ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 75 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гавриков М.Б.

Методы без насыщения в вычислительной математике

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б. Методы без насыщения в вычислительной математике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 75. 40 с. doi:10.20948/prepr-2019-75
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-75

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М.Б. Гавриков

Методы без насыщения в вычислительной математике

Москва — 2019

Гавриков М.Б.

Методы без насыщения в вычислительной математике

Рассмотрены математические конструкции явления насыщения в теории приближений и численном анализе. Проанализирован фундаментальный вклад К.И. Бабенко в изучение насыщаемых и ненасыщаемых вычислительных алгоритмов. Дано современное определение насыщаемости и рассмотрены многочисленные примеры исследования на насыщаемость в задачах теории приближений, теории квадратурных формул и численного анализа. Работа посвящена 100-летию со дня рождения К.И. Бабенко.

Ключевые слова: насыщаемость, ненасыщаемость, класс насыщения, порог насыщения, порядок насыщения.

Mikhail Borisovich Gavrikov

Methods without saturation in computational mathematics

Mathematical constructions of the saturation phenomenon in approximation theory and numerical analysis are considered. There are analyzed the fundamental contribution of K.I. Babenko in the study of saturable and unsaturable computational algorithms. A modern definition of saturability is given and numerous examples of saturation studies in problems of approximation theory, the theory of quadrature formulas and numerical analysis are considered.

Key words: saturability, unsaturability, saturation class, saturation threshold, saturation order.

Оглавление

Введение

Явление насыщения в численном анализе связано с зависимостью скорости сходимости погрешности вычислительного алгоритма к нулю от гладкости функции, приближённо восстанавливаемой этим алгоритмом. Оказалось, что существующие в вычислительной практике алгоритмы относятся к двум типам, которые неформально можно определить так. Для алгоритмов первого типа, называемых *ненасыщаемыми* или *без насыщения*, скорость сходимости погрешности к нулю возрастает с ростом гладкости аппроксимируемой этим алгоритмом функции. Для алгоритмов второго типа, называемых *насыщаемыми* или *алгоритмами с насыщением*, указанная скорость сходимости возрастает, только пока гладкость функции не превосходит некоторой *пороговой* гладкости, как только гладкость функции становится больше пороговой, рост скорости сходимости погрешности к нулю прекращается. При этом совокупность функций, обладающих пороговой гладкостью, называется *классом насыщения*, а максимальная скорость сходимости погрешности к нулю – *порядком насыщения*. Сама терминология – класс насыщения, порядок насыщения и т.д. – заимствована из теории приближений [1,2], но там эти термины имеют совсем другой смысл. Очевидно колоссальное преимущество вычислительных алгоритмов без насыщения, поскольку они автоматически, *без изменения расчётных формул*, самоускоряют свою сходимость к искомой функции, подстраиваясь под её реальную гладкость, которая, как правило, значительно превышает теоретическую, определяемую теоремами существования и единственности решения.

Первая работа по теоретическому осмыслению явления насыщения в численном анализе принадлежит К.И. Бабенко [3]. Последующие его работы [4,5] усовершенствовали и развили идеи, содержащиеся в работе [3]. Конструкция явления насыщения в численном анализе, представленная в [3–5] и рассмотренная ниже в §2, оказалась, однако, громоздким соединением в одно целое нескольких сложных теоретических агрегатов – это • градуировка функций по (абстрактной) гладкости посредством заданной линейки функциональных бесконечномерных компактов; • аппроксимация бесконечномерных классов функций конечномерными (в смысле топологической размерности) метрическими компактами; • абстрактная конструкция вычислительного процесса, сводящаяся к некоммутативному четырёхугольнику аппроксимирующих пространств и отображений, включающих отображения восстановления–интерполяции; • оценка аппроксимативных свойств функциональных классов посредством александровских поперечников; • специальная конструкция погрешности, заимствованная из теории приближений, как ключевой элемент определения насыщаемости вычислительного процесса. Очевидно, что теоретическая конструкция, претендующая на статус “исчисления” (типа дифференциального, интегрального и пр.), должна постулировать значительно более простые правила проверки вычислительных алгоритмов на насыщаемость, дабы обрести свойство “массовости” и стать доступной рядовым специалистам, разрабатывающим новые алгоритмы численного решения уравнений математической физики. В этой связи в [6] предложена существенно более простая конструкция явления насыщения в численном анализе, рассмотренная в §3. Ключевую роль в этой конструкции играют функционал погрешности, ранжированный по параметру дискретизации, и выбор функциональных бесконечномерных пространств, градуированных по абстрактной гладкости. Заметим, что используемые функциональные пространства определяются теоремами существования и единственности решения численно исследуемых дифференциальных уравнений, которые во многих важных случаях нам совершенно неизвестны. С другой стороны, предложенная в §3 трактовка явления насыщения в численном анализе позволила другими глазами взглянуть на это явление в теории приближений, теории механических квадратур и т.д. В итоге возникает единый подход к явлению насыщения, с которым мы сталкиваемся в различных разделах математики. В §4 приведены различные примеры применения конструкции §3 к вычислительным алгоритмам. Наконец, в §5 рассмотрена насыщаемость различных алгоритмов численного дифференцирования.

§1. Явление насыщения и теория приближений

Впервые явление насыщения возникло в теории линейных методов суммирования рядов Фурье (теория ЛМСРФ). Наиболее простая конструкция предложена в [1,2]. Пусть $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$, $M = \left\| \mu_k^{(n)} \right\|$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n$ – две заданные бесконечные треугольные матрицы, элементами которых являются вещественные числа. Рассмотрим пространство 2π-периодических непрерывных функций $C[0, 2\pi]$ и для каждой $f \in C[0, 2\pi]$ – тригонометрический полином

$$U_n(f; \Lambda, M)(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{a_0 \lambda_0^{(n)}}{2} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \mu_k^{(n)} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) \right], \tag{1}$$

где a_k, $k \geq 0$, b_k, $k \geq 1$ – коэффициенты Фурье функции f. Полиномы (1) определяют линейный метод $U(\Lambda, M)$ суммирования рядов Фурье, определённый на классе $C[0, 2\pi]$ (и, более общо, на классе 2π-периодических измеримых и суммируемых по Лебегу на $[0, 2\pi]$ функций). Основная задача теории ЛМСРФ – исследование сходимости в той или иной топологии полиномов $U_n(f; \Lambda, M)$ к функции f. Ниже, для простоты, полагаем $M = 0$.

Примеры. 1) *Метод частных сумм ряда Фурье* $S_n(f)$. Он получится при $\lambda_k^{(n)} \equiv 1$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$, и тогда

$$U_n(f;\Lambda)(x) = S_n(f)(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

2) *Метод средних арифметических* $\sigma_n(f)$ (*метод Фейера*). Он получится при $\lambda_k^{(n)} = 1 - \dfrac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$U_n(f;\Lambda)(x) = \sigma_n(f)(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x).$$

3) *Метод Валле–Пуссена* $V_{n,p}(f)$, $0 \leq p \leq n$. Он получится при

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, \quad 0 \leq k \leq n-p, \\ 1 - \dfrac{k-n+p}{p+1}, \quad n-p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

и тогда

$$U_n(f;\Lambda)(x) = V_{n,p}(f)(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} S_k(f)(x).$$

Заметим, $V_{n,0}(f) = S_n(f)$, $V_{n-1,n-1}(f) = \sigma_n(f)$. Обычно суммами Валле–Пуссена называют тригонометрические полиномы $V_{2n-1,n-1}(f)$.

4) *Метод Рогозинского* $R_n(f)$. Он получится при $\lambda_k^{(n)} = \cos\dfrac{k\pi}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leq k \leq n$. Тогда

$$U_n(f;\Lambda)(x) = R_n(f)(x) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[S_n(f)\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n(f)\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Более общая конструкция ЛМСРФ содержится в [7,8] и сводится к следующему. Пусть $\Gamma = \{\xi\}$ – бесконечное множество, лежащее в некотором топологическом пространстве и имеющее в нём предельную точку ω, причём $\omega \notin \Gamma$. Пусть, далее, дана последовательность функций $\Lambda = (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi), \ldots)$. Предположим, для $f \in C[0, 2\pi]$ ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\xi)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

где a_k, $k \geq 0$, b_k, $k \geq 1$ – коэффициенты Фурье функции f, равномерно по $x \in \mathbb{R}$ сходится, по крайней мере, для всех значений ξ из некоторой окрестности ω. Обозначим $U_n(f;\Lambda)(x)$ сумму ряда (2) и будем говорить, что *задан ЛМСРФ* $U(\Lambda)$ *функции* f *при помощи последовательности* Λ.

Примеры. 1) *Метод суммирования Гаусса–Вейерштрасса–Абеля*. Положим $\lambda_k(\xi) = \exp(-\xi k^2/2)$, $k \geq 1$, $\Gamma = \{\xi > 0\}$, $\omega = 0$. Тогда

$$U(f;\Lambda)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\xi k^2/2}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

2) *Метод суммирования Римана*. Положим $\lambda_k(\xi) = \left(\dfrac{\sin k\xi}{k\xi}\right)^2$, $k \geq 1$, $\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega = 0$. Тогда

$$U(f;\Lambda)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k\xi}{k\xi}\right)^2 (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

3) *Метод суммирования Абеля–Пуассона*. Положим $\lambda_k(r) = r^k$, $k \geq 1$, $\xi = r$, $\Gamma = [0,1)$, $\omega = 1$. Тогда

$$U(f;\Lambda)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Заметим, что ЛМСРФ (1) является частным случаем конструкции (2). Пусть $\Gamma = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел и топологическое пространство $N \cup \{\infty\}$ получается из $\mathbb{N}$ пополнением бесконечно удалённой точкой ∞ с очевидной топологией. Тогда $\xi = n$, $\omega = \infty$, $\lambda_k(n) = \lambda_k^{(n)}$ с условием $\lambda_k(n) = 0$ при $k > n$, и мы приходим к конструкции (1).

Определение 1. Пусть существует положительная функция $\varepsilon_\Lambda(\xi) > 0$, $\lim\limits_{\xi \to \omega} \varepsilon_\Lambda(\xi) = 0$, для которой выполнены условия:

1) $\| f - U(f;\Lambda) \|_C = o(\varepsilon_\Lambda(\xi))$, $\xi \to \omega$ тогда и только тогда, когда $f = \mathrm{const}$ (или, более общо, когда $f \in T_0$, где $T_0 \subseteq C[0,2\pi]$ – фиксированное конечномерное подпространство тригонометрических полиномов).

2) Существует отличная от постоянной $f \in C[0,2\pi]$ (или, более общо, $f \in C[0,2\pi] \setminus T_0$), для которой

$$\| f - U(f;\Lambda) \|_C = O(\varepsilon_\Lambda(\xi)). \qquad (3)$$

Тогда метод суммирования $U(\Lambda)$ называется *насыщенным*, множество функций из $C[0,2\pi]$, удовлетворяющих условию (3), называется *классом насыщения метода суммирования* $U(\Lambda)$, а функция $\varepsilon_\Lambda(\xi)$ – *порядком насыщения*.

Выше $\|\cdot\|_C$ – норма максимум модуля в $C[0,2\pi]$. Задаче нахождения класса насыщения и вычисления порядка насыщения ЛМСРФ посвящено большое число статей [8,9]. *Определение 1* слишком широкое. Его смысл проясняет следующий частный случай. Для насыщенных ЛМСРФ существует максимальная скорость сходимости $\varepsilon_\Lambda(\xi)$ погрешности $\|f-U(f;\Lambda)\|_C$ к нулю при $\xi\to\omega$. За исключением $f\in T_0$, где $\|f-U(f;\Lambda)\|_C=o(\varepsilon_\Lambda(\xi))$, $\xi\to\omega$, для остальных $f\in C[0,2\pi]\setminus T_0$ сходимость к 0 погрешности $\|f-U(f;\Lambda)\|_C$ происходит со скоростью не более $\varepsilon_\Lambda(\xi)$ (в том смысле, что найдётся константа $a>0$, для которой $\|f-U(f;\Lambda)\|_C>a\varepsilon_\Lambda(\xi)$, для всех ξ из окрестности ω) и хотя бы для одной $f\in C[0,2\pi]\setminus T_0$ достигается точное асимптотическое равенство $\|f-U(f;\Lambda)\|_C\asymp\varepsilon_\Lambda(\xi)$, $\xi\to\omega$, и все такие f образуют класс насыщения. (Здесь $\asymp$ – символ *слабой эквивалентности*: $\varphi(\xi)\asymp\psi(\xi)$, $\xi\to\omega$, если найдутся константы $C_1>0$, $C_2>0$, для которых $C_1|\psi(\xi)|\le|\varphi(\xi)|\le C_2|\psi(\xi)|$ для всех ξ из некоторой окрестности точки ω, при этом C_1, C_2 не зависят от ξ).

Проиллюстрируем сказанное на примере метода Фейера. Пусть $\delta_n(f)\underset{\text{def}}{=}\|f-\sigma_n(f)\|_C$, $n=1,2,\ldots$ – погрешность метода.

