}_{Tp}/\partial p)\Delta p + (\partial\mathbf{A}_{TT}/\partial p)\Delta T + \Delta t(\partial\mathbf{B}_{Tp}/\partial p)\hat{p}, \\
\mathbf{J}_{TT} &= \mathbf{A}_{TT} + \Delta t\mathbf{B}_{TT} + (\partial\mathbf{A}_{Tp}/\partial T)\Delta p + (\partial\mathbf{A}_{TT}/\partial T)\Delta T + \Delta t(\partial\mathbf{B}_{Tp}/\partial T)\hat{p}, \\
\frac{\partial\mathbf{A}_{T\xi}}{\partial\xi} &= \int_{\Omega} \phi_T^T [\mathbf{C}(1-D) : \mathbf{I}] (\mathbf{L}\phi_\xi) d\Omega, \quad \frac{\partial\mathbf{A}_{Tp}}{\partial p} = \int_{\Omega} \phi_T^T \frac{1}{M} \phi_p d\Omega, \\
\frac{\partial\mathbf{A}_{Tp}}{\partial T} &= - \int_{\Omega} \phi_T^T \alpha_m \phi_p d\Omega, \quad \frac{\partial\mathbf{A}_{TT}}{\partial p} = - \int_{\Omega} \phi_T^T \alpha_m \phi_T d\Omega, \quad \frac{\partial\mathbf{A}_{TT}}{\partial T} = \int_{\Omega} \phi_T^T \frac{C_{ps} + C_{pf}}{T^0} \phi_T d\Omega, \\
\frac{\partial\mathbf{B}_{T\xi}}{\partial\xi} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial\xi} \mathbf{C} : \varepsilon + F(\varepsilon) \mathbf{C} : (\mathbf{L}\mathbf{I}) \right) \right] (\mathbf{L}\phi_\xi) d\Omega, \\
\frac{\partial\mathbf{B}_{Tp}}{\partial p} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_\xi)^T \left[ \frac{1}{K_f} (2p - p^0) - \alpha_f (2T - T^0) \right] \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega, \\
\frac{\partial\mathbf{B}_{Tp}}{\partial T} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_\xi)^T \left[ \frac{C_{pf}}{\phi} - \alpha_f (2p - p^0) \right] \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega.
\end{aligned}$$

### 3.3 Решение системы линейных алгебраических уравнений

Решение системы линейных уравнений на каждой ньютоновской итерации производится с использованием стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) [8]. В качестве предобуславливателя использовалось неполное LU разложение с одноуровневым заполнением (ILU(1)).

Для обеспечения устойчивости конечномерной задачи применялся ряд подходов, в соответствии с которыми преобразовывалась матрица системы (15).

В первую очередь, для матриц масс  $\mathbf{A}_{pp}$ ,  $\mathbf{A}_{pT}$ ,  $\mathbf{A}_{Tp}$  и  $\mathbf{A}_{TT}$  использовался метод диагонализации матриц масс (mass lumping, [9]). Диагонализированные матрицы при этом будут

иметь вид:

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}_{pp}\right]_{i,i} = \sum_j \mathbf{A}_{pp_{i,j}}, \quad \left[\tilde{\mathbf{A}}_{pT}\right]_{i,i} = \sum_j \mathbf{A}_{pT_{i,j}}, \quad \left[\tilde{\mathbf{A}}_{Tp}\right]_{i,i} = \sum_j \mathbf{A}_{Tp_{i,j}}, \quad \left[\tilde{\mathbf{A}}_{TT}\right]_{i,i} = \sum_j \mathbf{A}_{TT_{i,j}}.$$

Помимо этого производилось обезразмеривание системы путем введения для каждой переменной  $(\xi, p, T)$  своего обезразмеривающего коэффициента. Таким образом, уравнение вида:

$$\mathbf{A}_\xi \xi + \mathbf{A}_p p + \mathbf{A}_T T = f$$

преобразовывалось к виду

$$\alpha_\xi \mathbf{A}_\xi (\xi/\alpha_\xi) + \alpha_p \mathbf{A}_p (p/\alpha_p) + \alpha_T \mathbf{A}_T (T/\alpha_T) = f,$$

где  $\alpha_\xi, \alpha_p, \alpha_T$  — соответствующие размерные параметры. Далее каждая строка полученной таким образом матрицы системы и правой части нормировались на диагональный элемент. Таким образом, диагональ матрицы состоит из единичных коэффициентов.

Для уменьшения ширины ленты разреженной матрицы системы использовался алгоритм Катхилла-Макки [10].

## 4 Программный комплекс

В данном разделе приведено описание программного комплекса для расчета неизоотермического течения в пороупругой среде с учетом разрушения породы в рамках разработанной математической модели и численного алгоритма. Программный комплекс реализован на языке программирования C++ и состоит из трех основных компонентов: препроцессор, вычислительное ядро и постпроцессор.

**Препроцессор.** Блок препроцессинга отвечает за построение расчетной сетки, зачитывание и предварительную обработку параметров модели, а также за задание начальных и граничных условий.

Модуль построения расчетной сетки не интегрирован в основной код и является независимой частью программы. Данный модуль написан на языке программирования Matlab и основан на использовании встроенной функции триангуляции по алгоритму Делоне [11]. Генератор расчетной сетки принимает на вход данные о форме и размере расчетной области и шаге расчетной сетки (может быть переменным), а на выходе выдает набор текстовых файлов, содержащих информацию о координатах расчетных узлов, а также список узлов, формирующих каждую расчетную ячейку. Пример расчетной сетки приведен на рисунке 3.

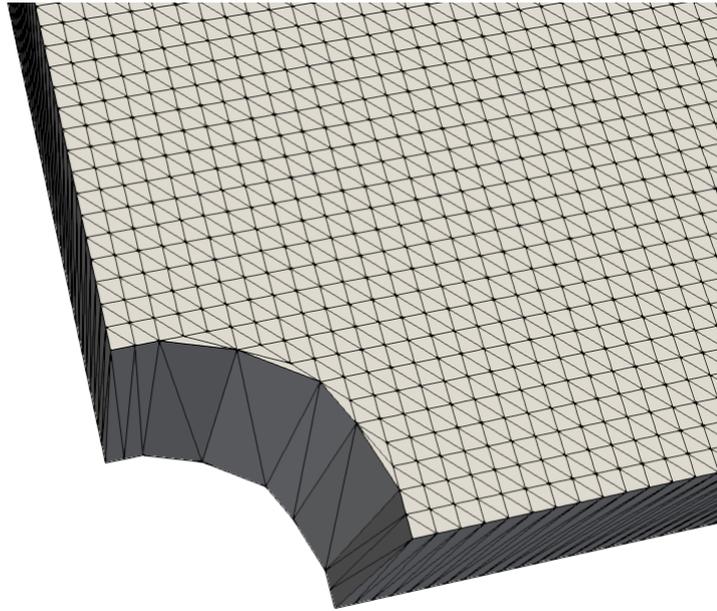


Рис. 3. Пример расчетной сетки.

Основные параметры модели хранятся в трех текстовых файлах. Первый файл содержит информацию об узлах с граничным условием первого рода. Формат записи данных: номер соответствующей переменной (компонента вектора перемещений, давление или температура) в векторе неизвестных и её значение. Второй файл содержит информацию о гранях, на которых задано граничное условие второго рода. Каждая строка данного файла описывает грань и содержит данные о номерах узлов, формирующих грань, векторе напряжений, действующем на неё, потоке и температуре флюида, протекающего через эту грань. В третьем файле хранится информация об основных параметрах модели, таких как геомеханические свойства породы (модуль Юнга, коэффициент Пуассона), коэффициент Био, параметры сжимаемости (модуль Био для скелета и коэффициент объемного сжатия флюида), плотности скелета и флюида, фильтрационно-емкостные свойства пласта (пористость, проницаемость), теплофизические свойства (теплоемкости, коэффициенты объемного термического сжатия) и начальные условия.

**Вычислительное ядро.** Вычислительное ядро расчетного модуля состоит из следующих блоков: вычисление якобиана и правой части, итерационное решение системы нелинейных уравнений и линейный солвер.

В разработанном программном комплексе заполнение матрицы Якоби производится поблочно путем вычисления соответствующих объемных интегралов для каждого элемента расчетной сетки. Интегрирование производится по квадратурным формулам Гаусса второго порядка для тетраэдральных элементов. Для хранения и выполнения операций над тензорами используется библиотека **Eigen** [12]. В связи с тем, что якобиан является разреженной матрицей, то на время его сборки значения ненулевых элементов матрицы

хранятся в массиве триплетов, где каждый триплет содержит информацию о значении элемента и его положении в матрице. Правая часть системы вычисляется с учетом заданных граничных условий.

