ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 79 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Новейшие методы небесной механики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Новейшие методы небесной механики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 79. 18 с. doi:10.20948/prepr-2019-79
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-79

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Брюно

Новейшие методы небесной механики

Москва — 2019

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно

Новейшие методы небесной механики. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2019.

В связи со 120-летием выхода последнего тома книги А.Пуанкаре «Новые методы небесной механики» рассматриваются следующие методы, возникшие с тех пор.

1. Метод нормальной формы, позволяющий изучать регулярные возмущения вблизи стационарного решения, вблизи периодического решения и т. д.
2. Метод укороченных систем, полученных с помощью многогранников Ньютона, позволяющий изучать сингулярные возмущения.
3. Метод порождающих семейств периодических решений (регулярных и сингулярных).
4. Метод обобщённых задач, допускающих тела с отрицательными массами.
5. Вычисление сети семейств периодических решений как «скелета» части фазового пространства.

Ключевые слова: система Гамильтона, нормальная форма, укороченный гамильтониан, семейство периодических решений, порождающее семейство, отрицательная масса, скелет.

Alexander Dmitrievich Bruno

The newest methods of celestial mechanics.

The last volume of the book ‘‘Les méthods nouvelles de la mecanique céleste’’ by Poincaré was published 120 years ago. Since then, the following methods have arisen.

1. Method of normal forms, allowing to study regular perturbations near a stationary solution, near a periodic solution and so on.
2. Method of truncated systems, found with a help of the Newton polyhedrons, allowing to study singular perturbations.
3. Method of generating families of periodic solutions (regular and singular).
4. Method of generalized problems, allowing bodies with negative masses.
5. Computation of a net of families of periodic solutions as a “skeleton” of a part of the phase space.

Key words: Hamiltonian system, normal form, truncated Hamiltonian, family of periodic solutions, generated family, negative mass, skeleton.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18–01–00422а.

e-mail: `abruno@keldysh.ru`

1. Введение

В связи со 120-летием выхода последнего (третьего) тома книги А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики» [Poincaré, 1899] здесь рассматриваются следующие методы, возникшие за последние 120 лет.

1. Метод нормальной формы, позволяющий изучать регулярные возмущения вблизи стационарного решения [Брюно, 1990, гл. I], вблизи периодического решения [Брюно, 1990, гл. II], [Брюно, 2018; 2019a,b], вблизи инвариантного тора [Брюно, 1990, гл. II] и вблизи семейств таких решений [Брюно, 1990, гл. VII, VIII], а также — бифуркации периодических решений и инвариантных торов.
2. Метод укороченных систем, полученных с помощью многогранников Ньютона, позволяющий изучать сингулярные возмущения. Теорию и три приложения см. в [Брюно, 1998, гл. IV]. Другие приложения: уравнение Белецкого о колебаниях спутника [Bruno, Varin, 1997], задачи о периодических облётах Луны и планет [Bruno, 1981].
3. Метод порождающих семейств периодических решений (регулярных и сингулярных). Порождающие семейства — это пределы семейств периодических решений при стремлении к нулю возмущающих параметров. Решения порождающих семейств состоят из определённых частей решений предельной задачи. Если предельная задача интегрируема, то порождающие семейства находятся аналитически. Приложения: ограниченная задача трёх тел, где предельная задача – это задача двух тел и порождающие семейства однопараметрические [Брюно, 1990, гл. III–V], [Брюно, Варин, 2007; Hénon, 1997; 2001]; задача Хилла, где предельная задача — это промежуточная задача Хенона и каждое порождающее семейство состоит из одного решения [Батхин, 2013a,b].
4. Метод обобщённых задач, допускающих тела с отрицательными массами [Батхин, 2014]. В таких задачах имеются единые полные семейства периодических решений, что облегчает их вычисление. Пример: задача Хилла [Батхин, 2014].
5. Вычисление сети семейств периодических решений как «скелета» части фазового пространства. О пользе таких «скелетов» писал ещё Пуанкаре [Poincaré, 1899]. Примеры: задача Хилла [Батхин, 2014] и отчасти ограниченная задача трёх тел [Брюно, Варин, 2007; 2009a,b,c,d; 2011; Bruno, Varin, 2012].

Имеется ещё много работ по этим методам. Здесь приведены итоговые. В разработке и применении этих пяти методов принимали участие автор и его сотрудники. Эти методы рассматриваются ниже в указанной последовательности в разделах 2–6.

2. Резонансная нормальная форма

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижной точки

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) = 0. \tag{2.2}$$

Если функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ аналитична в этой точке, то она разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} = \xi_1^{p_1} \xi_2^{p_2} \cdots \xi_n^{p_n}$. Поскольку точка (2.2) неподвижная, то разложение (2.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (2.1). Собственные числа её матрицы разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Канонические замены координат

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{2.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы.

Теорема 1 ([Брюно, 1972, §12])**.** *Существует каноническое формальное преобразование* (2.4)*, приводящее гамильтониан* (2.3) *к нормальной форме*

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}, \tag{2.5}$$

где ряд g содержит только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0,$$

а квадратичная часть $g_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ имеет свою нормальную форму (так что матрица линейной части системы является гамильтоновым аналогом жордановой нормальной формы).