Теорема 1 [6]. *Пусть* $f\in C[0,2\pi]$ *и* $n_1<n_2<\ldots$ – *возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой* $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k\delta_{n_k}(f)=0$. *Тогда* $f\equiv\text{const}$. *Верно и обратное утверждение*. #

Из *Теоремы 1* вытекают два важных вывода.

Во-первых, для любой $f\in C[0,2\pi]$, отличной от константы, найдётся константа $C>0$, не зависящая от n, для которой $\delta_n(f)>C/n$ для всех достаточно больших n. Действительно, если это не так, то для данной последовательности положительных чисел $\varepsilon_k\downarrow 0$ найдётся последовательность натуральных номеров $n_1<n_2<\ldots$, для которой $\delta_{n_k}(f)\le\varepsilon_k/n_k$. Но тогда $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k\delta_{n_k}(f)=0$ и, значит, согласно *Теореме 1*, $f=\text{const}$, что противоречит условию.

Во-вторых, для любой $f\in C[0,2\pi]$, отличной от константы, скорость сходимости $\delta_n(f)$ к нулю при $n\to+\infty$ не может быть большей, чем $\asymp 1/n$, и найдётся указанная f, для которой $\delta_n(f)\asymp 1/n$, $n\to+\infty$. Это следует из следующей теоремы.

Теорема 2 [6]**.** *Если* $f \in C[0,2\pi]$ *дифференцируема и* $f'(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $M>0$, *то* $\delta_n(f) \le M\pi^2/n$, $n \ge 1$. #

Итак, если положить $\xi = n$, $\varepsilon_\Lambda(\xi) = 1/n$, то линейный метод суммирования Λ, определяемый суммами Фейера $\sigma_n(f)$, насыщенный, а класс насыщения состоит из тех $f \in C[0,2\pi]$, для которых $\delta_n(f) \asymp 1/n$, $n \to +\infty$. В этот класс входят, согласно *Теореме 2*, все дифференцируемые 2π-периодические функции, у которых производная удовлетворяет условию Липшица с некоторой положительной константой $M>0$. Но не любая $f \in C[0,2\pi]$, отличная от константы, содержится в классе насыщения.

Теорема 3 [11]**.** *Пусть* $f \in C[0,2\pi]$ *и в точке* x_0 *имеет конечные правостороннюю и левостороннюю производные* $f'(x_0 \pm 0)$. *Тогда существует предел и верно равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n}[\sigma_n(f)(x_0) - f(x_0)] = \frac{f'(x_0+0) - f'(x_0-0)}{\pi}. \qquad \#$$

Для указанной в *Теореме 3* функции f имеем в случае $f'(x_0+0) \ne f'(x_0-0)$ оценку:

$$\delta_n(f) = \| f - \sigma_n(f) \|_C \ge |\sigma_n(f)(x_0) - f(x_0)| > \frac{|f'(x_0+0) - f'(x_0-0)|}{2\pi} \cdot \frac{\ln n}{n}$$

для всех достаточно больших n и, значит, асимптотическое равенство $\delta_n(f) \asymp 1/n$, $n \to +\infty$ для неё заведомо не выполнено. Поэтому все такие функции f не попадают в класс насыщения.

Можно показать [9], что класс насыщения в случае метода Фейера состоит из функций $f \in C[0,2\pi]$, для которых сопряжённая функция $\tilde{f}$ дифференцируема, и её производная ограничена (функция $\tilde{f} \in C[0,2\pi]$ называется *сопряжённой к функции* $f \in C[0,2\pi]$, если ряд Фурье $\tilde{f}$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx),$$

где a_k, $k \ge 0$, b_k, $k \ge 1$ – коэффициенты Фурье функции f).

Наконец, порядок насыщения в методе Фейера равен $\asymp 1/n$.

§2. Явление насыщения в численном анализе по К.И. Бабенко

Приведём оригинальную трактовку явления насыщения, принадлежащую К.И. Бабенко [3]. Она соединила несколько сложных теоретических конструкций и была существенно упрощена в его последней публикации [5]. Именно этот вариант рассмотрен ниже. Предварительно остановимся на двух важных теоретических построениях, необходимых для дальнейшего понимания.

• **Конструкция аппроксимирующих пространств и отображений.** Способом аппроксимации ($\equiv$методом приближения) элементов бесконечномерного функционального класса W называется семейство отображений

$$\pi_n : W \to X_n, \tag{4}$$

где множества X_n называются *аппроксимирующими пространствами*, а π_n – *аппроксимирующими отображениями*, индекс n – *параметром дискретизации* (для простоты считаем n натуральным числом). Дальнейшее построение происходит в зависимости от двух случаев, обозначаемых ниже (А) и (Б).

(А) Если W и все X_n вложены в одно и то же нормированное пространство B с нормой $\|\cdot\|$, тогда $\pi_n(x)$ считается приближённым значением вектора $x \in W$: $x \cong \pi_n(x)$, а погрешность аппроксимации задаётся функционалом $\delta_n(x) \underset{\text{def}}{=} \|x - \pi_n(x)\| : W \to \mathbb{R}$. Точность способа аппроксимации определяется величиной, называемой *проекционной точностью*:

$$\delta_n(W;B) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in W} \delta_n(x). \tag{5}$$

(Б) Пусть W вложено в нормированное пространство B, а X_n с B априори никак не связаны. Тогда необходимо дополнительно задать отображения восстановления (интерполяции) $s_n : X_n \to B$, и за приближённое значение вектора $x \in W$ принимается вектор $s_n\pi_n(x) : x \cong s_n\pi_n(x)$, а погрешность аппроксимации задаётся функционалом $\delta_n(x) \underset{\text{def}}{=} \|x - s_n\pi_n(x)\| : W \to \mathbb{R}$. Точность способа аппроксимации измеряется одной из двух величин

$$\delta_n(W) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in W} \operatorname{diam} \pi_n^{-1}\pi_n(x), \tag{6}$$

называемой *интерполяционной точностью* метода приближений или

$$\sup_{x \in W} \delta_n(x), \tag{7}$$

являющейся аналогом проекционной точности в случае (Б). Легко проверить неравенство

$$\frac{1}{2}\delta_n(W) \le \sup_{x \in W} \delta_n(x).$$

Поэтому, если отображения восстановления подбираются так, чтобы для всех достаточно больших n были выполнены неравенства

$$\sup_{x\in W}\delta_n(x)\le C\delta_n(W),$$

где константа $C>0$ не зависит от n, то имеет место асимптотическое равенство $\delta_n(W)\asymp\sup_{x\in W}\delta_n(x)$, $n\to+\infty$ и, какой из двух величин, (6) или (7), измерять точность аппроксимации, непринципиально.

Говорят, что способ аппроксимации сходится на векторе $x\in W$, если $\lim_{n\to+\infty}\delta_n(x)=0$ и сходится на классе W, если интерполяционная или проекционная точность сходится к 0 при $n\to+\infty$, что равносильно равенству $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in W}\delta_n(x)=0$. Ясно, что из сходимости способа аппроксимации на классе W следует его сходимость на каждом векторе $x\in W$. Обратное может быть неверно.

• **Конечномерные компакты как универсальные аппроксимирующие пространства и александровские поперечники.** Считается, что в конструкции метода приближения универсальными аппроксимирующими пространствами X_n являются конечномерные метрические компакты в предположении, что $\lim_{n\to+\infty}\dim X_n=+\infty$. С общих позиций, вероятно, так оно и есть, хотя в вычислительной практике в качестве X_n чаще используют конечномерные плоскости, арифметические пространства конечной размерности, конечные множества (последние, правда, можно рассматривать как нуль-мерные компакты). К тому же далеко не очевидно, что интуитивную идею размерности или числа измерений можно математически сформулировать для столь общих объектов, как топологические пространства: какие топологические пространства следует считать имеющими n измерений ($\equiv$размерность n) для данного целого $n\ge 0$? Однако, по крайней мере, для метрических компактов основная конструкция определения размерности, восходящая к Лебегу, может быть сформулирована следующим образом.

Пусть X – метрический компакт, $\mathscr{A}$ – его конечное покрытие.

Определение 2. $\mathscr{A}$ имеет кратность $n\ge 0$, если в X существует точка, принадлежащая n-различным множествам из $\mathscr{A}$, и не существует точки, принадлежащей $n+1$ различным множествам из $\mathscr{A}$. Иными словами, кратностью конечного покрытия $\mathscr{A}$ называется максимальное целое $n\ge 0$, для которого найдутся n различных множеств из $\mathscr{A}$, имеющих непустое пересечение.

Считаем далее все метрические компакты непустыми, а все покрытия конечными, не содержащими пустого множества.

Определение 3. Метрический компакт X имеет конечную размерность, если найдётся целое $n\ge 0$, для которого

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое ε-покрытие X кратности не более $n+1$;
2) найдётся $\varepsilon > 0$, для которого не существует замкнутого ε-покрытия X кратности $\le n$.

Если указанное в *Определение 3* целое $n \ge 0$ существует, то условиями 1) и 2) оно определяется однозначно и называется размерностью компакта X, $n = \dim X$. Если указанного $n \ge 0$ нет, то, по определению, $\dim X = \infty$.
(Напомним, что покрытие $\mathscr{A}$ называется замкнутым, если любой элемент $C \in \mathscr{A}$ этого покрытия суть замкнутое множество, и называется ε-покрытием для $\varepsilon > 0$, если для любого $C \in \mathscr{A}$ имеем $\operatorname{diam} C < \varepsilon$).

Несмотря на внешнюю простоту, понятие топологической размерности неочевидное и, например, доказательство равенства $\dim Q^n = n$, $Q = [-1,1]^n$ – n-мерный куб, весьма нетривиально.

Аппроксимативные свойства функционального класса W при данном способе аппроксимации $\pi_n : W \to X_n$ определяются проекционной или интерполяционной точностью. Эта точность зависит от π_n и минимальное её значение в случае, когда в качестве X_n выбираются метрические компакты $\dim X_n \le n$, а в качестве π_n – непрерывные отображения, очевидно, равна в зависимости от ситуации (А) или (Б) выше:

$$a^n(W) \underset{\text{def}}{=} \inf_{(\pi,C)} \sup_{x\in W} \pi^{-1}\pi x, \quad a_n(W;B) = \inf_{(\pi,C)} \sup_{x\in W} \rho(x,\pi(x)), \tag{8}$$

где в левом равенстве $\inf$ берётся по всем непрерывным $\pi : W \to C$, а C – метрический компакт, $\dim C \le n$, а в правом равенстве $\inf$ берётся по всем непрерывным $\pi : W \to C$, причём C – метрический компакт, $\dim C \le n$, лежащий в заданном метрическом B с метрикой ρ. Величина $a^n(W)$ называется n-копоперечником по Александрову класса W, а $a_n(W;B)$ – n-поперечником по Александрову класса $W \subseteq B$.

Перейдём к определению насыщаемости по Бабенко.

Пусть B – метрическое пространство с метрикой ρ, $W \subseteq B$ – компакт, $\pi_i : W \to X_i$, $i \in I$ – непрерывные отображения в конечномерные метрические компакты X_i, где множество индексов I (параметры дискретизации) лежит в некотором топологическом пространстве, в котором имеет предельную точку $i_0 \notin I$. Наконец, заданы отображения восстановления $s_i : X_i \to B$, $i \in I$. Получили метод приближения, погрешность которого на элементе $x \in W$ измеряется одной из следующих величин

$$\varepsilon_i(x) = \operatorname{diam} \pi_i^{-1}\pi_i(x), \quad \varepsilon_i(x) = \rho(x, s_i\pi_i(x)),$$

причём предполагаются справедливыми предельные равенства $\lim\limits_{i\to i_0}\dim X_i = \infty$, $\lim\limits_{i\to i_0}\sup\limits_{x\in W}\varepsilon_i(x) = 0$.

Пусть $\delta(i) > 0$ – положительная вещественная функция, для которой $\lim\limits_{i\to i_0}\delta(i) = 0$.

Определение 4. Метод приближения $\pi_i : W \to X_i$, $i \in I$ имеет погрешность $\delta(i)$, если для любого $x \in W$ имеем

$$\varepsilon_i(x) \le C\delta(i), \quad i \in I, \tag{9}$$

где константа $C > 0$ не зависит от i, и если множество

$$W_0 \underset{\text{def}}{=} \{x \in W : \varepsilon_i(x) = o(\delta(i)), i \to i_0\} \tag{10}$$

не совпадает с W, т.е. $W \setminus W_0 \ne \varnothing$.

Пусть дано линейное упорядоченное множество $(J, \prec)$ (элементы $j \in J$ это абстрактная гладкость) и для каждого $j \in J$ задан компакт $W^j \subseteq B$ и метод приближения $\pi_i^j : W^j \to X_i$, $i \in I$, описанный выше с погрешностями $\delta_j(i)$. При этом выполнены условия:

1) $j_1 \prec j_2 \Rightarrow W^{j_2} \subseteq W^{j_1}$,

2) $j_1 \prec j_2 \Rightarrow \pi_i^{j_2} = \pi_i^{j_1}\big|_{W^{j_2}}$ для любого $i \in I$,

3) $j_1 \prec j_2 \Rightarrow a_n\left(W^{j_2}; B\right) = o\left(a_n\left(W^{j_1}; B\right)\right)$, $n \to +\infty$.