Как уже отмечалось ранее, для решения системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона. Условием сходимости итерационного алгоритма является одновременное выполнение следующих условий:

$$\max |\Delta \mathbf{x}| < 0.001, \quad \max |\mathbf{R}| < 0.001,$$

где  $\Delta \mathbf{x}$  – величина приращения неизвестных на текущей итерации,  $\mathbf{R}$  – значение нелинейной невязки. В случае если количество итераций на одном временном шаге превысило 5, то временной шаг уменьшается в 2 раза и итерационный алгоритм повторяется с начала. В случае успешной сходимости алгоритма осуществляется расчет следующего временного периода с постепенным увеличением шага по времени.

На каждой ньютоновской итерации осуществляется решение системы линейных уравнений. После предварительной подготовки матрицы системы по алгоритмам, описанным в предыдущей главе, запускается линейный солвер. В качестве солвера используется BicGStab, реализованный в библиотеке HYPRE [13] с предобуславливателем ILU(1) из этой же библиотеки. Относительная погрешность вычислений линейного солвера установлена равной  $10^{-5}$ .

После расчета временного шага производится пересчет некоторых параметров модели, явно зависящих от текущего состояния среды. В первую очередь производится расчет параметра повреждаемости по формуле (7). Для этого в центре рассматриваемого элемента по известным перемещениям производится расчет тензора деформаций, после чего вычисляются главные деформации, являющиеся собственными значениями тензора деформаций. Для этого используется модуль, входящий в состав библиотеки Eigen.

После расчета параметра повреждаемости, для каждого элемента пересчитываются тензор упругих коэффициентов и проницаемость по формуле (5). Кроме того, при изменении средней температуры в элементе пересчитывается вязкость флюида по формуле (6).

**Постпроцессор.** В постпроцессоре производится выгрузка основных результатов (давление, температура, деформации, напряжения, параметр повреждаемости, компоненты энергии и так далее) на каждый момент времени для последующей визуализации и анализа. Для визуализации используется программа Paraview [14], которая принимает на вход .vtu файл с неструктурированной сеткой и заданными на неё распределениями свойств. Для генерации данного файла используется библиотека VTK [15].

## 5 Результаты моделирования

В данном разделе приведены результаты моделирования с использованием программного комплекса, описанного в предыдущей главе. Валидация алгоритма проводилась на ряде тестов (задача Терцаги, тест Манделя и тест на одномерное неизотермическое расширение), для которых известно аналитическое решение. Кроме того, был проведен ряд расчетов, моделирующих воздействие на пласт добывающих и нагнетательных скважин при различных условиях с целью оценки влияния геомеханических эффектов.

### 5.1 Термопороупругость

**Задача Терцаги.** В первом тесте моделировалась консолидация пороупругого материала под воздействием внешней нагрузки (рисунок 4). Расчетная область имеет форму параллелепипеда, размер области в латеральном направлении равны  $L_a = 1$  м, в вертикальном —  $L_z = 1$  м. Нижняя грань области зафиксирована, а на боковых гранях равны нулю горизонтальные перемещения. На боковых и нижней грани задано условие непротекания, к верхней грани приложено постоянное вертикальное напряжение 1 кПа. Поровое давление на верхней грани постоянно. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0, x = L_a : \quad u_x = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ y = 0, y = L_a : \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ z = 0 : \quad u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ z = L_z : \quad \sigma_z = \text{const}, \quad p = 0. \end{aligned}$$

Расчетная сетка состоит из 200 тетраэдров, причем в латеральном направлении — 2 элемента, а в вертикальном — 100. Общее количество узлов — 1809. Параметры модели представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения входных параметров для задачи Терцаги

Параметр	Значение
Модуль Юнга, $E$	14 ГПа
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.2
Модуль Био, $1/N$	13 ГПа
Коэффициент Био, $b$	0.79
Проницаемость, $k$	$1,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$
Вязкость, $\mu$	1 мПа · с

В работе Терцаги [17] приведено аналитическое решение рассматриваемой задачи. Ре-

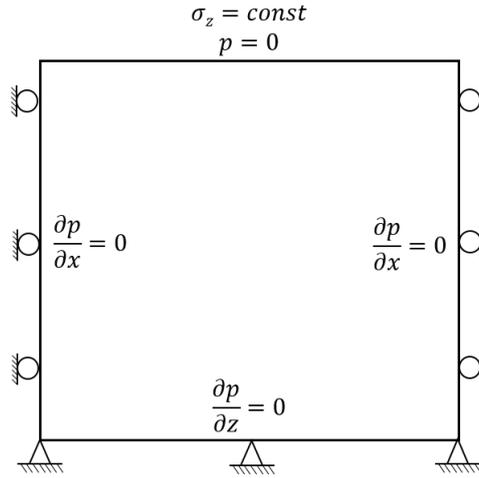


Рис. 4. Схема расчетной области для задачи Терцаги.

шение для порового давления и перемещений может быть записано в виде [18]:

$$p(z, t) = p_0 - p_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[ \operatorname{erfc} \frac{(2m+1)L_z - (z - L_z)}{\sqrt{4ct}} + \operatorname{erfc} \frac{(2m+1)L_z + (z - L_z)}{\sqrt{4ct}} \right],$$

$$u_z(z, t) = u_0 + c_m \gamma \sigma_0 \left[ (L_z - z) - 8 \frac{L_z}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \exp \left( -\frac{(2m+1)^2 \pi^2 ct}{4L_z^2} \right) \cos \left( \frac{(2m+1)\pi z}{2L_z} \right) \right],$$

где

$$\gamma = \frac{B(z + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)}, \quad c_m \gamma = \frac{\nu_u - \nu}{2G(1 - \nu)(1 - \nu_u)}, \quad c = \frac{2kG(1 - \nu)(\nu_u - \nu)}{\mu b^2(1 - 2\nu)^2(1 - \nu_u)},$$

$G$  — модуль сдвига,  $\nu_u$  — недренированный коэффициент Пуассона,  $B = bm/(K + b^2N)$  — коэффициент Скемптона.

На рисунках 5 и 6 приведено сравнение зависимости порового давления и вертикальных перемещений соответственно от высоты для рассчитанного и аналитического решения в интервале времен от 5 до 100 с. В результате получено хорошее совпадение с аналитическим решением.

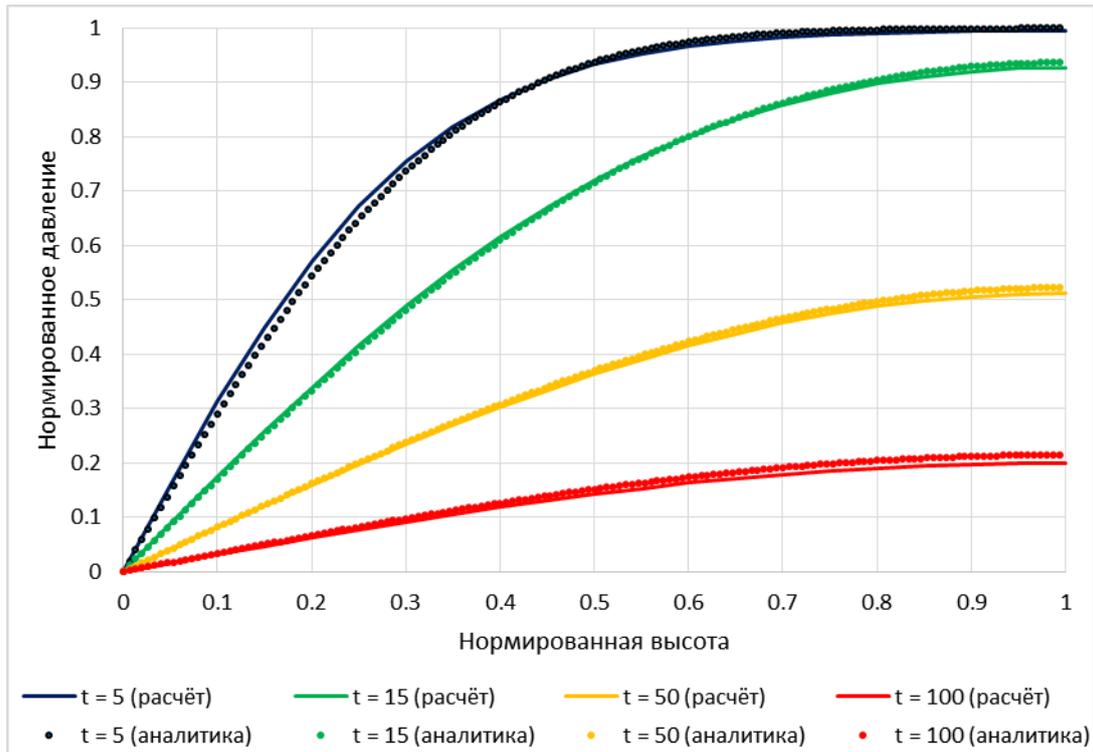


Рис. 5. Сравнение рассчитанного нормированного давления с аналитическим решением для моментов времени 5-100 с.

