ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 81 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 81. 29 с. doi:10.20948/prepr-2019-81
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-81

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей

Москва — 2019

Попков К. А.

Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей

Предложен метод синтеза схем из функциональных элементов в произвольном функционально полном базисе, реализующих заданные булевы функции и допускающих единичные диагностические тесты малой длины относительно константных и/или инверсных неисправностей на входах и/или выходах элементов при выполнении определённых начальных условий, связанных с существованием коротких единичных проверяющих тестов для схем в том же базисе при таких же неисправностях. На основании этого метода получены новые верхние оценки длин минимальных единичных диагностических тестов для схем из функциональных элементов в некоторых базисах при некоторых неисправностях элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, константная неисправность, инверсная неисправность, единичный проверяющий тест, единичный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

A method of construction of easily diagnosable logic networks regarding single faults

We offer a method of synthesis of logic networks in an arbitrary functionally complete basis, implementing given Boolean functions and allowing single diagnostic tests with small lengths regarding stuck-at and/or inverse faults at inputs and/or outputs of gates under certain initial conditions connected with existence of short single fault detection tests for logic networks in the same basis under the same faults. Based on this method, we obtain new upper bounds on lengths of minimal single diagnostic tests for logic networks in some bases under some faults of gates.

Key words: logic network, stuck-at fault, inverse fault, single fault detection test, single diagnostic test

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 19-71-30004.

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Представим, что под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько входов и/или выходов элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате данная схема вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно входов/выходов элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправно не более одного входа/выхода элемента. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* (см. [4, с. 110–111]), т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный диагностический тест (ЕДТ) для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D^B(T)$ — длина теста T; $D^B(S) = \min D^B(T)$, где минимум берётся по всем ЕДТ T для схемы S; $D^B(f) = \min D^B(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f;

$D^B(n) = \max D^B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B(f)$. Функция $D^B(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕДТ.

Перечислим основные результаты, касающиеся ЕДТ для схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными и/или инверсными неисправностями на выходах и/или выходах элементов. Константная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом его входе (на его выходе) становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и/или выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного входа/выхода элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного входа/выхода элемента независимо от неисправностей других входов/выходов элементов. Инверсная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом его входе (на его выходе) становится противоположным значению на этом же его входе (на его выходе) в случае, когда данный элемент исправен.

Для удобства под буквой D будем ставить символы «$0,1$», «0», «1» или «Inv» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0, однотипные константные неисправности типа 1 или инверсные неисправности элементов, а после них — символы «(IO)», «(I)» или «(O)» в случаях, когда в схемах допускаются неисправности соответственно на входах и выходах, только на входах или только на выходах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, нет входов и не может быть неисправности типа α на его выходе.

Сперва будут перечислены результаты для ЕДТ при константных неисправностях на выходах элементов, затем — при инверсных неисправностях на выходах элементов, а в конце — при неисправностях на входах и выходах либо только на входах элементов.

В [4, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D^B_{0,1\,(\mathrm{O})}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$; аналогично можно показать, что $D^B_{p\,(\mathrm{O})}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0, 1$. Для стандартного базиса $B_1 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [5] получил оценку $D^{B_1}_{p\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 2n + 1$, где $p = 0$ или 1. Впоследствии эта оценка была улучшена в [6], где, в частности, доказано, что $D^{B_1}_{p\,(\mathrm{O})}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. В работе [7] для базиса Жегалкина $B_2 = \{\&, \oplus, 1\}$, в том числе, установлено равенство $D^{B_2}_{0\,(\mathrm{O})}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. В [8], в частности, для любого полного конечного базиса B при n, большем максимального числа существенных переменных у функций из B, доказаны неравенства $D^{B}_{p\,(\mathrm{O})}(n) \geqslant 2$, где $p = 0$ или 1, и $D^{B}_{0,1\,(\mathrm{O})}(n) \geqslant 3$. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова в [9] получили оценку $D^{B_2}_{0,1\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 22$, а также доказали существование базиса B_3, состоящего из булевых функций от не более чем девяти переменных, для которого $D^{B_3}_{0,1\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 6$. Одним из результатов работы [10] является доказательство существования базиса B_4, состоящего из одной булевой функции от шести переменных, для которого $D^{B_4}_{0,1\,(\mathrm{O})}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$.

С. В. Коваценко в [11], в частности, установил, что $D^{B_2}_{\mathrm{Inv}\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant n + 1$. Д. С. Романов в [12, 13] получил, в том числе, равенства $D^{B_1}_{\mathrm{Inv}\,(\mathrm{O})}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$ и $D^{B_2}_{\mathrm{Inv}\,(\mathrm{O})}(n) = 1$ соответственно, второе из которых улучшает упомянутый результат работы [11]. И. Г. Любич совместно с Д. С. Романовым в [14] получили оценку $D^{B}_{\mathrm{Inv}\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 4$, где B — либо произвольный полный базис, содержащий хотя бы одну из функций $x\&y$, $x \vee y$, либо один из базисов $\{\overline{x\&y}\}$, $\{\overline{x \vee y}\}$.

Н. П. Редькин в [15] установил неравенство $D^{B_1}_{p\,(\mathrm{I})}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$ для $p = 0, 1$. В работе [16], в частности, доказано существование такой булевой функции ψ от четырёх переменных, что для базиса $B_5 = \{\psi, \overline{\psi}\}$ выполнены соотношения $D^{B_5}_{0\,(\mathrm{IO})}(n) = 2$ и $D^{B_5}_{0\,(\mathrm{I})}(n) = 1$, а для базиса $B_5^* = \{\psi^*, \overline{\psi^*}\}$ — соотношения $D^{B_5^*}_{1\,(\mathrm{IO})}(n) = 2$ и $D^{B_5^*}_{1\,(\mathrm{I})}(n) = 1$, где ψ^* — двойственная к ψ булева функция. В [17], в том числе, доказано существование базиса B_6, состоящего из булевых функций от не более чем шести переменных, в котором $D^{B_6}_{0,1\,(\mathrm{IO})}(n) = 4$ при $n \geqslant 3$ и $D^{B_6}_{0,1\,(\mathrm{I})}(n) = 2$.

В данной работе будет предложен метод построения схем из функциональных элементов в произвольном функционально полном базисе, реализующих заданные булевы функции и допускающих короткие ЕДТ, основанный на существовании схем в том же базисе, допускающих короткие единичные проверяющие тесты (ЕПТ) при таких же неисправностях элементов (теорема 1). С использованием этого метода будет получен ряд константных верхних оценок функций Шеннона длины ЕДТ для схем в различных базисах при различных видах неисправностей элементов (теоремы 2–6).

Введём обозначения $\tilde{0}^d = \underbrace{0, \ldots, 0}_{d}$, $\tilde{1}^d = \underbrace{1, \ldots, 1}_{d}$, где $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (В случае $d = 0$ они обозначают пустую строку: например, $(\tilde{1}^n, \tilde{0}^0) = (\tilde{1}^n)$.)