Определение 5. Методы приближения $\left\{\pi_i^j : W^j \to X_i\right\}_{i\in I, j\in J}$ называются *насыщаемыми на классах* W^j, $j \in J$, если найдётся элемент $j_0 \in J$, для которого при любом $j_0 \prec j$ в компакте W^j существует элемент $x \in W^j$, удовлетворяющий условию $x \in W^{j_0} \setminus W_0^{j_0}$. При этом W^{j_0} называется *классом насыщения*, а погрешность $\delta_{j_0}(i)$ – *порядком насыщения*.

Определение 4 неудовлетворительно по следующей причине. Погрешность метода приближения должна определяться конструкцией метода, а не привноситься извне. *Определение 4* не гарантирует даже существование и единственность погрешности метода приближения. В данной ситуации естественно определить погрешность метода как его интерполяционную или проекционную точность: $\delta(i) \underset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in W}\varepsilon_i(x)$. Тогда условие $\varepsilon_i(x) \le C\delta_i(x)$, $i \in I$ (см. (9)) выполнено автоматически, а неравенство $W \setminus W_0 \ne \varnothing$ справедливо для всех известных методов приближения, и дополнительно требовать его выполнения не нужно. Более того, метод приближения, для которого $W = W_0$, т.е.

$$\varepsilon_i(x) = o\left(\sup_{i\in I}\varepsilon_i(x)\right), \quad i \to i_0, \qquad (11)$$

для каждого $x \in W$ должен рассматриваться как паталогический и исключаться из анализа. (Тем не менее, интересно построить контрпример метода приближения, для которого условие (11) выполнено для всех $x \in W$). Очевидно, что идея *Определения 4* унаследована из теории ЛМСРФ (см. *Определение 1*), но там она была обусловлена некомпактностью класса $C[0,2\pi]$ и отсутствием конечного супремума, $\sup\limits_{f\in C[0,2\pi]} \| f - U(f;\Lambda)\|_C = +\infty$, что в принципе не позволяло ввести понятие погрешности ЛМСРФ. Это понятие имело смысл только для насыщенных методов суммирования, когда существовала максимальная скорость сходимости $\| f - U(f;\Lambda)\|_C \to 0$, $\xi \to \omega$, которую и можно было принять за погрешность ЛМСРФ.

Что касается основного *Определения 5*, то характеристика насыщаемости через существование исключительного элемента $x \in W^j$ в каждом W^j с $j_0 \prec j$ – это шаг в правильном направлении, но эта исключительность должна состоять из справедливости неравенства $\varepsilon_i(x) \ge C\delta_{j_0}(i)$ для всех i, достаточно близких к i_0, где $C > 0$ – некоторая константа, не зависящая от i. Тогда для любого $j_0 \prec j$ гарантируется убывание $\delta_j(i)$ к 0 не быстрее чем убывание $\delta_{j_0}(i)$ к 0 при $i \to i_0$, в чём и заключается реализация на абстрактном уровне идеи насыщаемости как стабилизации скорости сходимости погрешности к нулю с ростом абстрактной гладкости. Согласно *Определению 5* можно утверждать, что для исключительного элемента $\varepsilon_i(x)$ не есть $o(\delta_{j_0}(i))$ при $i \to i_0$. Отсюда, согласно (9), следует, что равенство $\delta_j(i) = o(\delta_{j_0}(i))$, $i \to i_0$, невозможно при $j \succ j_0$ и, таким образом, погрешности $\delta_j(i)$ при $j \succ j_0$ не могут сходиться к 0 быстрее, чем сходится к 0 погрешность $\delta_{j_0}(i)$, когда $i \to i_0$. Это, безусловно, согласуется с идеей насыщаемости. Однако предыдущее рассуждение целиком основано на свойстве 1), и если оно нарушается, т.е. если классы с большей (абстрактной) гладкостью не вкладываются в классы с меньшей гладкостью, то исключительный элемент $x \in W^j$ не обязан попасть в класс W^{j_0} и тем более в $W^{j_0} \setminus W_0^{j_0}$, и тогда приведённое построение теряет смысл. К сожалению, для методов приближения, используемых в численном анализе, условие 1) о вложенности функциональных классов, как правило, не выполняется. В этих условиях для оправдания конструкции *Определения 5* необходимо полагать, что $W^j \cap \left(W^{j_0} \setminus W_0^{j_0}\right) \ne \varnothing$ для всех $j \succ j_0$, но это явно надуманное ограничение.

Кроме того, в приведённом построении отсутствуют ответы на самые простые вопросы. Например, как вычислить погрешность метода приближения или будет ли однозначно (если существует) определена пороговая гладкость j_0?

В целом, изложенный выше подход к проблеме насыщаемости представляет достаточно спорную попытку приспособить конструкции теории приближений (ЛМСРФ и др.) для нужд численного анализа.

§3. Основная конструкция насыщаемости

Попытаемся преодолеть негативные моменты, обнаруженные в предыдущем обсуждении явления насыщения в численном анализе.

Пусть B – нормированное (или, более общо, метрическое) пространство, $(\mathfrak{R},\prec)$ – линейно упорядоченное множество, элементы которого $r\in\mathfrak{R}$ называются (абстрактной) гладкостью, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $n\in\mathbb{N}$ называется параметром дискретизации (число узлов разностной сетки, число конечных элементов и т.д.). Для каждого $r\in\mathfrak{R}$ задано подмножество $W^r\subseteq B$, называемое классом, а для каждого достаточно большого $n\in\mathbb{N}$ задан функционал $\delta_n: B\to[0,+\infty]$, причём значение $+\infty$ не исключается. Функционалы δ_n называются функционалами погрешности. Обозначим

$$\delta_n W^r \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in W^r}\delta_n(x). \qquad (12)$$

Здесь и ниже предполагается, что $\delta_n W^r>0$ для всех n и r. Величины (12) будут называться погрешностями на классах W^r.

Определение 6. Последовательность функционалов δ_n *имеет насыщение на классах* W^r, если существует $r_0\in\mathfrak{R}$, для которого выполнены условия:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n W^r=0$ при любом $r\preccurlyeq r_0$,

2) для любых $r\prec s\preccurlyeq r_0$ имеем $\delta_n W^s=o(\delta_n W^r)$, $n\to+\infty$,

3) для любого $r_0\prec r$ найдётся $x\in W^r$ и константа $C>0$, не зависящая от n, для которых при всех достаточно больших n справедливо неравенство $\delta_n(x)\geq C\delta_n W^{r_0}$ (иными словами, $\delta_n W^{r_0}=O(\delta_n(x))$).

При этом r_0 называется *порогом насыщения*, W^{r_0} *– классом насыщения*, а класс последовательностей, слабо эквивалентных сходящейся к нулю при $n\to+\infty$ последовательности $\delta_n W^{r_0}$, *– порядком насыщения*.

Из условия 1) следует, что для $r\preccurlyeq r_0$ все $\delta_n W^r$ конечные, за исключением, быть может, конечного числа индексов n. А из условий 2) и 3) вытекает, что элемент $r_0\in\mathfrak{R}$, удовлетворяющий *Определению 6*, определён (если существует) однозначно. Кроме того, из *Определения 6* следует, что для $r_0\prec r$ имеем $\delta_n W^{r_0}=O(\delta_n W^r)$ и, значит, $\delta_n W^r$ сходится к 0 (если сходится – вполне может случиться, например, что $\delta_n W^r = +\infty$ при $r_0 \prec r$) не быстрее последовательности $\delta_n W^{r_0}$, т.е. ускорения сходимости к 0 погрешностей на классах W^r при $r \succ r_0$ не происходит, и, таким образом, скорость сходимости к 0 погрешностей на классах W^r стабилизируется на классе W^{r_0}.

Предложенная концепция основана на “классовом подходе” в численном анализе, суть которого в следующем. Вся априорная информация о разыскиваемом решении дифференциального, интегрального и пр. уравнения (без которой искать решение бессмысленно) состоит в принадлежности неизвестного решения известному функциональному классу W, который определяется теоремами существования и единственности решения рассматриваемого уравнения. При этом любая функция из W потенциально может быть решением уравнения при соответствующем выборе входных данных (правых частей, коэффициентов, краевых условий и т.п.). Численные алгоритмы приближённого решения рассматриваются как методы приближения в указанном выше смысле при подобающем выборе аппроксимирующих пространств и отображений. Погрешности (12) совпадают, разумеется, с интерполяционной или проекционной точностью метода приближения. Принципиальный и неочевидный момент состоит в том, что для определения и анализа явления насыщения от конструкции численного алгоритма требуется только его погрешность, а от погрешности – только соблюдение условий 1)–3) из *Определения 6*. При этом градуировка функций W по гладкости, а погрешности по параметру дискретизации выражается индексами r и n. Заметим, что в общем случае параметр дискретизации n надо считать элементом подмножества $\Gamma = \{\xi\}$ некоторого топологического пространства, имеющего в этом пространстве предельную точку $\omega \notin \Gamma$. Тогда сходимость $n \to +\infty$ заменяется на сходимость $\xi \to \omega$, а *Определение 6* с очевидными изменениями сохраняется.

Определение 6 позволяет подойти с единых позиций к явлению насыщения, с которым мы сталкиваемся в различных разделах математики. При этом исследуемые в этих разделах задачи необходимо рассматривать в контексте приближённого решения дифференциальных, интегральных и пр. уравнений, где в них имеется потребность, и тогда, например, аппроксимация функций, вычисление интегралов, производных и т.п. нас интересуют именно в тех функциональных классах, которые возникают в соответствующих методах приближения при решении упомянутых уравнений. *Определение 6* единообразно рассматривает насыщаемость на данных классах W^r, $r \in \mathfrak{R}$, линейных методов теории приближений (в частности ЛМСРФ), насыщаемость квадратурных формул, насыщаемость численного дифференцирования и пр. В результате происходит разумное сужение и упрощение многих задач традиционных разделов математики, в частности задачи нахождения класса насыщения. Например, применительно к ЛМСРФ в традиционной постановке, согласно *Определению 1*, поиск класса насыщения сводится к нахождению подмножества бесконечномерного функционального пространства $C[0,2\pi]$, определяемого условием (3), что намного сложнее, чем найти абстрактную гладкость $r_0 \in \mathfrak{R}$, на которой происходит стабилизация в смысле *Определения 6* скоростей сходимости к 0 при $\xi \to \omega$ погрешностей на классах W^r

$$\sup_{f\in W^r}\|f-U(f;\Lambda)\|_C = \sup_{f\in W^r}\delta_\xi(f).$$

где $\delta_\xi(f)=\|f-U(f;\Lambda)\|_C$ – функционалы погрешности, роль параметра дискретизации n играет $\xi\in\Gamma$, а сходимость $n\to+\infty$ заменяется на сходимость $\xi\to\omega$. При этом отпадает надобность в рассмотрении функции $\varepsilon_\Lambda(\xi)$ в *Определении 1*, а понятия насыщенного ЛМСРФ, класса насыщения и порядка насыщения приобретают естественный и прозрачный смысл в соответствии с *Определением 6*. Что касается классов W^r, $r\in\mathfrak{R}$, то их выбор определяется приближённым решением конкретных уравнений математической физики, составной частью которого является данный ЛМСРФ.

Определение ненасыщаемой последовательности функционалов δ_n получается как логическое отрицание *Определения 6*: последовательность δ_n называется *ненасыщаемой на классах* W^r, $r\in\mathfrak{R}$ ($\equiv$*без насыщения*, $\equiv$*не имеющей насыщения*), если она не имеет насыщения на классах W^r в смысле *Определения 6*. Всё дело в том, как сформулировать просто проверяемые необходимые и достаточные условия ненасыщаемости последовательности функционалов δ_n.

Теорема 4. *Пусть последовательность функционалов* $\delta_n : B\to[0,+\infty]$ *удовлетворяет условиям*:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n W^r = 0$ *для любого* $r\in\mathfrak{R}$,

2) *для любых* $r\prec s$ *имеем* $\delta_n W^s = o(\delta_n W^r)$, $n\to+\infty$.

Тогда последовательность функционалов δ_n *не имеет насыщения на классах* W^r, $r\in\mathfrak{R}$, *в смысле Определения 6.* #

Будем говорить, что последовательность функционалов δ_n *не имеет насыщения* ($\equiv$*ненасыщаема*) *в строгом смысле на классах* W^r, $r\in\mathfrak{R}$, если она удовлетворяет условиям 1) и 2) из условия *Теоремы 4*. Условия 1) и 2), как правило, просто проверяются и являются достаточными для ненасыщаемости последовательности функционалов δ_n. Неясно, однако, будут ли они необходимыми. К этому вопросу мы вернёмся в следующем параграфе.

Определение 7. Последовательность функционалов δ_n называется *совершенной* на классе $W\subseteq B$, если найдутся $x\in W$ и константа $C>0$, не зависящая от n, для которых $\delta_n(x)\ge C\delta_n W$ для всех достаточно больших n

(иными словами, для $x \in W$ выполнено асимптотическое равенство $\delta_n(x) \asymp \delta_n W$, $n \to +\infty$, где $\delta_n W \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in W} \delta_n(x)$ – см. (12)).

