



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бахвалов П.А., Сурначёв М.Д.**

О спектральном анализе  
схем для линейного  
уравнения переноса

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бахвалов П.А., Сурначёв М.Д. О спектральном анализе схем для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 70. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2019-70](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-70)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-70>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.КЕЛДЫША  
Российской академии наук**

**П. А. Бахвалов, М. Д. Сурначёв**

**О спектральном анализе схем  
для линейного уравнения переноса**

**Москва — 2019**

**Бахвалов П. А., Сурначёв М. Д.**

О спектральном анализе схем для линейного уравнения переноса

Рассматриваются линейные полудискретные схемы на равномерных сетках с несколькими степенями свободы на одной ячейке для решения уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Оценку точности таких схем на гладких решениях обычно сводят к анализу точности на отдельных гармониках, однако в известных авторах источниках строгого математического обоснования этой процедуры не проводится. В настоящей работе доказывается оценка численной ошибки на произвольном гладком решении через ошибку решения на отдельных гармониках.

**Ключевые слова:** разностная схема, спектральный анализ, уравнение переноса

**Pavel Alexeevich Bakhvalov, Mikhail Dmitrievich Surnachev**

On spectral analysis of numerical schemes for the linear transport equation

We consider linear semidiscrete schemes on uniform meshes with several degrees of freedom for the transport equation with constant velocity. Accuracy analysis of these schemes is usually reduced to analysis on single modes. However we failed to find a rigorous justification of this procedure. For a smooth solution we prove an error estimate based on the solution error for single modes.

**Key words:** difference scheme, spectral analysis, transport equation

## Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Пространства решений и сеточных функций . . . . .	4
3	Уравнение и схемы . . . . .	6
4	Отображение функций на сеточное пространство . . . . .	9
5	Точечное отображение . . . . .	11
6	Спектральное представление схемы . . . . .	15
7	Аппроксимация, точность и устойчивость . . . . .	18
8	Перенос оценок с гармоник на произвольные решения . . . . .	20
9	Определение порядка аппроксимации . . . . .	26
10	Заключение . . . . .	27
	Список литературы . . . . .	28

## 1. Введение

Спектральный анализ является мощным средством для анализа линейных разностных схем (как полностью дискретных, так и полудискретных) с постоянными коэффициентами на равномерных сетках. Широкий круг вопросов, связанных с его практическим применением для линейного уравнения переноса, разобран в [1], однако рамки этой монографии ограничены схемами, в которых на одну ячейку приходится только одна переменная. Спектральный анализ также неоднократно использовался для анализа схем с несколькими степенями свободы на одну ячейку: для метода Галёркина с разрывными базисными функциями [2–5], для метода спектральных разностей [6, 7], метода реконструкции потоков (семейства схем, включающего в себя первые два) [8], бикомпактных схем [9] и т. д. Применимость спектрального анализа к схемам для решения гиперболических систем линейных уравнений продемонстрирована в [10].

Спектральный анализ разностной схемы заключается в исследовании её свойств в случае, когда решение является отдельной гармоникой. Это позволяет делать выводы относительно её поведения на произвольной достаточно гладкой функции. Тем не менее, строгого математического обоснования процедуры переноса оценок ошибки с отдельных гармоник на произвольные достаточно гладкие функции в известных авторам источниках не проводится.

Настоящая работа посвящена линейным полудискретным схемам для решения начальной задачи для многомерного уравнения переноса с постоянным коэффициентом и периодическими граничными условиями на равномерной сетке. Основное внимание уделяется схемам с несколькими степенями свободы на одну ячейку. Если сетка является периодической с периодом, не меняющимся при её измельчении, то её можно рассматривать как равномерную сетку из сеточных блоков, что позволяет применить к ней проводимые ниже рассуждения без каких-либо изменений. Оператор отображения периодических функций на сеточное пространство рассматривается в общем виде, сохраняющем присутствующую сетке периодичность.

В настоящей работе спектральный анализ применяется к схеме общего вида. Показывается, как результаты об аппроксимации, устойчивости и точности переносятся с отдельных гармоник на произвольные гладкие решения. В частности, доказывается оценка численной ошибки на произвольном гладком решении через ошибку решения на отдельных гармониках.

## 2. Пространства решений и сеточных функций

Пусть  $\mathbf{a}_j, j = 1, \dots, d$ , – линейно независимая система векторов, интерпретируемых как смещения сеточных блоков друг относительно друга при  $h = 1$ . Пусть  $\mathbf{a}_j^*, j = 1, \dots, d$ , – взаимный базис к  $\{\mathbf{a}_j\}$ , то есть  $\mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ . Обозначим через  $T$  линейный оператор в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , сопоставляющий вектору  $\boldsymbol{\eta}$  вектор  $T\boldsymbol{\eta}$  с компонентами

$$T\boldsymbol{\eta} = \sum_{j=1}^d \eta_j \mathbf{a}_j. \quad (1)$$

Если  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d$ , то  $T\boldsymbol{\eta}$  есть смещение сеточного блока  $\boldsymbol{\eta}$  относительно нулевого. Имеем

$$(T^* \mathbf{x})_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j, \quad (T^*)^{-1} \mathbf{y} = \sum_{j=1}^d y_j \mathbf{a}_j^*.$$

Если  $\mathbf{a}_j$  совпадают с векторами стандартного базиса,  $T$  и  $T^*$  тождественные.

Введём пространство  $L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$  как множество функций  $f \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^d)$ , таких что при некотором  $N_0 \in \mathbb{N}$  для всех  $j = 1, \dots, d$  и почти всех  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$  выполняется  $f(\mathbf{r} + N_0 \mathbf{a}_j) = f(\mathbf{r})$ . При этом будем называть  $N_0$  *периодом* функции  $f$ . Для  $f \in L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$  определим норму

$$\|f\|^2 = \frac{1}{|\square|} \int_{\square} |f(\mathbf{r})|^2 dV,$$

где  $\square$  – параллелепипед, образованный векторами  $N_0 \mathbf{a}_1, \dots, N_0 \mathbf{a}_d$ .

Для  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  определим пространство  $H_{per}^q(\mathbb{R}^d) = L_{2,per}(\mathbb{R}^d) \cap W_{2,loc}^q(\mathbb{R}^d)$ . Для  $w \in H_{per}^q(\mathbb{R}^d)$ ,  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $r = 0, \dots, q$ , введём обозначение

$$\|\nabla^r w\|^2 = \sum_{|\mathbf{m}|=r} \frac{r!}{\mathbf{m}!} \|D^{\mathbf{m}} w\|^2, \quad D^{\mathbf{m}} = \frac{\partial^{|\mathbf{m}|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_d^{m_d}}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$  – мультииндекс:  $m_i \geq 0$ ,  $|\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_d$ ,  $\mathbf{m}! = m_1! \dots m_d!$ . Введём обозначение  $\mathbf{r}^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$  для  $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_d)$ .

На  $H_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  будем использовать семейство норм  $\|f\|_{(q,h)}^2 = \sum_{r=0}^q h^{2r} \|\nabla^r f\|^2$ .

Введём следующие обозначения.  $M^0$  – конечное множество степеней свободы в одном сеточном блоке.  $M = \mathbb{Z}^d \times M^0$  – общее множество степеней свободы. Если  $f \in \mathbb{C}^M$ , то  $f_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{C}^{M^0}$  – часть вектора  $f$  в блоке  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d$ .  $V_{per}^N$  – множество последовательностей с периодом  $N$ :

$$V_{per}^N = \{f \in \mathbb{C}^M : \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{Z}^d \ f_{\boldsymbol{\eta}+N\boldsymbol{\zeta}} = f_{\boldsymbol{\eta}}\}.$$

$V_{per} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_{per}^N$  – множество периодических последовательностей со скалярным произведением, определяемым для  $f \in V_{per}^{N(f)}$ ,  $g \in V_{per}^{N(g)}$  формулой

$$(f, g) = \frac{1}{N^d} \sum_{\eta=(0, \dots, N-1)^d} (f_{\eta}, g_{\eta}), \quad N = N(f)N(g).$$

Здесь  $(f_{\eta}, g_{\eta})$  – некоторое скалярное произведение на  $\mathbb{C}^{M^0}$ . Если функция  $f$  имеет период  $N(f)$ , то она, очевидно, также имеет период  $nN(f)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , но на значение скалярного произведения замена  $N(f)$  на  $nN(f)$  не влияет. На  $\mathbb{C}^{M^0}$  и  $V_{per}$  будем использовать нормы, порождённые этими скалярными произведениями:  $\|f_{\eta}\|^2 = (f_{\eta}, f_{\eta})$ ;  $\|f\|^2 = (f, f)$ .

**Утверждение 1.** *Пространство  $V_{per}$  не является полным относительно своей нормы.*

Покажем это на примере  $d = 1$ . Пусть  $f_k \in V_{per}$  – числовая последовательность с элементами  $(f_k)_j = 1$ , если  $j/2^k \in \mathbb{Z}$ , и  $(f_k)_j = 0$  иначе. Рассмотрим последовательность частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ . Она является фундаментальной. Действительно, пусть  $m > n$ .

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\| = \sum_{k=n+1}^m 2^{-k/2} \rightarrow 0$$

при  $m, n \rightarrow \infty$ . Покажем, что последовательность  $S_n$  не имеет предела в  $V_{per}$ . Действительно, пусть  $S_n \rightarrow S_{\infty} \in V_{per}$ . Тогда  $S_{\infty}$  имеет некоторый период  $N \in \mathbb{N}$ . Положим  $c = \lceil \max_j |(S_{\infty})_j| \rceil$ . Тогда для  $n \geq c + 1$

$$\begin{aligned} \|S_n - S_{\infty}\|^2 &= \frac{1}{2^{2n} N} \sum_{j=0}^{2^n N - 1} ((S_n)_j - (S_{\infty})_j)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{2n} N} \sum_{j=0, 2^{c+1}, \dots, 2^n N - 2^{c+1}} ((S_n)_j - (S_{\infty})_j)^2. \end{aligned}$$

Для  $j$ , кратных  $2^{c+1}$ , выполняется  $(S_n)_j \geq c + 1$ , поэтому каждое слагаемое под знаком суммы больше или равно единице. Всего слагаемых  $2^n N / 2^{c+1}$ . Таким образом,  $\|S_n - S_{\infty}\|^2 \geq 2^{-(c+1)}$  и, следовательно, не может стремиться к нулю. Таким образом, доказано отсутствие предела у  $S_n$  на  $V_{per}$ .