Здесь $\langle \mathbf{p},\boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + \dots + p_n\lambda_n$ — скалярное произведение. Если $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то нормальная форма (2.5) эквивалентна системе с меньшим числом степеней свободы и дополнительными параметрами. При нормализующем преобразовании (2.4) сохраняются малые параметры и линейные автоморфизмы

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \to \left(\widetilde{\boldsymbol{\xi}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}}\right), \quad t \to \widetilde{t}\,.$$

Локальные, т. е. проходящие через точку $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$, семейства периодических решений системы (2.5) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \lambda_j x_j a\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda_j y_j a\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

где a — свободный параметр. Им соответствуют локальные семейства периодических решений исходной системы (2.1).

Для вещественной исходной системы (2.1) коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы (2.5) удовлетворяют специальным соотношениям вещественности, и при стандартной канонической линейной замене координат $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{X},\mathbf{Y})$ система (2.5) переходит в вещественную систему.

Имеется несколько способов вычисления коэффициентов $g_{\mathbf{pq}}$ нормальной формы (2.5). Наиболее простой описан в книге [Журавлев, Петров, Шундерюк, 2015].

Резонансная нормальная форма автономной системы Гамильтона вблизи стационарного решения, учитывающая только собственные числа матрицы A её линейной части и без ограничений на эту матрицу A, была введена в [Брюно, 1972, § 12].

Позже была введена слегка более простая сверхрезонансная нормальная форма, которая учитывала жордановы клетки нормальной формы матрицы A [Baider, Sanders, 1991]. Но эти дополнительные упрощения не позволяли дополнительно понизить число степеней свободы.

Теория резонансной нормальной формы вблизи стационарного решения подробно изложена в гл. I книги [Брюно, 1990]. В гл. II книги [Брюно, 1990] изложена аналогичная теория резонансной нормальной формы для периодической системы Гамильтона и вблизи периодического решения. См. также [Брюно, 2018; 2019a,b]. Нормальная форма вблизи инвариантного тора и вблизи семейства периодических решений изложена в [Bruno, 1989, Part II]; [Брюно, 1990, гл. VII, VIII]. Нормальная форма полезна при исследовании устойчивости, бифуркаций и асимптотического поведения решений.

3. Метод укороченных систем

3.1. Укороченная функция Гамильтона. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ и $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ суть канонические переменные и малые параметры соответственно. Пусть функция Гамильтона разлагается в степенной ряд

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = \sum h_{\mathbf{pqr}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}\,, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$ и $h_{\mathbf{pqr}}$ — постоянные коэффициенты.

Каждому слагаемому ряда (3.1) поставим в соответствие его векторный показатель степени $Q = (\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{2n+s}$. Множество **S** всех точек Q с $h_Q \neq 0$ в сумме (3.1) называется *носителем* $\mathbf{S} = \mathbf{S}(f)$ суммы (3.1). Выпуклая оболочка $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Gamma}(f)$ носителя **S** называется *многогранником Ньютона* суммы (3.1). Его граница состоит из вершин $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(0)}$, рёбер $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(1)}$ и граней $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)}$ размерностей d: $1 < d \leqslant 2n + s - 1$. Пересечение $\mathbf{S} \bigcap \boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)} = \mathbf{S}_j^{(d)}$ называется *граничным подмножеством* множества **S**. Каждой *обобщённой грани* $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)}$ (включая вершины и рёбра) соответствуют:

- *нормальный конус* $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в пространстве $\mathbb{R}_*^{2n+s}$, сопряжённом к пространству $\mathbb{R}^{2n+s}$;
- *укороченная сумма*

$$\hat{h}_j^{(d)} = \sum h_{\mathbf{pqr}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}} \text{ по } Q = (\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}) \in \mathbf{S}_j^{(d)}.$$

Она является первым приближением к сумме (3.1), когда

$$(\log|x_1|, \ldots, \log|x_n|, \log|y_1|, \ldots, \log|y_n|, \log|\mu_1|, \ldots, \log|\mu_s|) \to \infty$$

вдоль $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Таким образом с помощью укороченных функций Гамильтона мы можем найти приближённые задачи.

3.2. Ограниченная задача трёх тел. Пусть два тела $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ с массами $1 - \mu$ и μ соответственно вращаются вокруг их общего центра масс с периодом 2π. Плоская круговая ограниченная задача трёх тел состоит в исследовании плоского движения тела $\mathbf{P}_3$ бесконечно малой массы под действием ньютонова притяжения тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Во вращающейся (синодической) системе координат задача описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром μ [Euler, 1772]. Функция Гамильтона имеет вид [Брюно, 1990]

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1-\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} + \mu x_1. \quad (3.2)$$

Здесь тело $\mathbf{P}_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : x_1 = x_2 = 0\}$ и тело $\mathbf{P}_2 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : x_1 = 1,\ x_2 = 0\}$, где $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2)$. Рассмотрим малые значения отношения масс $\mu \geqslant 0$. Для $\mu = 0$ задача становится задачей двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$. Но здесь нужно удалить из фазового пространства точки, соответствующие столкновениям тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Точки столкновения расщепляют решения задачи двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$ на части. Для малых $\mu > 0$ вблизи тела $\mathbf{P}_2$ имеется сингулярное возмущение случая $\mu = 0$.