Описание метода

Пусть M — произвольное множество двоичных наборов длины n. Через $I_M(\tilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборах из множества M и значение 0 на всех остальных наборах.

Два двоичных набора одинаковой длины называются *соседними*, если они различаются ровно в одной компоненте.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция, T — множество (некоторых) двоичных наборов длины n, $\alpha \in \{0,1\}$. Будем говорить, что функция f *обладает* (T,α)*-свойством*, если существует двоичный набор длины n, не принадлежащий множеству T, на котором данная функция принимает значение α.

Пусть зафиксирован вид неисправностей функциональных элементов: константные (однотипные типа $p \in \{0,1\}$ либо произвольные) и/или инверсные неисправности на входах и/или выходах элементов.

Теорема 1. *Пусть для неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ и функционально полного базиса B существуют такие $m \in \mathbb{N}$, двоичные наборы $\tilde{c}_1 = (c_{1,1},\dots,c_{1,m})$, $\tilde{c}_0 = (c_{0,1},\dots,c_{0,m})$, булева функция $\varphi(\tilde{x}^m)$, множество $T = \{\tilde{\sigma}_1,\dots,\tilde{\sigma}_l\}$ двоичных наборов длины n, где $|T| < 2^n$; подмножества $M_1,\dots,M_m$ множества T и двоичные наборы $\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_l$ длины m, что выполнены следующие условия:*

1) *для любого $i \in \{1,\dots,m\}$ функцию $f_i(\tilde{x}^n) = (c_{1,i}f \oplus c_{0,i}\overline{f} \oplus I_{M_i})(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой S_i в базисе B, для которой множество T является ЕПТ;*

2) *$\tilde{\pi}_j = (f_1(\tilde{\sigma}_j),\dots,f_m(\tilde{\sigma}_j))$ для любого $j \in \{1,\dots,l\}$;*

3) *функцию $\varphi(\tilde{x}^m)$ можно реализовать схемой S_φ в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ T_φ относительно неисправностей рассматриваемого вида, кроме, быть может, константных неисправностей на выходе выходного элемента схемы, где*

$$T_\varphi = \begin{cases} \{\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_l,\tilde{c}_a\}, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T,\overline{a})\text{-свойством} \\ & \text{для некоторого } a \in \{0,1\}, \\ \{\tilde{\pi}_1,\dots,\tilde{\pi}_l,\tilde{c}_1,\tilde{c}_0\} & \text{иначе;} \end{cases}$$

4) *функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение α на наборе $\tilde{c}_\alpha$ и всех соседних с ним наборах для любого $\alpha \in \{0,1\}$ такого, что функция f обладает (T,α)-свойством;*

5) *функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение $f(\tilde{\sigma}_j)$ на наборе $\tilde{\pi}_j$ и значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}_j)$ на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_j$, для любого $j \in \{1,\dots,l\}$.*

Тогда

$$D^B(f) \leqslant \begin{cases} |T|+1, & \textit{если функция } f \textit{ не обладает } (T,\overline{a})\textit{-свойством} \\ & \textit{для некоторого } a \in \{0,1\}, \\ |T|+2 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Входы схемы S_φ соединим с выходами схем $S_1, \ldots, S_m$ (1-й вход — с выходом схемы S_1, …, m-й вход — с выходом схемы S_m). Полученную схему с n входами, на которые подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, и выходом, совпадающим с выходом схемы S_φ, обозначим через S (см. рисунок); очевидно, что она является схемой в базисе B.

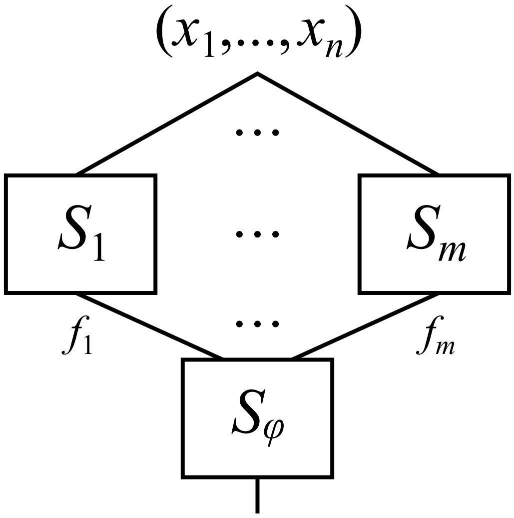

Схема S

Докажем, что данная схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. На выходах подсхем $S_1, \ldots, S_m$ по условию 1) реализуются функции $f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n)$ соответственно. На любом таком двоичном наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n, не принадлежащем множеству T (а значит, и множеству M_i), что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0,1\}$, на выходе подсхемы S_i, $i = 1, \ldots, m$, возникнет значение

$$f_i(\tilde{\tau}_\alpha) = c_{1,i} f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus c_{0,i}\overline{f}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{M_i}(\tilde{\tau}_\alpha) = c_{1,i}\alpha \oplus c_{0,i}\overline{\alpha} \oplus 0 = c_{\alpha,i}.$$

Тогда на входы подсхемы S_φ поступит набор $\tilde{c}_\alpha$, а на её выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условий 3), 4). Далее, для любого $j \in \{1, \ldots, l\}$ на наборе $\tilde{\sigma}_j$ на выходах подсхем $S_1, \ldots, S_m$ возникнут значения $f_1(\tilde{\sigma}_j), \ldots, f_m(\tilde{\sigma}_j)$ соответственно, поэтому на входы подсхемы S_φ поступит набор $\tilde{\pi}_j$, а на выходе схемы S возникнет значение $f(\tilde{\sigma}_j)$ в силу условий 2), 3), 5). Тем самым показано, что на любом двоичном наборе длины n схема S выдаёт такое же значение, как и функция $f(\tilde{x}^n)$, т. е. реализует эту функцию, что и требовалось доказать.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S при неисправности в ней ровно одного входа/выхода элемента и докажем, что она неизбыточна. Пусть сначала неисправный элемент содержится в какой-то подсхеме S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. На любом входном наборе схемы S среди всех значений на входах подсхемы S_φ, очевидно, может измениться только значение на её i-м входе. Поэтому на любом таком наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n, не принадлежащем множеству T, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, на входы подсхемы S_φ поступит либо набор $\tilde{c}_\alpha$, либо набор, отличающийся от указанного только в i-й компоненте. Тогда на выходе схемы S возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условий 3), 4). Далее, множество T является ЕПТ для неизбыточной схемы S_i по условию 1), поэтому рассматриваемую неисправность можно обнаружить на каком-то наборе $\tilde{\sigma}_j \in T$, где $j \in \{1, \ldots, l\}$. Тогда на этом наборе на входы подсхемы S_φ поступит набор, отличающийся от набора $\tilde{\pi}_j$ только в i-й компоненте, а на выходе схемы S возникнет значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}_j)$ в силу условий 3), 5).