Формально замыкание  $V_{per}$  можно отождествить с сопряжённым к нему, то есть с пространством линейных непрерывных функционалов на  $V_{per}$ .

### 3. Уравнение и схемы

В настоящей работе рассматривается начальная задача для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d, \quad (3)$$

$$v(0, \mathbf{r}) = v_0(\mathbf{r}) \in L_{2,per}(\mathbb{R}^d). \quad (4)$$

Скорость переноса  $\boldsymbol{\omega}$  полагается постоянной во времени и пространстве.

Для аппроксимации (3) рассмотрим полудискретные схемы вида

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{S}} Z_{\zeta} \frac{du_{\eta+\zeta}}{dt}(t) + \frac{1}{h} \sum_{\zeta \in \mathcal{S}} L_{\zeta} u_{\eta+\zeta}(t) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d, \quad u_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{C}^{M^0}, \quad (5)$$

где  $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^d$  – конечное множество, которое мы будем называть шаблоном схемы, а  $Z_{\zeta}$  и  $L_{\zeta}$  – действительные матрицы. Для  $\zeta \notin \mathcal{S}$  будем полагать  $Z_{\zeta} = L_{\zeta} = 0$ .

Введём операторы  $Z : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$  и  $L : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$  равенствами

$$(Zu)_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{\zeta \in \mathcal{S}} Z_{\zeta} u_{\boldsymbol{\eta}+\zeta}, \quad (Lu)_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{\zeta \in \mathcal{S}} L_{\zeta} u_{\boldsymbol{\eta}+\zeta}. \quad (6)$$

Очевидно,  $ZV_{per}^N \subseteq V_{per}^N$ ,  $LV_{per}^N \subseteq V_{per}^N$ , откуда  $ZV_{per} \subseteq V_{per}$ ,  $LV_{per} \subseteq V_{per}$ .

Для любого  $\mathfrak{N} > 0$  введём конечное множество

$$I_{\mathfrak{N}}^d = \left( - \left\lfloor \frac{\mathfrak{N}}{2} \right\rfloor, \dots, \lceil \mathfrak{N} \rceil - 1 - \left\lfloor \frac{\mathfrak{N}}{2} \right\rfloor \right)^d, \quad (7)$$

где  $d$  означает декартову степень. Если  $N \in \mathbb{N}$ , то  $I_N^d$  содержит  $N^d$  элементов. Для фиксированного  $N$  введём конечномерные ограничения операторов  $Z$  и  $L$ , а именно,  $\check{Z} : V_{per}^N \rightarrow V_{per}^N$  и  $\check{L} : V_{per}^N \rightarrow V_{per}^N$ , так что для  $f \in V_{per}^N$  выполняется  $\check{Z}f = Zf$  и  $\check{L}f = Lf$ . Их блочные (размера  $|M^0| \times |M^0|$ ) компоненты выражаются равенствами

$$\check{Z}_{\zeta, \zeta'} = \sum_{c \in \mathbb{Z}^d} Z_{\zeta' - \zeta + cN}, \quad \check{L}_{\zeta, \zeta'} = \sum_{c \in \mathbb{Z}^d} L_{\zeta' - \zeta + cN}, \quad \zeta, \zeta' \in I_N^d. \quad (8)$$

Суммы в (8) содержат конечное число ненулевых слагаемых.

Будем предполагать, что для  $Z$  как оператора из  $V_{per}$  в  $V_{per}$  существует *ограниченный* обратный<sup>1</sup>. Или, что то же самое, при всех  $N$  для оператора  $\check{Z}$  существует обратный, причём  $\|\check{Z}^{-1}\|$  не зависит от  $N$ .

<sup>1</sup>Отметим, что бикомпактные схемы [9] записываются в виде (5), но решение  $Zx = f$  существует только для  $f \in L(V_{per}) \subsetneq V_{per}$ . Мы не будем рассматривать этот случай.

**Утверждение 2.** Для любых начальных данных  $u_0 \in V_{per}$  система ОДУ (5) имеет единственное решение  $u \in C^1([0, \infty), V_{per})$ ,  $u(0) = u_0$ . При этом если  $u_0 \in V_{per}^N$ , то для любого  $t > 0$  верно  $u(t) \in V_{per}^N$ .

Действительно, если  $u_0 \in V_{per}$ , то  $\exists N \in \mathbb{N}$ , такое что  $u_0 \in V_{per}^N$ . Для этого  $N$  запишем систему

$$\check{Z} \frac{du}{dt} + \frac{1}{h} \check{L}u = 0, \quad u(0) = u_0. \quad (9)$$

Ввиду невырожденности  $\check{Z}$  из (9) можно найти решение  $u(t) \in V_{per}^N$ , и оно является решением (5). Единственность решения вытекает из его единственности на замыкании  $V_{per}$ , которая следует из ограниченности  $Z^{-1}L$  на  $V_{per}$ .

Наиболее простыми схемами вида (5), (10) являются конечно-разностные схемы на равномерных сетках, для которых  $|M^0| = 1$ . Более сложные схемы такого вида, для которых  $|M^0| > 1$ , могут возникнуть в следующих случаях.

- Схемы с определением нескольких переменных на ячейку на равномерных декартовых сетках: метод Галёркина с разрывными базисными функциями (discontinuous Galerkin method, DG), метод спектральных разностей и т. д. В этом случае векторы  $a_j$  являются векторами, направленными вдоль  $j$ -й оси и равными по длине шагу сетки вдоль неё. Предполагается, что при измельчении сетки соотношение между шагами вдоль всех осей сохраняется.  $M^0$  является множеством степеней свободы на одной ячейке.
- Использование спектральных элементов. Приведём пример. В методе коррекции потоков (Flux Correction method, FC) [11] требуется вычислять градиенты со вторым порядком аппроксимации на неструктурированных сетках. При этом удобно использовать неструктурированные сетки, полученные измельчением некоторой базовой сетки, см. рис. 1. Элементы этой базовой сетки называются спектральными. На каждом спектральном элементе по значениям сеточной функции в узлах можно построить интерполяционный многочлен 2-го порядка и градиенты в узлах вычислять как среднее между градиентами всех интерполяционных многочленов, использующих этот узел. Если теперь записать получившуюся схему на трансляционно-инвариантной сетке, получим схему вида (5) при  $|M^0| = 4$ , поскольку в узлах базовой сетки и в узлах на рёбрах спектральных элементов аппроксимация градиентов отличается.

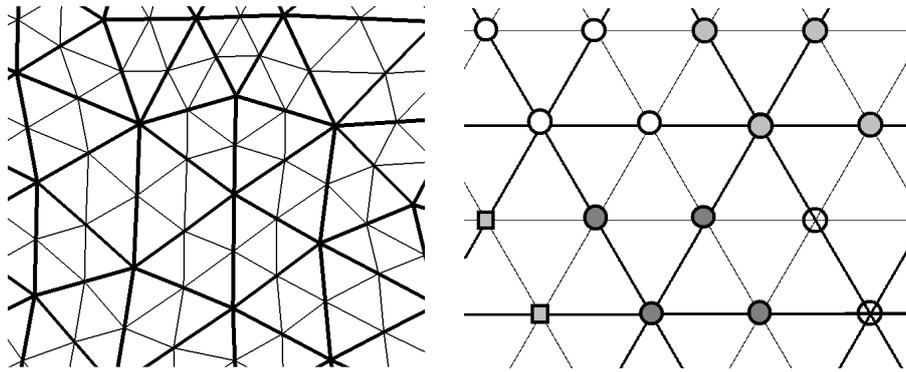


Рис. 1. Фрагменты сеток из спектральных элементов. Разными фигурами обозначены узлы, входящие в разные сеточные блоки

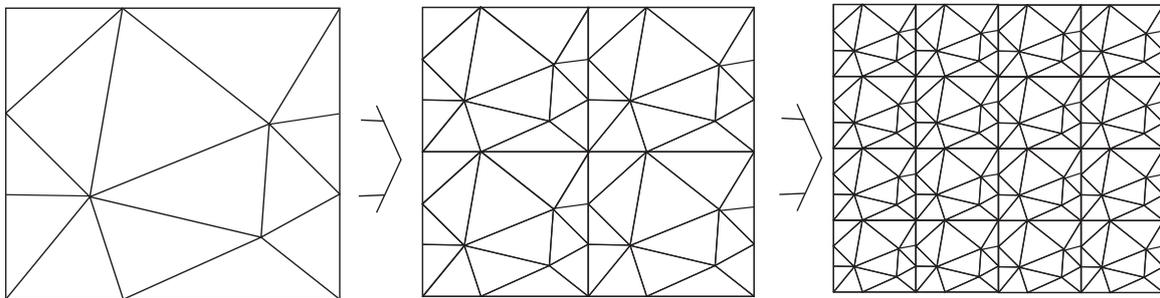


Рис. 2. Блочное измельчение расчётной сетки

- Конечно-разностные или конечно-объёмные схемы на неравномерных сетках с конечным периодом при использовании блочного измельчения (см. рис. 2). Вся сетка в целом при этом получается равномерно-блочной, то есть всё пространство замощается одинаковыми блоками неструктурированной сетки; каждому такому блоку можно сопоставить индексы  $\eta_1, \dots, \eta_d$ , как будто он является ячейкой регулярной сетки. В этом случае векторы  $\mathbf{a}_j$  совпадают, соответственно, со смещениями соседних блоков друг относительно друга, а  $|M^0|$  – с числом степеней свободы в одном блоке.
- Комбинация предыдущих вариантов. Например, DG на равномерно-блочной сетке, в том числе на трансляционно-инвариантной симплициальной сетке.

#### 4. Отображение функций на сеточное пространство

Всюду далее будем считать, что  $1/h \in \mathbb{N}$ . Для отображения данных на пространство сеточных функций используется оператор  $\Pi_h : L_{2,loc}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}^M$ , задаваемый формулой

$$\begin{aligned} (\Pi_h f)_{\eta,\xi} &= \int_{\mathbf{r} \in G} \mu_\xi(\mathbf{r}) f(h(\mathbf{r} + T\boldsymbol{\eta})) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{\mathbf{r} \in G} \mu_\xi(\mathbf{r}) f\left(h\left(\mathbf{r} + \sum_{j=1}^d \eta_j \mathbf{a}_j\right)\right) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d$  – индекс блока,  $\xi \in M^0$  – индекс переменной внутри блока,  $G \subset \mathbb{R}^d$  – некоторая ограниченная область,  $\mu_\xi \in L_2(G)$ ,  $\int_G \mu_\xi(\mathbf{r}) = 1$ .