Для того чтобы найти все первые приближения ограниченной задачи трёх тел, нужно вблизи тела $\mathbf{P}_2$ ввести локальные координаты

$$\xi_1 = x_1 - 1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - 1$$

и разложить функцию Гамильтона в степенной ряд по этим координатам. После разложения $1/\sqrt{(\xi_1+1)^2+\xi_2^2}$ в ряд Маклорена функция Гамильтона (3.2) примет вид

$$
\begin{aligned}
h+\frac{3}{2}-2\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2)+\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2-\xi_1^2+\frac{1}{2}\xi_2^2+ \\
+f(\xi_1,\xi_2^2)+\mu\left\{\xi_1^2-\frac{1}{2}\xi_2^2-\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}-f(\xi_1,\xi_2^2)\right\},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где f — сходящийся степенной ряд, не содержащий членов порядка меньше трёх. Положим

$$
p=\operatorname{ord}\xi_1+\operatorname{ord}\xi_2,\quad q=\operatorname{ord}\eta_1+\operatorname{ord}\eta_2,\quad r=\operatorname{ord}\mu.
$$

Множество **S** этих точек (p,q,r) состоит из точек

$$
(0,2,0),\ (1,1,0),\ (2,0,0),\ (k,0,0),\ (2,0,1),\ (-1,0,1),\ (k,0,1),
$$

где $k=3,4,5,\ldots$ Выпуклая оболочка множества **S** — это многогранник $\mathbf{\Gamma}\subset\mathbb{R}^3$. Поверхность $\partial\mathbf{\Gamma}$ многогранника $\mathbf{\Gamma}$ состоит из граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$, рёбер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$. Каждому такому элементу $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует укороченный гамильтониан $\hat{h}_j^{(d)}$, являющийся суммой тех членов ряда (3.3), точки которых (p,q,r) принадлежат $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$. Укороченные функции Гамильтона $\hat{h}_j^{(d)}$ — это различные первые приближения функции (3.3), справедливые в различных областях пространства $(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2,\mu)$. Рис. 1 изображает многогранник $\mathbf{\Gamma}$, являющийся полубесконечной трёхгранной призмой с косым основанием. Он имеет четыре грани и шесть рёбер. Рассмотрим их.

Грань $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$, являющаяся косым основанием призмы $\mathbf{\Gamma}$, содержит вершины

$$
(0,2,0),\ (2,0,0),\ (-1,0,1)\quad \text{и точку}\quad (1,1,0)\in\mathbf{S}.
$$

Ей соответствует укороченная функция Гамильтона

$$
\hat{h}_1^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)+\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2-\xi_1^2+\frac{1}{2}\xi_2^2-\frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}. \tag{3.4}
$$

Она описывает задачу Хилла [Hill, 1878], которая является неинтегрируемой. Степенное преобразование

$$
\tilde{\xi}_i=\xi_i\mu^{-1/3},\quad \tilde{\eta}_i=\eta_i\mu^{-1/3},\quad i=1,2, \tag{3.5}
$$

приводит соответствующую систему Гамильтона к системе Гамильтона с функцией Гамильтона вида (3.4), где ξ_i,η_i,μ надо заменить на $\tilde{\xi}_i,\tilde{\eta}_1,1$ соответственно.

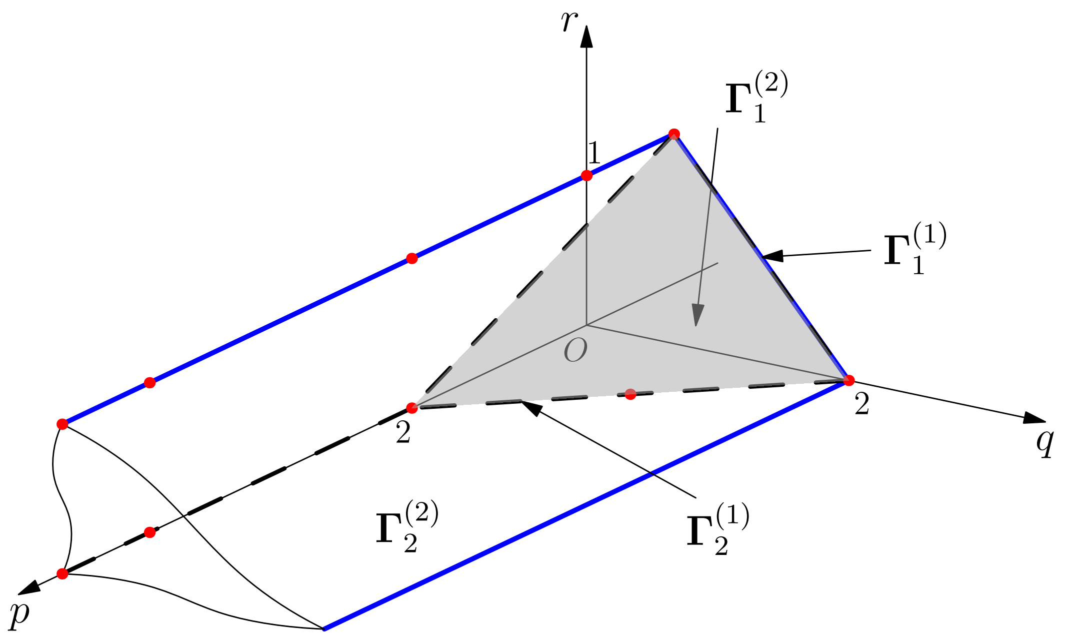


Рис. 1. Многогранник $\mathbf{\Gamma}$ для ряда (3.3) в координатах p, q, r.

