ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 7 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Тучин Д.А.

Автономное определение орбиты на борту космического аппарата

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Тучин Д.А. Автономное определение орбиты на борту космического аппарата // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 7. 36 с. doi:10.20948/prepr-2019-7
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-7

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Д.А. Тучин

Автономное определение орбиты на борту космического аппарата

Москва — 2019

Д.А. Тучин

Автономное определение орбиты на борту космического аппарата

Предложены и исследованы методы, алгоритмы и программы определения орбиты космического аппарата на его борту с использованием измерений глобальных систем спутниковой навигации. Разработаны алгоритмы трёхэтапной обработки измерений, позволяющие повысить надёжность и точность.

Ключевые слова: определение орбиты, космический аппарат, автономная навигация, бортовые системы, ГЛОНАСС, GPS, АСН, АНС, САН.

D.A. Tuchin

Autonomous spacecraft's on-board orbit determination

Methods, algorithms and programs for on-board orbit determination using global satellite navigation system measurements are proposed and investigated. Algorithms for three-stage processing of measurements are developed to improve the reliability and accuracy.

Key words: orbit determination, spacecraft, autonomous navigation, on-board system, GLONASS, GPS.

Оглавление

Введение

Создание методов, алгоритмов и программ бортовой автономной навигационной системы (АНС) для околоземных космических аппаратов (КА) [1] потребовало привлечения опыта обработки траекторных измерений в Баллистическом центре ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [2−5]. Разработанные бортовые алгоритмы АНС позволяют проводить определение параметров движения КА по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) ГЛОНАСС и GPS на геостационарных орбитах (ГСО), орбитах с большим эксцентриситетом (ВЭО[1]) и низкоорбитальных космических объектах (НОКО). На рис. 1 изображено направление излучения радиосигнала навигационного КА (НКА) и показана возможность его приёма на НОКО, ВЭО и ГСО.

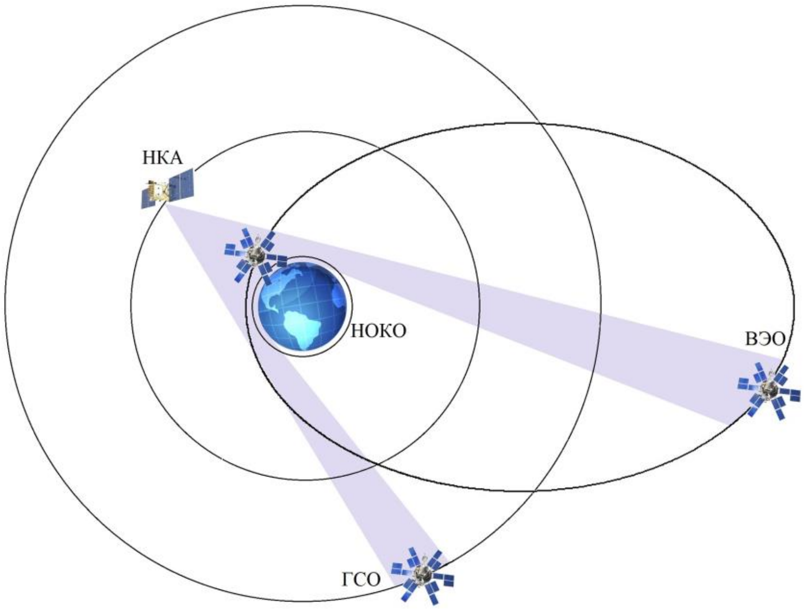

Рисунок 1 − Взаимное расположение КА и НКА на ГСО, ВЭО и НОКО

Традиционная схема обработки одновременных измерений с более чем четырёх НКА на орбитах ВЭО и ГСО является проблематичной из-за малого количества одновременно видимых навигационных спутников и противоречия между наилучшим геометрическим расположением НКА и ионосферными ошибками измерений [6]. Схема с определением вектора положения и скорости в перицентре орбиты ВЭО с последующим прогнозом орбиты в апоцентре не даёт хороших результатов по точности [3]. При этом наличие орбитальных манёвров усугубляет проблему. На КА ГСО «Электро−Л» № 2 система автономной навигации требует одновременного приёма измерений от четырёх НКА ГЛОНАСС и четырёх НКА GPS, при этом определение орбиты КА происходит со среднеквадратичной ошибкой (СКО) 282 м по положению и 0.0192 м/с по скорости [7].

Надёжность работы АНС строится на независимости получения измерений ГНСС от результатов определения орбиты КА [8]. При этом получение измерений и определение орбиты выполняются на двух

[1] Сокращение ВЭО дословно расшифровывается как *высокоэллиптическая* орбита, что является некорректным переводом Highly Elliptical Orbit.

разных специализированных процессорах [1]. В работе представлены алгоритмы трёхэтапного метода определения орбиты КА на его борту.

При отсутствии априорных данных об орбите КА на его борту решается задача *первоначального определения* орбиты. На первом этапе первоначального определения вместе с кинематическими параметрами движения КА определяются уход частоты опорного генератора (ОГ) Δf и рассинхронизация шкал времени КА и ГНСС φ. Искомые параметры Δf и φ называются *служебными параметрами приёмника* сигналов ГНСС. Первоначальное определение орбиты происходит с учётом полного отсутствия априорной информации. Задача осложнена неоднозначностью дальномерного измерения псевдодальности [8, 9]. В основу алгоритмов первоначального определения орбиты положено геометрическое решение при избыточном количестве принимаемых НКА не менее пяти. Избыточность необходима для использования остаточных невязок измерений при анализе достоверности первоначального определения. Применение специальной остронаправленной антенны [10], способной принимать сигнал, излучённый с другой стороны Земли (рис. 1), позволяет проводить первоначальное определение в районе апоцентра ВЭО или на ГСО.

В случае наличия на борту КА данных об его орбите, переданных с Земли или полученных после решения задачи первоначального определения, происходит уточнение восьмимерного фазового вектора, состоящего из шести кинематических параметров начальных условий (НУ), ухода частоты ОГ и рассинхронизации шкалы времени КА и ГНСС. Восьмимерный искомый фазовый вектор НУ строится на момент последнего измерения. Этот второй этап называется определением орбиты *на короткой дуге*. Обработка происходит на интервалах времени от одной минуты до получаса, которые зависят от количества видимых НКА.