**Утверждение 3.** Если  $f \in L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$  имеет период  $N_0$ , то  $\Pi_h f \in V_{per}^{(N_0/h)}$ .

Действительно, для любых  $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\xi \in M^0$  выполняется

$$\begin{aligned} (\Pi_h f)_{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta} N_0/h, \xi} &= \int_{\mathbf{r} \in G} \mu_\xi(\mathbf{r}) f(h(\mathbf{r} + T\boldsymbol{\eta}) + N_0 T\boldsymbol{\zeta}) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{\mathbf{r} \in G} \mu_\xi(\mathbf{r}) f(h(\mathbf{r} + T\boldsymbol{\eta})) d\mathbf{r} = (\Pi_h f)_{\boldsymbol{\eta}, \xi}. \end{aligned}$$

**Утверждение 4.** Оператор  $\Pi_h : L_{2,per}(\mathbb{R}^d) \rightarrow V_{per}$ , определённый (10), равномерно ограничен по  $h$ .

Пусть  $f \in L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$  имеет период  $N_0$ . Положим  $N = N_0/h$ . Пользуясь эквивалентностью норм на конечномерном пространстве  $\mathbb{C}^{M^0}$ , получаем

$$\|\Pi_h f\|^2 = \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \|(\Pi_h f)_{\boldsymbol{\eta}}\|^2 \leq C \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \sum_{\xi \in M^0} |(\Pi_h f)_{\boldsymbol{\eta}, \xi}|^2 = C \sum_{\xi \in M^0} Y_\xi, \quad (11)$$

$$Y_\xi = \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} |(\Pi_h f)_{\boldsymbol{\eta}, \xi}|^2.$$

Оценим величину  $Y_\xi$ . Подставим выражение (10) для  $\Pi_h$ :

$$Y_\xi = \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \left| \int_G \mu_\xi(\mathbf{r}) f(h\mathbf{r} + hT\boldsymbol{\eta}) d\mathbf{r} \right|^2.$$

С использованием неравенства Коши–Буняковского получаем

$$Y_\xi \leq \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \hat{\mu} \int_G |f(h\mathbf{r} + hT\boldsymbol{\eta})|^2 d\mathbf{r},$$

где  $\hat{\mu} = \max_\xi \int_G \mu_\xi^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ . Введём характеристическую функцию множества  $G$ :  $\chi_G(\mathbf{r}) = 1$ , если  $\mathbf{r} \in G$ , и  $\chi_G(\mathbf{r}) = 0$  иначе. Тогда

$$Y_\xi \leq \frac{\hat{\mu}}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(h\mathbf{r} + hT\boldsymbol{\eta})|^2 \chi_G(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

В каждом из слагаемых сделаем замену переменных  $\mathbf{x} = h\mathbf{r} + hT\boldsymbol{\eta}$ . Тогда

$$Y_\xi \leq \frac{\hat{\mu}}{h^d N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 \chi_G\left(\frac{\mathbf{x}}{h} - T\boldsymbol{\eta}\right) d\mathbf{x}.$$

Пусть  $\square$  – параллелепипед, образованный векторами  $N_0\mathbf{a}_1, \dots, N_0\mathbf{a}_d$ . Представим  $\mathbb{R}^d$  в виде замощения его этим параллелепипедом. С использованием периодичности  $f$  и учитывая, что  $hN = N_0$  и любой элемент  $\mathbb{Z}^d$  однозначно представим в виде  $\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}N$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in I_N^d$ ,  $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{Z}^d$ , запишем

$$\begin{aligned} Y_\xi &\leq \frac{\hat{\mu}}{N_0^d} \sum_{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \int_{\square} |f(\mathbf{x})|^2 \chi_G\left(\frac{\mathbf{x} - T\boldsymbol{\zeta}N_0}{h} - T\boldsymbol{\eta}\right) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{\hat{\mu}}{N_0^d} \int_{\square} |f(\mathbf{x})|^2 \sum_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d} \chi_G\left(\frac{\mathbf{x}}{h} - T\boldsymbol{\eta}\right) d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \hat{\mu} V_1 \|f\|^2 \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d} \chi_G(\mathbf{x} - T\boldsymbol{\eta}), \end{aligned}$$

где  $V_1$  – объём параллелепипеда, образованного векторами  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ . В силу ограниченности  $\text{supp} \mu_\xi \subseteq \bar{G}$  число ненулевых слагаемых в сумме конечно и ограничено величиной, не зависящей от  $\mathbf{x}$ . Подставляя полученную оценку в (11), получаем, что

$$\|\Pi_h f\|^2 \leq \tilde{C} \|f\|^2,$$

где  $\tilde{C}$  не зависит от  $h$ .

Также будем рассматривать оператор  $\tilde{\Pi}_h : W_{2,loc}^q(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}^M$ , задаваемый формулой

$$(\tilde{\Pi}_h f)_\eta = (\Pi_h f)_\eta + \sum_{0 < |m| \leq q} h^{|m|} \mathfrak{G}^{(m)} (\mathcal{P}_h D^m f)_\eta, \quad (12)$$

где  $\Pi_h$  определён формулой (10),  $\mathcal{P}_h$  – оператор вида (10) с подстановкой  $\hat{\mu}_\xi$  вместо  $\mu_\xi$ ,  $\mathfrak{G}^{(m)}$  – некоторые диагональные матрицы размера  $|M^0| \times |M^0|$ , а  $D^m$  определено (2). Оператор  $\Pi_h$  вида (10) является частным случаем (12) при  $q = 0$ , поэтому все утверждения, которые будут доказаны для  $\tilde{\Pi}_h$ , справедливы и для  $\Pi_h$ .

**Утверждение 5.**  $\tilde{\Pi}_h$ , заданный (12), является оператором из  $H_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  в  $V_{per}$ , причём  $\|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)} = \sup \|\tilde{\Pi}_h f\| / \|f\|_{(q,h)}$  ограничена величиной, не зависящей от  $h$ .

Действительно, каждая производная от  $f \in H_{per}^q(\mathbb{R}^d)$ , входящая в определение (12), принадлежит  $L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$ , поэтому её образ под действием  $\Pi_h$  лежит в  $V_{per}$ . А домножение каждого блока вектора  $f \in V_{per}$  слева на некоторую матрицу оставляет вектор в  $V_{per}$ . Поэтому  $\tilde{\Pi}_h H_{per}^q(\mathbb{R}^d) \subseteq V_{per}$ . Оценка нормы с очевидностью следует из утверждения 4.

## 5. Точечное отображение

В конечно-разностных схемах для отображения функции на сеточное пространство обычно используется точечное отображение. На равномерной сетке непрерывной функции  $f$  сопоставляется сеточная функция с компонентами  $f_\eta = f(h\eta)$ ,  $\eta \in \mathbb{Z}^d$ . Обобщая это на рассматриваемый в настоящей работе случай нескольких степеней свободы на ячейку, можно определить оператор  $\mathring{\Pi}_h : C(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}^M$ , определяемый равенством

$$(\mathring{\Pi}_h f)_{\eta,\xi} = f(h(\rho_\xi + T\eta)), \quad (13)$$

где  $\rho_\xi$  – радиус-векторы точек, в которых определяются значения при  $h = 1$ . Условие  $\mu_\xi \in L_2(G)$  формально не допускает оператора (13). Однако точечное отображение для достаточно гладких функций можно с любым порядком точности приблизить оператором вида (10).

По аналогии с  $H_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  введём  $C_{per}^q(\mathbb{R}^d) = L_{2,per}(\mathbb{R}^d) \cap C^q(\mathbb{R}^d)$ . На  $C_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  будем использовать семейство норм

$$\|f\|_{(\infty,q,h)}^2 = \sum_{r=0}^q h^{2r} \|\nabla^r f\|_\infty^2,$$

где

$$\|\nabla^r w\|_\infty^2 = \sum_{|m|=r} \frac{r!}{m!} \max_{\mathbb{R}^d} |D^m w|^2.$$

Такое введение нормы обеспечивает выполнение условия  $\|f\|_{(q,h)} \leq \|f\|_{(\infty,q,h)}$ .

Помимо  $\mathring{\Pi}_h$ , определённого (13), будем рассматривать оператор  $\mathring{\mathring{\Pi}}_h : C^q(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}^M$ , задаваемый формулой

$$(\mathring{\mathring{\Pi}}_h f)_\eta = (\mathring{\Pi}_h f)_\eta + \sum_{0 < |m| \leq q} h^{|m|} \mathfrak{C}^{(m)} \left( \mathring{\mathcal{P}}_h D^m f \right)_\eta, \quad (14)$$

где  $\mathring{\mathcal{P}}_h$  определяется (13) с подстановкой, возможно, другого набора векторов  $\hat{\rho}_\xi$  вместо  $\rho_\xi$ , а  $\mathfrak{C}^{(m)}$  – диагональные матрицы размера  $|M^0| \times |M^0|$ . Отметим, что вместо точечного отображения  $\mathring{\Pi}_h$  можно использовать отображение более общего вида, а именно (10), заменив ограничение  $\mu_\xi \in L_2(G)$  на  $\mu_\xi \in (C(G))^*$ , но для краткости мы ограничимся точечным отображением.

**Утверждение 6.**  $\mathring{\Pi}_h$ , определённый (13), является оператором из  $C_{per}(\mathbb{R}^d)$  в  $V_{per}$ , равномерно ограниченным по  $h$ . Оператор  $\mathring{\mathring{\Pi}}_h$ , определённый (14), отображает  $C_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  в  $V_{per}$ , причём  $\|\mathring{\mathring{\Pi}}_h\|_{(\infty,q,h)} = \sup \|\mathring{\mathring{\Pi}}_h f\| / \|f\|_{(\infty,q,h)}$  ограничена величиной, не зависящей от  $h$ .

Доказательство того, что для  $f \in C_{per}(\mathbb{R}^d)$  и  $g \in C_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  выполняется  $\mathring{\Pi}_h f \in V_{per}$  и  $\mathring{\mathring{\Pi}}_h g \in V_{per}$ , проводится аналогично утверждениям 4 и 5. После этого оценки на  $\|\mathring{\mathring{\Pi}}_h\| = \|\mathring{\mathring{\Pi}}_h\|_{(\infty,0,h)}$  и  $\|\mathring{\mathring{\Pi}}_h\|_{(\infty,q,h)}$  очевидны.