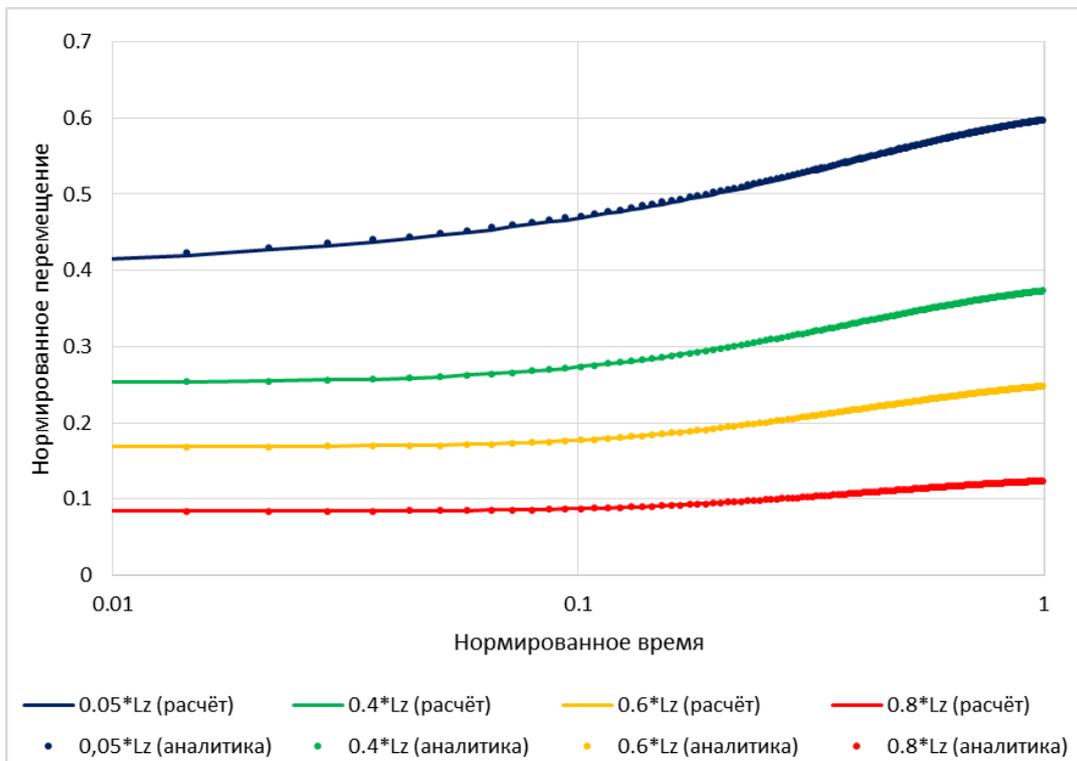


Рис. 6. Сравнение динамики изменения рассчитанного нормированного перемещения с аналитическим решением.

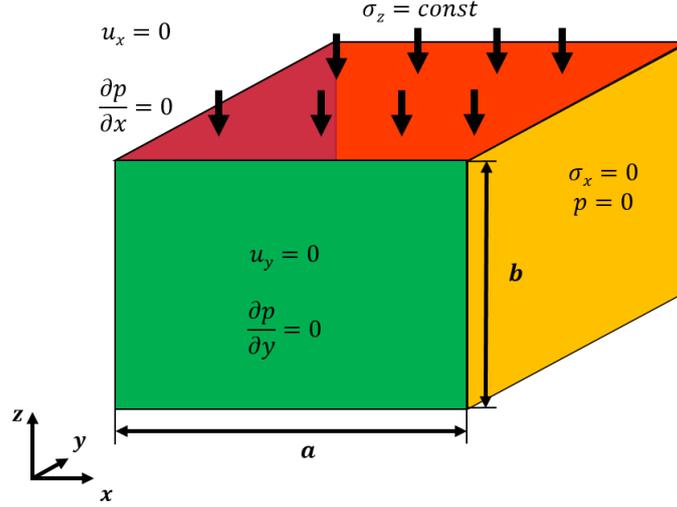


Рис. 7. Схема расчетной области для теста Манделя.

**Тест Манделя.** В работе Манделя [19] рассматривался случай трехмерной консолидации пороупругого материала, при котором наблюдается немонотонная динамика изменения порового давления с течением времени (эффект Манделя-Крайера). В оригинальной постановке рассматривается образец пороупругого материала длиной  $2a$  и высотой  $2b$ , насыщенного флюидом (рисунок 7). Образец закреплен между двумя жесткими вертикальными непроницаемыми пластинами, к верхней грани приложена распределенная нагрузка с силой  $2F$ .

В силу симметрии задачи для тестовых расчетов рассматривалась  $1/8$  часть образца. Таким образом, граничные условия в данной постановке имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & u_x = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 x = a : \quad & \sigma_x = 0, \quad p = 0, \\
 y = 0, y = a : \quad & u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 z = 0 : \quad & u_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\
 z = b : \quad & \int_0^a \sigma_z(x, b, t) dx = -\sigma_0 a, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

Размеры образца составляли  $1 \times 1 \times 1$  м. Расчетная сетка является равномерной в каждом направлении. Общее количество элементов — 48000, узлов — 78182. Вертикальное напряжение, действующее на верхнюю грань, равно 1 кПа. Начальное давление и перемещения равны 0. Значения параметров среды и флюида приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения входных параметров для теста Мандела

Параметр	Значение
Модуль Юнга, $E$	14 ГПа
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.2
Модуль Био, $b$	13 ГПа
Коэффициент Био, $1/N$	0.79
Проницаемость, $k$	$1,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$
Вязкость, $\mu$	1 мПа · с

Аналитическое решение для данной задачи представлено в [20] и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \frac{2}{3} \sigma_0 B (1 + \nu_u) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \left( \cos \frac{\lambda_m x}{a} - \cos \lambda_m \right) \exp \left( -\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right), \\
 u_x(x, t) &= \left[ \frac{\sigma_0 \nu}{2G} - \frac{\sigma_0 \nu_u}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \exp \left( -\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right) \right] x + \\
 &\quad + \frac{\sigma_0 a}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \sin \frac{\lambda_m x}{a} \exp \left( -\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right), \\
 u_z(z, t) &= \left[ -\frac{\sigma_0 (1 - \nu)}{2G} + \frac{\sigma_0 (1 - \nu_u)}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \exp \left( -\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right) \right] z,
 \end{aligned}$$

где  $\lambda_m$  — решение уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_m = \frac{1 - \nu}{\nu_u - \nu} \lambda_m.$$

Сравнение рассчитанных распределений порового давления вдоль оси  $x$  и проекции перемещения вдоль осей  $x$  и  $z$  в сравнении с аналитическим решением для моментов времени 0.00625 — 0.325 с представлены на рисунке 8.