Динамическая модель, описывающая поведение кинематических и служебных параметров, состоит из уравнений динамики полёта КА и уравнений авторегрессии Δf и φ [1, 11, 12] с возбуждающим белым шумом. Обработка измерений по короткой дуге производится итерационным фильтром Калмана. После решения навигационной задачи сохраняется вектор положения НУ с весом, равным обратной величине СКО остаточной невязки дальномерных измерений. Эти сохранённые векторы положения называются *нормальными местами* и рассматриваются задачей определения третьего этапа как измерения. Высокая эффективность алгоритмов определения орбиты по короткой дуге обеспечивается использованием законов динамики движения КА и модели поведения частоты ОГ непосредственно при обработке первичных скоростных и дальномерных измерений.

На заключительном третьем этапе *обработки нормальных мест* по измерениям, сформированным на этапе определения по короткой дуге, происходит окончательное определение орбиты КА. Проведённые вычислительные эксперименты показали высокую эффективность обработки нормальных мест на интервале времени полутора витков КА вокруг Земли.

Обработка нормальных мест и определение орбиты КА производится методом наименьших квадратов (МНК). МНК для определения орбиты КА впервые применён Э.Л. Акимом и Т.М. Энеевым в начале 60-х годов прошлого века [13, 14, 15]. Метод используется в Баллистическом центре ИПМ им. М.В. Келдыша РАН при оперативном определении орбит космических аппаратов [3, 4, 5].

Высокоточное определение орбиты КА в АНС невозможно без методов отбраковки аномальных измерений. В работе описаны методы локальной обработки измерений [3, 16, 17] и отбраковки с использованием построения гистограммы невязок в логарифмической шкале.

Приведены результаты численного моделирования и экспериментальной отработки алгоритмов на макете АНС [8] с использованием имитатора сигналов ГНСС на ВЭО с периодом около 12 часов и с высотой апоцентра 38.6 тыс. км.

1. Измерения

Сопоставим измеряемые величины с параметрами движения КА, параметрами измерительной аппаратуры и систематическими ошибками распространения сигнала ГНСС в ионосфере Земли [6], т.е. рассмотрим *небесно-механическую интерпретацию* измерений [2, 18, 19].

В АНС для определения орбиты КА используют два типа измерений ГНСС: *псевдодальность* и *псевдоскорость* [8].

Для описания процесса ухода шкалы времени ОГ от идеальной шкалы навигационной системы определён параметр рассинхронизации в момент приёма измерений через $\varphi\left(t_{прм}\right)$, для определённости выраженный в единицах длины.

Псевдошумовая последовательность (ПСП) в приёмнике генерируется так, что её начало совпадает с началом миллисекунды. Так как период передачи ПСП НКА ГЛОНАСС и GPS составляет 1 мс, то возникает неоднозначность измерения псевдодальности, обусловленная числом *зон однозначного измерения* $\lambda_{зн} = 10^{-3} c$, где c − скорость света. Расчётное значение $\Psi_t^{\text{пд}}$ измерения псевдодальности связано с положениями $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ КА в момент приёма сигнала t и $\mathbf{r}_{\text{нка}}$ НКА в момент излучения $t_{изл}$ следующим соотношением [8]:

$$\Psi_t^{\text{пд}} = \left|\Delta\mathbf{r}(t)\right| + \varphi(t) - \Delta t_{\text{нка}} \cdot c - \lambda_{зн} \cdot n - \Delta\rho + \delta_{\text{пд}}, \tag{1}$$

где $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\text{ка}}(t) - \mathbf{r}_{\text{нка}}(t_{изл})$, n – целое число зон однозначного измерения, $\Delta\rho \ge 0$ – ионосферная задержка сигнала от НКА в единицах длины [6], $\Delta t_{\text{нка}}$ – уход времени НКА относительно эталонного времени

ГНСС, $\delta_{\text{пд}}$ – аппаратурная ошибка измерения псевдодальности в корреляторе.

Именно наличие неизвестного параметра $\varphi\left(t_{прм}\right)$ в (1) повлияло на внесение в название дальномерного измерения приставки *псевдо*.

Эффективное устранение ионосферной задержки $\Delta\rho$ возможно при приёме в корреляторе АНС второй частоты ГНСС [6]. Ионосферная задержка сигнала $\Delta\rho = \Delta\rho_{\text{L1}}$ на первой частоте L1 устраняется с помощью двух измерений псевдодальности $\tilde{\Psi}_{\text{L1}}^{\text{пд}}$ и $\tilde{\Psi}_{\text{L2}}^{\text{пд}}$ на разных частотах f_{L1} и f_{L2} по соотношению [20]:

$$\Delta\rho_{\text{L1}} = \frac{f_{\text{L2}}^2}{f_{\text{L1}}^2 - f_{\text{L2}}^2} \cdot \left(\tilde{\Psi}_{\text{L2}}^{\text{пд}} - \tilde{\Psi}_{\text{L1}}^{\text{пд}}\right). \tag{2}$$

Уход времени НКА $\Delta t_{\text{нка}}$ относительно эталонного времени ГНСС передаётся в навигационном сообщении [20, 21]. Оценка дисперсии $\sigma_{\text{пд}}^2$ случайной величины аппаратурной ошибки $\delta_{\text{пд}}$ измерения псевдодальности определяется на этапе калибровки коррелятора [8]. Определение зоны однозначного измерения n происходит на этапе приёма измерений ПСП в шкале коррелятора [8] с точностью до миллисекунды рассинхронизации шкал времени АНС и ГНСС.

Уход частоты ОГ Δf описывается авторегрессией первого порядка, временной ряд которой представим в виде

$$\Delta f\left(t_i\right) = \Delta f\left(t_{i-1}\right) + \varepsilon_{t_i}^{\Delta f}, \tag{3}$$

где случайная величина $\varepsilon_{t_i}^{\Delta f}$ имеет нулевое математическое ожидание и оценку дисперсии $\sigma_{\Delta f}^2$.