Тем самым показано, что любая функция неисправности схемы S, возникающая при неисправности входа/выхода какого-то элемента в одной из подсхем $S_1, \ldots, S_m$, на всех наборах длины n, не принадлежащих множеству T, принимает такое же значение, как и функция f, а хотя бы на одном наборе из множества T принимает значение, отличное от значения функции f на этом наборе. Нетрудно заметить, что любую такую функцию неисправности можно представить в виде $(f \oplus I_{T'})(\tilde{x}^n)$, где T' — некоторое непустое подмножество множества T. Этот вид является частным случаем (при $b_1 = 1$, $b_0 = 0$ и $T' \neq \varnothing$) более общего вида

$$(b_1 f \oplus b_0 \overline{f} \oplus I_{T'})(\tilde{x}^n), \tag{$*$}$$

в котором $b_1, b_0 \in \{0, 1\}$ и $T' \subseteq T$.

Пусть теперь неисправен какой-то элемент в подсхеме S_φ. Если имеет место константная неисправность на выходе её выходного элемента, то на этом выходе, а значит, и на выходе схемы S, реализуется некоторая булева константа β, которая при этом отлична от функции f по условию теоремы и имеет вид $(*)$: действительно,

$$\beta \equiv \beta f \oplus \beta \overline{f} \oplus I_\varnothing.$$

Рассмотрим любую другую неисправность одного входа/выхода элемента в подсхеме S_φ. Пусть данная подсхема при этом реализует булеву функцию $h(\tilde{x}^m)$ от своих входов. Все элементы в подсхемах $S_1, \ldots, S_m$ исправны, поэтому на любом входном наборе схемы S на входы подсхемы S_φ поступят «правильные» значения. Тогда на любом таком наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n, не принадлежащем множеству T, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где

$\alpha \in \{0, 1\}$, на входы указанной подсхемы поступит набор $\tilde{c}_\alpha$, а на выходе схемы S возникнет значение $h(\tilde{c}_\alpha)$, которое мы обозначим через b_α. (По крайней мере один двоичный набор длины n не принадлежит множеству T в силу условия $|T| < 2^n$.) Далее, при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l$ на входы подсхемы S_φ поступят наборы $\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_l$ соответственно. Таким образом, при подаче на входы схемы S некоторых наборов на входы подсхемы S_φ поступят все наборы из множества T_φ в силу определения этого множества. Функцию h можно отличить от функции φ на наборах из множества T_φ по условию 3), поэтому рассматриваемая неисправность схемы S будет обнаружена хотя бы на одном её входном наборе.

Тем самым показано, что при рассматриваемой неисправности одного элемента в подсхеме S_φ функция неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S на любом таком наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n, не принадлежащем множеству T, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, принимает значение b_α. Нетрудно заметить, что функцию g можно представить в виде $(*)$, где

$$T' = \{\tilde{\delta} \in T \mid g(\tilde{\delta}) = b_1 f(\tilde{\delta}) \oplus b_0 \overline{f}(\tilde{\delta}) \oplus 1\}.$$

В итоге получаем, что любая функция неисправности схемы S представима в виде $(*)$, где $b_1, b_0 \in \{0, 1\}$ и T' — некоторое подмножество множества T. Кроме того, из приведённых рассуждений вытекает, что значения функции f и любой функции неисправности схемы S различаются хотя бы на одном наборе, поэтому данная схема неизбыточна. Докажем, что она допускает ЕДТ длины не более

$$\begin{cases} |T| + 1, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T, \overline{a})\text{-свойством} \\ & \text{для некоторого } a \in \{0, 1\}, \\ |T| + 2 & \text{иначе;} \end{cases}$$

отсюда будет следовать справедливость теоремы 1.

Заметим, что функция f также имеет вид $(*)$ при $b_1 = 1$, $b_0 = 0$ и $T' = \varnothing$. Пусть g и $\hat{g}$ — две произвольные различные булевы функции вида $(*)$, причём $g(\tilde{x}^n) = (b_1 f \oplus b_0 \overline{f} \oplus I_{T'})(\tilde{x}^n)$, $\hat{g}(\tilde{x}^n) = (\hat{b}_1 f \oplus \hat{b}_0 \overline{f} \oplus I_{\hat{T}'})(\tilde{x}^n)$, где $b_1, b_0, \hat{b}_1, \hat{b}_0 \in \{0, 1\}$ и $T', \hat{T}' \subseteq T$. В силу условия $|T| < 2^n$ существует хотя бы один двоичный набор длины n, не принадлежащий множеству T. Пусть значение функции f на нём равно a; обозначим указанный набор через $\tilde{\tau}_a$. Имеем

$$g(\tilde{\tau}_a) = b_1 f(\tilde{\tau}_a) \oplus b_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_a) \oplus I_{T'}(\tilde{\tau}_a) = b_1 a \oplus b_0 \overline{a} \oplus 0 = b_a, \tag{1}$$

$$\hat{g}(\tilde{\tau}_a) = \hat{b}_1 f(\tilde{\tau}_a) \oplus \hat{b}_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_a) \oplus I_{\hat{T}'}(\tilde{\tau}_a) = \hat{b}_1 a \oplus \hat{b}_0 \overline{a} \oplus 0 = \hat{b}_a. \tag{2}$$

Рассмотрим два случая.

1. На любом наборе длины n, не принадлежащем множеству T, функция f принимает значение a. Тогда эта функция не обладает $(T, \overline{a})$-свойством, поэтому надо доказать неравенство $D^B(f) \leqslant |T| + 1$. Если $b_a \neq \hat{b}_a$, то $g(\tilde{\tau}_a) \neq \hat{g}(\tilde{\tau}_a)$ в силу (1), (2) и функции g и $\hat{g}$ можно отличить друг от друга на наборе $\tilde{\tau}_a$. Если же $b_a = \hat{b}_a$, то по аналогии с (1), (2) можно доказать равенства $g(\tilde{\tau}'_a) = b_a$ и $\hat{g}(\tilde{\tau}'_a) = \hat{b}_a$, а значит, и равенство $g(\tilde{\tau}'_a) = \hat{g}(\tilde{\tau}'_a)$ для любого набора $\tilde{\tau}'_a$ длины n, не принадлежащего множеству T. Таким образом, функции $g(\tilde{x}^n)$ и $\hat{g}(\tilde{x}^n)$ могут различаться только на наборах из множества T и обязаны различаться хотя бы на одном таком наборе, поскольку $g \not\equiv \hat{g}$. Получаем, что любые две различные функции g и $\hat{g}$ вида $(*)$ можно отличить друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\tau}_a\} \cup T$, откуда вытекает, что данное множество является ЕДТ длины $|T| + 1$ для схемы S и требуемое утверждение доказано.