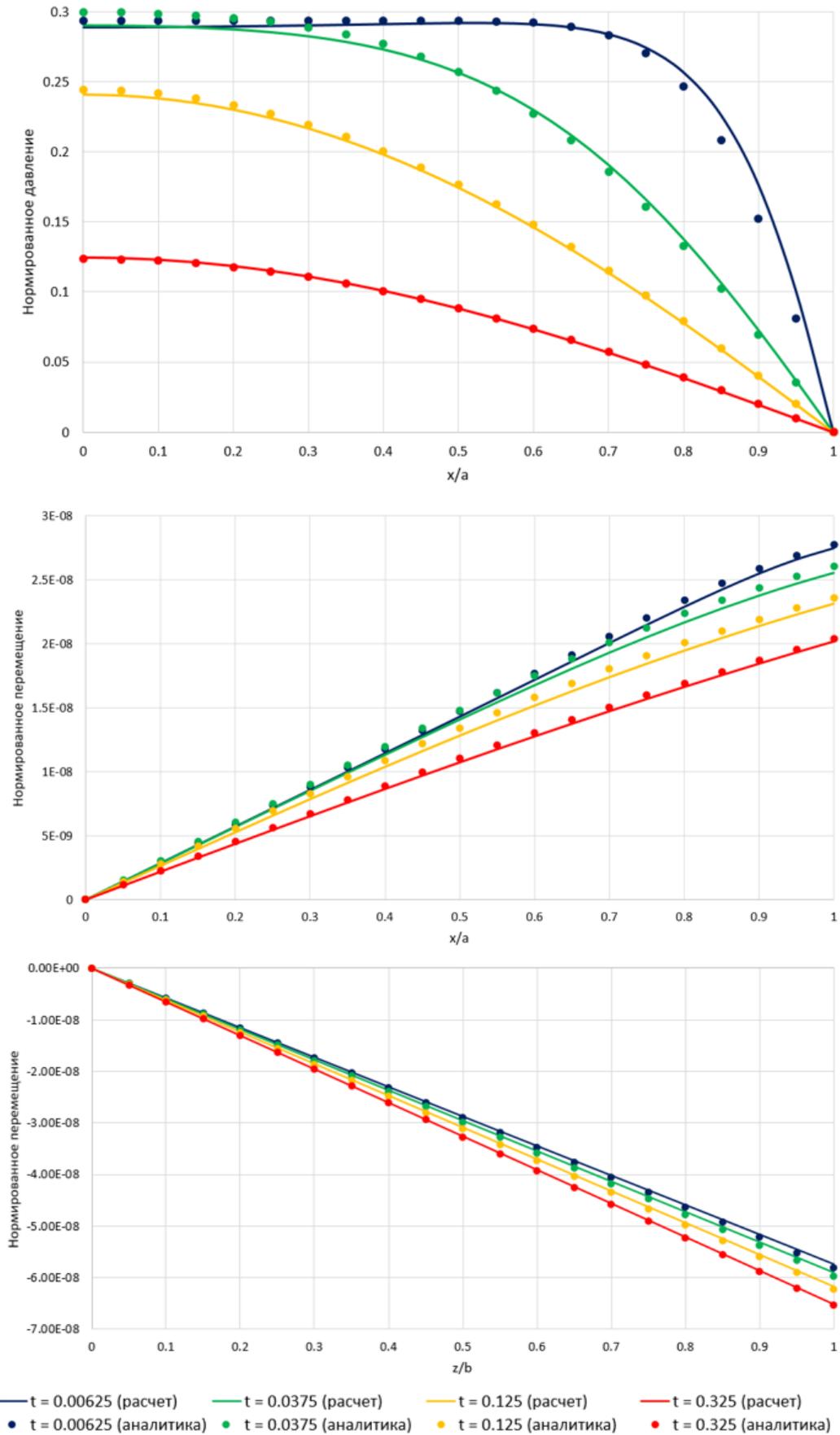


Рис. 8. Распределение нормированного порового давления вдоль оси  $x$  (сверху), проекция нормированного перемещения по  $x$  (по центру) и  $z$  (снизу) компоненте.

**Одномерное неизотермическое расширение.** В данном тесте рассматривается одномерная задача термической деформации образца (рисунок 9). Размеры образца:  $a \times a \times h$ . Основание образца закреплено, боковые границы допускают только вертикальные перемещения, верхняя граница свободна. Предполагается, что образец термически изолирован и в начальный момент времени имеет температуру  $T_0$ . Верхняя граница имеет постоянную температуру, равную  $T_0 + \theta_0$ . С учетом данной постановки начальные и граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 z = 0 : \quad & u_x = 0, \quad u_y = 0, u_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\
 x = 0, x = a : \quad & u_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\
 y = 0, y = a : \quad & u_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\
 z = h : \quad & \sigma_z = 0, \quad T = T_0 + \theta_0, \\
 & u(t = 0) = 0, \quad T(t = 0) = T_0.
 \end{aligned}$$

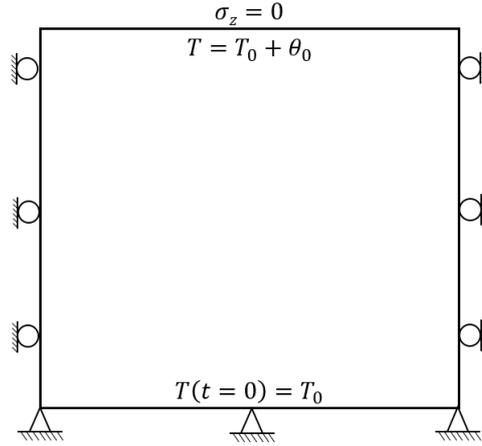


Рис. 9. Модель одномерного изотермического расширения.

Задача имеет аналитическое решение в образах преобразования Лапласа по времени ([21]):

$$\tilde{\theta}(z, s) = \left( \frac{\theta_0}{s} \right) \frac{\cosh(\mu z)}{\cosh(\mu h)}, \quad \tilde{w} = \left( \frac{\theta_0}{\mu s} \right) \left( \frac{\beta}{M} \right) \frac{\sinh(\mu z)}{\cosh(\mu h)},$$

где  $\mu = \sqrt{\rho c_v (sA/kM)}$ .

Здесь  $\tilde{\theta}$  и  $\tilde{w}$  — изменение температуры и вертикальные перемещения в образах преобразования Лапласа,  $s$  — переменная Лапласа,  $\beta$  — модуль температурной деформации,  $M$  и  $A$  — компрессионные модули деформации в изотермическом и адабатическом состоянии

соответственно:

$$M = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad A = M + \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_v}.$$

Для получения точного решения в основных переменных был реализован модуль вычисления обратного преобразования Лапласа, основанный на использовании численного алгоритма Стефеста ([22]).

Сравнение численного и аналитического решений проводилось для моментов времени от 10 до 200 ч. Параметры тестовых расчетов приведены в таблице 3. Результаты представлены на рисунках 10, 11.

Таблица 3. Значения параметров для теста на одномерное изотермическое расширение

Параметр	Значение
Размер сетки	1 × 1 × 100 ячеек
Размер модели, $a \times a \times h$	1 × 1 × 1 м
Модуль Юнга, $E$	14 ГПа
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.2
Коэффициент линейного расширения, $\alpha$	10 <sup>-5</sup> 1/К
Теплоемкость, $C_{ps}$	2 МДж/(м <sup>3</sup> · К)
Теплопроводность, $\kappa$	2 Вт/(м · К)
Начальная температура, $T_0$	373 К
Температура на верхней границе, $T_0 + \theta_0$	573 К

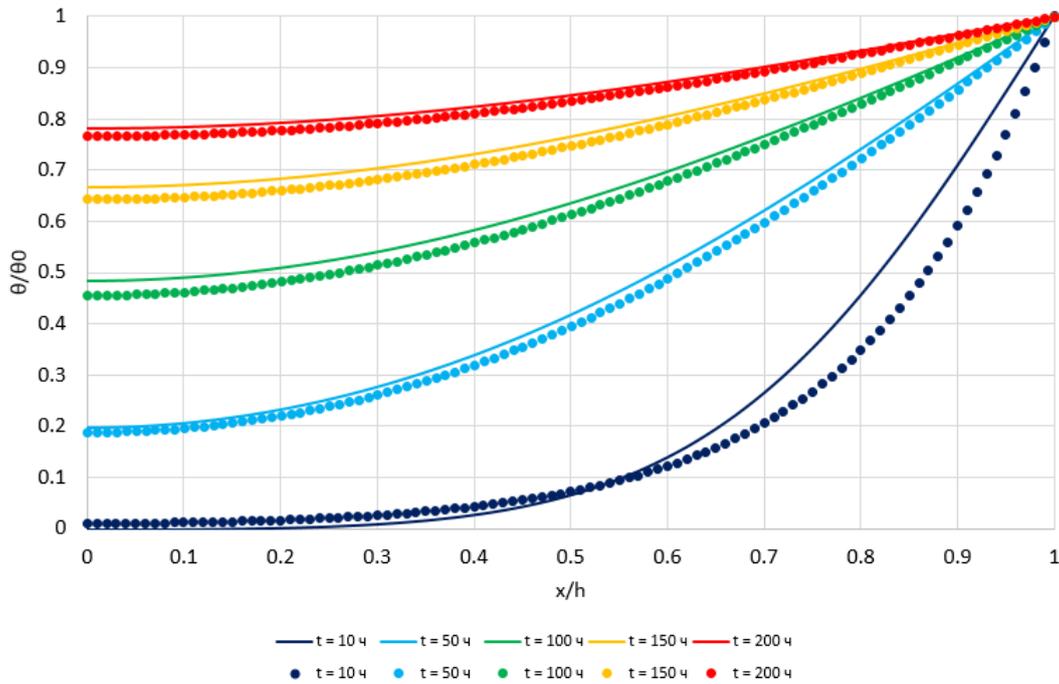


Рис. 10. Распределение температуры по образцу.

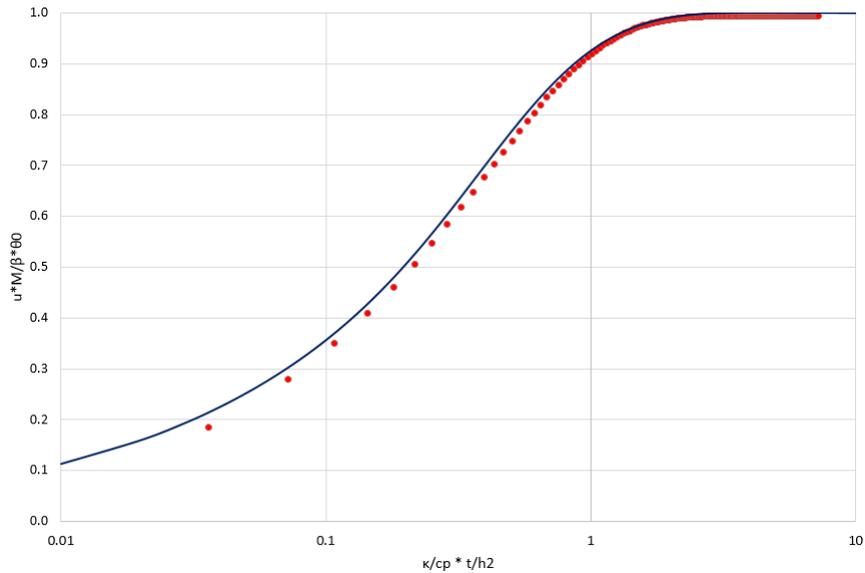


Рис. 11. Вертикальное перемещение на верхней границе образца.