Последовательность функционалов δ_n, совершенная на каждом классе W^r, $r \in \mathfrak{R}$, обладает двумя важными свойствами.

Во-первых, если δ_n не имеет насыщения в строгом смысле на классах W^r, $r \in \mathfrak{R}$ и $r \prec s$, $x \in W^r$ – элемент для которого $\delta_n(x) \asymp \delta_n W^r$, $n \to +\infty$, то для любого $y \in W^s$ имеем $\delta_n(y) = o(\delta_n(x))$, $n \to +\infty$, что существенно усиливает условие 2) из *Теоремы 4*. То же будет верно и для последовательности функционалов δ_n, имеющей насыщение на классах W^r, $r \in \mathfrak{R}$ и совершенной на каждом классе W^r, $r \preccurlyeq r_0$, если $r \prec s \preccurlyeq r_0$, где r_0 – порог насыщения. Итак, с ростом гладкости происходит ускорение сходимости к 0 не только погрешностей на классе W^s, но и погрешностей элементов.

Во-вторых, для совершенной на классе W последовательности функционалов δ_n совпадают два определения погрешностей на классе W. Первое дано выше формулой (12). Второе состоит в следующем. Пусть $[\alpha_n]$ – класс вещественных последовательностей, слабо эквивалентных при $n \to +\infty$ последовательности α_n. Множество всех классов эквивалентных последовательностей частично упорядочено отношением $[\alpha_n] \ge [\beta_n] \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ найдётся константа $C > 0$, не зависящая от n, для которой $|\alpha_n| \le C|\beta_n|$ для всех достаточно больших n. Тогда для $W \subseteq B$ есть два определения погрешности на классе:

$$\left[\sup_{x \in W} \delta_n(x)\right], \quad \inf\{[\delta_n(x)] : x \in W\}, \tag{13}$$

где $\inf$ берётся в частично упорядоченном множестве классов эквивалентных последовательностей, определённых выше. Очевидно, левая величина в (13) не превосходит правую. Для совершенной на классе W последовательности функционалов δ_n обе величины (13) совпадают, и два подхода к определению погрешности на классе W оказываются тождественными. В общем случае вопрос о равенстве величин (13) остаётся открытым.

Определение явления насыщения и достаточные условия ненасыщаемости, данные выше, существенно проще конструкции К.И. Бабенко, изложенной в §2, но остаются нетривиальными. Это проявляется при практической проверке условий 1)–3) из *Определения 6* и условий 1)–2) из *Теоремы 4* в конкретных случаях, требующей, как оказалось, привлечения глубоких результатов теории приближений, математического и функционального анализа, вычисления поперечников классов W^r, $r \in \mathfrak{R}$, и т.д.

Весьма важно, что насыщаемость зависит от выбора классов W^r, $r \in \mathfrak{R}$. Рассмотрим поучительный пример, в котором участвуют следующие функциональные классы:

$Lip_M(\alpha; X)$ – множество функций $f: X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Липшица на X с показателем $\alpha > 0$ и константой $M > 0$: для любых $x, y \in X$ верно неравенство $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|^{\alpha}$, $X \subseteq \mathbb{R}$;

$$W^r(M;[a,b]) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f \in C[a,b]: f \in C^{r-1}[a,b] \text{ и } f^{(r-1)} \in Lip_M(1;[a,b]) \right\},$$

$$\mathscr{W}^r(M) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f \in C[0,2\pi]: f \in C^{r-1}(\mathbb{R}) \text{ и } f^{(r-1)} \in Lip_M(1;\mathbb{R}) \right\},$$

где $M > 0$, $r \ge 1$ – целое. Очевидно, $\mathscr{W}^r(M) \subseteq W^r(M;[0,2\pi])$. Можно показать, что $W^r(M;[a,b]) \subseteq C[a,b]$, $\mathscr{W}^r(M) \subseteq C[0,2\pi]$ – ограниченно компактные подмножества.

Пример 1. Рассмотрим приближённое вычисление определённого интеграла $f \in C[a,b]$ посредством составной квадратурной формулы трапеций:

$$I(f) \underset{\text{def}}{=} \int_a^b f dx \cong \sigma_n^T(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right),$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad 0 \le k \le n.$$

Тогда функционалы погрешностей задаются формулами

$$\delta_n^T(f) \underset{\text{def}}{=} \left| I(f) - \sigma_n^T(f) \right| : C[a,b] \to [0,+\infty], \quad n = 1,2,\dots$$

Пусть $B = C[a,b]$ с нормой максимум модуля, $W^r \underset{\text{def}}{=} W^r(M;[a,b])$, $r = 1,2,\dots$, $M > 0$, $\mathfrak{R} = \mathbb{N}$ с естественным линейным порядком.

Теорема 5. 1) *Имеют место равенства*

$$\delta_n^T W^1 = \frac{M}{4}\frac{(b-a)^2}{n}, \quad \delta_n^T W^2 = \frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}, \quad \delta_n^T W^r = +\infty, \quad r > 2.$$

2) *Для функции* $f_0(x) = Ex^2$, $E \in \mathbb{R}$ *имеем* $f_0 \in W^r$, $r > 2$ *и* $\delta_n^T(f_0) = \dfrac{|E|(b-a)^3}{6n^2}$. #

Из *Теоремы 5* очевидно следует насыщаемость последовательности функционалов δ_n^T на классах W^r, при этом W^2 – класс насыщения, порядок насыщения $\asymp M/n^2$, порог насыщения $r_0 = 2$. Пусть теперь $[a,b] = [0,2\pi]$ и $W^r = \mathscr{W}^r(M)$, $r = 1,2,\dots$, с теми же функционалами погрешностей. Тогда ситуация кардинально меняется.

Теорема 6 [6]**.** 1) *Для любого* $r \geq 1$ *имеем* $\delta_n^T W^r \leq \dfrac{4\pi \mathscr{K}_r M}{n^r}$, *где* $\mathscr{K}_r$ – *константы Фавара* $\mathscr{K}_r \underset{\text{def}}{=} \dfrac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{s(r+1)}}{(2s+1)^{r+1}} > 0$.

2) *Для любого* $r \geq 1$ *имеет место асимптотическое равенство* $\delta_n^T W^r \asymp \dfrac{M}{n^r}$, $n \to +\infty$. #

Из *Теоремы 6* следует, что последовательность функционалов δ_n^T не имеет насыщения в строгом смысле на классах $\mathscr{W}^r$, $r \geq 1$.

Приведём два примера совершенных на функциональных классах последовательностей функционалов погрешностей.

Пример 2. Рассмотрим аппроксимацию непрерывных функций $f \in C[a,b]$ лагранжевыми сплайнами. Пусть $n \geq r \geq 2$ – целые, $x_k = a + \dfrac{b-a}{n-1}(k-1)$, $1 \leq k \leq n$, – равноотстоящие узлы на $[a,b]$, среди которых содержатся концы отрезка $[a,b]$. Построим непрерывную кусочно-полиномиальную функцию $\ell_r(x)$ на $[a,b]$, удовлетворяющую условиям: 1) $\ell_r\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $1 \leq i < n$ – алгебраический многочлен степени $< r$, 2) $\ell_r(x_i) = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Для $1 \leq i \leq n + r - 1$ рассмотрим алгебраический интерполяционный многочлен $q_i(x)$ степени $< r$, совпадающий в узлах $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r-1}$ со значениями $f(x_i), f(x_{i+1}), \ldots, f(x_{i+r-1})$, и будем считать $\ell_r(x) \equiv q_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Если $n + r - 1 \leq i < n$, то полагаем $\ell_r(x) \equiv q_{n+r-1}(x)$ для $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Полученная функция удовлетворяет условиям 1) и 2), обозначается $\ell_r(\boldsymbol{x}; f)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и называется *лагранжевым сплайном порядка* $< r$ *функции* f *относительно системы узлов* $\boldsymbol{x}$. Функционалы погрешностей задаются формулой

$$\delta_n^{(r)}(f) \underset{\text{def}}{=} \| f - \ell_r(\boldsymbol{x}; f) \|_\infty, \quad n = r, r+1, \ldots$$

Положим $B = C[a,b]$ с нормой максимум модуля, $W^s \underset{\text{def}}{=} W^s(M;[a,b])$, $s \geq 1$, $M > 0$. Тогда последовательность функционалов $\delta_n^{(r)}$, $n = r, r+1, \ldots$, является совершенной на классах W^s, $1 \leq s \leq r$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7. 1) *Для любой* $f \in C[a,b]$ *имеем* $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n^{(r)}(f) = 0$.

2) $\delta_n^{(r)} W^s \asymp M(b-a)^s n^{-s}$, $n \to +\infty$ *для любого* $1 \leq s \leq r$.

3) $\delta_n^{(r)} W^s = +\infty$ *для* $s > r$, $n \geq r$, *причём для* $f_E(x) = \dfrac{E}{r!} x^r$, $E \in \mathbb{R}$ *имеем* $f_E \in W^s$ и $\delta_n^{(r)}(f_E) \geq |E| K_r (b-a)^r n^{-r}$, $K_r = \dfrac{1}{4r(r-1)}$, $n \geq r$.

4) *При* $r>2$, $1\le s<r$ *для функции* $f_s(x)\underset{\text{def}}{=}(\operatorname{sgn}x)\cdot x^s/s!$ *имеем*

$f_s\in W^s(1;[-1,1])$, $\delta_n^{(r)}(f_s)\ge C(r)n^{-s}/s!$, $n\ge 2r$, $C_r=\dfrac{[2(r-2)-1]!!}{2^{r-2}(r-1)!}$.

5) *При* $r=2$, $s=1$ *для функции* $f_1(x)\underset{\text{def}}{=}\int\limits_0^x g(y)\mathrm{d}y$, $g(x)\underset{\text{def}}{=}(-1)^n$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\le x<\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{2^k}$,

$n=0,1,2,\dots,g(1)$ *– произвольное, имеем* $f_1\in W^1(1;[0,1])$, $\delta_n^{(2)}(f_1)\ge\dfrac{1}{24n}$, $n\ge 1$. #

Из *Теоремы 7* следует насыщаемость интерполяции непрерывных функций лагранжевыми сплайнами порядка $<r$ на классах $W^s=W^s(M;[a,b])$, $s\ge 1$, причём класс насыщения равен W^r, порог насыщения равен r, а порядок насыщения $\asymp\dfrac{M}{n^r}$ при $n\to+\infty$. Из 3)–5) следует, что последовательность функционалов $\delta_n^{(r)}$, $n\ge r$ является совершенной на классах W^s, $1\le s\le r$ и не является совершенной на классах W^s, $s>r$. Искомые экстремальные функции, удовлетворяющие *Определению 7*, получаются из построенных в *Теореме 7* по формулам

$$r>2:\quad M\left(\frac{b-a}{2}\right)^s f_s(x(t))\in W^s(M;[a,b]),\quad x(t)=\frac{2(t-a)}{b-a}-1,$$

$$r=2:\quad M(b-a)f_1\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\in W^1(M;[a,b]).$$

Пример 3. Рассмотрим ЛМСРФ функций $f\in C[0,2\pi]$ суммами Фейера $\sigma_n(f)$ (см. §1). Пусть $\delta_n(f)=\|f-\sigma_n(f)\|_\infty$, $n=1,2,\dots$ – функционалы погрешностей, $W^r\underset{\text{def}}{=}\mathscr{W}^r(M)$, $M>0$, $r=1,2,\dots$, $B=C[0,2\pi]$.

Теорема 8. 1) *Для любой* $f\in C[0,2\pi]$ *имеем* $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n(f)=0$.

2) *Имеют место асимптотические равенства* $\delta_n W^1\asymp M\dfrac{\ln n}{n}$, $\delta_n W^2\asymp\dfrac{M}{n}$, $n\to+\infty$.

3) *Пусть* $r>2$, $f_0=M\cos x$, *тогда* $f_0\in W^r$ *и* $\delta_n(f_0)=\dfrac{M}{n}$. #

Из *Теоремы 8* следует, что ЛМСРФ суммами Фейера имеет насыщение на классах W^r, причём W^2 – класс насыщения, $r_0=2$ – порог насыщения и $\asymp\dfrac{M}{n}$ – порядок насыщения. Функционалы δ_n совершенные на классах W^1 и W^2. Для

W^2 экстремальная функция равна f_0, а для W^1 она определяется *Теоремой 3*, согласно которой функция $M\,|\cos x| \in W^1$ и является искомой.

§4. Примеры насыщаемых и ненасыщаемых алгоритмов

Поскольку для исследования явления насыщения, согласно *Определению 6*, от алгоритма нужна только его погрешность, то понятие “алгоритм” понимается в широком смысле. Под алгоритмом мы понимаем способ решения задачи, облечённый в форму рецептов, имеющих характер точных предписаний о выполнении в определённом порядке некоторой конечной системы операций, имеющих целью нахождение некоторой величины или функции. Для исследования насыщаемости, что такое алгоритм, в сущности, неважно, коль скоро есть точная формула для вычисления его погрешности.