2. Существует такой набор $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$ длины n, не принадлежащий множеству T, на котором функция f принимает значение $\overline{a}$. Тогда эта функция обладает (T, a)-свойством и $(T, \overline{a})$-свойством, поэтому надо доказать неравенство $D^B(f) \leqslant |T| + 2$. Имеем

$$g(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = b_1 f(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus b_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus I_{T'}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = b_1 \overline{a} \oplus b_0 a \oplus 0 = b_{\overline{a}},$$
$$\hat{g}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = \hat{b}_1 f(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus \hat{b}_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus I_{\hat{T}'}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = \hat{b}_1 \overline{a} \oplus \hat{b}_0 a \oplus 0 = \hat{b}_{\overline{a}}.$$

Если $b_a \neq \hat{b}_a$ или $b_{\overline{a}} \neq \hat{b}_{\overline{a}}$, то $g(\tilde{\tau}_a) \neq \hat{g}(\tilde{\tau}_a)$ или $g(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \neq \hat{g}(\tilde{\tau}_{\overline{a}})$ в силу (1), (2) и выписанных равенств, поэтому функции g и $\hat{g}$ можно отличить друг от друга хотя бы на одном из наборов $\tilde{\tau}_a$, $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$. Если же $b_a = \hat{b}_a$ и $b_{\overline{a}} = \hat{b}_{\overline{a}}$, т. е. $b_1 = \hat{b}_1$ и $b_0 = \hat{b}_0$, то из определения функций $g, \hat{g}$ и соотношения $g \not\equiv \hat{g}$ следует, что $T' \neq \hat{T}'$; в таком случае легко видеть, что функции g и $\hat{g}$ можно отличить друг от друга на наборах из множества $T' \triangle \hat{T}' \subseteq T$. Получаем, что любые две различные функции g и $\hat{g}$ вида $(*)$ можно отличить друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_{\overline{a}}\} \cup T$, откуда вытекает, что данное множество является ЕДТ длины $|T| + 2$ для схемы S и требуемое утверждение, а вместе с ним теорема 1 доказаны. $\square$

В следующих разделах рассмотрим различные приложения теоремы 1.

Однотипные константные неисправности на входах и выходах элементов

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано в доказательствах нижеследующих теорем 2, 6. Пусть зафиксированы функционально полный базис B и вид неисправностей функциональных элементов: константные (однотипные типа $p \in \{0,1\}$ либо произвольные) и/или инверсные неисправности на входах и/или выходах элементов.

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *любую булеву функцию от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение 1, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B, для которой множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является ЕПТ;*

б) *любую неконстантную булеву функцию от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение 0, можно реализовать схемой в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно неисправностей рассматриваемого вида, кроме, быть может, константных неисправностей на выходе выходного элемента схемы.*

Тогда для любой неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо неравенство $D^B(f) \leqslant 3$.

Доказательство. Введём обозначение $a = f(\tilde{1}^n)$. Положим $m = 4$, $l = 1$,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}_a = (c_{a,1}, c_{a,2}, c_{a,3}, c_{a,4}) = (1,0,0,0),\\
&\tilde{c}_{\overline{a}} = (c_{\overline{a},1}, c_{\overline{a},2}, c_{\overline{a},3}, c_{\overline{a},4}) = (0,0,1,1),\\
&T = \{(\tilde{1}^n)\},\\
&\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^4),\\
&M_1 = \varnothing,\\
&M_2 = M_3 = M_4 = T.
\end{aligned}
$$

Пусть $\varphi(\tilde{x}^4)$ — булева функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) на наборе $\tilde{c}_a$ и всех соседних с ним наборах функция φ принимает значение a;

(ii) на наборе $\tilde{c}_{\overline{a}}$ и всех соседних с ним наборах функция φ принимает значение $\overline{a}$;

(iii) $\varphi(\tilde{\pi}_1) = a$;

(iv) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_1$, функция φ принимает значение $\overline{a}$.

На всех остальных двоичных наборах длины 4 функция φ может принимать произвольные значения.

Покажем, что данная функция определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения a и $\overline{a}$, не пересекаются. Заметим, что набор $\tilde{c}_a$ отличается от каждого из наборов $\tilde{c}_{\overline{a}}$, $\tilde{\pi}_1$ в трёх компонентах, поэтому никакой набор, соседний с набором $\tilde{c}_a$, не может быть соседним ни с одним наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{c}_{\overline{a}}$. Далее, набор $\tilde{\pi}_1$ отличается от набора $\tilde{c}_{\overline{a}}$ в двух компонентах, поэтому является не является соседним с этим набором. Тем самым показано, что функция $\varphi(\tilde{x}^4)$ определена корректно.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 1. Для любого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ имеем

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i}f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i}\overline{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{1,i}a \oplus c_{0,i}\overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = \\ = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n). \quad (3)$$

При $i = 1$ указанное соотношение принимает вид

$$f_1(\tilde{1}^n) = c_{a,1} \oplus I_{M_1}(\tilde{1}^n) = 1 \oplus I_{\varnothing}(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1,$$

а при $i = 2, 3, 4$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = 0 \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1.$$

Тем самым для любого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ доказано равенство $f_i(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда по условию а) функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) выполнено. Из этого же равенства следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^4)$. Далее, в силу условий а), б) функцию $\varphi(\tilde{x}^4)$ можно реализовать схемой в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$ относительно неисправностей рассматриваемого вида, кроме, быть может, константных неисправностей на выходе выходного элемента схемы, поэтому условие 3) также выполнено. Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii), (iv). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^B(f) \leqslant |T| + 2 = 3$. Лемма 1 доказана. $\square$

Рассмотрим в качестве базиса множество $B_7 = \{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3, \overline{x}\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа 0 на входах и выходах элементов.

Лемма 2. *Любую булеву функцию от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение 1, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_7, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$.*

Лемма 2 следует из лемм 3, 4 работы [16] при $k = 1$.

Лемма 3. *Любую булеву функцию от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение 0, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_7, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно неисправностей на входах и* *выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен.*

Лемма 3 следует из леммы 4 работы [16] при $k = 1$.

Теорема 2. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{IO})}(n) \leqslant 3$.

Доказательство. Для базиса $B = B_7$ и однотипных константных неисправностей типа 0 на входах и выходах элементов условие а) леммы 1 выполнено в силу леммы 2, а условие б) леммы 1 — в силу леммы 3. Из леммы 1 следует, что $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{IO})}(f) \leqslant 3$ для любой неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$. В случае $f \equiv 1$ функцию f можно реализовать схемой, состоящей из одного трёхвходового элемента, реализующего функцию вида $x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, на все входы которого подаётся переменная x_1; действительно, $x_1x_1x_1 \vee \overline{x}_1\overline{x}_1\overline{x}_1 \equiv 1$. Легко видеть, что при неисправности на выходе этого элемента схема будет реализовывать константу 0, а при неисправности на любом его входе — функцию $0x_1x_1 \vee 1\overline{x}_1\overline{x}_1 = \overline{x}_1$. Любые две из функций $1, 0, \overline{x}_1$ можно отличить друг от друга на множестве $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$, поэтому $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{IO})}(f) \leqslant 2$. Наконец, если $f \equiv 0$, то значение $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{IO})}(f)$ не определено в силу леммы 2 из [16] при $k = 1$. Из приведённых рассуждений следует, что $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{IO})}(n) \leqslant 3$ для любого $n \geqslant 0$. Теорема 2 доказана. □

Используя теорему 2 и принцип двойственности (см., например, [19, с. 24]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теоремы 2 на двойственные, нетрудно получить неравенство

$$D^{B_7^*}_{1\,(\mathrm{IO})}(n) \leqslant 3 \tag{4}$$

при $n \geqslant 0$, где $B_7^* = \{\overline{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3}, \overline{x}\}$.