Покажем теперь, что отображения  $\mathring{\Pi}_h$  и  $\mathring{\mathring{\Pi}}_h$  для достаточно гладких функций приближаются интегральными операторами вида (10).

**Утверждение 7.** Для любого  $q \in \mathbb{N}$  существует функция  $\mu \in C^q(\{|\mathbf{r}| \leq 1\})$ , равная нулю при  $|\mathbf{r}| = 1$  вместе со всеми производными до порядка  $q$ , такая что

$$\int_{|\mathbf{r}| < 1} \mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (15)$$

и при всех  $\sigma \leq q$  для любой  $f \in C_{per}^{\sigma+1}(\mathbb{R}^d)$  и всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  выполняется

$$\left| \int_{|\mathbf{r}| < 1} \mu(\mathbf{r}) f(\mathbf{x} + h\mathbf{r}) d\mathbf{r} - f(\mathbf{x}) \right| \leq C(d, q) h^{\sigma+1} \|\nabla^{\sigma+1} f\|_\infty. \quad (16)$$

Обозначим через  $\Omega$  единичную сферу в  $d$ -мерном пространстве и через  $|\Omega|$  – её площадь. Положим

$$\mu(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^{2q}(1 - |\mathbf{r}|)^q \varpi(|\mathbf{r}|),$$

где  $\varpi(r)$  – бесконечно гладкая на  $[0,1]$  функция, такая что

$$|\Omega| \int_0^1 r^{2q+d-1}(1-r)^q \varpi(r) dr = 1, \quad (17)$$

$$\int_0^1 r^{2q+d-1+m}(1-r)^q \varpi(r) dr = 0, \quad m = 1, \dots, q. \quad (18)$$

Множитель  $|\mathbf{r}|^{2q}$  обеспечивает существование и непрерывность всех производных  $q$ -го порядка в нуле, множитель  $(1 - |\mathbf{r}|)^q$  – выполнение граничных условий. Условие (17) обеспечивает выполнение (15). Покажем, что выполняется (16). Для любых  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{r}$  имеем

$$\left| f(\mathbf{x} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}^k} h^k |\mathbf{r}|^k \right| \leq \|\nabla^{\sigma+1} f\|_{\infty} \frac{h^{\sigma+1} |\mathbf{r}|^{\sigma+1}}{(\sigma+1)!},$$

где  $\mathbf{e}$  – единичный вектор по направлению  $\mathbf{r}$ . Отсюда с учётом (15) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int \mu(\mathbf{r}) f(\mathbf{x} + h\mathbf{r}) d\mathbf{r} - f(\mathbf{x}) \right| = \left| \int \mu(\mathbf{r}) (f(\mathbf{x} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{x})) d\mathbf{r} \right| \leq \\ & \leq \left| \int \mu(\mathbf{r}) \left[ \sum_{k=1}^{\sigma} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}^k} h^k |\mathbf{r}|^k \right] d\mathbf{r} \right| + \|\nabla^{\sigma+1} f\|_{\infty} \frac{h^{\sigma+1}}{(\sigma+1)!} \int |\mu(\mathbf{r})| d\mathbf{r} \end{aligned}$$

(интегралы берутся по  $|\mathbf{r}| < 1$ ). Покажем, что первое слагаемое в правой части неравенства равно нулю. Действительно, представим  $\mathbf{r} = r\boldsymbol{\gamma}$ , где  $0 < r < 1$ , а  $\boldsymbol{\gamma}$  пробегает единичную сферу  $\Omega$ . Тогда для  $k = 1, \dots, \sigma - 1$  имеем

$$\int_{|\mathbf{r}| < 1} \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}^k} |\mathbf{r}|^k d\mathbf{r} = \int_0^1 r^{2q}(1-r)^q r^{d-1} r^k \varpi(r) dr \int_{\Omega} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{\boldsymbol{\gamma}}^k} d\boldsymbol{\gamma},$$

что в силу (18) равно нулю. Таким образом, неравенство (16) доказано.

**Утверждение 8.** Для любого  $q \in \mathbb{N}$  можно построить оператор  $\Pi_h$  вида (10), такой что  $\|\Pi_h f - \mathring{\Pi}_h f\| \leq Ch^{q+1} \|\nabla^{q+1} f\|_\infty$ . Можно построить оператор  $\Pi_h$  вида (10), такой что  $\|\Pi_h f - \mathring{\mathring{\Pi}}_h f\| \leq Ch^{q+1} \|\nabla^{q+1} f\|_\infty$ .

Первое утверждение напрямую следует из утверждения 7 при  $\sigma = q$ , если для каждого  $\xi$  положить  $G = B_1(\boldsymbol{\rho}_\xi)$  и  $\mu_\xi(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_\xi)$ , где  $\mu$  даётся утверждением 7, а  $B_1(\mathbf{x})$  – шар радиуса 1 с центром в  $\mathbf{x}$ .

Докажем второе утверждение. Пусть  $\mathring{\mathring{\Pi}}_h$  определён формулой (14). Построим отображение  $\Pi_h$  вида (10), положив  $G = \cup_\xi (B_1(\boldsymbol{\rho}_\xi) \cup B_1(\hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi))$  и задав

$$\mu_\xi(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_\xi) + \sum_{0 < |\mathbf{m}| \leq q} (-1)^{|\mathbf{m}|} \mathfrak{C}_{\xi\xi}^{(\mathbf{m})} D^{\mathbf{m}} \mu(\mathbf{r} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi).$$

Оценим разность  $\mathring{\mathring{\Pi}}_h f - \Pi_h f$ . Рассмотрим вначале компоненту при  $\boldsymbol{\eta} = 0$ :

$$\begin{aligned} & (\mathring{\mathring{\Pi}}_h f)_{0,\xi} - (\Pi_h f)_{0,\xi} = \\ & = (\mathring{\Pi}_h f)_{0,\xi} + \sum_{0 < |\mathbf{m}| \leq q} h^{|\mathbf{m}|} \mathfrak{C}_{\xi\xi}^{(\mathbf{m})} \left( \mathring{\mathcal{P}}_h D^{\mathbf{m}} f \right)_{0,\xi} - \\ & - \int_{\mathbf{r} \in G} \left[ \mu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_\xi) + \sum_{0 < |\mathbf{m}| \leq q} (-1)^{|\mathbf{m}|} \mathfrak{C}_{\xi\xi}^{(\mathbf{m})} D^{\mathbf{m}} \mu(\mathbf{r} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi) \right] f(h\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ & = \left[ f(h\boldsymbol{\rho}_\xi) - \int_G \mu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_\xi) f(h\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] + \\ & + \sum_{0 < |\mathbf{m}| \leq q} \mathfrak{C}_{\xi\xi}^{(\mathbf{m})} \left[ h^{|\mathbf{m}|} D^{\mathbf{m}} f(h\hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi) - \int_G (-1)^{|\mathbf{m}|} D^{\mathbf{m}} \mu(\mathbf{r} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi) f(h\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] = \\ & = \left[ f(h\boldsymbol{\rho}_\xi) - \int_G \mu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_\xi) f(h\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] + \\ & + \sum_{0 < |\mathbf{m}| \leq q} \mathfrak{C}_{\xi\xi}^{(\mathbf{m})} h^{|\mathbf{m}|} \left[ D^{\mathbf{m}} f(h\hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi) - \int_G \mu(\mathbf{r} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_\xi) D^{\mathbf{m}} f(h\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]. \end{aligned}$$

Последнее равенство было написано путём интегрирования по частям с учётом граничных условий на  $\mu$ . Используя свойство (16) функции  $\mu$  при  $\sigma = q + 1 - |\mathbf{m}|$ , можно заключить, что каждое из слагаемых имеет оценку  $h^{q+1} \|\nabla^{q+1} f\|_\infty$ . Аналогично получаем оценку для всех остальных блоков, откуда и следует искомое утверждение.

## 6. Спектральное представление схемы

Всюду далее будем считать, что  $Nh \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\check{A} : V_{per}^N \rightarrow V_{per}^N$  – некоторый линейный оператор. Тогда его действие на  $u \in V_{per}^N$  можно записать в виде

$$(\check{A}u)_{\mathbf{k}_1} = \sum_{\mathbf{k}_2 \in I_N^d} \check{A}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} u_{\mathbf{k}_2}, \quad \mathbf{k}_1 \in I_N^d, \quad (\check{A}u)_{\mathbf{k}_1}, u_{\mathbf{k}_2} \in \mathbb{C}^{M^0}.$$

Матрицы  $\check{A}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$  размера  $M^0 \times M^0$  будем называть блочными компонентами оператора  $\check{A}$ . Отметим, что  $(\check{A}^*)_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = (\check{A}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1})^*$ .

Для  $\phi \in \mathbb{C}^d$  введём матрицы

$$Z(\phi) = \sum_{\eta \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^d} Z_\eta \exp(i\phi \cdot \eta), \quad L(\phi) = \sum_{\eta \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^d} L_\eta \exp(i\phi \cdot \eta), \quad (19)$$

где  $\phi \cdot \eta = \phi_1 \eta_1 + \dots + \phi_d \eta_d$ . Функции  $Z(\phi)$  и  $L(\phi)$  являются  $2\pi$ -периодическими с ячейкой периодичности  $[0, 2\pi)^d$ . Определим линейный оператор  $\check{W}$ , действующий из  $V_{per}^N$  в  $V_{per}^N$ , с блочными компонентами

$$\check{W}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = \frac{1}{N^{d/2}} \exp\left(2\pi i \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{N}\right) I, \quad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in I_N^d, \quad (20)$$

где  $I$  – единичная матрица размера  $|M^0| \times |M^0|$ .

Введём символы

$$\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = \begin{cases} 1, & \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2; \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases} \quad \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \bmod N} = \begin{cases} 1, & \exists \mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{c}N; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

**Утверждение 9.** *Оператор  $\check{W}$  является унитарным.*

Для  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in I_N^d$  вычислим

$$\begin{aligned} (\check{W}\check{W}^*)_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} &= \frac{1}{N^d} \sum_{\mathbf{k} \in I_N^d} \exp\left(2\pi i \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}}{N}\right) \exp\left(-2\pi i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2}{N}\right) I = \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_{\mathbf{k} \in I_N^d} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\right) I = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} I. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\check{W}\check{W}^*$  является тождественным оператором, что и требовалось доказать.