Таблица 4. Значения входных параметров для модели термического воздействия на пласт

Параметр	Значение
Толщина пласта, $h$	1 м
Начальное пластовое давление, $p_0$	200 бар
Начальная температура пласта, $T_0$	100 °C
Начальное значение напряжения по направлению $x$ , $\sigma_{xx}^0$	300 бар
Начальное значение напряжения по направлению $y$ , $\sigma_{yy}^0$	330 бар
Модуль Юнга, $E$	20 ГПа
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.3
Модуль Био, $N$	10 ГПа
Модуль объемного сжатия флюида, $K_f$	3.3 ГПа
Коэффициент Био, $b$	0.79
Проницаемость, $k$	$1 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$
Пористость, $\varphi$	0.1
Вязкость, $\mu$	1 мПа · с
Плотность скелета, $\rho_s$	2100 кг/м <sup>3</sup>
Плотность флюида, $\rho_f$	1000 кг/м <sup>3</sup>
Коэффициент объемного температурного расширения скелета, $\alpha_s$	$1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$
Коэффициент объемного температурного расширения флюида, $\alpha_f$	$1 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$
Удельная теплоемкость скелета, $c_{ps}$	1000 Дж/(кг · К)
Удельная теплоемкость флюида, $c_{pf}$	4200 Дж/(кг · К)
Эффективная теплопроводность, $\kappa$	2 Вт / (м · К)

## 5.2 Моделирование развития повреждаемости вблизи нагнетательной скважины

Моделирование развития повреждаемости в малой окрестности скважины в начальные моменты времени проводилось на модели размером  $1 \times 1 \times 1$  м. Расчетная сетка изображена на рисунке 3. Общее количество элементов составляет 59508, общее количество узлов — 120183. В углу модели расположена нагнетательная скважина цилиндрической формы радиусом 0,1 м, работающая с постоянной приемистостью  $0,5 \text{ м}^3/\text{сут}$ . Параметры модели приведены в таблице 4. Для моделирования процесса разрушения использовалась формула (7) с параметрами из [2] ( $D_{\text{lim}} = 1$ ,  $D_{\text{off}} = 1$ ,  $\varepsilon_{\text{off}} = 0.015$ ,  $\varepsilon_c = 0.0002$ ).

Поля динамических параметров на моменты 2 часа, 1 и 10 суток представлены на рисунках 12, 13.

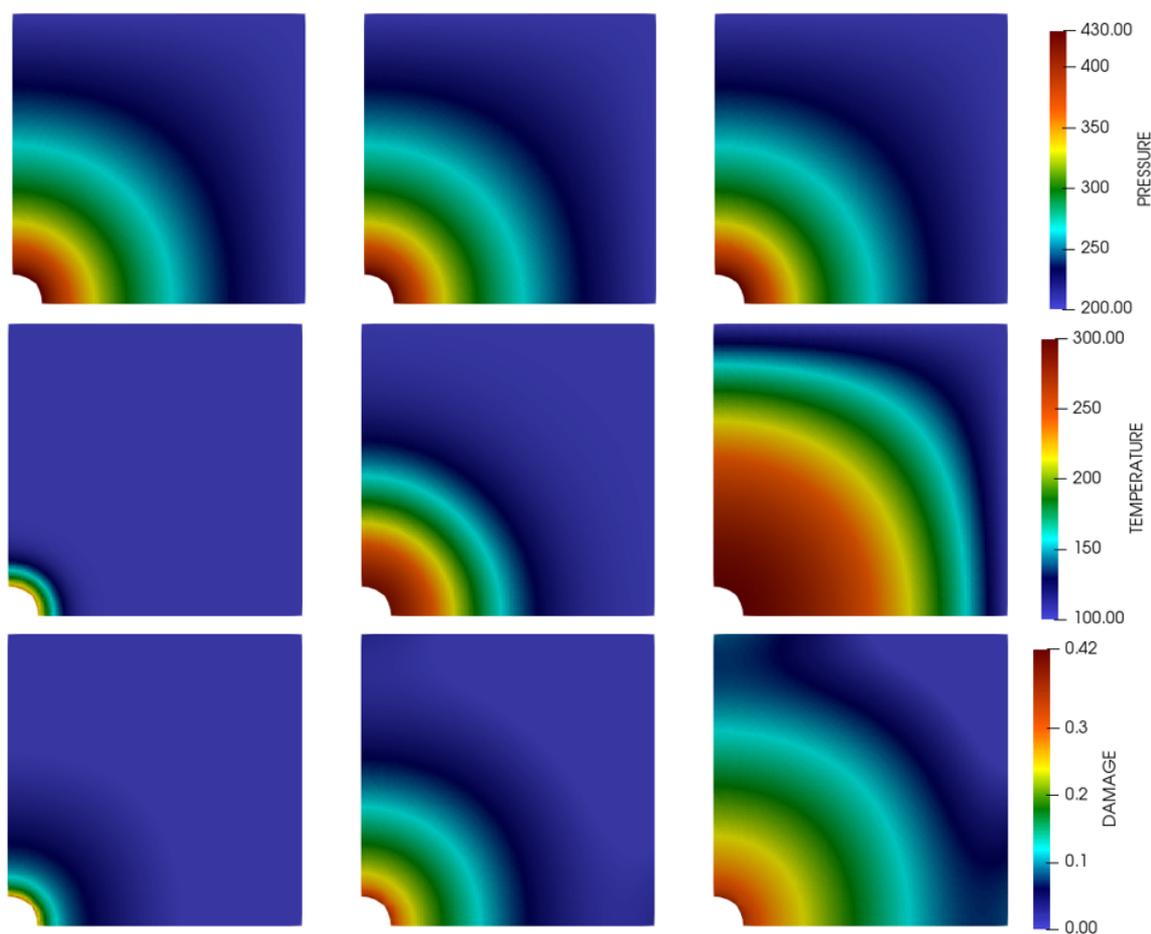


Рис. 12. Распределение давления  $p$  (сверху), температуры  $T$  (по центру), параметра повреждаемости  $D$  (снизу) через 2 часа (слева), 1 суток (по центру) и 10 суток (справа).

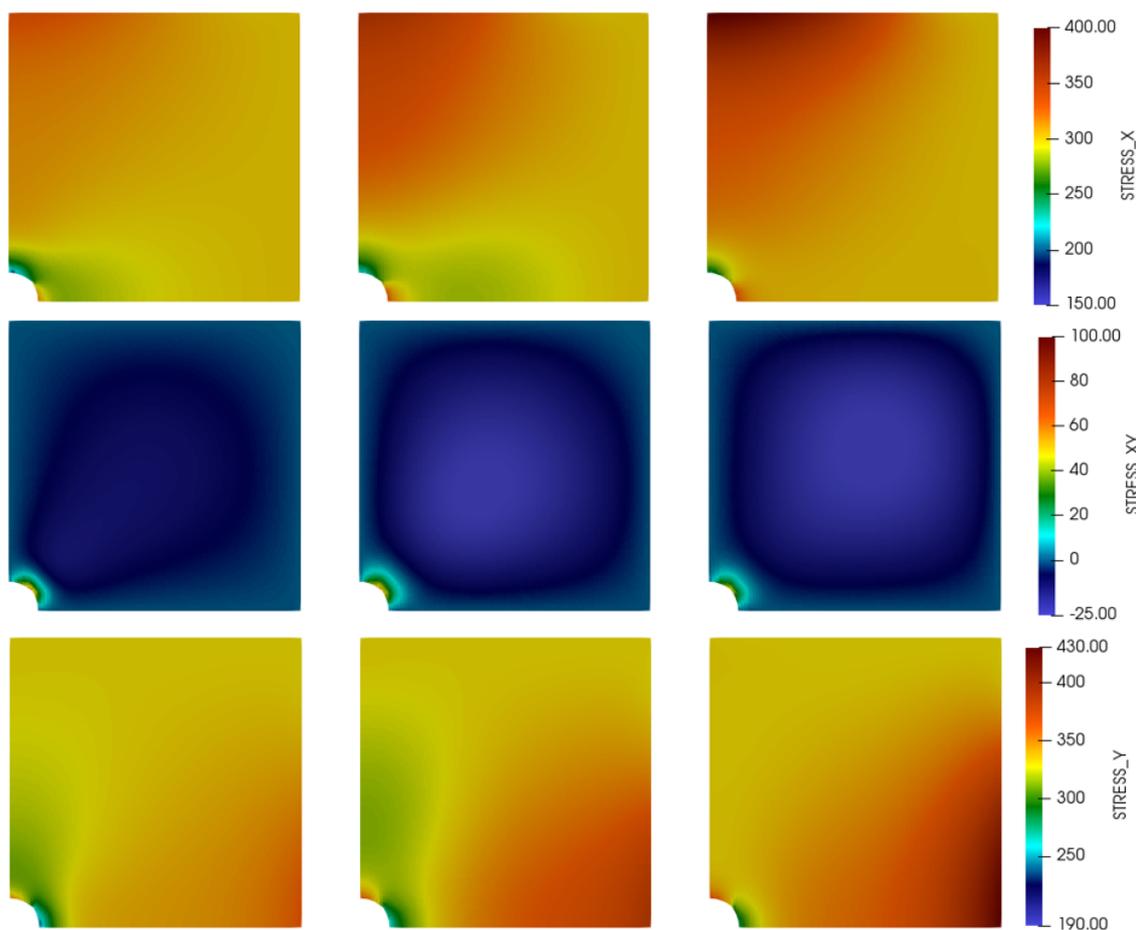


Рис. 13. Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  через 2 часа (слева), 1 сутки (по центру) и 10 суток (справа).