Грань $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ содержит точки

$$(0,2,0),\ (1,1,0),\ (2,0,0) \quad \text{и} \quad (k,0,0) \subset \mathbf{S}.$$

Ей соответствует укороченная функция Гамильтона $\hat{h}_2^{(2)}$, которая получается из функции h при $\mu = 0$. Она описывает задачу двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$, которая является интегрируемой.

Рассмотрим рёбра. Из шести рёбер одно несобственное. Оно проходит через точку $(0{,}2{,}0)$ параллельно вектору $(1{,}0{,}0)$. На трёх рёбрах $q = 0$, т.е. для них укороченные функции Гамильтона не зависят от η_1, η_2, и у решений соответствующих укороченных систем Гамильтона $\xi_1, \xi_2 = \text{const}$, что неинтересно. Остаются два ребра.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$. Оно содержит точки $(0,2,0)$ и $(-1,0,1)$ множества $\mathbf{S}$. Соответствующая укороченная функция Гамильтона есть

$$\hat{h}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}. \tag{3.6}$$

Она описывает задачу двух тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Степенное преобразование (3.5) переводит её в систему Гамильтона с функцией Гамильтона вида (3.6), где ξ_i, η_i, μ заменены на $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_1, 1$ соответственно.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ содержит точки $(2,2,0), (1,1,0), (0,2,0)$ множества $\mathbf{S}$. Ему соответствует укороченная функция Гамильтона (3.4) с $\mu = 0$. Она описывает промежуточную задачу (между задачей Хилла и задачей двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$), которая является интегрируемой. Это первое приближение ввёл Хенон [Hénon, 1969].

Итак, очень близко к телу $\mathbf{P}_2$ первым приближением исходной ограниченной задачи с функцией Гамильтона (3.3) является задача двух тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ с гамильтонианом (3.6), просто близко — задача Хилла с гамильтонианом (3.4), подальше от тела $\mathbf{P}_2$ — промежуточная задача, а вдали от тела $\mathbf{P}_2$ — задача двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$. Вблизи тела $\mathbf{P}_2$ периодические решения ограниченной задачи являются возмущениями как периодических решений всех указанных четырёх первых приближений, так и результатов склейки гиперболических орбит задачи двух тел $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ с решениями-отрезками либо задачи двух тел $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$, либо промежуточной задачи. В [Коган, 1988; Лидов, Вашковьяк, 1990; 1993; 1994; Benest, 1976] периодические решения промежуточной задачи были использованы как порождающие для отыскания периодических квазиспутниковых орбит ограниченной задачи.

3.3. Укороченные системы. Рассмотрим теперь совокупность полиномов

$$f_1(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu}),\dots,f_m(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu}). \tag{3.7}$$

Каждому $f_j(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})$ соответствуют свой носитель $\mathbf{S}_j\subset\mathbb{R}^{2n+s}$и все сопутствующие объекты: многогранник Ньютона $\boldsymbol{\Gamma}_j$, его обобщённые грани $\boldsymbol{\Gamma}_{jk_j}^{(d_j)}$, их нормальные конусы $\mathbf{U}_{jk_j}^{(d_j)}$, граничные множества $\mathbf{S}_{jk_j}^{(d_j)}$, укороченные многочлены $\hat f_{jk_j}^{(d_j)}$. Кроме того, каждому непустому пересечению

$$\mathbf{U}_{1k_1}^{(d_1)}\cap\mathbf{U}_{2k_2}^{(d_2)}\cap\dots\cap\mathbf{U}_{mk_m}^{(d_m)} \tag{3.8}$$

соответствует совокупность укорочений

$$\hat f_{1k_1}^{(d_1)},\hat f_{2k_2}^{(d_2)},\dots,\hat f_{mk_m}^{(d_m)}, \tag{3.9}$$

которая является первым приближением совокупности (3.7), при

$$(\log|\mathbf{x}|,\log|\mathbf{y}|,\log|\boldsymbol{\mu}|)\to\infty$$

вблизи пересечения (3.8) и называется *укорочением совокупности* (3.7).

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$f_j=0,\quad j=1,\dots,m, \tag{3.10}$$

соответствующую совокупности (3.7). Системе (3.10) соответствуют все объекты, указанные для совокупности (3.7), а также *укороченные системы уравнений*

$$\hat f_{jk_j}^{(d_j)}=0,\quad j=1,\dots,m, \tag{3.11}$$

каждая из которых соответствует одной совокупности укорочений (3.9). Каждая укороченная система (3.11) является первым приближением полной системы (3.10).