Такая модель для представления Δf допустима при использовании ОГ с уходом $\pm 1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{с}}{\text{сут}}$, например ГК 142С-ТС-10М-А-2 производства АО «Морион» [22]. На интервале $\left[t_0, t\right]$ для рассинхронизации времени $\varphi\left(t\right)$, выраженной в единицах длины, справедливо:

$$\varphi\left(t\right) = \varphi\left(t_0\right) + \Delta f\left(t\right) \cdot \left(t - t_0\right) + \varepsilon_t^{\varphi}, \tag{4}$$

где Δf будем выражать в единицах скорости, ε_t^{φ} − временной ряд, описывающий поведение рассинхронизации шкал времени между измерениями в моменты t_i и t_{i-1}

$$\varphi\left(t_i\right) = \varphi\left(t_{i-1}\right) + \Delta f\left(t_i\right) \cdot \left(t_i - t_{i-1}\right) + \varepsilon_{t_i}^{\varphi}. \tag{5}$$

Случайная величина ε_t^{φ} имеет нулевое математическое ожидание. Оценка дисперсии σ_{φ}^2, определяется по большой выборке измерений на этапе калибровки коррелятора [8].

Расчётное значение псевдоскорости $\Psi_t^{\text{пс}}$ связано с кинематическими векторами КА ($\mathbf{r}_{\text{ка}}$, $\mathbf{v}_{\text{ка}}$) в момент приёма сигнала t и НКА ($\mathbf{r}_{\text{нка}}$, $\mathbf{v}_{\text{нка}}$) в момент излучения $t_{изл}$ следующим соотношением:

$$\Psi_t^{\text{пс}} = \frac{\left(\Delta\mathbf{r}(t), \Delta\mathbf{v}(t)\right)}{\left|\Delta\mathbf{r}(t)\right|} + \Delta f\,(t) + \delta_{\text{пс}}, \tag{6}$$

где $\Delta\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\text{ка}}(t) - \mathbf{v}_{\text{нка}}(t_{изл})$, $\delta_{\text{пс}}$ – аппаратурная ошибка измерения псевдоскорости. Оценка дисперсии $\sigma_{\text{пс}}^2$ случайной величины $\delta_{\text{пс}}$ определяется в результате калибровки коррелятора [8].

Итак, измерения псевдодальности и псевдоскорости описываются соотношениями (1) и (6), неизвестными искомыми параметрами являются три компоненты вектора положения $\mathbf{r}_{\text{ка}}$, три компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_{\text{ка}}$, значения ухода шкалы времени φ и смещение частоты Δf ОГ относительно эталонного значения ГНСС. Время излучения сигнала $t_{изл}$ определяется по номеру ПСП относительно битов информационного кадра [8], а время приёма t вычисляется с использованием *светового уравнения* итерационным методом, при котором на нулевом шаге итерации $t^{(0)} = t_{изл}$, а на s-м шаге итерации:

$$t^{(s)} = t_{изл} + \frac{1}{c}\left|\mathbf{r}_{\text{ка}}\left(t^{(s-1)}\right) - \mathbf{r}_{\text{нка}}\left(t_{изл}\right)\right|. \tag{7}$$

Итерации продолжают до тех пор, пока $\left|t^{(s)} - t^{(s-1)}\right| > \varepsilon$, полагая обычно $\varepsilon = 10^{-10}$ с. Для расчёта $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ используется модель движения по априорным НУ.

Отметим, что при совместной обработке измерений псевдодальности и псевдоскорости систем ГЛОНАСС и GPS возникает проблема рассинхронизации шкал времени этих ГНСС между собой. Поправка τ_{GPS} на расхождение системных шкал времени ГЛОНАСС и GPS передаётся в эфемеридном сообщении [21] и не превышает значения $1.9 \cdot 10^{-3}$ с. Расхождение шкал ГНСС влияет только на точность относительной привязки времени излучения измерений $t_{изл}$ с борта НКА. Т.к. скорость КА не более 8 км/с, то предельная ошибка по дальности составляет 15.2 м и сопоставима с точностью измерения псевдодальности [8], вследствие чего можно пренебречь τ_{GPS}. Гораздо бóльшая ошибка в задержке сигнала GPS относительно ГЛОНАСС возникает в корреляторе АНС в связи с разными путями прохождения сигналов в микросхемах делителей частот. Эта задержка, выраженная в единицах длины, составляет несколько сотен метров и определяется экспериментально в процессе настройки и калибровки аппаратуры АНС.

Для решения навигационной задачи необходимы частные производные измеренных значений псевдодальности и псевдоскорости по искомым параметрам $\mathbf{r}_{\text{ка}}$, $\mathbf{v}_{\text{ка}}$, Δf и φ:

$$\frac{\partial \Psi^{\text{пд}}}{\partial \mathbf{r}_{\text{ка}}} = \frac{\partial \Psi^{\text{пс}}}{\partial \mathbf{v}_{\text{ка}}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|},\ \frac{\partial \Psi^{\text{пд}}}{\partial \mathbf{v}_{\text{ка}}} = (0, 0, 0)^{\text{т}},\ \frac{\partial \Psi^{\text{пд}}}{\partial \Delta f} = \frac{\partial \Psi^{\text{пс}}}{\partial \varphi} = 0$$
$$\frac{\partial \Psi^{\text{пс}}}{\partial \mathbf{r}_{\text{ка}}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{|\Delta \mathbf{r}|} - \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3}(\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{v}),\ \frac{\partial \Psi^{\text{пд}}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Psi^{\text{пс}}}{\partial \Delta f} = 1. \tag{8}$$

Отметим, что расчётные значения измерений (1), (6) и их производные (8) приведены для инерциальной системы координат (ИСК). Использование ИСК необходимо для корректной небесно-механической интерпретации прохождения сигнала от НКА до КА.