Введём операторы  $diag\{Z(2\pi\mathbf{k}/N)\}$  и  $diag\{L(2\pi\mathbf{k}/N)\}$  с блочными компонентами, соответственно,  $Z(2\pi\mathbf{k}_1/N)\delta_{k_1,k_2}$  и  $L(2\pi\mathbf{k}_1/N)\delta_{k_1,k_2}$ .

**Утверждение 10.** Операторы  $\check{Z}$  и  $\check{L}$ , определённые (8), представляются в виде

$$\check{Z} = \check{W} diag\{Z(2\pi\mathbf{k}/N)\}\check{W}^{-1}, \quad \check{L} = \check{W} diag\{L(2\pi\mathbf{k}/N)\}\check{W}^{-1}. \quad (21)$$

Для любых  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in I_N^d$ , используя (19), (20) и (8), вычислим

$$\begin{aligned} & \left( \check{W} diag\{Z(2\pi\mathbf{k}/N)\}\check{W}^{-1} \right)_{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2} = \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_{\mathbf{k} \in I_N^d} \exp\left(2\pi i \frac{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{k}}{N}\right) Z\left(\frac{2\pi\mathbf{k}}{N}\right) \exp\left(-2\pi i \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}_2}{N}\right) = \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d} Z_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{k} \in I_N^d} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta})\right) = \\ &= \sum_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d} Z_{\boldsymbol{\eta}} \delta_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1 \bmod N} = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d} Z_{\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{c}N} = \check{Z}_{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2}. \end{aligned}$$

Равенство  $\check{L} = \check{W} diag\{L(2\pi\mathbf{k}/N)\}\check{W}^{-1}$  доказывается аналогично.

С использованием представления (21) система (9) сводится к

$$diag\left\{Z\left(\frac{2\pi\mathbf{k}}{N}\right)\right\} \frac{d(\check{W}^{-1}u)}{dt} + \frac{1}{h} diag\left\{L\left(\frac{2\pi\mathbf{k}}{N}\right)\right\} (\check{W}^{-1}u) = 0. \quad (22)$$

Система (22) представляет собой  $N^d$  независимых систем размера  $|M^0|$ . Решение этой системы можно записать в виде

$$(\check{W}^{-1}u(t))_{\mathbf{k}} = \exp\left(-Z^{-1}\left(\frac{2\pi\mathbf{k}}{N}\right)L\left(\frac{2\pi\mathbf{k}}{N}\right)\frac{t}{h}\right) (\check{W}^{-1}u(0))_{\mathbf{k}}. \quad (23)$$

Для  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$  определим волновой вектор

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{Nh} (T^*)^{-1} \mathbf{k} = \frac{2\pi}{Nh} \sum_{j=1}^d k_j \mathbf{a}_j^*. \quad (24)$$

**Утверждение 11.** Пусть  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$  и  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24). Тогда функция  $v(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}$  лежит в  $L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$  и имеет период  $Nh$ . При этом  $\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \in V_{per}^N$ , и

$$\left(\check{W}^{-1}\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_{\mathbf{k}'} = N^{d/2}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}' \bmod N} \left(\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_0, \quad (25)$$

где индекс 0 означает взятие компоненты при  $\boldsymbol{\eta} = 0$ .

Действительно,  $\exp(i\alpha(\mathbf{k})\cdot(\mathbf{r} + Nh\mathbf{a}_l)) = e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}e^{2\pi i k_l} = e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}$ , поэтому  $v \in L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$ . По утверждению 3 справедливо  $\Pi_h v \in V_{per}^N$ . Докажем (25). Для любых  $\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^d$  и  $\boldsymbol{\xi} \in M^0$  имеем

$$\begin{aligned} & \left(\check{W}^{-1}\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_{\mathbf{k}',\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \exp\left(-2\pi i \frac{\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\eta}}{N}\right) \left(\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_{\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \exp\left(-2\pi i \frac{\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\eta}}{N}\right) \int_{\mathbf{r} \in G} \mu_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r}) \exp[i\alpha(\mathbf{k})\cdot(h\mathbf{r} + hT\boldsymbol{\eta})] d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \exp\left(-2\pi i \frac{\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\eta}}{N} + iT^*\alpha(\mathbf{k})\cdot h\boldsymbol{\eta}\right) \int_{\mathbf{r} \in G} \mu_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r}) e^{ih\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in I_N^d} \exp\left(-2\pi i \frac{\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\eta}}{N} + 2\pi i \frac{\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}}{N}\right) \left(\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_{0,\boldsymbol{\xi}} = \\ &= N^{d/2}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}' \bmod N} \left(\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_{0,\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Утверждение 12.** Для любого  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$  выполняется

$$\left(\Pi_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_0 = \left(\Pi_1 e^{ih\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_0, \quad \left(\tilde{\Pi}_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_0 = \left(\tilde{\Pi}_1 e^{ih\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\right)_0, \quad (26)$$

где под  $\Pi_1$  и  $\tilde{\Pi}_1$  понимаются операторы  $\Pi_h$  и  $\tilde{\Pi}_h$  при  $h = 1$ .

Это утверждение напрямую следует из (10) и (12).

## 7. Аппроксимация, точность и устойчивость

Обозначим

$$A(\phi) = -Z^{-1}(\phi)L(\phi) + i(T^{-1}\omega) \cdot \phi I, \quad (27)$$

где  $I$  – единичная матрица размера  $|M^0|$ .

**Определение 1.** Пусть  $\tilde{\Pi}_h$  – некоторый оператор вида (12). Ошибкой решения в смысле  $\tilde{\Pi}_h$  с начальными данными  $v_0$  будем называть величину

$$\varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h) = u(t) - \tilde{\Pi}_h v(t, \cdot), \quad (28)$$

где  $u(t)$  – решение (5) с условием  $u(0) = \tilde{\Pi}_h v_0$ , а  $v(t, \mathbf{r}) = v_0(\mathbf{r} - \omega t)$ .

Рассмотрим одну гармонику  $v(t, \mathbf{r}) = \exp(i\alpha(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{r} - \omega t))$ , где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24), а  $\mathbf{k} \in I_N^d$ . Запишем решение (23) с начальными данными  $u(0) = \tilde{\Pi}_h v(0, \cdot)$  с использованием обозначения (27):

$$\left( \check{W}^{-1}u(t) \right)_k = \exp \left[ \left( A \left( \frac{2\pi\mathbf{k}}{N} \right) - i\omega \cdot (T^*)^{-1} \frac{2\pi\mathbf{k}}{N} I \right) \frac{t}{h} \right] \left( \check{W}^{-1}\tilde{\Pi}_h e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \right)_k.$$

С учётом обозначения (24) получаем

$$\left( \check{W}^{-1}u(t) \right)_k = \exp(-i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \omega t) \exp \left( A \left( \frac{2\pi\mathbf{k}}{N} \right) \frac{t}{h} \right) \left( \check{W}^{-1}\tilde{\Pi}_h e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \right)_k. \quad (29)$$

В силу (25) все компоненты  $\check{W}^{-1}u(0)$ , кроме  $\mathbf{k}$ -й, нулевые, поэтому

$$\left( \check{W}^{-1}u(t) \right)_{k'} = 0, \quad k' \neq \mathbf{k} \bmod N. \quad (30)$$

Поскольку справедливо равенство  $v(t, \mathbf{r}) = v_0(\mathbf{r}) \exp(-i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \omega t)$ , мы можем записать выражение для отображения на сетку точного решения:

$$\left( \check{W}^{-1}\tilde{\Pi}_h v(t, \cdot) \right)_k = \exp(-i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \omega t) \left( \check{W}^{-1}\tilde{\Pi}_h e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \right)_k. \quad (31)$$

$$\left( \check{W}^{-1}\tilde{\Pi}_h v(t, \cdot) \right)_{k'} = 0, \quad k' \neq \mathbf{k} \bmod N. \quad (32)$$

Вычитая (31) из (29) и (32) из (30), с учётом (24) и (25) получаем

$$\left( \check{W}^{-1}\varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h) \right)_k = N^{d/2} e^{-i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \omega t} \hat{\varepsilon} \left( \frac{2\pi\mathbf{k}}{N}, \frac{t}{h}, \tilde{\Pi}_h \right), \quad (33)$$

$$\left( \check{W}^{-1}\varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h) \right)_{k'} = 0, \quad k' \neq \mathbf{k} \bmod N, \quad (34)$$

где

$$\hat{\varepsilon}(\phi, \nu, \tilde{\Pi}_h) = \left( e^{\nu A(\phi)} - I \right) \left( \tilde{\Pi}_1 e^{i\phi \cdot T^{-1}\mathbf{r}} \right)_0. \quad (35)$$

**Определение 2.** Пусть  $\Pi$  – оператор из  $H_{loc}^q(\mathbb{R}^d)$  или  $C^q(\mathbb{R}^d)$  в  $\mathbb{C}^M$ . Ошибкой аппроксимации на функции  $f$  в смысле  $\Pi$  будем называть величину  $\epsilon_h(f, \Pi) \in \mathbb{C}^M$ , определяемую формулой

$$\epsilon_h(f, \Pi) = -Z\Pi(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f) + \frac{1}{h}L\Pi f. \quad (36)$$

Если  $\tilde{\Pi}_h$  – оператор вида (12), то для функций  $f \in H_{per}^{q+1}(\mathbb{R}^d)$ , имеющих период  $N_0$ , выполняется  $\epsilon_h(f, \tilde{\Pi}_h) \in V_{per}^{(N_0/h)}$ . Получим в этом случае спектральное представление для ошибки аппроксимации. Подставим в определение (36) функцию  $v_0(\mathbf{r}) = \exp(i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{k} \in I_N^d$ . Имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_h(e^{i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h) &= -i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \check{Z} \tilde{\Pi}_h e^{i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{h} \check{L} \tilde{\Pi}_h e^{i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{h} \check{Z} \left( -i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) h + \check{Z}^{-1} \check{L} \right) \tilde{\Pi}_h e^{i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Отсюда с использованием обозначения (27) и учётом (24) и (25) получаем

$$(\check{W}^{-1} \epsilon_h(e^{i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h))_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{h} N^{d/2} Z \left( \frac{2\pi \mathbf{k}}{N} \right) \hat{\epsilon} \left( \frac{2\pi \mathbf{k}}{N}, \tilde{\Pi}_h \right), \quad (37)$$

$$(\check{W}^{-1} \epsilon_h(e^{i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h))_{\mathbf{k}'} = 0, \quad \mathbf{k}' \neq \mathbf{k} \text{ mod } N, \quad (38)$$

где

$$\hat{\epsilon}(\boldsymbol{\phi}, \tilde{\Pi}_h) = A(\boldsymbol{\phi}) \left( \tilde{\Pi}_1 e^{i\boldsymbol{\phi} \cdot T^{-1} \mathbf{r}} \right)_0. \quad (39)$$

**Определение 3.** Схема (5) называется устойчивой на  $V_{per}$  с константой устойчивости  $K$ , если для всех  $h$ , таких что  $1/h \in \mathbb{N}$ , для всех решений  $u \in C^1([0, \infty), V_{per})$  системы (5) при всех  $t \geq 0$  выполняется  $\|u(t)\| \leq K \|u(0)\|$ .