3.4. Периодические решения периодической системы Гамильтона. Посредством формальной канонической периодической замены координат $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t \to \mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau$ периодическая по t функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \boldsymbol{\mu})$ с n степенями свободы вблизи нулевого решения $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0, \boldsymbol{\mu} = 0$ приводится к нормальной форме $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau, \boldsymbol{\mu})$ [Брюно, 1990, гл. II], [Брюно, 2018].

Дополнительное каноническое преобразование

$$x_j = u_j \exp(-i \operatorname{Im} \lambda_j \tau), \quad y_j = v_j \exp(i \operatorname{Im} \lambda_j \tau), \quad j = 1, \dots, n,$$

преобразует нормальную форму $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau, \boldsymbol{\mu})$ в *приведённую нормальную форму*, не зависящую от времени [Брюно, 2018; 2019a],

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \sum h_{\mathbf{pqr}m} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \geqslant 0$ и

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = -im.$$

Для $\boldsymbol{\mu} = 0$ разложение ряда h в (3.12) начинается с членов порядка 3. Локальные семейства периодических решений исходной системы соответствуют локальным семействам неподвижных точек системы с приведённой нормальной формой функции Гамильтона (3.12). Эти неподвижные точки $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{3.13}$$

которая не имеет линейной части при $\boldsymbol{\mu} = 0$.

Чтобы решить эту систему, надо рассмотреть укороченные системы и найти их решения, которые дадут первые приближения к решениям системы (3.13). Пример таких вычислений см. в [Брюно, 2019a].

Другие приложения этого метода: уравнение Белецкого колебаний спутника [Bruno, Varin, 1997] и задача о периодических облётах планет с близким подходом к Земле [Bruno, 1981].

4. Порождающие семейства периодических решений

4.1. Метод. Пусть функция Гамильтона $H(\boldsymbol{\mu})$ аналитически зависит от малых параметров $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ и соответствующая система Гамильтона имеет семейства периодических решений $\mathcal{F}_j(\boldsymbol{\mu})$. Некоторые из этих семейств могут иметь пределы $\mathcal{F}_j(0)$ при $\boldsymbol{\mu} \to 0$. *Семейства* $\mathcal{F}_j(0)$ называются *порождающими*. Их решения образованы частями решений предельной системы Гамильтона с $\boldsymbol{\mu} = 0$.

Если эта предельная система интегрируема, то порождающие семейства можно описать аналитически. Этот подход предложил Хенон [Hénon, 1968]. Он был использован для задачи Хилла и для ограниченной задачи трёх тел [Брюно, 1990, гл. III–V], [Hénon, 1997; 2001].

4.2. Задача Хилла. Её функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}. \tag{4.1}$$

Соответствующая система

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \quad j = 1,2,$$

описывает движение Луны $(\mathbf{P}_3)$ с нулевой массой под действием притяжения Солнца $(\mathbf{P}_1)$, расположенного в бесконечности, и Земли $(\mathbf{P}_2)$ с массой 1, расположенной в начале координат. Функция Гамильтона (4.1) аналитична в

$$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}.$$

Делаем каноническое преобразование координат

$$\xi_j = \varepsilon X_j, \quad \eta_j = \varepsilon Y_j, \quad j = 1,2,$$

и получаем систему Гамильтона

$$\dot{X}_j = \frac{\partial h}{\partial Y_j}, \quad \dot{Y}_j = -\frac{\partial h}{\partial X_j}, \quad j = 1,2, \tag{4.2}$$

где

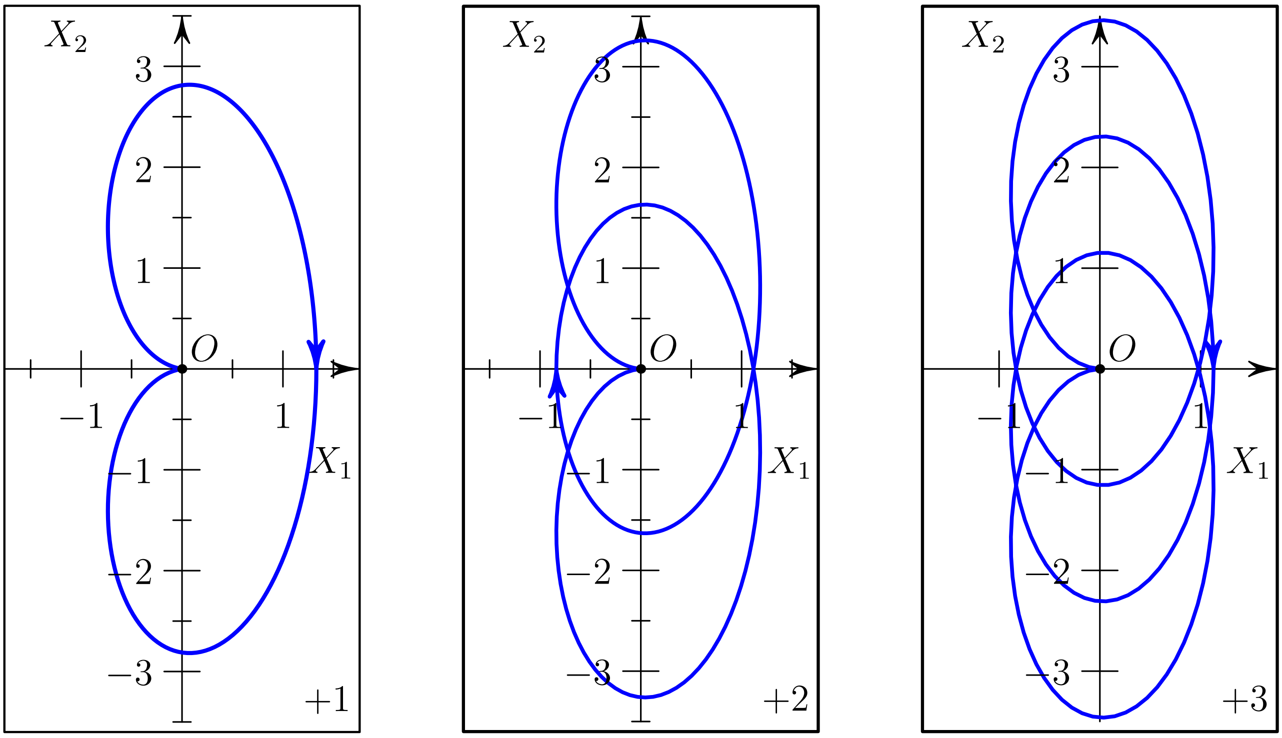
$$h = \frac{1}{2}\left(Y_1^2 + Y_2^2\right) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{1}{\varepsilon^3\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}.$$