2. Модель движения КА

2.1. Уравнения движения

В бортовых алгоритмах АНС реализована модель движения КА, учитывающая силы центрального тяготения Земли, притяжения Луны и Солнца и нецентральности гравитационного поля Земли [2]. Также возможен учёт сил, связанных с торможением в верхней атмосфере Земли и двигательной установки (ДУ) КА. В прямоугольной инерциальной геоцентрической системе координат (СК) J2000 дифференциальные уравнения движения КА для $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_{\text{ка}}, \mathbf{v}_{\text{ка}})^{\text{т}}$ записываются в форме

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0),\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}_{\text{ка}}, \dot{\mathbf{v}}_{\text{ка}})^{\text{т}},$$
$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{ка}} = \mathbf{f}_{\text{з}} + \mathbf{f}_{\text{л}} + \mathbf{f}_{\text{с}} + \mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}(\mathbf{f}_{\text{гр}} + \mathbf{f}_{\text{атм}}) + \mathbf{f}_{\text{ду}}, \tag{9}$$

где $\mathbf{x}_0$ – вектор НУ, $\mathbf{f}_{\text{з}}$ – возмущающее ускорение, вызванное центральной частью поля тяготения Земли, $\mathbf{f}_{\text{л}}$ и $\mathbf{f}_{\text{с}}$ – векторы возмущающих ускорений, вызванные центральными частями гравитационных полей Луны и Солнца в СК J2000, $\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}$ – матрица перехода из гринвичской вращающейся СК ПЗ-90.2 [23], связанной с фигурой Земли в СК J2000, $\mathbf{f}_{\text{гр}}$ – возмущающее ускорение, вызванное нецентральностью гравитационного поля Земли, $\mathbf{f}_{\text{атм}}$ – возмущение верхней атмосферы Земли, $\mathbf{f}_{\text{ду}}$ – возмущения при работе ДУ КА.

Введём обозначение для матрицы Якоби $m \times n$ частных производных вектора $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)^{\text{т}}$ по вектору $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)^{\text{т}}$:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial p_m} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial p_m} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Используя (10), запишем

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}. \tag{11}$$

Соотношение (11) называется *уравнением в вариациях* [24]. Дифференциальные уравнения в вариациях всегда интегрируются совместно с уравнениями движения КА, поскольку для расчёта правых частей системы уравнений в вариациях используется вектор состояния КА на текущий момент времени.

При интегрировании уравнений (11) необходимо учитывать, что в блочном представлении матрица $\dfrac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dfrac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{ка}}}{\partial \mathbf{r}_{\text{ка}}} \\ \mathbf{E} & \dfrac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{\text{ка}}}{\partial \mathbf{v}_{\text{ка}}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

При обработке измерений на интервале времени полутора витков давлением сил солнечной радиации и влияниями твёрдых приливов от Луны и Солнца в бортовых алгоритмах АНС можно пренебречь.

2.2. Возмущающие ускорения

Расчёт возмущающего ускорения $\mathbf{f}_{\text{з}}$, вызванного центральной частью поля тяготения Земли, производится по формуле

$$\mathbf{f}_{\text{з}} = -\mu_{\text{з}} \frac{\mathbf{r}_{\text{ка}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{ка}}\right|^3}, \tag{13}$$

где $\mu_{\text{з}}$ – гравитационная постоянная Земли.

Для расчёта ускорений сил солнечно-лунных притяжений $\mathbf{f}_{\text{с}}$ и $\mathbf{f}_{\text{л}}$ используется следующее соотношение:

$$\mathbf{f}_{\text{л,с}} = \mu_{\text{л,с}} \left(\frac{\mathbf{r}_{\text{л,с}} - \mathbf{r}_{\text{ка}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{л,с}} - \mathbf{r}_{\text{ка}}\right|^3} - \frac{\mathbf{r}_{\text{л,с}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{л,с}}\right|^3} \right), \tag{14}$$

где $\mu_{\text{л}}$ и $\mu_{\text{с}}$ – гравитационные постоянные Луны и Солнца, $\mathbf{r}_{\text{л}}$ и $\mathbf{r}_{\text{с}}$ – векторы положения Солнца и Луны в СК J2000.

Выражение (14) для возмущения преобразуется в (15) [25] с целью выделения малого возмущения для компенсации вычислительной ошибки, связанной с разностью двух близких величин.

$$\begin{gathered} \mathbf{f}_{\text{л,с}} = -\mu_{\text{л,с}} \frac{1}{\left|\mathbf{r}_{\text{л,с}} - \mathbf{r}_{\text{ка}}\right|^3} \left(\mathbf{r}_{\text{ка}} + \frac{3 + 3\vartheta + \vartheta^2}{1 + (1+\vartheta)^{3/2}} \vartheta \cdot \mathbf{r}_{\text{л,с}} \right), \\ \vartheta = \left(\frac{\mathbf{r}_{\text{ка}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{л,с}}\right|}, \frac{\mathbf{r}_{\text{ка}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{л,с}}\right|} - 2\frac{\mathbf{r}_{\text{л,с}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{л,с}}\right|} \right). \end{gathered} \tag{15}$$

Для расчёта векторов положения Луны $\mathbf{r}_{л}$ и Солнца $\mathbf{r}_{с}$ в АНС можно использовать два варианта. В первом варианте для вычисления координат Луны и Солнца используются зарубежные таблицы эфемерид DE423 в виде коэффициентов полиномов Чебышёва, созданные в JPL [26]. Таблицы представлены в сети Интернет. Этот метод вычисления положения Луны и Солнца требует наличие 378 коэффициентов, представимых в двухбайтовых числах с плавающей запятой на каждые 32 суток полёта. Хранение такого объема данных возможно, например, на flash-накопителях.

Во втором варианте положения Луны и Солнца рассчитывают по конечным формулам аналитических теорий движения конца 19 века, созданных Е.В. Брауном и С. Ньюкомом [27]. Аналитическое представление движения Луны и Солнца требует относительно больших вычислительных затрат при расчётах тригонометрических функций, при этом погрешность вычисления положения Луны составляет не более 10 км, а Солнца − 100 км.

В разработанных алгоритмах АНС реализован комбинированный метод, в котором производится расчёт коэффициентов полинома Чебышёва на 32 суток с использованием аналитических моделей для последующего использования в алгоритмах решения навигационной задачи.