Из теоремы 2 и соотношения (4) для любого $n \geqslant 0$ вытекают неравенства $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{I})}(n) \leqslant 3$, $D^{B_7^*}_{1\,(\mathrm{I})}(n) \leqslant 3$, $D^{B_7}_{0\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 3$ и $D^{B_7^*}_{1\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 3$, последние два из которых можно отнести и к следующему разделу.

Однотипные константные неисправности на выходах элементов

Рассмотрим базис Жегалкина $B_2 = \{\&, \oplus, 1\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ (вида $x \oplus y$, 1, 0), будем называть *конъюнктором* (соответственно *сумматором*, *элементом «константа* 1», *элементом «константа* 0»). Вполне разумно считать, что элемент «константа 1» не может быть неисправен.

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n называется *нулевым набором* булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = 0$.

Лемма 4. *Любую булеву функцию от n переменных, отличную от константы 1, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_2, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\sigma}\}$, где $\tilde{\sigma}$ — нулевой набор этой функции, содержащий максимальное число единиц.*

Доказательство. В случае $f \equiv 0$ реализуем функцию f схемой в базисе B_2, состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся константа 1. У такой схемы, очевидно, есть только одна функция неисправности — константа 1, поэтому множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё ЕПТ, что и требовалось доказать. В случае же $f \not\equiv 0$ лемма 4 следует из доказательства основной теоремы работы [18] (в указанной работе, на самом деле, рассматривался базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, но элемент «константа 0» из этого базиса использовался только при построении схемы, реализующей тождественный нуль.) □

Теорема 3. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_2}_{1\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 3$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция от n переменных. Докажем неравенство

$$D^{B_2}_{1\,(\mathrm{O})}(f) \leqslant 3; \tag{5}$$

из него будет следовать справедливость теоремы 3. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой в базисе B_2, состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно, состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся константа 1). У такой схемы нет ни одной функции неисправности (соответственно, есть только одна функция неисправности — константа 1), поэтому множество, состоящее из любого одного набора длины n, является для неё ЕДТ длины 1 и неравенство (5) выполнено.

Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Тогда существует хотя бы один её нулевой набор. Рассмотрим два случая.

1. Единственным нулевым набором функции $f(\tilde{x}^n)$ является набор $(\tilde{1}^n)$. Положим $m = 2$, $l = 1$,

$$\begin{gathered}
\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}) = (1, 1),\\
\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}) = (0, 0),\\
T = \{(\tilde{1}^n)\},\\
\tilde{\pi}_1 = (0, 0),
\end{gathered}$$

$$M_1 = M_2 = \varnothing,$$
$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 1. Для любого $i \in \{1, 2\}$ имеем

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 1 \oplus I_{\varnothing}(\tilde{1}^n) = 0.$$

Из равенств $f_i(\tilde{1}^n) = 0$, где $i = 1, 2$, и леммы 4 следует, что функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_2, для которой множество T является ЕПТ, и условие 1) выполнено. Из этих же равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (0, 0)$. Набор $\tilde{\pi}_1$ является нулевым набором функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, содержащим максимальное число единиц, поэтому в силу леммы 4 данную функцию можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_2, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$, и условие 3) также выполнено. Условия 4) и 5) следуют из свойств функции $x_1 \vee x_2$ и того факта, что функция f не обладает $(T, 0)$-свойством. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^{B_2}_{1\,(0)}(f) \leqslant |T| + 1 < 3$. Случай 1 разобран.

2. Существует нулевой набор функции $f(\tilde{x}^n)$, отличный от набора $(\tilde{1}^n)$. Введём обозначение $a = f(\tilde{1}^n)$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1, 1, 1, 0, 0, 0),$$
$$\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (\tilde{1}^6),$$
$$T = \{\tilde{1}^n\},$$
$$\tilde{\pi}_1 = (\tilde{0}^6),$$
$$M_1 = M_2 = M_3 = T,$$
$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0, \\ \varnothing, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — произвольная булева функция, удовлетворяющая условиям (i)–(iv) (см. с. 11). Любые два из наборов $\tilde{c}_1, \tilde{c}_0, \tilde{\pi}_1$ отличаются друг от друга хотя бы в трёх компонентах, поэтому данная функция определена корректно.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 1. Для любого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ выполнено соотношение (3). При $i = 1, 2, 3$ оно принимает вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 0$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 0 = 0.$$

Тем самым для любых $a \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ доказано равенство $f_i(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда по лемме 4 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_2, для которой множество T является ЕПТ, и условие 1) выполнено. Из этого же равенства следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{0}^6)$. Набор $\tilde{c}_0$ в силу условия (i) является нулевым набором функции $\varphi(\tilde{x}_6)$, содержащим максимальное число единиц, поэтому по лемме 4 данную функцию можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_2, допускающей ЕПТ $\{\tilde{c}_0\} \subset T_\varphi$, и условие 3) также выполнено. (Включение $\{\tilde{c}_0\} \subset T_\varphi$ верно в силу определения множества T_φ в формулировке теоремы 1 и того факта, что функция f обладает $(T, 0)$-свойством по предположению случая 2.) Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii), (iv). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^{B_2}_{1\,(\text{O})}(f) \leqslant |T| + 2 = 3$. Теорема 3 доказана. $\square$

Используя теорему 3 и принцип двойственности, нетрудно получить неравенство

$$D^{B_2^*}_{0\,(\text{O})}(n) \leqslant 3 \tag{6}$$

при $n \geqslant 0$, где $B_2^* = \{\vee, \sim, 0\}$.

Произвольные константные неисправности на входах и выходах элементов

Рассмотрим в качестве неисправностей функциональных элементов произвольные константные неисправности на входах и выходах элементов, а в качестве базиса — множество $B_8 = \{\eta(\tilde{x}^4), x_1 \sim x_2, \overline{x}, 0\}$, где $\eta(\tilde{x}^4)$ — произвольная несамодвойственная булева функция, принимающая значение α на наборе $(\tilde{\alpha}^4)$ и значение $\overline{\alpha}$ на всех соседних с ним наборах для любого $\alpha \in \{0, 1\}$ (определение самодвойственной булевой функции можно найти, например, в [19, с. 23, с. 34]).

Два двоичных набора одинаковой длины называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах.