Положим $\varepsilon = \sqrt{2|H|}$ и $H \to -\infty$. Тогда в пределе получаем систему (4.2) с

$$h = h_0 = \frac{1}{2}\left(Y_1^2 + Y_2^2\right) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2.$$

Это промежуточная задача Хенона [Hénon, 1969]. Для h_0 система (4.2) линейна и, следовательно, интегрируема. Достаточно рассматривать её при $h_0 = \dfrac{1}{2}$. Она имеет одно регулярное периодическое решение

$$X_1(t) = \cos t, \quad X_2(t) = -2\sin t.$$



а) $j = +1$ **б)** $j = +2$ **в)** $j = +3$

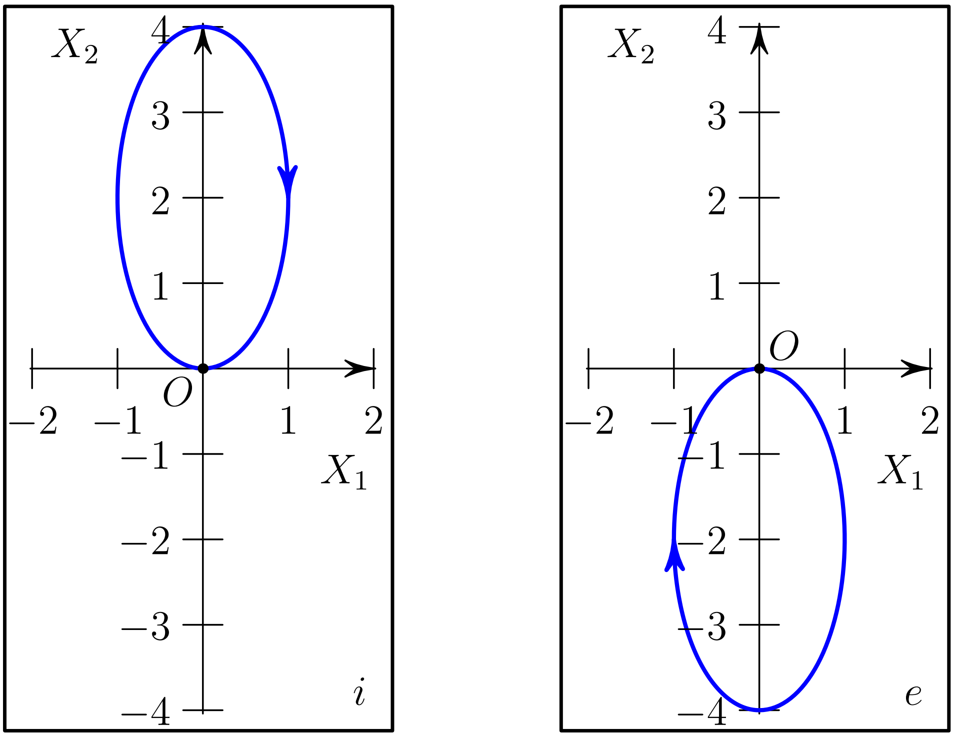
Рис. 2. Решения-отрезки первого типа с $j = +1, +2, +3$.

Если орбита $(X_1(t), X_2(t))$ решения задачи Хенона проходит через точку

$$X_1 = X_2 = 0, \tag{4.3}$$

то тело $\mathbf{P}_3$ сталкивается с телом $\mathbf{P}_2$ и решение не может быть продолжено через столкновение. Поэтому точка (4.3) делит решение на независимые части. Хенон [Hénon, 1969] нашёл все решения-отрезки, которые начинаются и заканчиваются такими столкновениями. Они образуют счётное множество двух типов. Решения-отрезки первого типа обозначаются символом $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, и их орбиты являются эпициклоидами. Для $j = 1{,}2{,}3$ они показаны на рис. 2. Орбиты решений-отрезков с отрицательными значениями j им симметричны относительно оси X_2.