Коэффициенты полиномы Чебышёва [28] формируются в АНС на борту КА на каждом 32-суточном интервале времени. В каждом 32-суточном интервале содержится два подынтервала m=2 разложений для Солнца и восемь m=8 для Луны. Для Солнца каждая из трёх координат положения аппроксимирована полиномом $n = 15$ степени, а для Луны каждая из трёх координат аппроксимирована полиномом $n = 12$ степени. Структура хранения коэффициентов представлена в таблице 1, каждая 32-суточная порция, имеющая индекс k, соответствует эфемеридному времени t_k. Для времени используется юлианское представление.

Для формирования коэффициентов полиномов формируются времена узлов T_i полинома из n элементов и вспомогательная матрица $\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\}$ n×n по рекуррентным формулам:

$$a_{ij}^{-1} = 2 \cdot a_{ij-1}^{-1} \cdot a_{i2}^{-1} + a_{ij-2}^{-1},\ a_{i1}^{-1} = 1,\ a_{i2}^{-1} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2i-1}{n}\right),$$
$$T_i = \frac{32}{m} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + a_{i2}^{-1}\right),\ i = 1,\ldots,n,\ j = 3,\ldots,n. \qquad (16)$$

Таблица 1 − Структура хранения коэффициентов на интервале 32 суток

	время		n	коэффициенты $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_m\right)^{\mathrm{T}}$														
Солнце	t_k	x	15															
		y																
		z																
	$t_k + 16$	x																
		y																
		z																
Луна	t_k	x	12															
		y																
		z																
	$t_k + 4$	x																
		y																
		z																
	$t_k + 8$	x																
		y																
		z																
	$t_k + 12$	x																
		y																
		z																
	$t_k + 16$	x																
		y																
		z																
	$t_k + 20$	x																
		y																
		z																
	$t_k + 24$	x																
		y																
		z																
	$t_k + 28$	x																
		y																
		z																

Коэффициенты полиномов $\mathbf{P}_k$ формируются одновременно для всех трёх компонент вектора положения с использованием

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\text{л,с}}\left(t_k + T_1 + k \cdot (32/m)\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \mathbf{r}_{\text{л,с}}\left(t_k + T_n + k \cdot (32/m)\right)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \ k = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

где $\mathbf{r}_{\text{л,с}}(t)$ − вектор положения Солнца или Луны в момент t.

Представим $\mathbf{P}_k$ в виде $\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{p}_k^x\, \mathbf{p}_k^y\, \mathbf{p}_k^z\right)$, где $\mathbf{p}_k^x$, $\mathbf{p}_k^y$, $\mathbf{p}_k^z$ – векторы вида $\left(p_1,\ldots,p_n\right)^{\mathrm{T}}$, тогда для построения значения компоненты вектора положения и её производной в точке τ используются следующие рекуррентные соотношения:

$$b_n = p_n,\ b_{n-1} = p_{n-1} + 2p_n\tau,\ b_i = p_i - p_{i+2} + 2p_{i+1}\tau,\ i = n-1,\ldots,2, \tag{18}$$

где τ определяется номером подынтервала k по формуле

$$\tau = \frac{2\left(t - t_k + \left(32/m\right)\cdot k\right)}{\left(32/m\right)} - 1. \tag{19}$$

Значение полинома p (компоненты вектора положения) вычисляется по формуле:

$$p = p_1 - b_2 + b_1\tau. \tag{20}$$

Для расчёта возмущающих ускорений $\mathbf{f}_{\text{гр}} = \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{\text{ка}}}$, вызванных нецентральным гравитационным полем Земли [29, 30] используется силовая функция U, выраженная в виде разложения по сферическим функциям для подспутниковой точки КА с широтой φ и долготой λ:

$$U = \frac{\mu_{\text{з}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{ка}}\right|}\left(\sum_{n=2}^{N} \mathrm{c}_{n0}\left(\frac{r_{\text{з}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{ка}}\right|}\right)^{n} \mathrm{P}_n^0 + \sum_{n=2}^{M}\left(\frac{r_{\text{з}}}{\left|\mathbf{r}_{\text{ка}}\right|}\right)^{n}\left(\mathrm{c}_{nm}\cos m\lambda + \mathrm{s}_{nm}\sin m\lambda\right)\mathrm{P}_n^m\right), \tag{21}$$

где N, M – степени разложения, $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ – вектор положения во вращающейся гринвичской СК, связанной с фигурой Земли, c_{n0} – коэффициенты модели при зональных гармониках, c_{nm} и s_{nm} – ненормированные коэффициенты при тессеральных и секториальных гармониках, $r_{\text{з}}$ – экваториальный радиус Земли, P_n^m – присоединённая функция Лежандра:

$$\mathrm{P}_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dz^m}\mathrm{P}_n(z),\ \mathrm{P}_n\left(z\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2 - 1\right)^n. \tag{22}$$

Ортогональный многочлен $\mathrm{P}_n\left(z\right)$ называют полиномом Лежандра. Используя (22), легко получить

$$\mathrm{P}_n^m(\sin\varphi) = \cos^m\varphi \cdot \frac{d^m \mathrm{P}_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^m}. \tag{23}$$

Для широты φ и долготы λ и вектора положения КА $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ во вращающейся СК ПЗ-90.2 справедливо:

$$\mathbf{r}_{\text{ка}} = \left|\mathbf{r}_{\text{ка}}\right|\left(\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi\right)^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

Алгоритм расчёта ускорений $\mathbf{f}_{\text{гр}}$, вызванных нецентральным гравитационным полем Земли, с использованием нормированных коэффициентов $\overline{\mathrm{c}}_{nm}$ и $\overline{\mathrm{s}}_{nm}$ подробно приведён в [3].

Для расчёта вектора возмущающих ускорений $\mathbf{f}_{\text{атм}}$, вызванных влиянием атмосферы Земли, используется соотношение

$$\mathbf{f}_{\text{атм}} = -\rho \cdot S_{\text{б}} \cdot |\mathbf{v}|\mathbf{v}, \qquad (25)$$

где ρ − плотность атмосферы Земли в точке нахождения КА, $S_{\text{б}}$ − баллистический коэффициент в размерности $\frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$.