Лемма 5. *Любую булеву функцию от n переменных, принимающую разные значения на противоположных наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_8, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$.*

Лемма 5 следует из леммы 4 работы [17] при $k = 1$ и $\varphi(\tilde{x}^{2k+2}) = \eta(\tilde{x}_4)$.

Лемма 6. *Любую булеву функцию от n переменных, принимающую значение 1 на противоположных наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, можно реализовать схемой в базисе B_8, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы.*

Лемма 6 доказывается по аналогии с доказательством леммы 5 работы [17] при $k = 1$.

Теорема 4. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{IO})}(n) \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция от n переменных. Если $f \equiv 1$, то значение $D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{IO})}(f)$ не определено в силу леммы 6 из [17] при $k = 1$. Для любой другой функции f докажем неравенство

$$D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{IO})}(f) \leqslant 4; \tag{7}$$

из него будет следовать справедливость теоремы 4. В случае $f \equiv 0$ функцию f можно реализовать схемой, состоящей из одного элемента «константа 0». Он не имеет входов, поэтому единственной возможной неисправностью данной схемы является неисправность типа 1 на его выходе, при которой схема станет реализовывать константу 1. Указанная неисправность обнаруживается на любом двоичном наборе длины n, поэтому $D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{IO})}(f) \leqslant 1$ и неравенство (7) выполнено.

Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Тогда существует такой набор $\tilde{\sigma}_1$ длины n, что $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Пусть $\tilde{\sigma}_2$ — набор, противоположный набору $\tilde{\sigma}_1$. Введём обозначение $a = f(\tilde{\sigma}_2)$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\begin{gathered}
\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1, 1, 1, 0, 0, 0),\\
\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (0, 0, 0, 1, 1, 1),\\
T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\},\\
\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6),\\
\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6),\\
M_1 = M_2 = M_3 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = 0,\\ \{\tilde{\sigma}_2\}, & \text{если } a = 1, \end{cases}
\end{gathered}$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0, \\ \{\tilde{\sigma}_1\}, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — булева функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(iii′) $\varphi(\tilde{\pi}_1) = 1$;

(iv′) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_1$, функция φ принимает значение 0;

(v) $\varphi(\tilde{\pi}_2) = a$;

(vi) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_2$, функция φ принимает значение $\overline{a}$,

а также условиям (i), (ii) (см. с. 11).

На всех остальных двоичных наборах длины 6 функция φ может принимать произвольные значения.

Любые два из наборов $\tilde{c}_1, \tilde{c}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ отличаются друг от друга хотя бы в трёх компонентах, поэтому данная функция определена корректно.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 1. Для любого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ имеем

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} f(\tilde{\sigma}_1) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_1),$$

$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} f(\tilde{\sigma}_2) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{\sigma}_2) \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} a \oplus c_{0,i} \overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_2) = \\ = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_2).$$

При $a = 0$, $i = 1, 2, 3$ указанные соотношения принимают вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{\varnothing}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1,$$
$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{0,i} \oplus I_{\varnothing}(\tilde{\sigma}_2) = 0 \oplus 0 = 0;$$

при $a = 0$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{\sigma}_1) = 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{\sigma}_2) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 1, 2, 3$ — вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_2\}}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1,$$
$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_2\}}(\tilde{\sigma}_2) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_1\}}(\tilde{\sigma}_1) = 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_1\}}(\tilde{\sigma}_2) = 0 \oplus 0 = 0.$$

Тем самым для любых $a \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ доказаны равенства $f_i(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $f_i(\tilde{\sigma}_2) = 0$. Тогда по лемме 5 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_8, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) выполнено. Из этих же равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6)$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6)$.

В случае $a = 0$ в силу условий (iii′), (v) и леммы 5 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_8, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\} \subset T_\varphi$. Если же $a = 1$, то из условий (iii′), (v) получаем, что $\varphi(\tilde{\pi}_1) = \varphi(\tilde{\pi}_2) = 1$; тогда в силу леммы 6 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать схемой в базисе B_8, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\} \subset T_\varphi$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе её выходного элемента. В каждом из случаев $a = 0$, $a = 1$ получаем, что условие 3) выполнено.

Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii′), (iv′), (v), (vi). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{IO})}(f) \leqslant |T| + 2 = 4$. Теорема 4 доказана. □

Из теоремы 4 для любого $n \geqslant 0$ вытекают неравенства $D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{I})}(n) \leqslant 4$ и $D^{B_8}_{0,1\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 4$, второе из которых можно отнести и к следующему разделу.

Произвольные константные неисправности на выходах элементов

Рассмотрим в качестве базиса множество $B_9 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов.

Лемма 7. *Любую булеву функцию от n переменных, принимающую разные значения на наборах $(\tilde{1}^n)$ и $(\tilde{0}^n)$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$.*

Лемма 7 следует из рассмотрения случая А в доказательстве теоремы 1 из [10].

Лемма 8. *Любую неконстантную булеву функцию от n переменных, принимающую одинаковые значения на наборах $(\tilde{1}^n)$ и $(\tilde{0}^n)$, самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина которой равна $x_1\& \ldots \& x_k$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})\}$.*

Лемма 8 следует из рассмотрения случая Б в доказательстве теоремы 1 из [10].

Теорема 5. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{B_9}_{0,1\,(\mathrm{O})}(n) \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция от n переменных. Если $f \equiv 0$ ($f \equiv 1$), то в любой схеме, реализующей функцию f, должен содержаться выходной элемент; тогда при неисправности типа 0 (типа 1) этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу 0 (соответственно, 1), т. е. исходная схема избыточна. Получаем, что неизбыточных схем, реализующих функцию f, не существует и значение $D^{B_9}_{0,1\,(\mathrm{O})}(f)$ не определено. Для любой другой (т. е. отличной от констант) функции f докажем неравенство

$$D^{B_9}_{0,1\,(\mathrm{O})}(f) \leqslant 4;$$

из него будет следовать справедливость теоремы 5. Введём обозначение $a = f(\tilde{1}^n)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) = \overline{a}$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\begin{gathered}
\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1,1,1,0,0,0),\\
\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (0,0,0,1,1,1),\\
T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\},\\
\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6),\\
\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6),\\
M_1 = M_2 = M_3 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0,\\ \varnothing, & \text{если } a = 1,\end{cases}\\
M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = 0,\\ T, & \text{если } a = 1.\end{cases}
\end{gathered}$$

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — булева функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(v′) $\varphi(\tilde{\pi}_2) = \overline{a}$;

(vi′) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_2$, функция φ принимает значение a,

а также условиям (i)–(iv) (см. с. 11).