Решения-отрезки второго типа обозначаются буквами i и e, их орбиты являются эллипсами, проходящими через точку (4.3). Они показаны на рис. 3.



а) i **б)** e

Рис. 3. Решения-отрезки второго типа i и e.

Теорема 2 ([Батхин, 2013a])**.** *Последовательность решений-отрезков, не содержащая подряд двух одинаковых отрезков второго типа, является порождающим решением для задачи Хилла.*

Здесь порождающее семейство периодических решений состоит из одного решения. Все известные семейства периодических решений задачи Хилла включают хотя бы одно порождающее решение.

В ограниченной задаче трёх тел имеется счётное множество однопараметрических порождающих семейств. Некоторые из них устроены довольно сложно.

5. Обобщённые задачи

Обычно в небесной механике рассматриваются тела с неотрицательными массами. Но Батхин [Батхин, 2014] предложил рассматривать задачи, где некоторые массы отрицательны. В задаче Хилла с массой тела $\mathbf{P}_2$, равной -1 (названной *задачей анти-Хилла*), семейства периодических решений являются продолжениями семейств периодических решений обычной задачи Хилла. Поэтому вычисление семейств периодических решений удобнее делать сразу для обеих задач: Хилла и анти-Хилла. Этот подход даёт новые семейства периодических решений для обычной задачи Хилла.

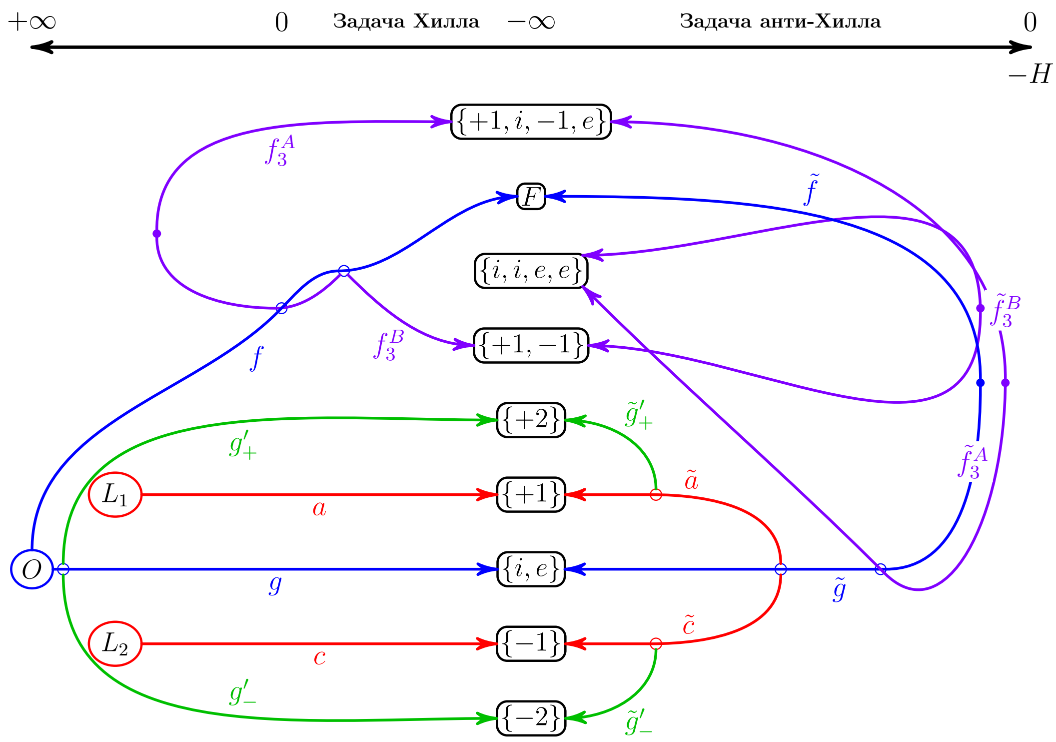


Рис. 4. Диаграмма связей между семействами задач Хилла и анти-Хилла.

Рис. 4 показывает диаграмму связей между этими семействами задач Хилла (левая часть) и анти-Хилла (правая часть). Центральный столбец даёт порождающие решения этих семейств.

6. Скелеты

В некоторых частях фазового пространства системы Гамильтона имеется много семейств периодических решений, и они образуют «скелет» этой части фазового пространства. Поэтому вычисление таких семейств очень полезно для исследования структуры фазового пространства. Батхин [Батхин, 2019] заметил, что в системе с конечной группой симметрий большинство таких семейств состоит из периодических решений, которые инвариантны относительно всех симметрий этой группы.

В разных задачах имеется много вычисленных семейств периодических решений, но их количество пока недостаточно, чтобы образовать скелет. Недавние результаты в этом направлении для ограниченной задачи трёх тел см. в [Брюно, Варин, 2007; 2009a,b,c,d; 2011; Bruno, Varin, 2012].

7. Заключение

Все 5 методов являются новыми не только в небесной механике, но и в гамильтониановой механике. При этом методы 1 и 2 являются новыми в нелинейном анализе.