Баллистический коэффициент $S_{\text{б}}$ зависит от свойств конструкции КА и определяет его аэродинамическое сопротивление. Часто при решении навигационной задачи $S_{\text{б}}$ является согласующим уточняемым параметром, а априорные оценки аэродинамического сопротивления используются как начальное приближение. При определении $S_{\text{б}}$ иногда используют величину $\hat{S}_{\text{б}} = S_{\text{б}} \cdot g$ в размерности $\frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{кГс}}$, где $g = 9.80665 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ − ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

Для КА, находящихся на НОКО ниже 1000 км и пролетающих в областях верхней атмосферы Земли, существует некоторая сложность в вычислении плотности атмосферы ρ на борту КА, т.к. она зависит от параметров активности Солнца, которые необходимо оперативно передавать в АНС на борт КА. Прогноз параметров солнечной активности даётся на сайте Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [31]. В случае КА на ВЭО с высотой перицентра более 1 тыс. км или на ГСО возмущения атмосферы не учитываются, $\mathbf{f}_{\text{атм}} = 0$.

Для учёта возмущений $\mathbf{f}_{\text{ду}}$, создаваемых ДУ КА, при коррекциях орбит используют

$$\mathbf{f}_{\text{ду}} = \mathbf{M}_{\text{сск}}^{\text{J2000}} \mathbf{f}_{\text{ду}}^{\text{сск}}, \qquad (26)$$

где $\mathrm{M}_{\text{сск}}^{\text{J2000}}$ – матрица ориентации, задающая перевод из связанной с КА СК (ССК) в ИСК J2000, $\mathbf{f}_{\text{ду}}^{\text{сск}}$ – ускорения в ССК.

При проведении протяжённых по времени манёвров с использованием электрической ракетной ДУ (ЭРДУ) с невысокой тяговооруженностью на околоземной орбите выдерживается постоянная ориентация в орбитальной СК (ОСК), т.е. матрица перевода $\mathbf{M}_{\text{оск}}^{\text{сск}}$ из ОСК в ССК остаётся постоянной, а $\mathbf{M}_{\text{сск}}^{\text{J2000}}$ (26) вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}_{\text{сск}}^{\text{J2000}} = \left(\mathbf{M}_{\text{оск}}^{\text{сск}} \mathbf{M}_{\text{J2000}}^{\text{оск}} \right)^{\text{T}}. \qquad (27)$$

Маневрирование с ЭРДУ происходит при значениях $\left|\mathbf{f}_{\text{ду}}\right| = 10^{-5} \ldots 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

При проведении больших по характеристической $v_{хар}$ скорости манёвров с использованием жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) требуется передача в АНС планируемой $v_{хар}$, времени $\Delta t_{\text{ду}}$ работы ДУ и матрицы ориентации $\mathbf{M}_{\text{сск}}^{\text{J2000}}$ при проведении манёвра:

$$\mathbf{f}_{\text{ду}}^{\text{сск}} = \left(\frac{v_{хар}}{\Delta t_{\text{ду}}}, 0, 0 \right)^{\text{T}}. \tag{28}$$

Для расчёта возмущений Луны и Солнца (расчёта положения планет) используют ИСК J2000. Для расчёта матрицы $\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}$ 3×3 перевода из вращающейся гринвичской СК ПЗ-90.2 в инерциальную СК J2000 в АНС используются алгоритмы, изложенные в [29]. Расчёт $\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}$ производится с использованием соотношения:

$$\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}} = \mathbf{M}_{\text{п}}^{\Delta UT} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}, \tag{29}$$

где $\mathbf{M}_{\text{п}}^{\Delta UT}$ − матрица, учитывающая смещение положения мгновенного полюса Земли относительно международного условного начала, $\mathbf{S}$ − матрица поворота СК в плоскости истинного экватора на угол гринвичского истинного звёздного времени, $\mathbf{N}$ − матрица нутации Земли, $\mathbf{P}$ − матрица прецессии Земли. Существуют различные модели вычисления нутации, например теория МАС 1980 [29, 32] и IAU2000a [33].

Для расчёта $\mathbf{M}_{\text{п}}^{\Delta UT}$ необходимы данные $x_{\text{п}}$, $y_{\text{п}}$ о движении полюсов Земли и величина расхождения ΔUT_1 времени начального меридиана и всемирного координированного времени UTC. Если значение ΔUT_1 передаётся в информационном сообщении ГЛОНАСС [21] и доступно в АНС, то для приёма $x_{\text{п}}$ и $y_{\text{п}}$ в АНС необходимо принимать спутниковый сигнал дифференциальных коррекций Space Based Augmentation System (SBAS), излучаемый с пяти КА, равномерно расположенных на ГСО.

Определение орбиты КА в АНС происходит в ИСК, определяемой матрицей $\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}$, рассчитанной на момент $t_{изл}$ излучения сигналов с НКА. На интервале времени Δt обработки измерений предполагается равномерное вращение Земли с угловой скоростью $\Omega_{\text{з}}$:

$$\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}\left(t_{изл} + \Delta t\right) = \mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}\left(t_{изл}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\Omega_{\text{з}}\Delta t \cdot -\sin\Omega_{\text{з}}\Delta t & 0 \\ \sin\Omega_{\text{з}}\Delta t \quad \cos\Omega_{\text{з}}\Delta t & 0 \\ 0 \qquad\qquad 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Бортовая ИСК определяется матрицей

$$\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{ИСК}}\left(t\right) = \mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}\left(t, \Delta UT_1, x_{\text{п}}, y_{\text{п}}\right)\Big|_{x_{\text{п}}=0,\, y_{\text{п}}=0}. \tag{31}$$

Отсутствие значений движения полюсов $x_{\text{п}}$ и $y_{\text{п}}$ на борту КА приводит к ошибке в вычислении вектора в ИСК J2000. Эта ошибка незначительно сказывается при расчёте гравитационных возмущений

(14) и не влияет на окончательные точности в определении орбиты в СК ПЗ-90.2.