**Утверждение 13.** Схема (5) устойчива с константой  $K$  тогда и только тогда, когда для любого  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^d$  при всех  $\nu > 0$  выполняется

$$\|\exp(A(\boldsymbol{\phi})\nu)\| \leq K. \quad (40)$$

Обозначим через  $R_h(t)$  оператор, действующий из  $V_{per}$  в  $V_{per}$  и преобразующий  $u_0 \in V_{per}$  в функцию  $u(t) \in V_{per}$ , являющуюся решением (5) с начальными данными  $u_0$  на момент времени  $t$ . На функцию  $u_0 \in V_{per}^N$  оператор  $R_h(t)$  действует по формуле

$$R_h(t)u_0 = \check{W} \text{diag} \left\{ \exp \left( -Z^{-1} \left( \frac{2\pi \mathbf{k}}{N} \right) L \left( \frac{2\pi \mathbf{k}}{N} \right) \frac{t}{h} \right) \right\} \check{W}^{-1} u_0.$$

(см. (23)). В силу унитарности  $\check{W}$  имеем

$$\begin{aligned} \|R_h(t)\| &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{\mathbf{k} \in I_N^d} \left\| \exp \left( -Z^{-1} \left( \frac{2\pi \mathbf{k}}{N} \right) L \left( \frac{2\pi \mathbf{k}}{N} \right) \frac{t}{h} \right) \right\| = \\ &= \sup_{\phi : \phi/(2\pi) \in (\mathbb{Q} \cap [-1/2, 1/2])^d} \left\| \exp \left( -Z^{-1}(\phi) L(\phi) \frac{t}{h} \right) \right\|. \end{aligned}$$

В силу непрерывности и  $2\pi$ -периодичности функций  $Z^{-1}(\phi)$  и  $L(\phi)$  имеем

$$\|R_h(t)\| = \sup_{\phi \in \mathbb{R}^d} \left\| \exp \left( -Z^{-1}(\phi) L(\phi) \frac{t}{h} \right) \right\| = \sup_{\phi \in \mathbb{R}^d} \left\| \exp \left( A(\phi) \frac{t}{h} \right) \right\|.$$

По определению схема устойчива с константой  $K$ , если и только если для всех  $h$  и  $t \geq 0$  выполняется  $\|R_h(t)\| \leq K$ . А это и есть условие (40).

## 8. Перенос оценок с гармоник на произвольные решения

**Утверждение 14.** Пусть  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Пусть  $w \in H_{per}^q(\mathbb{R}^d)$  имеет период  $N_0$ . Она может быть представлена своим рядом Фурье

$$w = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} U_{\mathbf{k}} \exp(i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}), \quad (41)$$

сходящимся в  $L_{2,per}(\mathbb{R}^d)$ , где  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$  определено (24) при  $Nh = N_0$ . Для любого  $n = 0, \dots, q$  справедливо

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{2n} = \|\nabla^n w\|^2. \quad (42)$$

Для мультииндекса  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ ,  $|\mathbf{n}| = n$ , коэффициентами Фурье для функции  $D^n w$  являются величины  $(i\alpha_1(\mathbf{k}))^{n_1} \dots (i\alpha_d(\mathbf{k}))^{n_d} U_{\mathbf{k}}$ . Отсюда в силу равенства Парсеваля

$$\|D^n w\|^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\alpha_1(\mathbf{k})|^{2n_1} \dots |\alpha_d(\mathbf{k})|^{2n_d} |U_{\mathbf{k}}|^2. \quad (43)$$

Умножим (43) на  $n!/|\mathbf{n}|$  и просуммируем по всем мультииндексам  $\mathbf{n}$ , таким что  $|\mathbf{n}| = n$ . Получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla^n w\|^2 &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 \sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_d \geq 0, \\ n_1 + \dots + n_d = n}} \frac{n!}{|\mathbf{n}|} |(\alpha_1(\mathbf{k}))^{n_1} \dots (\alpha_d(\mathbf{k}))^{n_d}|^2 = \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 ((\alpha_1(\mathbf{k}))^2 + \dots + (\alpha_d(\mathbf{k}))^2)^n = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{2n}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 15.** Пусть  $h$  – некоторое число, такое что  $1/h \in \mathbb{N}$ . Пусть  $F_h : H_{per}^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow V_{per}$  – ограниченный оператор, такой что:

- 1) для функции  $w \in H_{per}^r(\mathbb{R}^d)$ , имеющей период  $N_0$ ,  $F_h w \in V_{per}^N$ ,  $N = N_0/h$ ;
- 2) при всех  $N$ , таких что  $Nh \in \mathbb{N}$ , и  $\mathbf{k} \in I_N^d$  выполняется

$$(\check{W}^{-1} F_h e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}})_{\mathbf{k}'} = (\check{W}^{-1} F_h e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}})_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k} \bmod N},$$

где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24);

- 3) для некоторого  $0 < \beta \leq 1$  существуют такие константы  $A, B \geq 0$  и  $P, Q \in \mathbb{N}$ , что при всех  $N$ , таких что  $Nh \in \mathbb{N}$ , и  $\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d$  выполняется оценка

$$\|F_h e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}\| \leq A |\alpha(\mathbf{k})|^P + B |\alpha(\mathbf{k})|^{Q+1}. \quad (44)$$

Тогда для любой функции  $w \in H_{per}^{\max\{r, P, Q+1\}}(\mathbb{R}^d)$  справедлива оценка

$$\|F_h w\| \leq A \|\nabla^P w\| + B \|\nabla^{Q+1} w\| + 2h^r C_3^r \|F_h\|_{(r, h)} \|\nabla^r w\|, \quad (45)$$

где  $C_3 = 2 + \max_j |\mathbf{a}_j| / (\pi\beta)$ , а  $\|F_h\|_{(r, h)} = \sup \|F_h f\| / \|f\|_{(r, h)}$ .

Действительно, пусть  $w(\mathbf{r}) \in H_{per}^{\max\{r, P, Q+1\}}(\mathbb{R}^d)$  имеет период  $N_0$ . При этом  $F_h(w) \in V_{per}^N$ . В силу периодичности функция  $w$  может быть представлена своим рядом Фурье

$$w = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} U_{\mathbf{k}} \exp(i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}),$$

сходящимся в  $L_{2, per}(\mathbb{R}^d)$ . Введём функцию

$$S_N(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d} U_{\mathbf{k}} \exp(i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}). \quad (46)$$

Очевидно,  $F_h w = F_h S_N + F_h(w - S_N)$ . Оценим вначале первое слагаемое в этой сумме. По условию 2 вектор  $\check{W}^{-1} F_h \exp(i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r})$  содержит только  $\mathbf{k}$ -ю компоненту. Поэтому из (46) получаем

$$\|F_h S_N\|^2 = \|\check{W}^{-1} F_h S_N\|^2 = \sum_{\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 \left\| \check{W}^{-1} F_h \exp(i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}) \right\|^2.$$

Для каждого из слагаемых в сумме воспользуемся оценкой (44):

$$\|F_h S_N\|^2 \leq \sum_{\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 (A |\alpha(\mathbf{k})|^P + B |\alpha(\mathbf{k})|^{Q+1})^2.$$

Расширяя предел суммирования до  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$  и применяя неравенство треугольника для  $l_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \|F_h S_N\| &\leq \left( \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (A|U_{\mathbf{k}}| |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^P + B|U_{\mathbf{k}}| |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{Q+1})^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (A|U_{\mathbf{k}}| |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^P)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (B|U_{\mathbf{k}}| |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{Q+1})^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (42) для  $n = P$  и  $n = Q + 1$ , получаем

$$\|F_h S_N\| \leq A \|\nabla^P w\| + B \|\nabla^{Q+1} w\|. \quad (47)$$

Теперь рассмотрим величину  $F_h(w - S_N)$ . По определению  $S_N$  имеем

$$w - S_N = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus I_{\beta N}^d} U_{\mathbf{k}} \exp(i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}).$$

Оценим норму этой величины на  $H_{per}^r(\mathbb{R}^d)$ . Для  $s = 0, 1, \dots, r$  выполняется

$$\begin{aligned} \|\nabla^s(w - S_N)\|^2 &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus I_{\beta N}^d} |U_{\mathbf{k}}|^2 |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{2s} = \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus I_{\beta N}^d} \frac{|U_{\mathbf{k}}|^2 |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{2r}}{|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})|^{2r-2s}} \leq \left( \min_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus I_{\beta N}^d} |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})| \right)^{-(2r-2s)} \|\nabla^r w\|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

В этой цепочке дважды использовалось равенство (42). Выражая  $k_j$  из (24), получаем  $k_j = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_j N h / (2\pi)$ , и

$$\max_j |k_j| \leq \frac{N h}{2\pi} |\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})| \max_j |\mathbf{a}_j|.$$

При  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus I_{\beta N}^d$  по определению (7) хотя бы для одного  $j$  должно нарушаться условие

$$-\lfloor \beta N / 2 \rfloor \leq k_j \leq \lceil \beta N \rceil - 1 - \lfloor \beta N / 2 \rfloor.$$

Поскольку  $k_j \in \mathbb{Z}$ , нарушение первого неравенства даёт

$$|k_j| \geq \lfloor \beta N / 2 \rfloor + 1 \geq \beta N / 2,$$

а нарушение второго приводит к

$$|k_j| \geq \lceil \beta N \rceil - \lfloor \beta N / 2 \rfloor \geq \beta N / 2.$$

Отсюда  $\max_j |k_j| \geq \beta N/2$ , и

$$|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})| \geq \frac{\pi\beta}{h \max_j |\mathbf{a}_j|} \geq \frac{1}{hC_3}.$$

Подставляя полученное неравенство в (48), получаем

$$\|\nabla^s(w - S_N)\|^2 \leq \|\nabla^r w\|^2 (hC_3)^{2r-2s}.$$

Отсюда с учётом  $C_3 \geq 2$  имеем

$$\|w - S_N\|_{(r,h)}^2 \leq \|\nabla^r w\|^2 \sum_{s=0}^r h^{2s} (hC_3)^{2r-2s} \leq 2\|\nabla^r w\|^2 (hC_3)^{2r}.$$

Следовательно,

$$\|F_h(w - S_N)\| \leq \sqrt{2} \|F\|_{(r,h)} \|\nabla^r w\| h^r C_3^r.$$

Складывая оценки (47) на  $\|F_h S_N\|$  и полученную оценку на  $\|F_h(w - S_N)\|$ , получаем искомую оценку (45).