Пример 4. *Алгебраическая интерполяция*. Пусть $[a,b]$ – отрезок, $a<b$, $\mathscr{X}=\{x_{nk}\}_{\substack{1\le k\le n\\ n\ge 1}}$ – матрица узлов на $[a,b]$ (т.е. $x_{nk}\in[a,b]$, $1\le k\le n$, $n\ge 1$ и для любого $n\ge 1$ точки $x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nn}$ попарно различны), $B \underset{\text{def}}{=} C[a,b]$ с чебышёвской нормой $\|\cdot\|_\infty$, $X_n \underset{\text{def}}{=} \mathscr{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени $<n$ с вещественными коэффициентами. Определим линейные отображения $\pi_n : B\to \mathscr{P}_n \subseteq B$, $\pi_n(f) \underset{\text{def}}{=} p_{n-1}(f) = p_{n-1}(\mathscr{X};f)$ – алгебраический интерполяционный многочлен степени $<n$ функции f относительно системы узлов $x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nn}$. Получили метод приближения, погрешность которого на функции f равна $\delta_n(f) \underset{\text{def}}{=} \|f-\pi_n(f)\|_\infty$. Рассмотрим классы $W^r = W^r(M;[a,b]) \subseteq B$, $M>0$, $r=1,2,\ldots$.

Теорема 9. 1) *Пусть* $\mathscr{X}=\mathscr{X}^*=\{x_{nk}^*\}$ – *матрица чебышёвских узлов на* $[a,b]$ $\left(x_{nk}^* \underset{\text{def}}{=} \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi+\dfrac{b+a}{2},\quad 1\le k\le n,\quad n\ge 1\right)$, $p_{n-1}^*(f)=p_{n-1}(\mathscr{X}^*;f)$. *Тогда для любых* $r\ge 1$, $f\in W^r$ *имеет место неравенство*

$$\left\|p_{n-1}^*(f)-f\right\|_\infty \le \left(\frac{|I|}{2}\right)^r MB_r\,\frac{\ln n}{n^r},\quad n\ge \max(r,3), \tag{14}$$

$$B_r=\left(9+\frac{4}{\pi}\right)\left(\frac{\pi r}{2}\right)^r\frac{1}{r!},\quad |I|=b-a.$$

2) *Для всех достаточно больших* n *и* $r\ge 1$ *выполнены неравенства*

$$C_r\left(\frac{|I|}{2}\right)^r \frac{M}{n^r} \le \delta_n W^r \le B_r\left(\frac{|I|}{2}\right)^r M\,\frac{\ln n}{n^r}, \qquad (15)$$

где $C_r > 0$ *не зависит от* n. *В частности, последовательность функционалов* $\delta_n(f)$ *ненасыщаема в строгом смысле на классах* W^r.

Для получения оценки (14) необходимо использовать неравенства Лебега, Джексона и Бернштейна для констант Лебега $\lambda_n = \|\pi_n\|$ в случае матрицы чебышёвских узлов $\mathscr{X}^*$, а левое неравенство (15) основано на вычислении n-поперечника по Колмогорову класса W^r. Поэтому результат *Теоремы 9* нетривиален. Добавим, что, согласно теореме Фабера–Бернштейна, для любой матрицы узлов $\mathscr{X}$ имеем $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n = +\infty$, поэтому из теоремы Банаха–Штейнгауза следует существование для любой матрицы узлов $\mathscr{X}$ функции $f \in C[a,b]$, для которой многочлены $p_{n-1}(\mathscr{X}; f)$ не сходятся равномерно на $[a,b]$ к f при $n \to +\infty$.

Пример 5. *Аппроксимация конечными суммами Фурье*. Пусть $B = C[0,2\pi]$ с чебышёвской нормой, $X_n \underset{\text{def}}{=} \mathscr{L}_{2n+1}$ – совокупность всех тригонометрических многочленов степени $\le n$, где $n \ge 0$. Рассмотрим метод приближения, задаваемый линейными отображениями $\pi_n : B \to \mathscr{L}_{2n+1} \subseteq B$, $\pi_n(f) \underset{\text{def}}{=} S_n(f)$

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k + \mathrm{i}b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f(x)\mathrm{d}x.$$

Таким образом, $S_n(f)$ – n-я частичная сумма ряда Фурье функции f. Пусть $W^r = \mathscr{W}^r(M)$, $M > 0$, $r = 1,2,\ldots$, $\delta_n(f) \underset{\text{def}}{=} \|f - S_n(f)\|_\infty$.

Теорема 10 (А.Н. Колмогоров)**.** *Имеют место эквивалентности* (*в смысле матанализа*):

$$\delta_n W^r \sim \frac{4M}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}, \quad n \to +\infty, \quad r = 1,2,\ldots$$

В частности, последовательность функционалов $\delta_n(f)$ *ненасыщаема в строгом смысле на классах* W^r. #

Согласно ещё одной теореме Колмогорова [12],

$$\|S_n\| = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \alpha_n, \quad |\alpha_n| \le 4, \quad n \ge 1.$$

В частности, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n\| = +\infty$ и по теореме Банаха–Штейнгауза найдётся $f \in C[0,2\pi]$, для которой $S_n(f)$ не сходятся равномерно на $\mathbb{R}$ к f при $n \to +\infty$.

Для следующих примеров напомним некоторые понятия. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ – непрерывная положительная функция, называемая *дифференциальным весом*, для которой конечен несобственный интеграл Римана

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Пусть $C(a,b;h) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f\in C[a,b] : \int_a^b f^2 h\mathrm{d}x < +\infty \right\}$.

Нетрудно проверить, что: 1) $C(a,b;h)$ – векторное пространство относительно поточечного сложения функций и умножения функций на скаляры, 2) $C[a,b]\subseteq C(a,b;h)$, 3) $C(a,b;h)$ – евклидово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle = \langle f,g\rangle_h \underset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x, \quad f,g\in C(a,b;h).$$

Определение 8. Вещественные функции $e_0(x), e_1(x),\ldots,e_n(x),\ldots,\ \ x\in\mathbb{R}$ называются *ортогональными на* (a,b) *многочленами дифференциального веса* $h(x)$, если:

1) для любого $n\geq 0$ $e_n(x)$ – алгебраический многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом,

2) $\langle e_n,e_m\rangle = \delta_{nm}$, $n,m\geq 0$ (δ_{nm} – символ Кронекера).

В частности, $e_0,e_1,\ldots,e_n,\ldots$ – линейно независимая система функций, а $e_0,e_1,\ldots,e_n$ образуют базис в $\mathscr{P}_{n+1}$, $n\geq 0$. Можно доказать, что для любого дифференциального веса $h(x)$ последовательность $e_0,e_1,\ldots,e_n,\ldots$, удовлетворяющая условиям 1) и 2) из *Определения 8*, существует и определена однозначно и для $n>0$ все корни многочлена $e_n(x)$ вещественные, простые и лежат на интервале (a,b).

Пример 6. *Аппроксимация ортогональными многочленами*. Пусть $B=C[a,b]$ с чебышёвской нормой, $X_n \underset{\text{def}}{=} \mathscr{P}_{n+1}$, $n\geq 0$. Определим линейное отображение $\pi_n : B\to X_n = \mathscr{P}_{n+1}\subseteq B$, $\pi_n(f) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k$, где $e_0,e_1,\ldots,e_n,\ldots$ – ортогональные на (a,b) многочлены дифференциального веса $h(x)$. Получили метод приближений, погрешность которого на функции $f\in B$ вычисляется по формуле $\delta_n(f) = \| f-\pi_n(f)\|_\infty$. Рассмотрим два частных случая.

1° $(a,b)=(-1,1)$, $h(x)=(1-x^2)^{-1/2}$. Ортогональные на $(-1,1)$ многочлены веса $h(x)$ называются (*нормализованными*) *многочленами Чебышёва* 1-*го рода*. Они равны

$$e_n(x)=t_n(x)\underset{\text{def}}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x),\, n\ge 1,\, e_0(x)=t_0(x)\underset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, $n\ge 0$ – (ненормализованные) многочлены Чебышёва 1-го рода.

2° $(a,b)=(-1,1)$, $h(x)\equiv 1$. Ортогональные на $(-1,1)$ многочлены веса $h(x)$ называются *многочленами Лежандра*. Они равны

$$e_n(x)=p_n(x)\underset{\text{def}}{=}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right],\quad n\ge 0.$$

Нормы $\|\pi_n\|$ оцениваются сверху и снизу.

Теорема 11 [13]. 1) *Для многочленов Чебышёва* 1-*го рода имеем*

$$\|\pi_n\|\le 2+\ln n,\quad n\ge 2.$$

2) *Для многочленов Лежандра имеем*

$$\|\pi_n\|\le C\sqrt{n},\quad n\ge 1,$$

где $C>0$ – *универсальная константа*.

3) (С.М. Харшиладзе–Ф.И. Лозинский) *Для любого дифференциального веса* $h(x)$ *имеем* $\|\pi_n\|\ge\dfrac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$, $n\ge 1$. #

Пусть $W^r=W^r(M;[-1,1])$, $r\ge 1$.

Теорема 12. *Имеют место неравенства, справедливые для всех достаточно больших* n:

$$\frac{D(r)M}{(n+1)^r}\le\delta_n W^r\le\frac{3+\ln n}{(n+1)^r}B(r)M\left(\frac{\pi r}{2}\right)^r\frac{1}{r!}\text{ – для многочленов Чебышёва 1-го рода},$$

$$\frac{D(r)M}{(n+1)^r}\le\delta_n W^r\le\frac{1+C\sqrt{n}}{(n+1)^r}B(r)M\left(\frac{\pi r}{2}\right)^r\frac{1}{r!}\text{ – для многочленов Лежандра},$$

где $B(r)$, $C(r)$ – *универсальные константы, большие* 0, $C>0$ – *константа из Теоремы 11*. #

Из *Теоремы 12* следует ненасыщаемость функционалов $\delta_n(f)$ в строгом смысле на классах W^r. Из *Теоремы 11* следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\pi_n\|=+\infty$, поэтому из теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает существование $f\in C[a,b]$, для которой $\pi_n(f)$ не сходятся равномерно на $[a,b]$ к функции f при $n\to+\infty$. Заметим, что подспудная цель теории приближений состояла в конструировании аппроксимационных агрегатов, способных сколь угодно точно в равномерной метрике приблизиться к любой непрерывной на отрезке или непрерывной 2π-периодической функции на прямой (свойство универсальности метода приближения). Конструкции *Примеров 4–6* этому условию не удовлетворяли, и считалось, что в этом их существенный недостаток. Для его исправления были развиты специальные приёмы, включая ЛМСРФ (см. §1), методы сплайн-интерполяции и др. Оказалось, однако, что оборотной стороной универсальности построенных таким образом методов приближения стала слишком низкая и быстро насыщаемая по гладкости сходимость к нулю их погрешности, неприемлемая для нужд численного анализа. Мы это видели на примере сумм Фейера и лагранжевой интерполяции в §3. Кстати, в этом отношении лагранжева интерполяция ещё не столь “плоха”, поскольку порог насыщения на классах $W^s(M;[a,b])$ теоретически можно отодвинуть сколь угодно далеко за счёт увеличения порядка лагранжева сплайна (практически этому мешает экспоненциальный рост констант Лебега алгебраической интерполяции относительно равноотстоящих узлов, ведущий к катастрофическому росту влияния ошибок округления), а сами лагранжевы сплайны являются локальными. Это означает, что возмущение функции f в одном узле, скажем x_i, $1\le i\le n$, не “размывается” по всему сплайну $\ell_r(\boldsymbol{x};f)$, а ведёт к возмущению сплайна на отрезке $[\max(a,x_{i-r+1}),\min(b,x_{i+1})]$ длины $\le rh$, содержащем узел x_i, в частности, при увеличении числа узлов интерполяции $h=(b-a)/(n-1)\to 0$ и указанный отрезок стягивается к узлу x_i. Другие сплайны, например популярные в вычислительной практике кубические интерполяционные сплайны, намного “хуже” – нельзя отодвинуть порог насыщения, и возмущение функции в одном узле интерполяции “размазывается” по всему сплайну.

Пример 7. *Квадратурная формула Гаусса*. Рассмотрим приближённое вычисление (вообще говоря, несобственного) интеграла

$$I(f)\underset{\text{def}}{=}\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x\cong\sigma_n^\Gamma(f)\underset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^n c_{nk}f(x_{nk}),\quad n\ge 1,$$

где $h(x)$ – дифференциальный вес (см. выше), $x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nn}$ – корни ортогонального на (a,b) многочлена $e_n(x)$ дифференциального веса $h(x)$. Потребуем, чтобы квадратурные формулы $\sigma_n^\Gamma(f)$ имели интерполяционный тип (т.е. были точны на $\mathscr{P}_n$ для любого $n \ge 1$). Тогда, как известно, коэффициенты c_{nk} однозначно определяются по узлам x_{nk}:

$$c_{nk} = \int_a^b \prod_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne k}} \left(\frac{x - x_{nj}}{x_{nk} - x_{nj}} \right) h(x)\mathrm{d}x.$$

Построенные квадратурные формулы $\sigma_n^{\Gamma}(f)$ называются *гауссовскими*, а для дифференциального веса $h(x) \equiv 1$ – *квадратурными формулами Гаусса*. Положим $B = C[a,b]$, $\delta_n^{\Gamma}(f) = \left| I(f) - \sigma_n^{\Gamma}(f) \right|$, $n \ge 1$ – функционалы погрешности.