На всех остальных двоичных наборах длины 6 функция φ может принимать произвольные значения.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 1. Для любого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ выполнены соотношения (3) и

$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} f(\tilde{0}^n) \oplus c_{0,i}\overline{f}(\tilde{0}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{1,i}\overline{a} \oplus c_{0,i} a \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = \\ = c_{\overline{a},i} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n).$$

При $a = 0$, $i = 1, 2, 3$ они принимают вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{0}^n) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 0$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{0}^n) = 0 \oplus 0 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 1, 2, 3$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{0,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{0}^n) = 0 \oplus 0 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{0}^n) = 1 \oplus 1 = 0.$$

Тем самым для любых $a \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ доказаны равенства $f_i(\tilde{1}^n) = 1$, $f_i(\tilde{0}^n) = 0$, а значит, и неравенство $f_i(\tilde{1}^n) \neq f_i(\tilde{0}^n)$. Тогда по лемме 7 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) выполнено. Из этих же равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6)$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6)$.

В силу условий (iii), (v′) и леммы 7 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\} \subset T_\varphi$. Получаем, что условие 3) также выполнено. Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii), (iv), (v′), (vi′). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^{B_9}_{0,1\,(\mathrm{O})}(f) \leqslant |T| + 2 = 4$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) = a$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\tilde{c}_a = (c_{a,1}, c_{a,2}, c_{a,3}, c_{a,4}, c_{a,5}, c_{a,6}) = (\tilde{0}^6),$$
$$\tilde{c}_{\overline{a}} = (c_{\overline{a},1}, c_{\overline{a},2}, c_{\overline{a},3}, c_{\overline{a},4}, c_{\overline{a},5}, c_{\overline{a},6}) = (\tilde{1}^6),$$
$$T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\},$$
$$\tilde{\pi}_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0),$$
$$\tilde{\pi}_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1),$$
$$M_1 = M_2 = M_3 = \{(\tilde{1}^n)\},$$
$$M_4 = M_5 = M_6 = \{(\tilde{0}^n)\}.$$

Булеву функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ определим несколько позже.

Проверим выполнение условий 1), 2) из формулировки теоремы 1. Для любого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ имеем

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i}\overline{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{1,i}a \oplus c_{0,i}\overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = \\ = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = I_{M_i}(\tilde{1}^n),$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} f(\tilde{0}^n) \oplus c_{0,i}\overline{f}(\tilde{0}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{1,i}a \oplus c_{0,i}\overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = \\ = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = I_{M_i}(\tilde{0}^n).$$

При $i = 1,2,3$ указанные соотношения принимают вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = I_{\{(\tilde{1}^n)\}}(\tilde{1}^n) = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = I_{\{(\tilde{1}^n)\}}(\tilde{0}^n) = 0,$$

а при $i = 4,5,6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = I_{\{(\tilde{0}^n)\}}(\tilde{1}^n) = 0,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = I_{\{(\tilde{0}^n)\}}(\tilde{0}^n) = 1.$$

Из последних равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (1,1,1,0,0,0)$, $\tilde{\pi}_2 = (0,0,0,1,1,1)$, и, кроме того, справедливость неравенства $f_i(\tilde{1}^n) \neq f_i(\tilde{0}^n)$ для любого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Тогда по лемме 7 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) также выполнено.

Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ на наборах, не принадлежащих множеству T, принимает оба значения a, $\overline{a}$. Возьмём в качестве $\varphi(\tilde{x}^6)$ произвольную булеву функцию, удовлетворяющую условиям (i)–(vi) (см. с. 11, 18).

Проверим выполнение условий 3)–5) из формулировки теоремы 1. В силу условий (i), (ii) и леммы 7 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, допускающей ЕПТ $\{\tilde{c}_a, \tilde{c}_{\overline{a}}\} \subset T_\varphi$, поэтому условие 3) выполнено. (Включение $\{\tilde{c}_a, \tilde{c}_{\overline{a}}\} \subset T_\varphi$ верно в силу определения множества T_φ в формулировке теоремы 1 и того факта, что функция f обладает (T,a)-свойством и $(T,\overline{a})$-свойством по предположению подслучая 2.1.) Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii)–(vi). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^{B_9}_{0,1\,(\mathrm{O})}(f) \leqslant |T| + 2 = 4$. Подслучай 2.1 разобран.

2.2. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ на любом наборе, не принадлежащем множеству T, принимает одно и то же значение. Это значение равно $\overline{a}$, поскольку $f \not\equiv a$, но $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n) = a$. Возьмём в качестве $\varphi(\tilde{x}^6)$ булеву функцию, принимающая значение a на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ и значение $\overline{a}$ на всех остальных наборах. Представим её полиномом Жегалкина:

$$\varphi(\tilde{x}^6) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{8}$$

где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме.

Проверим выполнение условий 3)–5) из формулировки теоремы 1. Пусть $K_1 = x_{j_1} \& \ldots \& x_{j_k}$. Ясно, что на наборе $(\tilde{0}^6)$ функция φ принимает значение $\underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m} \oplus c = c$, которое по определению этой функции равно $\overline{a}$, а на наборе $\tilde{\pi}$ длины 6, единичными компонентами которого являются в точности компоненты с номерами $j_1, \ldots, j_k$, она принимает значение $1 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = 1 \oplus c$, которое, соответственно, равно a. Это означает, что $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1$ или $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_2$, а тогда $k = 3$, т. е. ранг самой короткой конъюнкции K_1 в правой части представления (8) равен 3. В эту часть обязательно входит слагаемое $x_1 x_2 x_3$, поскольку в противном случае на наборе $\tilde{\pi}_1$ все конъюнкции $K_1, \ldots, K_m$ обратились бы в нуль и значение $\varphi(\tilde{\pi}_1)$ было бы равно $c = \overline{a}$, что противоречит определению функции φ. Поэтому можно считать, что $K_1 = x_1 x_2 x_3$. Тогда по лемме 8 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_9, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^6), (1, 1, 1, 0, 0, 0)\} = \{\tilde{c}_{\overline{a}}, \tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$, и условие 3) выполнено. (Включение $\{\tilde{c}_{\overline{a}}, \tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$ верно в силу определения множества T_φ в формулировке теоремы 1 и того факта, что функция f обладает $(T, \overline{a})$-свойством по предположению подслучая 2.2.)

Условия 4), 5) проверяются непосредственно с учётом определения функции φ и того, что функция f не обладает (T, a)-свойством по предположению подслучая. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что $D^{B_9}_{0,1\,(\mathrm{O})}(f) \leqslant |T| + 1 < 4$. Теорема 5 доказана. $\square$

Инверсные неисправности

Пусть зафиксированы «места» возможных неисправностей функциональных элементов: входы и выходы элементов, только их входы или только их выходы.

Лемма 9. *Пусть S — схема из функциональных элементов, неизбыточная и допускающая ЕПТ T относительно однотипных константных неисправностей типа p, $p \in \{0, 1\}$, элементов, кроме, быть может, неисправ-*

ности на выходе её выходного элемента. Тогда она неизбыточна и допускает ЕПТ T относительно инверсных неисправностей элементов.