**Утверждение 16.**  $\forall v_0 \in H_{per}^{q+1}(\mathbb{R}^d)$  справедливо  $h\|\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_0\|_{(q,h)} \leq |\boldsymbol{\omega}| \|v_0\|_{(q+1,h)}$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} h^2 \|\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_0\|_{(q,h)}^2 &= \sum_{r=0}^q h^{2r+2} \|\nabla^r(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_0)\|^2 = \\ &= \sum_{r=0}^q h^{2r+2} \sum_{|\mathbf{m}|=r} \frac{r!}{\mathbf{m}!} \|D^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_0)\|^2 = \\ &= \sum_{r=1}^{q+1} h^{2r} \sum_{|\mathbf{m}|=r-1} \frac{r!}{\mathbf{m}!} r \left\| \sum_{|\mathbf{l}|=1} \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{l}} D^{\mathbf{m}+\mathbf{l}} v_0 \right\|^2 \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^{q+1} h^{2r} \sum_{|\mathbf{m}|=r-1} \frac{r!}{\mathbf{m}!} r \left( \sum_{|\mathbf{l}|=1} |\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{l}}| \|D^{\mathbf{m}+\mathbf{l}} v_0\| \right)^2 \leq \\ &\leq |\boldsymbol{\omega}|^2 \sum_{r=1}^{q+1} h^{2r} \sum_{|\mathbf{m}|=r-1} \frac{r!}{\mathbf{m}!} r \sum_{|\mathbf{l}|=1} \|D^{\mathbf{m}+\mathbf{l}} v_0\|^2 = \\ &= |\boldsymbol{\omega}|^2 \sum_{r=1}^{q+1} h^{2r} \sum_{|\mathbf{m}|=r} \frac{r!}{\mathbf{m}!} \|D^{\mathbf{m}} v_0\|^2 \leq |\boldsymbol{\omega}|^2 \|v_0\|_{(q+1,h)}^2. \end{aligned}$$

**Следствие 17.** Пусть  $\tilde{\Pi}_h$  – некоторый оператор вида (12). Пусть существуют такие константы  $C \geq 0$  и  $0 < \beta \leq 1$ , что при всех  $h$  и  $N$ , таких что  $1/h, Nh \in \mathbb{N}$ , и  $\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d$  ошибка аппроксимации на функции  $e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$ , где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24), удовлетворяет оценке

$$\|\epsilon_h(e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C|\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1}h^{P_A}. \quad (49)$$

Тогда для любой  $v_0 \in H_{per}^{q+1}(\mathbb{R}^d)$  для  $r = \max\{P_A, q\} + 1$  справедлива оценка

$$\|\epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h)\| \leq Ch^{P_A}\|\nabla^{P_A+1}v_0\| + \tilde{C}h^{r-1}\|\nabla^r v_0\|, \quad (50)$$

где  $\tilde{C} = 2C_3^r\|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)}(\|\check{Z}\|\|\omega\| + \|\check{L}\|)$ ,  $C_3 = 2 + \max_j |\mathbf{a}_j|/(\beta\pi)$ .

Для доказательства положим  $F_h v_0 = \epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h)$ ,  $P = P_A + 1$ ,  $Q = P_A$ ,  $A = Ch^{P_A}$ ,  $B = 0$ . Проверим, что выполняются условия теоремы 15. Условие 1 следует из определений (36), (6) и утверждения 3. Условие 2 совпадает с (38). Условие 3 совпадает с (49). Тогда по теореме 15 имеем

$$\|\epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h)\| \leq Ch^{P_A}\|\nabla^{P_A+1}v_0\| + 2C_3^r h^r \|F_h\|_{(r,h)} \|\nabla^r v_0\|. \quad (51)$$

Оценим теперь норму  $F_h$ . Для произвольного  $v_0 \in H_{per}^{q+1}(\mathbb{R}^d)$  в силу утверждения 16 выполняется

$$\begin{aligned} \|F_h v_0\| &= \|\epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h)\| = h^{-1} \left\| -h\check{Z}\tilde{\Pi}_h(\omega \cdot \nabla v_0) + \check{L}\tilde{\Pi}_h v_0 \right\| \leq \\ &\leq h^{-1} \|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)} (\|\check{Z}\|\|\omega\| + \|\check{L}\|) \|v_0\|_{(q+1,h)}. \end{aligned}$$

Поскольку  $r \geq q + 1$ , имеем

$$\|F_h\|_{(r,h)} \leq \|F_h\|_{(q+1,h)} \leq \|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)} (\|\check{Z}\|\|\omega\| + \|\check{L}\|)/h.$$

В результате из (51) получаем оценку (50).

**Следствие 18.** Пусть схема (5) является устойчивой с константой  $K$ ,  $\tilde{\Pi}_h$  – некоторый оператор вида (12), а  $C_1, C_2 \geq 0$  – некоторые константы. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(У1) В некоторой окрестности  $\phi = 0$  при всех  $\nu > 0$  выполняется

$$\|\hat{\epsilon}(\phi, \nu, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1|(T^*)^{-1}\phi|^P + C_2\nu|(T^*)^{-1}\phi|^{Q+1}.$$

(У2) Существует такое  $0 < \beta \leq 1$ , что при всех  $h$  и  $N$ , таких что  $1/h, Nh \in \mathbb{N}$ , всех  $t > 0$  и  $\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d$  численная ошибка решения с начальными данными  $e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$ , где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24), удовлетворяет оценке

$$\|\epsilon_h(t, e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1|\alpha(\mathbf{k})|^P h^P + C_2|\alpha(\mathbf{k})|^{Q+1} t h^Q. \quad (52)$$

(У3) Найдётся такая  $\tilde{C}$ , что для всех  $r \geq \max\{Q+1, P, q\}$  и любых начальных данных  $v_0 \in H_{per}^r(\mathbb{R}^d)$  для ошибки решения справедлива оценка

$$\|\varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1 h^P \|\nabla^P v_0\| + C_2 t h^Q \|\nabla^{Q+1} v_0\| + \tilde{C}^r h^r \|\nabla^r v_0\|. \quad (53)$$

Эквивалентность (У1) и (У2) следует из (33)–(34) и непрерывности  $\hat{\varepsilon}(\phi, \nu, \tilde{\Pi}_h)$  по  $\phi$ . Покажем, что (У2) получается из (У3). Действительно, подставив  $v_0(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$  в (53), получаем

$$\|\varepsilon_h(t, e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1 |\alpha(\mathbf{k})|^P h^P + C_2 |\alpha(\mathbf{k})|^{Q+1} t h^Q + (\tilde{C} h |\alpha(\mathbf{k})|)^r.$$

Пусть  $\beta$  такое, что для  $\mathbf{k} \in I_N^d$  выполняется  $\tilde{C} h |\alpha(\mathbf{k})| \leq 1/2$ . Тогда, переходя к пределу при  $r \rightarrow \infty$ , получаем (54).

Наконец, покажем, что (У3) следует из (У2). Положим  $F_h v_0 = \varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h)$ ,  $A = C_1 h^P$ ,  $B = C_2 t h^Q$ . Проверим, что выполняются условия теоремы 15. Условие 1 следует из определения (28) и утверждений 2 и 3. Условие 2 совпадает с (33). Условие 3 совпадает с (54). Тогда по теореме 15 имеем (53) при  $\tilde{C} = C_3 (2 \|F_h\|_{(r,h)})^{1/r}$ , где  $C_3 = 2 + \max_j |\mathbf{a}_j| / (\pi\beta)$ .

Остаётся показать, что  $\|F_h\|_{(r,h)}$  ограничена равномерно по  $h, t > 0$  и  $r \geq q$ . Действительно, пусть  $v_0 \in H_{per}^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $v(t, \mathbf{r}) = v_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}t)$ ,  $u(t)$  – решение (5) с начальными данными  $u(0) = \tilde{\Pi}_h v_0$ . С учётом  $\|v_0\| = \|v(t, \cdot)\|$  имеем

$$\begin{aligned} \|F_h v_0\| &= \|\varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h)\| = \|u(t) - \tilde{\Pi}_h v(t, \cdot)\| \leq K \|\tilde{\Pi}_h v_0\| + \|\tilde{\Pi}_h v(t, \cdot)\| \leq \\ &\leq (K + 1) \|\tilde{\Pi}_h\|_{(r,h)} \|v_0\|_{(r,h)} \leq (K + 1) \|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)} \|v_0\|_{(r,h)}, \end{aligned}$$

то есть  $\|F_h\|_{(r,h)} \leq (K + 1) \|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)}$ . В силу утверждения 5 величина  $\|\tilde{\Pi}_h\|_{(q,h)}$  ограничена равномерно по  $h$ . Таким образом,  $\|F_h\|_{(r,h)}$  ограничена равномерно по  $h, t$  и  $q$ , что и требовалось доказать.

С использованием утверждения 8 полученные результаты легко обобщаются на случай операторов  $\overset{\circ}{\tilde{\Pi}}_h$ , задаваемых формулой (14).