Теорема 13. *Пусть* $f \in W^r(M;[a,b])$, *тогда*

$$\delta_n^{\Gamma}(f) \le 2M \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \cdot \left(\frac{|I|\pi e}{8} \right)^r \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{n^r}, \quad 2n \ge r \ge 1. \qquad (16)$$

#

Неравенство (16) позволяет предположить, что с ростом гладкости r происходит ускорение сходимости погрешности $\delta_n^{\Gamma} W^r$ к 0. Однако доказать это удаётся только для веса $h(x) = 1$ (т.е. для квадратурных формул Гаусса), для других весовых функций вопрос остаётся открытым.

Теорема 14 [6]**.** *Пусть* $h(x) = 1$, $[a,b] = [-1,1]$, σ_n^{Γ} *– квадратурные формулы Гаусса,* $W^r = W^r(M;[-1,1])$, *тогда имеет место асимптотическое равенство*

$$\delta_n^{\Gamma} W^r \asymp \frac{M}{n^r}, \quad n \to +\infty, \quad r \ge 1.$$

В частности, последовательность функционалов $\delta_n^{\Gamma}(f)$ *ненасыщаема в строгом смысле на классах* W^r. #

Пример 8. *Составные квадратурные формулы*. Рассмотрим составную квадратурную формулу для вычисления интеграла $I(f)$ с весовой функцией $h(x) \equiv 1$ от $f \in C[a,b]$:

$$I(f) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_a^b f\mathrm{d}x \cong \sigma_{m(N)} \underset{\mathrm{def}}{=} h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} c_j^0 f\left(\xi_{k-1} + h t_j^0 \right), \qquad (17)$$

где $t_1^0, \ldots, t_n^0 \in [0,1]$ – попарно различные точки, $c_1^0, \ldots, c_n^0$ – произвольные вещественные числа, $\xi_k = a + kh$, $0 \le k \le N$, $h = (b-a)/N$ – равноотстоящие узлы на $[a,b]$, $N \ge 1$, $n \ge 1$ – натуральные, величина $m = m(N)$ равна nN, если концы отрезка $[0,1]$ одновременно не входят в число узлов $t_1^0, \ldots, t_n^0$ и $m = N(n-1) + 1$ в противном случае. Сумму в правой части (17) можно рассматривать как квадратурную формулу, число узлов которой равно m, а сами узлы и коэффициенты получаются после приведения подобных членов в указанной сумме. Введём вспомогательную квадратурную формулу на отрезке $[0,1]$:

$$\int_0^1 \varphi \mathrm{d}x \cong \sigma_n^0(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n c_j^0 \varphi\left(t_j^0\right), \quad \varphi \in C[0,1]. \tag{18}$$

Тогда сумма (17) называется составной квадратурной формулой на $[a,b]$, порождённой квадратурной формулой $\sigma_n^0(\varphi)$ на $[0,1]$. Пусть теперь $B = C[a,b]$ с чебышёвской нормой, $W^r = W^r\left(M;[a,b]\right)$, $r \geq 1$ – целое, $M > 0$, $\delta_N(f) \underset{\text{def}}{=} \left|I(f) - \sigma_{m(N)}(f)\right|$, $N \geq 1$ – функционалы погрешностей составной квадратурной формулы.

Теорема 15. *Пусть* $\ell \geq 1$ *– алгебраический порядок точности квадратурной формулы* $\sigma_n^0(\varphi)$ *на* $[0,1]$. *Тогда*: ($\left|I\right| = b - a$)

1) $\delta_N W^r \asymp M\left|I\right|^{r+1} N^{-r}$, $N \to +\infty$, $1 \leq r \leq \ell$ и $\delta_N W^r = +\infty$ для $r > \ell$.

2) $r > \ell \Rightarrow f_E(x) \underset{\text{def}}{=} Ex^\ell \in W^r$ и $\delta_N(f_E) = C\left|E\right|\left|I\right|^{\ell+1} \ell! N^{-\ell}$,

где $C > 0$ *– универсальная константа, вычисляемая по формуле*

$$C = \left|\int_0^1 K_\ell^0(t)\mathrm{d}t\right|, \quad K_\ell^0(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{(1-t)^\ell}{\ell!} - \frac{1}{(\ell-1)!}\sum_{k=1}^n c_k^0 \left(t_k^0 - t\right)^{\ell-1} \theta\left(t_k^0 - t\right),$$

$\theta(t)$ *– функция Хевисайда*: $\theta(t) = 1$, $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$, $t < 0$. #

Из **Теоремы 15** следует, что функционалы $\delta_N(f)$ насыщаемы на классах W^r, причём класс насыщения равен W^ℓ, порог насыщения $r = \ell$ и порядок насыщения $\asymp M\left|I\right|^{\ell+1} N^{-\ell}$, $N \to +\infty$.

Напомним, алгебраическим порядком точности ℓ квадратурной формулы называется максимальное натуральное $m \geq 1$, для которого квадратурная формула точна на многочленах $\mathscr{P}_m$; если таких m нет, то считаем $\ell = 0$.

Пример 9. *Разностный метод решения краевой задачи*. Рассмотрим краевую задачу на отрезке $[0,\ell]$:

$$\mathscr{L}(u) = f, \quad \ell_\Lambda(u) = \varphi, \quad \ell_\Pi(u) = \psi, \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{19}$$

$$\mathscr{L} \underset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - q(x), \quad \ell_\Lambda \underset{\text{def}}{=} \left.\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right)\right|_{x=0}, \quad \ell_\Pi \underset{\text{def}}{=} \left.\left(A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + B\right)\right|_{x=\ell}.$$

Как известно, если $q, f \in C[0,\ell]$, $q(x) > 0$ для любого $x \in [0,\ell]$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $A, B \geq 0$, $A + B > 0$, то задача (19) всегда имеет, и притом единственное, решение в классе $C^2[0,\ell]$. Этот результат означает, что отображение $\mathscr{L}: C^2_{\varphi,\psi} \to C[0,\ell]$ – биекция, где $C^2_{\varphi,\psi} = \left\{ f \in C^2[0,\ell] : \ell_\Lambda(f) = \varphi, \ell_\Pi(f) = \psi \right\}$. Отображение $\mathscr{L}$ разрывное, а обратное отображение $\mathscr{L}^{-1}: C[0,\ell] \to C^2_{\varphi,\psi} \subseteq C[0,\ell]$ непрерывное.

Разностный метод приближённого решения задачи (19) сформулируем в частном случае краевых условий $u(0) = \varphi$, $u(\ell) = \psi$. Он состоит из двух этапов. Предварительно выберем сетку равноотстоящих узлов $x_k = kh$, $0 \le k \le N$ на $[0,\ell]$, где $h = \ell / N$, $N > 1$ – натуральное. На первом этапе решается линейная система уравнений и ищется вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

$$\begin{gathered} v_0 = \varphi, \\ \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{h^2} - q_k v_k = f_k, \\ v_N = \psi, \end{gathered} \tag{20}$$

где $q_k = q(x_k)$, $f_k = f(x_k)$, $0 \le k \le N$. На втором этапе восстанавливается искомая функция $u(x)$, являющаяся решением задачи (19), посредством лагранжева сплайна вектора $\boldsymbol{v}$ порядка < 2 (т.е. кусочно-линейной функции) относительно системы узлов $x_0, \ldots, x_N$:

$$u(x) \cong \ell_2(\boldsymbol{v})(x), \quad x \in [0,\ell].$$

Эту конструкцию можно изобразить в виде диаграммы:

$$\begin{array}{lccccccc} \pi_N: & C^2_{\varphi,\psi} & \to & C[0,\ell] & \to & \mathbb{R}^{N+1} & \to & L_{N+1} \subseteq C[0,\ell] \\ \\ \pi_N: & u & \to & \mathscr{L}(u) = f & \to & \boldsymbol{v} & \to & \ell_2(\boldsymbol{v}) \end{array}$$

Итак, разностный метод можно рассматривать как метод приближения, где аппроксимирующее отображение π_N задано на подмножестве $C^2_{\varphi,\psi} \subseteq B = C[0,\ell]$. Здесь L_{N+1} – пространство лагранжевых сплайнов на $[0,\ell]$ порядка < 2 относительно системы равноотстоящих узлов x_k, $0 \le k \le N$. Рассмотрим следующие функциональные классы в B. Пусть для заданных $M > 0$, $L > 0$

$$W^r_L(M) \underset{\text{def}}{=} W^r(M;[0,\ell]) \cap \left\{ f \in C[0,\ell] : \|f\|_\infty \le L \right\}, \quad r \ge 1.$$

Константа L определяется величиной разрядной сетки компьютера и указывает на максимальную чебышёвскую норму правой части (19), которую возможно затабулировать в данном компьютере. Положим $X^r = \mathscr{L}^{-1}\left(W_L^r(M)\right)$, $r \ge 1$, $X^r \subseteq C^2_{\varphi,\psi}$, $\delta_N \underset{\mathrm{def}}{=} \left\| u - \pi_N(u) \right\|$.

Теорема 16. 1) X^r *– компакты,* $\pi_N : X^r \to L_{N+1}$ *– непрерывные для всех* $r \ge 1$, $N > 1$.

2) *Имеют место асимптотические формулы при* $N \to +\infty$

$$\delta_N X^1 \asymp \frac{1}{N}, \quad \delta_N X^r \asymp \frac{1}{N^2}, \quad r \ge 2.$$

3) *Для любого* $r \ge 1$ *найдётся функция* $U_r \in X^r$, *не являющаяся кубической параболой, для которой*

$$\left\| U_r - \pi_N\left(U_r\right) \right\|_\infty \ge \frac{C_r}{N^2}$$

для всех достаточно больших N, *где константы* $C_r > 0$ *не зависят от* N. #

Результат **Теоремы 16** нетривиален. Из неё следует насыщаемость последовательности функционалов $\delta_N(u)$ (а значит, и разностного метода) на классах X^r, при этом класс насыщения X^2, порог насыщения $r_0 = 2$, порядок насыщения $\asymp 1/N^2$ совпадает с порядком аппроксимации разностной схемы (20). Результат обобщается на случай общих граничных условий (19), хотя детальное рассмотрение, насколько известно, никем не проведено.

Пример 10. *Метод Бабенко ненасыщаемого решения краевой задачи*. Для простоты будем считать $[a,b] = [-1,1]$ и рассмотрим краевую задачу

$$\mathscr{L}(u) = f, \quad u(\pm 1) = 0, \quad x \in [-1,1]. \tag{21}$$

Проведённые построения легко обобщаются на случай любого отрезка и краевых условий общего вида. Пусть $G(x,z)$ – функция Грина краевой задачи

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f(x), \quad u(\pm 1) = 0.$$

Она выписывается в явном виде

$$G(x,z) = \frac{1}{2}\begin{cases} (1-x)(1+z), -1 \le z \le x \le 1, \\ (1+x)(1-z), -1 \le x \le z \le 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $u \in C^2[-1,1]$ – решение краевой задачи (21) тогда и только тогда, когда u – решение в $C[-1,1]$ интегрального уравнения

$$u(x)+\int_{-1}^{+1} G(x,z)q(z)u(z)\mathrm{dz}=F(x),\quad F(x)=-\int_{-1}^{+1} G(x,z)f(z)\mathrm{dz}. \tag{22}$$

Рассмотрим следующую дискретизацию уравнения (22), предложенную К.И. Бабенко. Пусть $x_j=\cos\frac{2j-1}{2n}\pi$, $1\le j\le n$, – чебышёвские узлы на $[-1,1]$, $t_k(x)$, $1\le k\le n$, – фундаментальные многочлены алгебраической интерполяции относительно системы узлов $x_1,\ldots,x_n$. Аппроксимируем функции $u(x)$ и $q(x)u(x)$ в уравнении (22) их интерполяционными многочленами

$$u(x)\cong\sum_{k=1}^{n}u_k t_k(x),\quad q(x)u(x)\cong\sum_{k=1}^{n}q_k u_k t_k(x),$$

где $u_k=u\left(x_k\right)$, $q_k=q\left(x_k\right)$, $1\le k\le n$. Подставляя эти выражения в (22), получим приближённое равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}u_k t_k(x)+\sum_{k=1}^{n}q_k u_k\int_{-1}^{+1} G(x,z)t_k(z)\mathrm{dz}\cong F(x).$$

Потребуем теперь, чтобы это приближённое равенство точно выполнялось в точках $x=x_j$, $1\le j\le n$. Это приводит к линейной системе уравнений для нахождения чисел $\eta_1,\ldots,\eta_n$, аппроксимирующих неизвестные значения $u_1,\ldots,u_n$:

$$\begin{gathered}\eta_j+\sum_{k=1}^{n}b_{jk}q_k\eta_k=F_j,\quad 1\le j\le n,\\ b_{jk}=\int_{-1}^{+1} G\left(x_j;z\right)t_k(z)\mathrm{dz},\quad F_j=-\int_{-1}^{+1} G\left(x_j;z\right)f(z)\mathrm{dz},\quad 1\le j,k\le n.\end{gathered} \tag{23}$$

Таким образом, алгоритм Бабенко сводится к последовательному вычислению величин b_{jk}, F_j, $1\le j,k\le n$ по формулам (23) и решению линейной системы (23) относительно $\eta_1,\ldots,\eta_n$, после чего за решение краевой задачи принимается функция $\sum_{k=1}^{n}\eta_k t_k(x)$. Погрешность метода равна $\delta_n=\left\|u(x)-\sum_{k=1}^{n}\eta_k t_k(x)\right\|_\infty$. Обоснование метода Бабенко вытекает из следующего результата, где X^r, $r\ge1$, – классы, введённые выше.