2.3. Уравнения в вариациях

Частные производные гравитационного возмущения Земли. Луны и Солнца зависят только от вектора положения КА $\mathbf{r}$ в ИСК и вычисляются аналитически.

$$\frac{\partial\left(\mathbf{f}_{\text{з}}+\mathbf{f}_{\text{л}}+\mathbf{f}_{\text{с}}\right)}{\partial\mathbf{r}}=\sum_{\text{пл=з,л,с}}3\frac{\mu_{\text{пл}}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{пл}}\right|^{3}}\left(\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{пл}}\right)\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{пл}}\right)^{\text{т}}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{пл}}\right|^{2}}-\frac{1}{3}\mathbf{E}\right), \tag{32}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица 3×3.

Частные производные вектора возмущающих ускорений $\mathbf{f}_{\text{грав}}$, вызванных нецентральностью гравитационного поля Земли, зависят только от вектора положения КА, и их можно считать аналитически, пренебрегая всеми гармониками, кроме второй зональной. Введем обозначения

$$\chi=\frac{15}{2}\frac{\bar{c}_{20}\mu_{\text{з}}r_{\text{з}}^{2}}{\left|\mathbf{r}\right|^{5}},\ \mathbf{e}=\left(e_x,e_y,e_z\right)^{\text{т}}=\frac{\mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}\right|},\ k_z=7e_z^2-1, \tag{33}$$

где $\bar{c}_{20}$ – нормированный коэффициент второй зональной гармоники Земли,

$\mathbf{r}$ – вектора положения КА в СК ПЗ-90.2, тогда

$$\frac{\partial\mathbf{f}_{\text{гр}}}{\partial\mathbf{r}}=\chi\begin{pmatrix} e_x^2k_z-\left(e_z^2-\frac{1}{5}\right) & e_xe_yk_z & e_xe_z\left(k_z-2\right) \\ e_xe_yk_z & e_y^2k_z-\left(e_z^2-\frac{1}{5}\right) & e_ye_z\left(k_z-2\right) \\ e_xe_z\left(k_z-2\right) & e_ye_z\left(k_z-2\right) & e_z^2\left(k_z-5\right)+\frac{3}{5} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

При учёте атмосферы Земли вариации $\frac{\partial\mathbf{f}_{\text{атм}}}{\partial\mathbf{x}}$ зависят от положения и скорости КА и считаются численно с шагом 100 м по положению и 10 см/с по скорости. Вариации $\frac{\partial\mathbf{f}_{\text{ду}}}{\partial\mathbf{x}}$ от ДУ в общем случае считаются численно с экспериментальным подбором шага.

Интегрирование уравнений движения КА (9) и уравнений в вариациях (11) в АНС на борту КА происходит методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $h=20\,\text{с}$ по времени.

При интегрировании уравнений (9) и (11) на бортовом навигационном вычислителе АНС может возникнуть накопление численной ошибки, связанной с представлением числа с плавающей запятой 23-битной мантиссой (тип float на персональном компьютере). Для компенсирования этой численной ошибки необходимо применять метод *пошагового интегрирования*, в котором общий интервал интегрирования $t-t_0$ разбивается на k подинтервалов длиной Δ_0

$$t-t_0=k\Delta_0+\Delta_t. \qquad (35)$$

Для каждого s-го интервала длиной Δ_0 и остаточного Δ_t происходит инициализация НУ уравнения (9) и (11)

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{x}\left(t_0+(s-1)\Delta_0\right),\ \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}\left(t_0+(s-1)\Delta_0\right)}\Big|_{\mathbf{x}\left(t_0+(s-1)\Delta_0\right)}=\mathbf{E}, s=1,\dots,k, \qquad (36)$$

и производится интегрирование на момент $t_0+s\Delta_0$, после которого

$$\frac{\partial\mathbf{x}\left(t_0+s\Delta_0\right)}{\partial\mathbf{x}\left(t_0\right)}=\frac{\partial\mathbf{x}\left(t_0+s\Delta_0\right)}{\partial\mathbf{x}\left(t_0+(s-1)\Delta_0\right)}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}\left(t_0+(s-1)\Delta_0\right)}{\partial\mathbf{x}\left(t_0\right)}. \qquad (37)$$

2.4. Константно-эфемеридное обеспечение

Константно-эфемеридное обеспечение АНС определяется составом используемых моделей и констант при проведении баллистических расчётов на борту КА. При решении навигационной задачи в АНС используются две подвижные гринвичские СК ПЗ-90.2 [23] и WGS-84 [34] и одна ИСК J2000. В таблице 2 приведены задачи и СК в которых они решаются.

Таблица 2 − Используемые СК

СК	Задачи
ПЗ-90.2	расчёт положения и скорости НКА ГЛОНАСС, расчёт $\mathbf{f}_{\text{грав}}$, расчёт $\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{J2000}}$
WGS-84	расчёт положения и скорости НКА GPS
J2000	расчёт положения и скорости КА

Для связи СК ПЗ-90.2 и СК WGS-84 используются соотношения, приведённые в [23]. При расчёте $\mathbf{f}_{\text{гр}}$ используется значения $N=8$, $M=8$ степеней силовой функции (21) со значениями коэффициентов при тессеральных и секториальных гармониках из модели ПЗ-90.2. В таблице 3 приведены константы, используемые в бортовых алгоритмах АНС.

Таблица 3 − Константы

параметр	модель
$\mu_{\text{з}}=3986004.418\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	ПЗ-90.2
$\Omega_{\text{з}}=7.292115\cdot10^{-5}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	ПЗ-90.2
$\mu_{\text{л}}=49028.00055611\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	DE423
$\mu_{\text{с}}=1327124400409.44599\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$	DE423
$\overline{\text{c}}_{20}=-1082625.75\cdot10^{-9}$	ПЗ-90.2
$r_{\text{з}}=6378137$ м	ПЗ-90.2
коэффициенты поля c_{nm}, s_{nm}	ПЗ-90.2

Для расчёта матрицы $\mathbf{M}_{\text{пз90}}^{\text{ИСК}}$ (31) используется величина расхождения ΔUT_1 времени начального меридиана и всемирного координированного времени UTC, которое постоянно обновляется и передаётся в информационном сообщении ГЛОНАСС [21]. Данные о движении полюсов Земли $x_п$, $y_п$ передаются в навигационном сообщении геостационарных спутников дифференциальных поправок SBAS. Данные о состояние активности Солнца при расчёте плотности атмосферы должны передаваться в АНС с Земли из наземного комплекса управления.