### 5.3 Моделирование термического воздействия на пласт с добывающей и нагнетательной скважиной

В данном разделе рассматривается модель трехслойного изотропного пласта размером  $100 \times 100 \times 1$  м, на противоположных концах диагонали которого расположены нагнетательная и добывающая скважины. Для более точного моделирования эффектов, возникающих в прискважинной зоне, расчетная сетка имеет локальное измельчение вдоль границы модели (рисунок 14). Общее количество узлов — 127575, количество ячеек — 80802. Минимальное значение шага сетки — 0.2 м, максимальное — 2 м.

Режим работы нагнетательной скважины — постоянная приемистость  $0.2 \text{ м}^3/\text{сут}$ , температура нагнетаемого флюида  $300^\circ\text{C}$ , добывающая — постоянное давление 100 бар. Прочие значения параметров использовались те же самые, что и в предыдущем случае.

На примере данной модели рассматривались эффекты, возникающие при термическом воздействии на пласт в течении 5 лет. Распределения давления, температуры, напряжения и параметра разрушаемости через 6, 12 и 60 месяцев приведены на рисунках 15, 16.

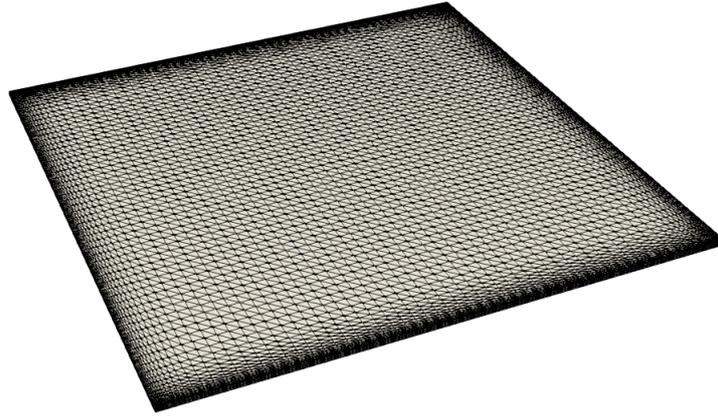


Рис. 14. Расчетная сетка для моделирования развития повреждаемости вблизи нагнетательной скважины.

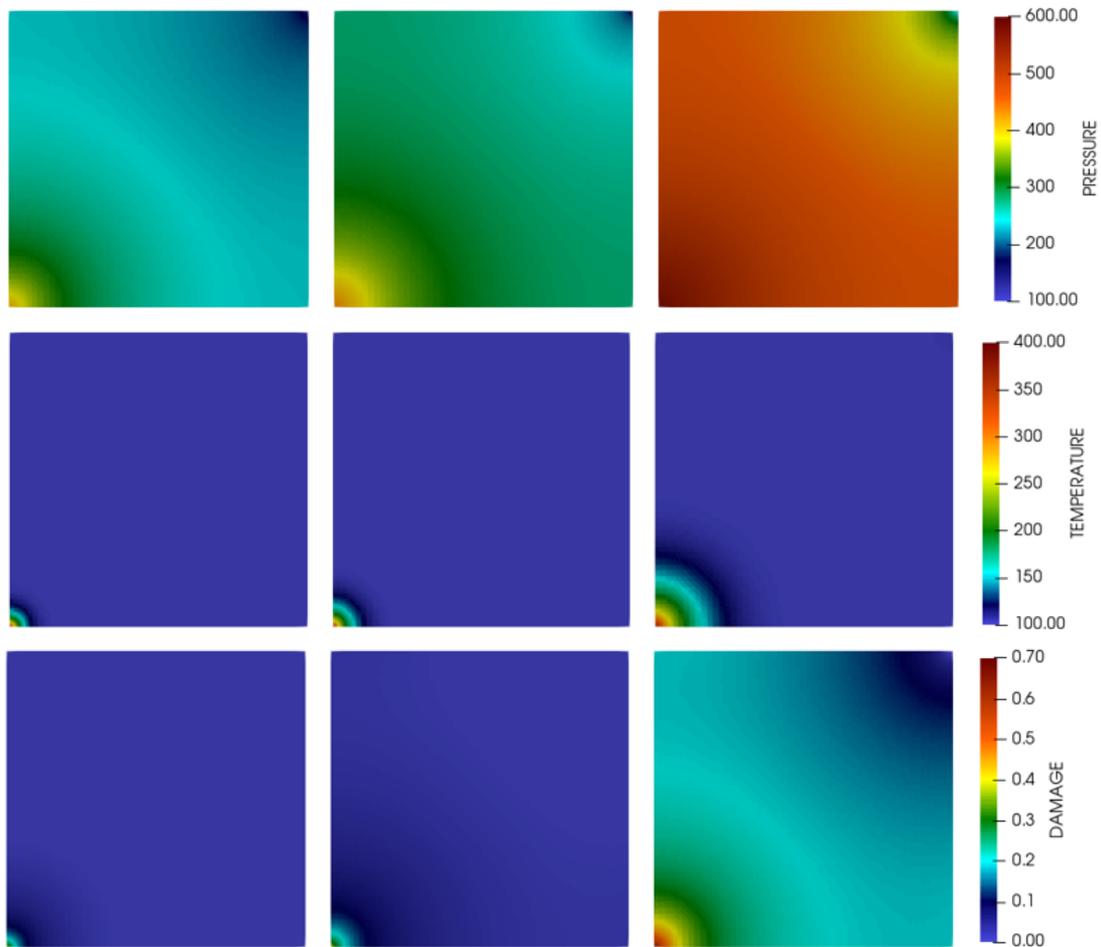


Рис. 15. Распределение давления  $p$  (сверху), температуры  $T$  (по центру), параметра повреждаемости  $D$  (снизу) через 6 месяцев (слева), 12 месяцев (по центру) и 5 лет (справа).