Теорема 17. 1) *Найдётся такое натуральное* $n_0>1$, *что для всех* $n>n_0$ *матрица* E_n+BQ *обратима и* $\left\|\left(E_n+BQ\right)^{-1}\right\|\le C_1$, *где* $C_1>0$ *не зависит от* n, E_n *– единичная* $n\times n$ *матрица*, $B=\left[b_{jk}\right]_{1\le j,k\le n}$, $Q=\mathrm{diag}\left\{q_1,\ldots,q_n\right\}$.

2) *Для всех* $n>n_0$ *погрешность* $\delta_n(u)$ *удовлетворяет оценке*

$$\delta_n(u) \le \left(1+\Lambda_n\right)\left[\varepsilon_n(u)+C_2\varepsilon_n(qu)\right],$$

где $C_2 > 0$ *не зависит от* n, $\varepsilon_n(\varphi)$ *– наилучшее приближение функции* $\varphi \in C[-1,1]$ *алгебраическими многочленами степени* $< n$ *в чебышёвской метрике в* $C[-1,1]$, Λ_n *– константа Лебега алгебраической интерполяции относительно чебышёвских узлов* $x_1,\ldots,x_n$.

3) *Найдутся константы* $A_r > 0$, $B_r > 0$, *не зависящие от* n, *для которых*

$$\frac{A_r}{n^{r+2}} \le \delta_n X^r \le B_r \frac{\ln n}{n^{r+2}}, \quad n > \max(n_0, r+2), r \ge 1.$$

#

Из *Теоремы 17* следует ненасыщаемость в строгом смысле последовательности функционалов $\delta_n(u)$ на классах X^r, $r \ge 1$. Заметим, что метод Бабенко можно рассматривать как метод приближения

$$\pi_N : C^2_{\varphi,\psi} \to \mathscr{P}_n \subseteq C[-1,1] \quad (\varphi = 0, \psi = 0),$$

$$\pi_N : u \in C^2_{\varphi,\psi} \to f = \mathscr{L}(u) \in C[0,1] \to \boldsymbol{\eta} = (E_n + BQ)^{-1}\boldsymbol{F} \to \sum_{k=1}^{n} \eta_k t_k(x) \in \mathscr{P}_n,$$

где $\boldsymbol{F} = (F_1,\ldots,F_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$.

Пример 11. *Метод коллокаций ненасыщаемого решения краевой задачи*. Снова рассмотрим задачу (21). Выберем в качестве базисных функций фундаментальные многочлены алгебраической интерполяции относительно $n+2$ узлов $-1, x_k = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi, 1 \le k \le n, +1$, обращающихся в нуль на концах отрезка. Эти многочлены имеют вид $u_k(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x_k^2} t_k(x)$, $1 \le k \le n$ (см. *Пример 10*). Ищем решение краевой задачи в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k(x). \tag{24}$$

Потребуем, чтобы после подстановки (24) в равенство $\mathscr{L}(u) = f$ оно точно выполнялось в узлах x_k, $1 \le k \le n$ (в этом состоит условие коллокаций, при этом x_k называются узлами коллокаций). В этом суть метода коллокаций. Коэффициенты ξ_k, $1 \le k \le n$, ищутся из условий коллокаций:

$$-\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}x^2}\left(x_j\right) + q_j \xi_j = -f_j \Leftrightarrow (A+Q)\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{f}, \tag{25}$$

где $A=\left[a_{jk}\right]_{1\le k,\,j\le n}$, $a_{jk}=-\dfrac{\mathrm{d}^2u_k}{\mathrm{d}x^2}\left(x_j\right)$, $Q=\mathrm{diag}\left\{q_1,\ldots,q_n\right\}$, $\boldsymbol{f}=-\left(f\left(x_1\right),\ldots,f\left(x_n\right)\right)$.
Решая систему (25), находим вектор $\boldsymbol{\xi}=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)$, после чего полагаем

$$u(x)\cong\sum_{k=1}^{n}\xi_k t_k(x).$$

Заметим $A^{-1}=B$, где B – матрица из *Примера 10*. Поэтому уравнение $(A+Q)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{f}$ равносильно уравнению $\left(E_n+BQ\right)\boldsymbol{\xi}=A^{-1}\boldsymbol{f}$ и его разрешимость исследована в *Примере 10*. Пусть $\delta_n(u)=\left\|u(x)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k t_k(x)\right\|_\infty$.

Теорема 18. 1) *Матрица A обратима.*
2) *Если $n>n_0$, где n_0 – натуральное из Теоремы 17, то*

$$\delta_n(u)\le\left(1+\Lambda_n\right)\left[\varepsilon_n(u)+C_2(\varepsilon_n(qu)+\varepsilon_n(f))\right],$$

где константа $C_2>0$ та же, что и в Теореме 17.
3) *Для $n>\max(n_0,r+2)$, $r\ge1$ имеют место неравенства*

$$\frac{\mathcal{A}_r}{n^{r+2}}\le\delta_n X^r\le\ln n\left(\frac{B_r}{n^{r+2}}+\frac{\mathcal{D}_r}{n^r}\right),\quad \mathcal{D}_r=\left(9+\frac{4}{\pi}\right)M\,\frac{\pi^r r^{r-1}}{2^r(r-1)!},$$

где константы $\mathcal{A}_r$, B_r те же, что и в Теореме 17.
Из *Теоремы 18* следует, что метод коллокаций не имеет насыщения на классах X^r, $r\ge0$, однако неизвестно, будет ли последовательность функционалов δ_n ненасыщаема в строгом смысле?

§5. Численное дифференцирование и явление насыщения

Рассмотрим непрерывное отображение

$$\pi:C[I]\to\mathbb{R}^n,$$

дающее приближённое представление функции $f\in C[I]$, $I=[a,b]$ посредством элементов пространства $\mathbb{R}^n$. Набор $\pi(f)\in\mathbb{R}^n$ называется *предтаблицей* f, а размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ – *объёмом предтаблицы*.

Способом вычисления ν-ой производной, $\nu\ge1$ – целое, функции $f\in C^\nu[I]$ по её предтаблице $\pi(f)$ называется отображение $\kappa:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}$. За приближённое значение ν-ой производной функции $f\in C^\nu[I]$ в точке $t\in I$

принимается величина $\kappa(\pi(f),t)\cong f^{\nu}(t)$. Точностью способа вычисления ν-ой производной на функции f и на классе $W\subseteq C^{\nu}[I]$ называются величины

$$\delta(f)\underset{\text{def}}{=}\sup_{t\in I}\left|f^{(\nu)}(t)-\kappa(\pi(f),t)\right|,\quad \delta W\underset{\text{def}}{=}\sup_{f\in W}\delta(f). \tag{26}$$

В этом построении отображение κ не предполагается непрерывным и задаётся отображением $\mathbb{R}^n\to F[I]$ – пространство всех вещественных функций на I: $\xi\in\mathbb{R}^n\to\kappa(\xi,\cdot)$. Все конструкции полезно свести в диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n & & \xrightarrow{\kappa(\xi,\cdot)} & & F[I]\\
\uparrow\pi & & \begin{array}{c}W\\ \downarrow i\end{array} & & \uparrow j\\
C[I] & \supseteq & C^{\nu}[I] & \xrightarrow{D^{\nu}} & C[I]
\end{array}$$

которая не обязана быть коммутативной, а возникающая невязка оценивается величинами (26). Здесь $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, i, j – отображения включения.

Рассмотрим точность вычисления ν-ой производной на классах $W^r(M;I)$, $1\le\nu<r$.

Определение 9. X – метрическое пространство. Предтабличным n-поперечником X, $n\ge1$ называется величина

$$\gamma^n(X)\underset{\text{def}}{=}\inf_{\pi}\sup_{x\in X}\operatorname{diam}\pi^{-1}\pi(x),$$

где $\inf$ берётся по всем непрерывным отображениям $\pi:X\to\mathbb{R}^n$.

Теорема 19 [12]**.** *Для* $r\ge1$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\gamma^n\left(W^r(M;I)\right)\asymp M\left|I\right|^r n^{-r},\quad n\to+\infty,$$

более того, имеет место неравенство для всех $n\ge1$, $r\ge1$

$$\gamma^n\left(W^r(M;I)\right)\ge C_r M\left|I\right|^r n^{-r}, \tag{27}$$

где $C_r>0$ *– универсальные константы, зависящие только от* r, $\left|I\right|=b-a$. #

Теорема 20 (О.В. Локуциевский). *Пусть* $\pi:W^r(M;I)\to\mathbb{R}^n$ *– непрерывное,* $\kappa:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}$ *– произвольное,* $n\ge1$, $r>\nu\ge1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\delta W^r(M;I)>\frac{C_{r-\nu}}{4}M\left|I\right|^{r-\nu}n^{\nu-r},\quad n\ge1,\quad r>\nu\ge1,$$

где $C_k>0$, $k\ge1$ *– универсальные константы из неравенства* (27). #

Из *Теоремы 20* следует, что точность способа вычисления ν-ой производной на классах $W^r(M;I)$, $r>\nu$ по порядку величины определяется *исключительно объёмом предтаблицы* n *и не зависит от способов приближённого представления* (*кодирования*) *непрерывных функций и способа вычисления* ν*-ой производной*.

Пусть дана последовательность $\pi_n : C[I] \to \mathbb{R}^n$ непрерывных отображений, заданных для всех достаточно больших n, и определяющая всё более точные способы представления непрерывных функций конечными наборами действительных чисел. Согласно *Теореме 20*, для любой последовательности способов вычисления ν-ой производной $\kappa_n : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ величины $\delta_n W^r(M;I)$ стремятся к нулю (если стремятся) не быстрее $\asymp |I|^{r-\nu} M n^{\nu-r}$ при $n \to +\infty$, где точность $\delta_n(f)$ для каждого n вычисляется по π_n и κ_n. Возникает вопрос, можно ли построить такие способы вычисления ν-ой производной κ_n, для которых

$$\delta_n W^r(M;I) \asymp |I|^{r-\nu} M n^{\nu-r}, \quad n \to +\infty.$$

Такие способы называются *оптимальными* на классах $W^r(M;I)$, $r>\nu$.

Пусть $\mathscr{X} = \{x_{nk}\}_{\substack{1\le k\le n \\ n\ge 2}}$ – матрица равноотстоящих узлов на $[a,b]$, $x_{nk} = a + (b-a)(k-1)/(n-1)$, $1 \le k \le n$. Для табулирующих отображений $\pi_n : C[I] \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $\pi_n(f) \underset{\text{def}}{=} (f(x_{n1}),\dots,f(x_{nn}))$ построим оптимальный на классах $W^r(M;I)$, $r>\nu\ge 1$ способ вычисления ν-ой производной. Пусть $n \ge r \ge 2$. Рассмотрим для каждого $n \ge r$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ лагранжев сплайн порядка $<r$ вектора значений ξ относительно системы узлов $x_{n1},\dots,x_{nn}$, обозначаемый $\ell_r(\xi)$. Определим $\kappa_n : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ формулой

$$\kappa_n(\xi;t) \underset{\text{def}}{=} \ell_r(\xi)^{(\nu)}(t), \quad n \ge r \ge 2, \quad r > \nu \ge 1.$$

При этом в узлах x_{nk}, $1<k<n-r+1$, называемых *внутренними*, где ν-я производная лагранжева сплайна имеет разрыв 1-го рода, берётся либо правая, либо левая производная, по соглашению, от которого результаты ниже не зависят. Итак, приближённый способ вычисления ν-ой производной имеет вид

$$f^{(\nu)}(t) \cong \ell_r(f)^{(\nu)}(t), \quad t \in I, \quad f \in C^\nu[I], \quad \nu \ge 1, \tag{28}$$

где $\ell_r(f) \underset{\text{def}}{=} \ell_r(\xi)$ для $\xi = (f(x_{n1}),\dots,f(x_{nn}))$. Практические расчётные формулы вычисления ν-ой производной по способу (28) основаны на форме Ньютона интерполяционного многочлена и приведены в [15].