Доказательство. Если в схеме S невозможна константная неисправность типа p ни одного элемента (такое может быть, например, в случае, когда в этой схеме не содержится элементов), то в ней невозможна и инверсная неисправность ни одного элемента и лемма очевидна. Пусть теперь в схеме S возможна константная неисправность типа p хотя бы одного элемента. Данная неисправность в силу неизбыточности схемы должна быть обнаружена хотя бы на одном наборе из множества T, поэтому $|T| \geqslant 1$. Предположим, что имеет место инверсная неисправность произвольного элемента схемы S. Рассмотрим два случая.

1. Неисправен выход выходного элемента схемы S. Тогда схема реализует отрицание исходной функции и указанную неисправность можно обнаружить на любом наборе из множества T.

2. Имеет место любая другая инверсная неисправность одного элемента схемы S. Неисправный вход/выход элемента обозначим через v. Множество T по условию позволяет обнаружить константную неисправность типа p на входе/выходе v, поэтому в T найдётся такой набор $\tilde{\sigma}$, что значение a, выдаваемое схемой S на этом наборе при отсутствии в ней неисправностей, отличается от значения на выходе этой схемы на наборе $\tilde{\sigma}$ при неисправности типа p входа/выхода v (которое, соответственно, равно $\overline{a}$). При этом значение на входе/выходе v в схеме S при его неисправности типа p на наборе $\tilde{\sigma}$ равно p, а при отсутствии неисправностей в схеме S обязано равняться $\overline{p}$ (иначе указанную неисправность нельзя было бы обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$). Тогда при возникновении инверсной неисправности на входе/выходе v значение на нём в схеме S на наборе $\tilde{\sigma}$ меняется с $\overline{p}$ на p, а значение на выходе схемы S — с a на $\overline{a}$. Следовательно, рассматриваемую инверсную неисправность можно обнаружить хотя бы на одном наборе из множества T, откуда вытекает справедливость леммы 9. □

Следствие 1. *Пусть S — схема из функциональных элементов, неизбыточная и допускающая ЕПТ T относительно произвольных константных неисправностей элементов, кроме, быть может, неисправностей на выходе её выходного элемента. Тогда она неизбыточна и допускает ЕПТ T относительно инверсных неисправностей элементов.*

С использованием леммы 9 и следствия 1 из теорем 2–5 и неравенств (4), (6) можно получить аналогичные оценки величин $D^B(n)$ в случае, когда, помимо константных неисправностей на входах и выходах (только на выходах) элементов, допускаются также инверсные неисправности на входах и выходах (соответственно, только на выходах) элементов.

Действительно, если выполнены условия 1)–5) теоремы 1 при однотипных или произвольных константных неисправностях элементов, то все эти условия будут справедливы и при дополнительном рассмотрении инверсных неисправностей элементов в тех же местах.

Инверсные неисправности на входах и выходах элементов

Рассмотрим базис Жегалкина B_2, а в качестве неисправностей функциональных элементов — инверсные неисправности на входах и выходах элементов.

Лемма 10. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_2, для которой множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является ЕПТ.*

Доказательство. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой в базисе B_2, состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно, состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся константа 1). У такой схемы нет ни одной функции неисправности (соответственно, есть только одна функция неисправности — константа 1), и лемма очевидна. Далее считаем, что функция f отлична от констант. Реализуем её стандартной схемой S в базисе B_2, моделирующей представление этой функции полиномом Жегалкина (см., например, [4, с. 114]; слагаемое c либо отсутствует, либо равно 1). Рассмотрим неисправность произвольного одного входа/выхода элемента схемы S. Если неисправен вход или выход какого-то конъюнктора, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение на выходе цепочки из конъюнкторов, содержащей данный конъюнктор, изменится с 1 на 0. Это изменение, а также изменение на входе или выходе какого-то сумматора либо на выходе элемента «константа 1», в случае, если указанный вход/выход был неисправен, очевидно, пройдёт по цепочке из сумматоров до выхода схемы, и неисправность будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$. Лемма 10 доказана. □

Теорема 6. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_2}_{\mathrm{Inv\,(IO)}}(n) \leqslant 3$.*

Доказательство. Для базиса $B = B_2$ и инверсных неисправностей на входах и выходах элементов условия а) и б) леммы 1 выполнены в силу леммы 10. Из леммы 1 следует, что $D^{B_2}_{\mathrm{Inv\,(IO)}}(f) \leqslant 3$ для любой неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$. В случаях же $f \equiv 1$, $f \equiv 0$ очевидным образом получаем, что $D^{B_2}_{\mathrm{Inv\,(IO)}}(f) \leqslant 1$ — см. начало доказательства леммы 10. Из приведённых неравенств следует справедливость теоремы 6. □

Используя теорему 6 и принцип двойственности, нетрудно получить неравенство

$$D^{B_2^*}_{\mathrm{Inv\,(IO)}}(n) \leqslant 3 \tag{9}$$

при $n \geqslant 0$ для базиса $B_2^* = \{\vee, \sim, 0\}$.

Из теоремы 6 и соотношения (9) для любого $n \geqslant 0$ вытекают неравенства $D^{B_2}_{\mathrm{Inv\,(I)}}(n) \leqslant 3$ и $D^{B_2^*}_{\mathrm{Inv\,(I)}}(n) \leqslant 3$.

Заключение

В работе предложен метод построения схем из функциональных элементов в произвольном функционально полном базисе, допускающих короткие единичные диагностические тесты (ЕДТ) относительно константных (однотипных или произвольных) либо инверсных неисправностей на входах и/или выходах элементов, основанный на существовании схем в том же базисе, допускающих короткие единичные проверяющие тесты (ЕПТ) относительно неисправностей такого же типа. С использованием данного метода получен ряд новых константных верхних оценок функций Шеннона длины ЕДТ для схем в различных базисах при различных типах неисправностей элементов.

Метод может иметь большую теоретическую значимость: с его использованием из любых существующих и новых верхних оценок функций Шеннона длины ЕПТ для схем из функциональных элементов можно пытаться получить отличающиеся от них не более чем на 2 верхние оценки функций Шеннона длины ЕДТ для схем в том же базисе при тех же неисправностях. Способы получения таких оценок наглядно продемонстрированы в доказательствах теорем 2–6. Вместе с тем указанный метод, вероятно, не позволяет получить точные значения функций Шеннона длины ЕДТ для схем из функциональных элементов (т. е. верхние оценки, полученные с его помощью, не являются окончательными), в отличие от других методов синтеза схем, использованных, например, в работах автора [6, 7].

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её

приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: Изд-во МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

6. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2015. — № 74. — 21 с.

7. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 50. — 16 с.

8. Попков К. А. Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 139. — 20 с.

9. Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих короткие единичные диагностические тесты при константных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 2. — С. 87–102.

10. Попков К. А. Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 33. — 23 с.

11. Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

12. Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины

два // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 3. — С. 56–72.

13. Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 4. — С. 38–54.
14. Любич И. Г., Романов Д. С. О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над некоторыми базисами // Прикладная математика и информатика. Вып. 58. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 47–61.
15. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.
16. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 87. — 18 с.
17. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 149. — 32 с.
18. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 5. — С. 49–52.
19. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

Оглавление