Список литературы

Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. 2013a. Т. 51, № 4. С. 308—322. DOI: 10.7868/S0023420613040031.

Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. 2013b. Т. 51, № 6. С. 497—510. DOI: 10.7868/S0023420613050014.

Батхин А. Б. Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 131—137. DOI: 10.7868/S086956521426003X.

Батхин А. Б. О структуре фазового потока в окрестности симметричного периодического решения системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 69. DOI: 10.20948/prepr-2019-69. URL: http://keldysh.ru/papers/2018/prep2019_69.pdf.

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.

Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998. 288 с.

Брюно А. Д. Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 223. DOI: 10.20948/prepr-2018-223. URL: http://keldysh.ru/papers/2018/prep2018_223.pdf.

Брюно А. Д. Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019a. № 57. С. 27. DOI: 10.20948/prepr-2019-57. URL: http://keldysh.ru/papers/2018/prep2019_57.pdf.

Брюно А. Д. Нормализация периодической системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019b. № 64. С. 18. DOI: 10.20948/prepr-2019-64. URL: http://keldysh.ru/papers/2018/prep2019_64.pdf.

Брюно А. Д., *Варин В. П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // Прикл. матем. и мех. 2007. Т. 71, № 6. С. 1034—1066.

Брюно А. Д., *Варин В. П.* Семейство h периодических решений ограниченной задачи для малого μ // Астрономический вестник. 2009a. Т. 43, № 1. С. 4—27.

Брюно А. Д., *Варин В. П.* Семейства c и i периодических решений ограниченной задачи для $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ // Астрономический вестник. 2009b. Т. 43, № 1. С. 28—43.

Брюно А. Д., *Варин В. П.* Семейство h периодических решений ограниченной задачи для больших μ // Астрономический вестник. 2009c. Т. 43, № 2. С. 167—186.

Брюно А. Д., *Варин В. П.* Замкнутые семейства периодических решений ограниченной задачи // Астрономический вестник. 2009d. Т. 43, № 3. С. 265—288.

Брюно А. Д., *Варин В. П.* О распределении астероидов // Астрономический вестник. 2011. Т. 45, № 4. С. 334—340.

Журавлев В. Ф., *Петров А. Г.*, *Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.

Коган А. Ю. Далекие спутниковые орбиты в ограниченной задаче трех тел // Космические исследования. 1988. Т. XXVI, № 6. С. 813—818.

Лидов М. Л., *Вашковьяк М. А.* Квазиспутниковые периодические орбиты // Аналитическая небесная механика / под ред. К. В. Холшевникова. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. С. 53—57.

Лидов М. Л., *Вашковьяк М. А.* Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче тре тел // Космические исследования. 1993. Т. 31, № 2. С. 75—99.

Лидов М. Л., *Вашковьяк М. А.* О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной // Письма в Астрономический журнал. 1994. Т. 20, № 3. С. 239—240.

Baider A., *Sanders J. A.* Unique normal forms: the nilpotent Hamiltonian case // Journal of Differential Equations. 1991. Vol. 92. P. 282–304.

Benest D. Libration effects for retrograde satellitesin the restricted three-body problem. I: Circular plane Hill's case // Celestial Mechanics. 1976. No. 13. P. 203–215.

Bruno A. D. On periodic flybys of the Moon // Celestial Mechanics. 1981. Vol. 24. P. 255–268.

Bruno A. D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo: Springer–Verlag, 1989. 350 p.

Bruno A. D., *Varin V. P.* The limit problems for the equation of oscillations of a satellite // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1997. Vol. 67, no. 1. P. 1–40.

Bruno A. D., *Varin V. P.* Periodic solutions of the restricted three body problem for small μ and the motion of small bodies of the Solar system // Astronomical and Astrophysical Transactions (AApTr). 2012. Vol. 27, no. 3. P. 479–488.

Euler L. Theoria Motuum Lunae. Petropoli: Typis Academiae Imperialis Scientiarum, 1772. Reprinted in: Opera Omnia, Ser. 2 / Ed. L. Courvoisier, V. 22, Orell Füssli Turici, Lausanne, 1958, 411 p.

Hénon M. Sur les orbites interplanetaires qui rencontrent deux fois la terre // Bull. astron. Ser. 3. 1968. T. 3, n° 3. P. 377-402.

Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: periodic orbits and their stability // Astron. & Astrophys. 1969. Vol. 1. P. 223–238.

Hénon M. Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Berlin, Heidelber, New York: Springer, 1997. 278 p. (Lecture Note in Physics. Monographs ; 52).

Hénon M. Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. II. Quantitative Study of Bifurcations. Berlin, Heidelber, New York: Springer–Verlag, 2001. 308 p. (Lecture Note in Physics. Monographs ; 65).

Hill G. W. Researches in the Lunar Theory // Amer. J. Math. 1878. Vol. 1. P. 5–26, 129–147, 245–260. // Collected mathematical works. Washington (D.C.): Carnegie Inst. 1905. V. 1. P. 223–238.

Poincaré H. Les métods nouvelles de la mécanique céleste. T. 3. Paris : Gauthier-Villars, 1899. Анри Пуанкаре. Избранные труды в трёх томах. Том II. М. : Изд-во «Наука», 1972. С. 9–356.

Список рисунков

Оглавление