Теорема 21 [15]. 1) *Имеют место неравенства*

$$\delta_n W^r(M;I) \le M\,\frac{[2(r-1)]^{r-\nu}}{(r-\nu)!}\cdot\frac{|I|^{r-\nu}}{n^{r-\nu}},\quad r>\nu\ge 1,\quad n\ge r\ge 2.$$

В частности, $\delta_n W^r(M;I) \asymp |I|^{r-\nu} M n^{\nu-r}$, $n\to+\infty$ *и построенный способ* (28) *вычисления* ν*-ой производной оптимален на классах* $W^r(M;I)$.

2) *При* $r\ge s>\nu$ *имеет место асимптотическое равенство* $\delta_n W^s(M;I) \asymp M|I|^{s-\nu} n^{\nu-s}$, $n\to+\infty$, $n\ge r$, *а при* $s>r$ *имеем* $\delta_n W^s(M;I)=+\infty$, *более того, для* $s>r$ *для функции* $f_E(x)=\dfrac{E}{r!}x^r$, где $E>0$ – *любое, имеем* $f_E\in W^s(M;I)$ *и* $\delta_n\left(f_E\right)\ge \dfrac{E}{r!}|I|^{r-\nu} n^{\nu-r} c_{r,\nu}$, $n\ge r$, *где константы* $c_{r,\nu}>0$ *не зависят от* n, *а зависят только от* r, ν. #

Из *Теоремы 21* следует, что последовательность функционалов $\delta_n(f)$, $f\in B=C^\nu[I]$ с нормой максимум модуля, $n\ge r$, определяемая способом вычисления ν-ой производной (28), насыщаема на классах $W^s=W^s(M;I)$, $s>\nu$, $W^s\subseteq B$, причём класс насыщения равен W^r, порог насыщения $s=r$ и порядок насыщения $\asymp |I|^{r-\nu} M n^{\nu-r}$, $n\to+\infty$. Из *Теоремы 21* следует, что бессмысленно вычислять ν-е производные функций из $W^s(M;I)$ при $s>r$ с помощью лагранжева сплайна порядка $<r$. В этом случае надо либо увеличить порядок лагранжева сплайна (и тогда придётся изменить расчётные формулы), либо воспользоваться другими методами численного дифференцирования.

Проведённое построение переносится и на численное дифференцирование периодических функций из класса $\mathscr{W}^r(M)$, $r\ge 1$. Оно проходит по той же схеме, что и для непериодических функций. Пусть

$$\pi : C\left[S^1\right]\to\mathbb{R}^n,\quad n\ge 1,-$$

непрерывное отображение, задающее приближённое представление 2π-периодических непрерывных функций на прямой (отождествляемых с функциями из $C\left[S^1\right]$ посредством экспоненциального отображения $\exp:\mathbb{R}\to S^1$, $x\to e^{ix}$). Набор $\pi(f)$ называется предтаблицей функции $f\in C\left[S^1\right]$, n – объёмом предтаблицы. Для $\nu\ge 1$ способом вычисления ν-ой производной функции $f\in C^\nu[0,2\pi]$ по её предтаблице называется отображение $\kappa:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\kappa(\xi;t)$, 2π-периодическое по t, точностью способа вычисления ν-ой производной на функции $f\in C^\nu[0,2\pi]$ и на классе $W\subseteq C^\nu[0,2\pi]$ называются величины:

$$\delta(f) \underset{\text{def}}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f^{(\nu)}(t) - \kappa(\pi(f),t) \right|, \quad \delta W \underset{\text{def}}{=} \sup_{f\in W} \delta(f).$$

Для функций класса $\mathscr{W}^r(M)$ точность способа вычисления ν-ой производной по порядку величины определяется *исключительно* объёмом предтаблицы и не зависит от способов приближённого представления 2π-периодических непрерывных функций и вычисления ν-ой производной. Этот принципиальный результат является следствием следующих теорем. Пусть

$$\overset{\circ}{\mathscr{W}}{}^r(M) \underset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathscr{W}^r(M) : \text{интеграл за период } 2\pi \text{ от } f \text{ равен } 0 \right\}.$$

Теорема 22 [12]. *Для* $r \ge 1$ *имеют место асимптотические равенства для предтабличных* n*-поперечников*:

$$\gamma^n\left(\overset{\circ}{\mathscr{W}}{}^r(M)\right) \asymp \gamma^n\left(\mathscr{W}^r(M)\right) \asymp Mn^{-r}, \quad n \to +\infty,$$

более того, имеют место неравенства

$$\gamma^n\left(\overset{\circ}{\mathscr{W}}{}^r(M)\right) \ge d_r M n^{-r}, \quad n \ge 1, \quad r \ge 1, \tag{29}$$

где $d_r > 0$ *– универсальная константа, зависящая только от* r. #

Теорема 23. *Пусть* $\pi : \mathscr{W}^r(M) \to \mathbb{R}^n$ *– непрерывное,* $\kappa = \kappa(\xi;t)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– произвольное* 2π*-периодическое по* t *отображение,* $n \ge 1$, $r > \nu \ge 1$. *Тогда имеет место неравенство*:

$$\delta\mathscr{W}^r(M) > \frac{d_{r-\nu}}{4} M n^{\nu-r},$$

где $d_k > 0$, $k \ge 1$ *– константы из неравенства* (29). #

Пусть $\pi_n : C\left[S^1\right] \to \mathbb{R}^{s_n}$ – определённая для всех достаточно больших n последовательность (непрерывных) способов кодирования 2π-периодических непрерывных функций, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Тогда из *Теоремы 23* следует, что для любых $\kappa_n : \mathbb{R}^{s_n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодических по второму аргументу, точность способа вычисления ν-ой производной по предтаблице $\pi_n(f)$ удовлетворяет неравенству

$$\delta_n\mathscr{W}^r(M) > \frac{d_{r-\nu}}{4} M s_n^{\nu-r},$$

и, значит, последовательность $\delta_n\mathscr{W}^r(M)$ сходится к 0 (если сходится) не быстрее $\asymp s_n^{\nu-r}$, $n \to +\infty$. Поэтому возникает вопрос о нахождении *оптимальных* способов $\kappa_n(\xi,t)$ вычисления ν-ой производной по предтаблице $\pi_n(f)$, для которых $\delta_n\mathscr{W}^r(M)\asymp s_n^{\nu-r}$, $n\to+\infty$.

Рассмотрим два примера.

Пример 12. Пусть $s_n=2n+1,\ n\geq 1,\ \pi_n: C\left[S^1\right]\to\mathbb{R}^{2n+1}$,

$$\pi_n(f)\underset{\text{def}}{=}\left(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n\right),$$

$$a_k+ib_k\underset{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,\quad k\geq 0.$$

Иными словами, функция f кодируется первыми $2n+1$ коэффициентами своего ряда Фурье, которые образуют предтаблицу $\pi_n(f)$. Для этого способа кодирования определим способ вычисления ν-ой производной, $\nu\geq 1$

$$\kappa_n:\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \xi=\left(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n\right)\in\mathbb{R}^{2n+1},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\kappa_n\left(\xi;t\right)\underset{\text{def}}{=}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]^{(\nu)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^{\nu}\left[a_k\cos\left(kt+\frac{\nu\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kt+\frac{\nu\pi}{2}\right)\right].$$

Иными словами, способ вычисления ν-ой производной по предтаблице $\pi_n(f)$ сводится к равенству

$$f^{(\nu)}(t)\cong S_n(f)^{(\nu)},\quad f\in \overset{\nu}{C}[0,2\pi],\tag{30}$$

где $S_n(f)$ – n-я частичная сумма Фурье функции f.

Теорема 24 [15]**.** *Имеет место асимптотическое равенство* $\delta_n\mathscr{W}^r(M)\asymp\dfrac{4M}{\pi^2}\dfrac{\ln n}{n^{r-\nu}}$, $n\to+\infty$, $r>\nu\geq 1$. #

Из *Теоремы 24* следует, что, во-первых, построенный метод вычисления ν-ой производной, определяемый формулой (30), в $\ln n$ хуже оптимального при $n\to+\infty$, что для нужд численного анализа вполне допустимо и, во-вторых, последовательность функционалов $\delta_n(f)$, $f\in\overset{\nu}{C}[0,2\pi]$ ненасыщаема в строгом смысле на классах $\mathscr{W}^r(M)$, $r>\nu$.

Пример 13. Пусть $S_n=4n-1,\ n\geq 1,\ \pi_n: C\left[S^1\right]\to\mathbb{R}^{4n-1}$,

$$\pi_n(f)\underset{\text{def}}{=}\left(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{2n-1},b_{2n-1}\right),$$

$$a_k+ib_k\underset{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{\mathrm{i}kx}dx,\quad k\geq 0.$$

Иными словами, функция f кодируется первыми $4n-1$ коэффициентами своего ряда Фурье. Для этого кодирования рассмотрим следующий способ вычисления ν-ой производной:

$$\kappa_n : \mathbb{R}^{4n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \kappa_n(\xi;t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\left[S_n(\xi) + \ldots + S_{2n-1}(\xi)\right]^{(\nu)},$$

$$S_n(\xi)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right),$$

$$\xi = \left(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{2n-1}, b_{2n-1}\right) \in \mathbb{R}^{4n-1}.$$

Вот явное выражение для $\kappa_n(\xi;t)$:

$$\kappa_n(\xi;t) = \sum_{k=1}^{n} k^{\nu}\left[a_k \cos\left(kt + \frac{\nu\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\nu\pi}{2}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{2n-1} k^{\nu}\, \frac{2n-k}{n}\left[a_k \cos\left(kt + \frac{\nu\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\nu\pi}{2}\right)\right].$$

Иными словами, способ вычисления ν-ой производной по предтаблице $\pi_n(f)$ сводится к равенству

$$f^{(\nu)}(t) \cong \tau_n(f)^{(\nu)}, \quad f \in C^{\nu}[0,2\pi], \tag{31}$$

где $\tau_n(f) = \dfrac{1}{n}[S_n(f) + \ldots + S_{2n-1}(f)]$ – n-я сумма Валле–Пуссена функции f.

Теорема 25 [15]**.** *Имеет место асимптотическое равенство* $\delta_n \mathscr{W}^r(M) \asymp \dfrac{\mathscr{K}_{r-\nu} M}{n^{r-\nu}}$, $n \to +\infty$, *где* $r > \nu \geq 1$, а $\mathscr{K}_s$ *– константы Фавара*

$$\mathscr{K}_s = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell(s+1)}}{(2\ell+1)^{s+1}}. \qquad \#$$

Из *Теоремы 25* следует оптимальность на классах $\mathscr{W}^r(M)$ метода (31) вычисления ν-ой производной и ненасыщаемость в строгом смысле последовательности функционалов $\delta_n(f)$, $f \in C^{\nu}[0,2\pi]$, на классах $\mathscr{W}^r(M)$, $r > \nu$.

Задача численного дифференцирования состоит в вычислении образа некоторого отображения. Например, для непериодического случая речь идёт об отображении: $D^{\nu} : C^{\nu}[I] \to B[I]$ – банахово пространство ограниченных на I функций с нормой максимум модуля. Отображение D^{ν} разрывное, но на классах $W^r(M;[a,b])$, согласно неравенству Колмогорова для отрезка [5,6], оно непрерывное. Впрочем, предложенная выше конструкция вычисления ν-ой производной предусматривает и возможность разрывности D^{ν} на некоторых классах $W \subseteq C^{\nu}[I]$, поскольку от отображения κ не требуется непрерывности. При построении оптимальных способов численного дифференцирования на уровне предтаблиц ориентиром служит скорость убывания предтабличного n-поперечника области определения. Оптимальные способы численного дифференцирования на уровне таблиц [5,6] определяются ε-энтропией образа отображения. Можно утверждать, что при должном выборе расшифровывающего алгоритма численное дифференцирование посредством лагранжевых сплайнов будет оптимальным и на уровне таблиц [5,6]. Однако существует ли связь между оптимальными способами численного дифференцирования на уровне таблиц и предтаблиц, неизвестно.

Список литературы

1. Zamansky M. Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3). **66** (1949). pp. 19-93.
2. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), **67** (1950) pp. 161-198.
3. Бабенко К.И. О явлении насыщения в численном анализе. ДАН СССР, 1978. Т. 241. № 3. С. 505–508.
4. Бабенко К.И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа. УМН, 1985. Т. 40. Вып. 1 (241). С. 3–27.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. 744 с.
6. Локуциеввский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа, М.: ТОО “Янус”, 1995 г. 581 с.
7. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 511 с.
8. Favard J. Sur l'approximation dans les espaces vectoriels, Ann. Mat. (4) **24** (1949). pp. 259–291.
9. Харшиладзе Ф.И. Классы насыщения для некоторых процессов суммирования. ДАН СССР, 1958. Т. 122. № 3. С. 352–355.
10. Турецкий А.Х. О классах насыщения для некоторых методов суммирования рядов Фурье непрерывных периодических функций. УМН, 1960. Т. 15. Вып. 6 (96). С. 149–156.
11. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.
12. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
13. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

14. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1974. 223 с.
15. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: ЛЕНАНД, 2016. 344 с.