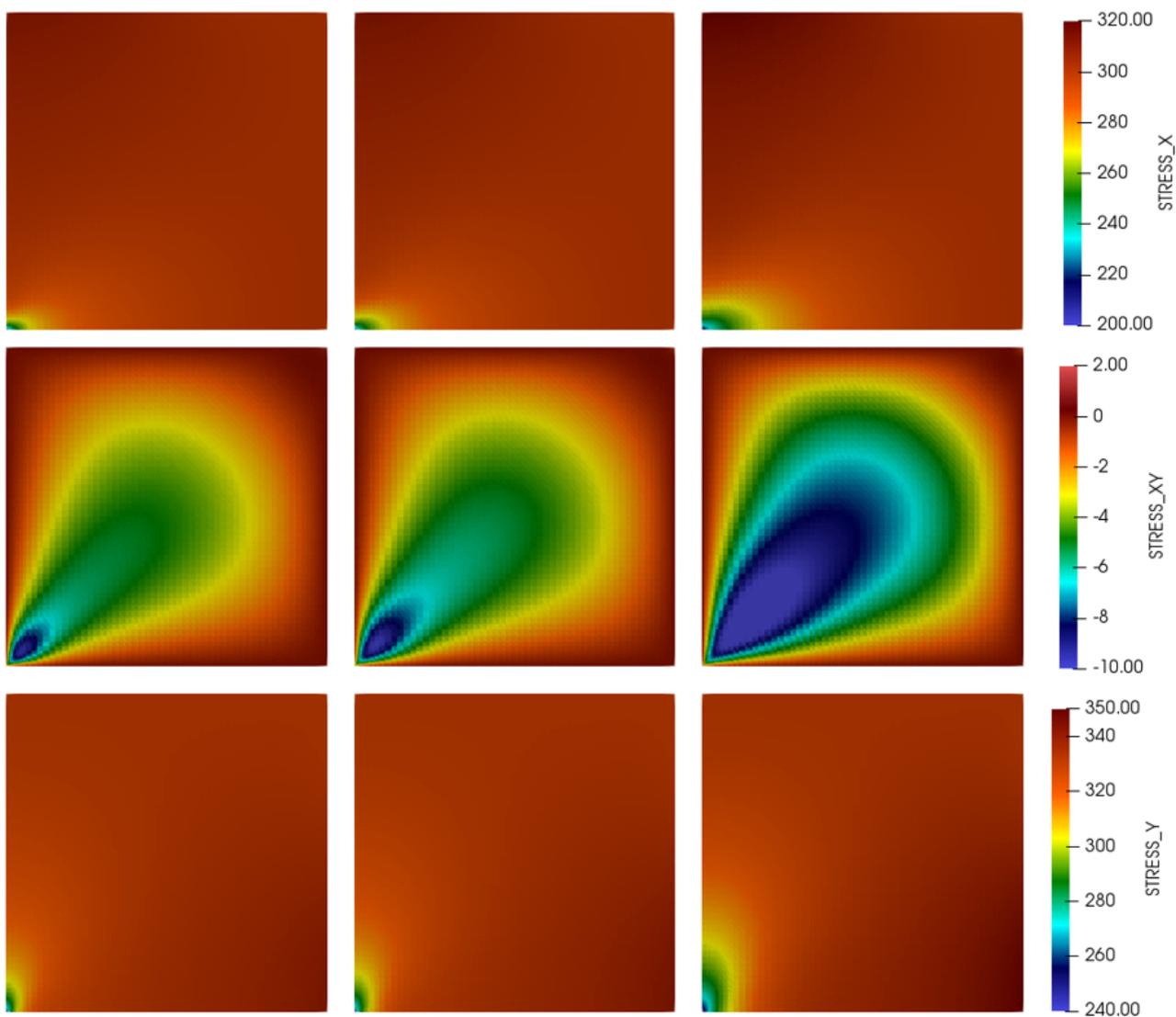


Рис. 16. Компонента тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  через 6 месяцев (слева), 12 месяцев (по центру) и 5 лет (справа).

Также был проведен расчет данной модели при отсутствии учета повреждаемости. Сравнение распределений компоненты  $\varepsilon_{xx}$  тензора деформаций на момент времени 5 лет для случаев учета и в отсутствие учета повреждаемости приведено на рисунке 17.

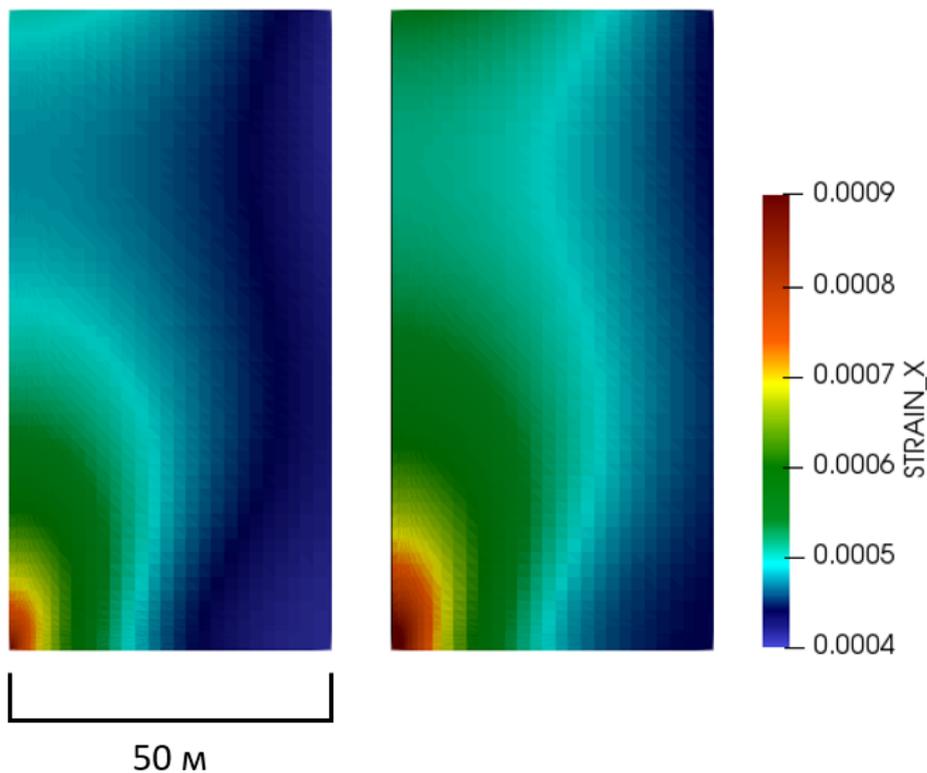


Рис. 17. Компонента  $\varepsilon_{xx}$  тензора деформаций на момент времени 5 лет при учете (слева) и в отсутствие учета (справа) повреждаемости.

#### 5.4 Моделирование работы скважины в слоистом пласте

В данном расчете моделировалась закачка горячего флюида в пласт с различными свойствами по слоям. Рассматривалась модель размером  $50 \times 50 \times 5$  м, имеющая 5 слоев. Проницаемость и модуль Юнга в каждом пропластке распределены в соответствии с распределением Гаусса. Средние значения величин приведены в таблице 5, их распределение изображено на рисунках 18 и 19. Значения прочих параметров в таблице 4.

В углу модели расположена нагнетательная скважина, полностью вскрывающая пласт и закачивающая флюид с приемистостью  $1 \text{ м}^3/\text{сут}$  при температуре  $400^\circ\text{C}$ . Предполагалось, что распределение закачиваемого флюида по пропласткам прямо пропорционально проницаемости соответствующего слоя.

Моделировалась работа скважины в течение 30 сут. Распределение параметра повреждаемости, давления и температуры на различные моменты времени показано на рисунках 20, 21 и 22 соответственно.

Таблица 5. Средние значения проницаемости и модуля Юнга по слоям

Номера слоев	Средняя проницаемость, мД	Средний модуль Юнга, ГПа
1	1	30
2-4	0.1	10
1	1	30

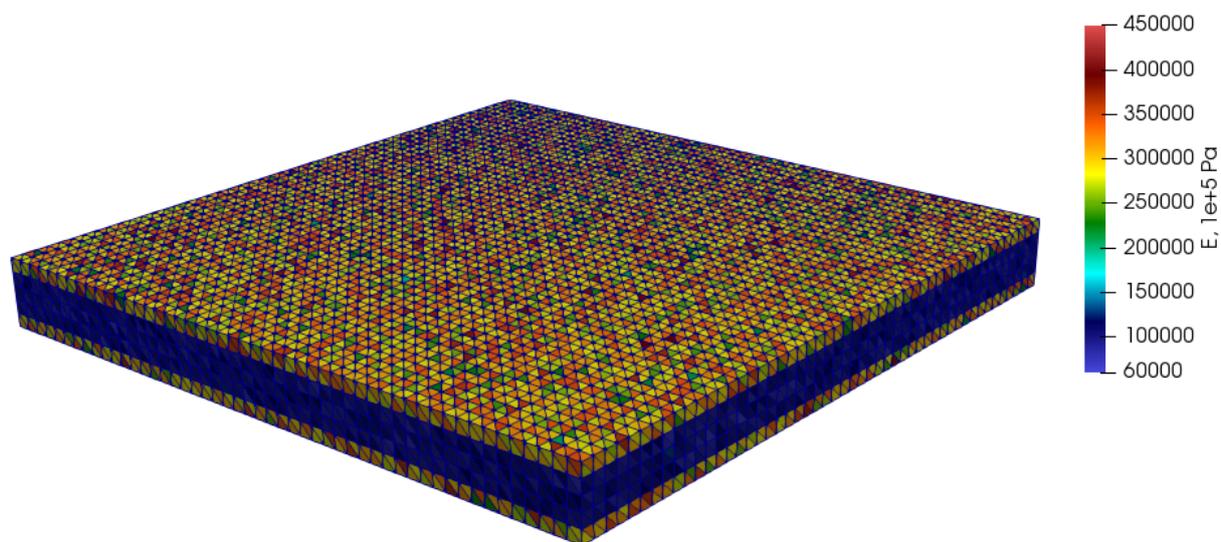


Рис. 18. Начальное распределение модуля Юнга в модели.

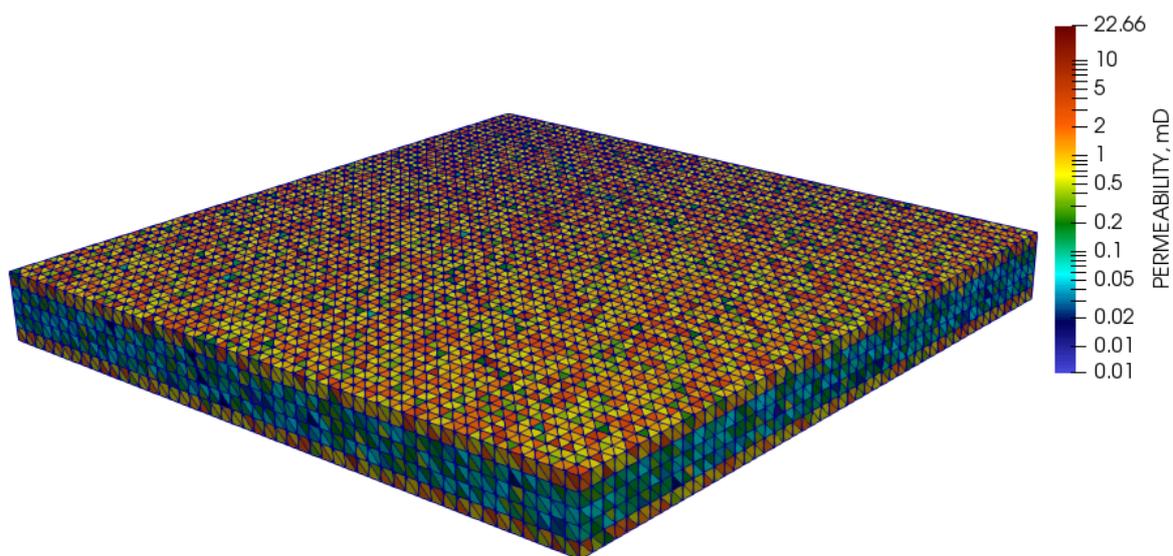


Рис. 19. Начальное распределение проницаемости в модели.