**Следствие 19.** Пусть  $\overset{\circ}{\tilde{\Pi}}_h$  – оператор вида (14). Пусть существуют такие константы  $C \geq 0$  и  $0 < \beta \leq 1$ , что при всех  $h$  и  $N$ , таких что  $1/h, Nh \in \mathbb{N}$ , и  $\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d$  ошибка аппроксимации на функции  $e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$ , где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24), удовлетворяет оценке

$$\|\varepsilon_h(e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \overset{\circ}{\tilde{\Pi}}_h)\| \leq C |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1} h^{P_A}.$$

Тогда существует такое  $\tilde{C}$ , что для любой  $v_0 \in C_{per}^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $r = \max\{P_A, q\} + 1$ , верно

$$\|\varepsilon_h(v_0, \overset{\circ}{\tilde{\Pi}}_h)\| \leq C h^{P_A} \|\nabla^{P_A+1} v_0\|_{\infty} + \tilde{C} h^{r-1} \|\nabla^r v_0\|_{\infty}.$$

**Следствие 20.** Пусть схема (5) является устойчивой на  $V_{per}$ . Пусть  $\tilde{\Pi}_h$  – оператор вида (14). Пусть существуют  $C_1, C_2 \geq 0$  и  $0 < \beta \leq 1$ , такие что при всех  $h$  и  $N$ , таких что  $1/h, Nh \in \mathbb{N}$ , всех  $t > 0$  и  $\mathbf{k} \in I_{\beta N}^d$  ошибка решения с начальными данными  $e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$ , где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24), удовлетворяет оценке

$$\|\varepsilon_h(t, e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1 |\alpha(\mathbf{k})|^P h^P + C_2 |\alpha(\mathbf{k})|^{Q+1} t h^Q. \quad (54)$$

Тогда найдётся такая  $\tilde{C}$ , что для любых начальных данных  $v_0 \in C_{per}^r(\mathbb{R}^d)$ , где  $r = \max\{P, Q + 1, q\}$ , справедлива оценка

$$\|\varepsilon_h(t, v_0, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1 h^P \|\nabla^P v_0\|_\infty + C_2 t h^Q \|\nabla^{Q+1} v_0\|_\infty + \tilde{C} h^r \|\nabla^r v_0\|_\infty.$$

## 9. Определение порядка аппроксимации

Докажем хорошо известный факт, что порядок аппроксимации схем вида (5) можно установить проверкой равенства нулю аппроксимационной ошибки на функциях вида  $(\mathbf{r} - \omega t)^m / m!$ .

**Утверждение 21.** Пусть схема (5) удовлетворяет условию точности на константе:  $\sum_\eta L_\eta = 0$ . Пусть  $\tilde{\Pi}_h$  – оператор вида (12). Пусть  $P_A \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- для некоторого  $C > 0$  в некоторой окрестности  $\phi = 0$  справедливо  $\|\hat{\varepsilon}(\phi, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C |\phi|^{P_A+1}$ ;
- существуют такие  $C_1, C_2 \geq 0$ , что аппроксимационная ошибка схемы (5) в смысле  $\tilde{\Pi}_h$  для всех  $v_0 \in H_{per}^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $r = \max\{P_A, q\} + 1$ , удовлетворяет оценке

$$\|\varepsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h)\| \leq C_1 \|\nabla^{P_A+1} v_0\| h^{P_A} + C_2 \|\nabla^r v_0\| h^{r-1}; \quad (55)$$

- для всех мультииндексов  $\mathbf{m}$ , таких что  $|\mathbf{m}| \leq P_A$ , выполняется

$$\varepsilon_1(\mathbf{r}^{\mathbf{m}} / \mathbf{m}!, \tilde{\Pi}_1) = 0, \quad (56)$$

где индекс 1 означает подстановку  $h = 1$ .

Первое условие следует из второго при подстановке  $v_0 = e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$  с учётом непрерывности  $\hat{\varepsilon}(\phi, \tilde{\Pi}_h)$  по  $\phi$ . Второе условие следует из первого в силу утверждения 17. Докажем равносильность второго и третьего утверждений.

Предположим вначале, что для всех функций  $v_0 \in H_{per}^r(\mathbb{R}^d)$  верна оценка (55). Рассмотрим функцию  $v_0(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{k} \in I_N^d$ . Поскольку  $(\varepsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_\eta = (\varepsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_0 e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot T\eta}$ , справедливо  $\|(\varepsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_\eta\| = \|(\varepsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_0\| = \|\varepsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h)\|$ , и из (55) в силу (42) получаем

$$\|(\varepsilon_h(e^{i\alpha(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h))_0\| \leq \frac{1}{h} (C_1 (|\alpha(\mathbf{k})| h)^{P_A+1} + C_2 (|\alpha(\mathbf{k})| h)^r).$$

С другой стороны, по определению

$$h(\epsilon_h(e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}, \tilde{\Pi}_h))_0 = - \sum_{\eta \in \mathcal{S}} Z_\eta \left( \tilde{\Pi}_h(\boldsymbol{\omega} \cdot h\nabla) e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \right)_\eta + \sum_{\eta \in \mathcal{S}} L_\eta \left( \tilde{\Pi}_h e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \right)_\eta.$$

Таким образом, для всех  $N \in \mathbb{N}$  и  $\mathbf{k} \in I_N^d$ , полагая  $\phi = h\alpha(\mathbf{k})$ , с использованием утверждения 12 получаем

$$\left\| - \sum_{\eta \in \mathcal{S}} Z_\eta(\boldsymbol{\omega} \cdot \phi) \left( \tilde{\Pi}_1 e^{i\phi \cdot \mathbf{r}} \right)_\eta + \sum_{\eta \in \mathcal{S}} L_\eta \left( \tilde{\Pi}_1 e^{i\phi \cdot \mathbf{r}} \right)_\eta \right\| \leq C_1 |\phi|^{P_A+1} + C_2 |\phi|^r. \quad (57)$$

По непрерывности (57) продолжается на  $\phi \in (-\pi, \pi)^d$ .

Выражение под знаком нормы в левой части (57) является аналитической функцией  $\phi$ . Неравенство (57) показывает, что коэффициент при  $\phi^m$  в его разложении по степеням  $\phi$  в окрестности  $\phi = 0$  равен нулю при  $|\mathbf{m}| \leq P_A$ . Но этот коэффициент совпадает с  $\epsilon_1(\mathbf{r}^m/m!, \tilde{\Pi}_1)$ . Таким образом, равенство (56) для  $|\mathbf{m}| \leq P_A$  выполняется.

Обратно, пусть выполняется  $\epsilon_1(\mathbf{r}^m/m!, \tilde{\Pi}_1) = 0$  для  $|\mathbf{m}| \leq P_A$ . Пусть  $v_0(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}$ , где  $\alpha(\mathbf{k})$  определено (24). Оценим величину  $(\epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_\zeta$  для некоторого  $\zeta \in \mathbb{Z}^d$ . Пусть  $w$  – многочлен Тейлора функции  $v_0$  в точке  $T\zeta$  порядка  $P_A$ . Тогда для всех мультииндексов  $\mathbf{q}$ , таких что  $|\mathbf{q}| \leq P_A + 1$ , всех  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{Z}^d$  и  $\mathbf{r} \in G$  верно

$$|(D^{\mathbf{q}}v_0)(h(\mathbf{r} + T\boldsymbol{\eta})) - (D^{\mathbf{q}}w)(h(\mathbf{r} + T\boldsymbol{\eta}))| \leq C(h(1 + \|\boldsymbol{\eta} - \zeta\|))^{P_A+1-|\mathbf{q}|} |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1}.$$

Отсюда имеем

$$\|(\tilde{\Pi}_h(v_0 - w))_\eta\| \leq \tilde{C} h^{P_A+1} (1 + \|\boldsymbol{\eta} - \zeta\|)^{P_A+1} |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1},$$

$$\|(\tilde{\Pi}_h(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)(v_0 - w))_\eta\| \leq \tilde{C} h^{P_A} |\boldsymbol{\omega}| (1 + \|\boldsymbol{\eta} - \zeta\|)^{P_A} |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1}.$$

Подставим эту оценку в определение  $(\epsilon_h(v_0 - w, \tilde{\Pi}_h))_\zeta$ . Ввиду конечности шаблона  $\mathcal{S}$  для всех используемых значений  $\boldsymbol{\eta}$  величина  $\|\boldsymbol{\eta} - \zeta\|$  ограничена константой, не зависящей от  $h$ . Таким образом, получаем  $\|(\epsilon_h(v_0 - w, \tilde{\Pi}_h))_\zeta\| \leq C' h^{P_A} |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1}$ . Поскольку по условию выполняется  $(\epsilon_h(w, \tilde{\Pi}_h))_\zeta = 0$ , отсюда следует  $\|(\epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_\zeta\| \leq C' h^{P_A} |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1}$ . Значит,  $\|(\epsilon_h(v_0, \tilde{\Pi}_h))_\zeta\| \leq C' h^{P_A} |\alpha(\mathbf{k})|^{P_A+1}$ , и искомая оценка (55) вытекает из следствия 17.

## 10. Заключение

В настоящей работе показано, как оценки аппроксимации и точности схемы, если они имеют место для решения в виде комплексной экспоненты, переносятся на произвольные достаточно гладкие функции. Полученный результат

позволяет при теоретическом исследовании точности схемы ограничиться рассмотрением одного блока в системе (33), соответствующего некоторому волновому числу, без ущерба для строгости получаемых оценок.

## Список литературы

1. Vichnevetsky R., Bowles J. B. Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations. SIAM, 1982. p. 140.
2. Lowrie R. Compact higher-order numerical methods for hyperbolic conservation laws. Ph.D. thesis: The University of Michigan. 1996.
3. Hu F., Hussaini M., Rasetarinera P. An Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation Problems // J. Comput. Phys. 1999. Vol. 151. P. 921–946.
4. Zhang M., Shu C.-W. An analysis of and a comparison between the discontinuous Galerkin and the spectral finite volume methods // Computers and Fluids. 2005. Vol. 34. P. 581–592.
5. Guo W., Zhong X., Qui C.-M. Superconvergence of discontinuous Galerkin and local discontinuous Galerkin methods: Eigen-structure analysis based on Fourier approach // J. Comput. Phys. 2013. Vol. 235. P. 458–485.
6. Balan A., May G., Schöberl J. A stable high-order Spectral Difference method for hyperbolic conservation laws on triangular elements // J. Comput. Phys. 2012. Vol. 231. P. 2359–2375.
7. Revisiting the spectral analysis for high-order spectral discontinuous methods / Vanharen J., Puigt G., Vasseur X. et al. // J. Comput. Phys. 2017. Vol. 337. P. 379–402.
8. Vincent P. E., Castonguay P., Jameson A. Insights from von Neumann analysis of high-order flux reconstruction schemes // J. Comput. Phys. 2011. Vol. 230. P. 8134–8154.
9. Чикиткин А. В., Рогов Б. В. Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 144. С. 1–28.
10. Tam C. K. W., Webb J. C. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics // J. Comput. Phys. 1993. Vol. 107. P. 262–281.
11. Work C. D., Katz A. J. Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes // AIAA paper No. 2015-0834. 2015.