Рис. 20. Распределение параметра повреждаемости через 1, 15 и 30 сут.

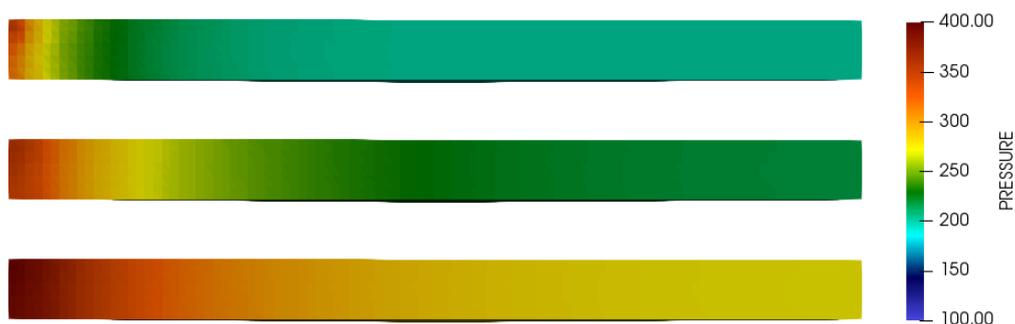


Рис. 21. Распределение давления через 1, 15 и 30 сут.

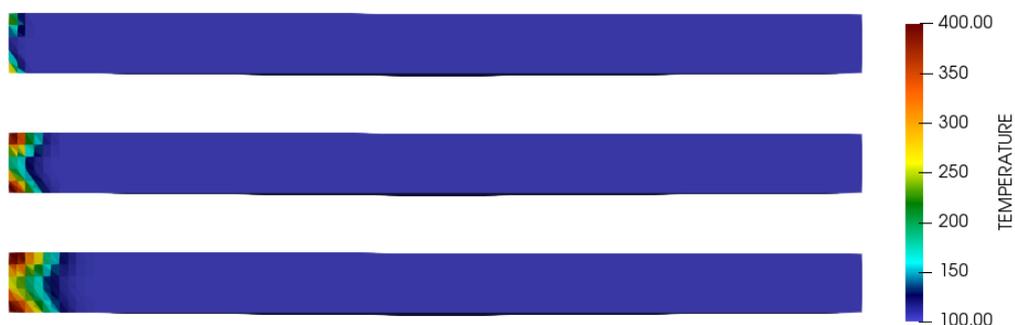


Рис. 22. Распределение температуры через 1, 15 и 30 сут.

В данном тесте оценивался вклад каждого эффекта в энергию скелета. Для этого суммарная энергия скелета, вычисляемая по формуле (3), была разделена на компоненты, соответствующие вкладу деформационных эффектов ( $E_{s\xi}$ ), влияния порового давления ( $E_{sp}$ ), влияния неизотермичности ( $E_{sT}$ ) и затраты энергии на разрушение ( $E_{sD}$ ):

$$\Delta E_s = \Delta E_{s\xi} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} - \Delta E_{sD},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta E_{s\xi} &= (\boldsymbol{\sigma}^0 + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, & \Delta E_{sp} &= \left( p^0 \frac{1}{N} - T^0 \alpha_\varphi \right) \Delta p, \\ \Delta E_{sT} &= (C_{ps} - \alpha_\varphi p^0) \Delta T, & \Delta E_{sD} &= \mathbf{Y}^0 \Delta \mathbf{D}.\end{aligned}$$

График изменения величины каждой компоненты представлен на рисунке 23.

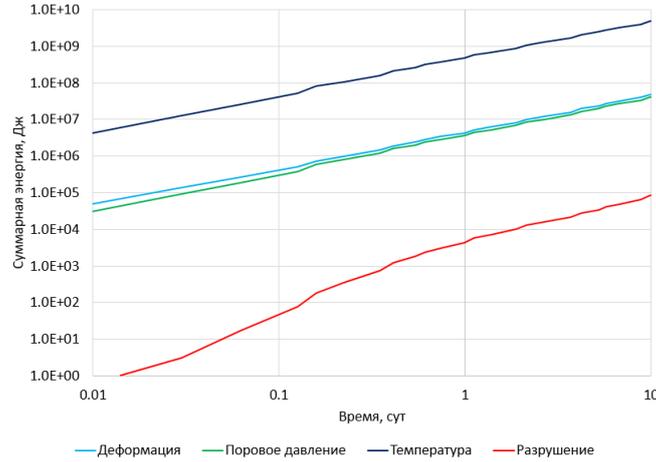


Рис. 23. Распределение компонент энергии по времени.

## 6 Заключение

В настоящей работе представлен вычислительный алгоритм для моделирования эволюции термoporouпругой среды с учетом разрушения. Система уравнений модели включает в себя законы сохранения массы, импульса и энергии, которые замыкаются определяющими соотношениями, удовлетворяющими условию термодинамической согласованности. Разрушение среды моделируется в рамках теории континуального разрушения.

Вычислительный алгоритм основан на методе конечных элементов. Для пространственной аппроксимации использовались тетраэдральные элементы Тейлора-Худа. Предложенная модель реализована в виде программного комплекса, написанного на языке C++. Валидация алгоритма проводилась на классических тестах для модели термoporouпругой среды (тест Манделя, Терцаги, одномерное неизотермическое расширение), имеющих аналитическое решение.

Для оценки эффектов, связанных с разрушением среды, был проведен ряд расчетов, моделирующих термическое воздействие на нефтяной пласт. По результатам моделирования был сделан вывод о значительном влиянии разрушения на величину упругих модулей вблизи нагнетательной скважины и, как следствие, на эволюцию напряженно-деформированного состояния. При этом доля внутренней энергии, связанной с разрушением, незначительна.

## Список литературы

- [1] Меретин А.С., Савенков Е.Б. Математическая модель фильтрационных процессов в термомороупругой среде с учетом континуального разрушения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 58. 38 с.
- [2] Pogacnik J., O'Sullivan M., O'Sullivan J. A Damage Mechanics Approach to Modeling Permeability Enhancement in Thermo-Hydro-Mechanical Simulations //Proceedings. – 2014. – P. 24-26.
- [3] Beggs H. D. et al. Estimating the viscosity of crude oil systems //Journal of Petroleum technology. – 1975. – V. 27. – №. 09. – P. 1140-1141.
- [4] Voigt W. Lehrbuch der kristallphysik. – Leipzig : Teubner, 1928. – Т. 962.
- [5] Zenkevich O. Finite-element method in engineering //Moscow, Mir. – 1975. – V. 5.
- [6] Taylor C., Hood P. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique //Computers and Fluids. – 1973. – Т. 1. – №. 1. – С. 73-100.
- [7] Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Elements Methods. Springer, 1991
- [8] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. – Siam, 2003. – V. 82.
- [9] Neuman S. P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements //J. HYDRAUL. DIV., PROC., ASCE. – 1973.
- [10] Cuthill E., McKee J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices In Proc. 24th Nat. Conf. ACM, pages 157–172, 1969.
- [11] Delone B. Sur la sphère vide. A la mémoire de George Voronoi //Izv. AN OMEN. – 1934. – Т. 525. – С. 526.
- [12] URL: <http://eigen.tuxfamily.org/>.
- [13] URL: <https://computation.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods>
- [14] URL: <https://www.paraview.org/>
- [15] URL: <https://www.vtk.org/>
- [16] Rabotnov Y. N. Creep rupture //Applied mechanics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1969. – С. 342-349.
- [17] von Terzaghi C. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. – Deuticke, 1925.
- [18] Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity, Princeton University Press, 2000.
- [19] Mandel J. Consolidation des sols (itude mathématique) // Geotechnique, 1953, pp. 287–299.
- [20] Cheng A.H-D., Detournay E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity // Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 12, pp. 551–572, 1988.

- [21] Carter J.P., Booker J.R. Finite Element Analysis of Coupled Thermoelasticity // Computers and Structures Vol. 31, No. 1 pp. 73-80, 1989
- [22] Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] // Communications of the ACM. – 1970. – T. 13. – №. 1. – C. 47-49.