3. Первоначальное определение орбиты

Для определения орбиты на борту КА требуется решение задачи уточнения текущего вектора НУ по результатам измерений. Априорные данные о параметрах движения КА могут быть заложены на его борт с Земли или получены в результате решения автономной задачи *первоначального определения* орбиты.

Задачей первоначального определения орбиты является нахождение значений шести кинематических параметров движения КА $\mathbf{r}_{ка}$, $\mathbf{v}_{ка}$, ухода частоты ОГ Δf и ухода шкалы времени φ КА относительно ГНСС, которые можно использовать как НУ на втором этапе решения навигационной задачи по определению орбиты на коротком временном интервале измерений. Первоначальное определение орбиты ищется в гринвичской вращающейся СК ПЗ-90.2 [23] или СК WGS-84 [34] с пренебрежением их различия. Поиск первоначального определения во вращающейся гринвичской СК обусловлен знанием орбит НКА в СК ПЗ-90.2 для ГЛОНАСС и СК WGS-84 для GPS.

В основу алгоритма начального определения орбиты положено геометрическое решение по группе измерений псевдодальности и псевдоскорости от пяти НКА, излучённых в один момент времени генерации ПСП. Т.е. выбирается минимум пять пар измерений псевдодальности и псевдоскорости, отнесённых к одному моменту $t_{изл}$ и принятых, вообще говоря, в разные моменты в силу разностей расстояний до НКА. Для получения измерений пяти НКА при решении задачи первоначального определения в районе апоцентра ВЭО или на ГСО требуется наличие в АНС специальной остронаправленной антенны [10], способной принимать сигнал через просвет Земли (рис. 1). В случае невозможности приёма необходимого числа измерений в апоцентре ВЭО для первоначального определения необходимо дождаться прохождения ближайшего перицентра орбиты. Для ускорения процесса первичного определения на ГСО можно передавать априорный вектор положения и скорости с Земли. Алгоритм расчёта начального значения служебных параметров Δf и φ строится на определении разности между измеренными значениями псевдодальности и дальности, псевдоскорости и скорости соответственно.

В обработке измерений строятся разности измеренных значений псевдодальности и псевдоскорости для исключения неизвестных значений Δf и φ. Задача решается в два этапа: на первом определяется $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ и φ, а на втором − $\mathbf{v}_{\text{ка}}$ и Δf. На каждом из двух этапов размерность фазового вектора неизвестных параметров равна 4, алгоритм же требует минимум 5 пар измерений псевдодальности и псевдоскорости от разных НКА для избыточности, необходимой при оценке качества первичного определения по остаточным невязкам. Кинематические векторы $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ка}}$, служебные параметры приёмника Δf и φ привязываются к моменту первого принятого измерения t_1.

3.1. Метод наименьших квадратов

В основу обработки измерений положены фундаментальные методы определения параметров движения КА по данным траекторных измерений [13]. В общем случае для определения орбиты КА по навигационным измерениям используется МНК с учетом весов измерений [35].

Предполагается, что ошибки измерений носят случайный характер, подчиняясь многомерному нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией. Пусть $\mathbf{q} = \left(q_1, ..., q_m\right)^{\text{T}}$ − фазовый вектор неизвестных параметров размерности m. Обозначим через $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}\left(\mathbf{q}\right)$ вектор расчётных значений измерений размерности n, через $\tilde{\mathbf{\Psi}}$ − соответствующие измеренные значения, а через $\boldsymbol{\xi} = \tilde{\mathbf{\Psi}} - \mathbf{\Psi}$ − вектор невязок. Минимизируемый функционал Φ, учитывающий вес измеренных значений, имеет вид:

$$\Phi = \boldsymbol{\xi}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\xi}, \tag{38}$$

где $\mathbf{W}$ − весовая диагональная матрица порядка n с ненулевым весом $w_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}$ i-го измерения, σ_i − СКО измерения.

В результате минимизации функции (38) с учётом симметричности $\mathbf{W}$ можно записать систему m нелинейных уравнений относительно $\mathbf{q}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\text{T}}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{q}} = 0, \tag{39}$$

или

$$\boldsymbol{\xi}^{\text{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{q}} = 0. \tag{40}$$

Система (40) может быть решена методом обобщённых касательных Гаусса-Ньютона при наличии достаточно хорошего нулевого приближения и высокой точности измерений. Решение сводится к серии последовательных приближений, число которых зависит от степени близости выбранного нулевого приближения $\mathbf{q}^{(0)}$ к точному решению.

Пусть в результате $(s-1)$-го приближения для параметров получены значения $\mathbf{q}^{(s-1)}$, тогда разлагаем в ряд Тейлора в окрестности этих значений параметры рассогласования $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ на s-м приближении имеем

$$\boldsymbol{\xi}^{(s)} = \boldsymbol{\xi}^{(s-1)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \Delta\mathbf{q}^{(s)} + \ldots, \tag{41}$$

или по компонентам

$$\xi_i^{(s)} = \xi_i^{(s-1)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \right)_{\mathbf{q}^{(s-1)}} \Delta q_k^{(s)} + \ldots, \tag{42}$$

где $\Delta\mathbf{q}^{(s)} = \mathbf{q}^{(s)} - \mathbf{q}^{(s-1)}$ – компоненты поправки на s-м приближении к фазовому вектору неизвестных параметров $\mathbf{q}^{(s-1)}$.

Ограничиваясь в (41) линейными членами разложения и подставляя полученное выражение в (40), приходим на s-м приближении к нормальной системе линейных уравнений относительно поправок $\Delta\mathbf{q}^{(s)}$

$$\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{q}^{(s)} = -\mathbf{b}, \tag{43}$$

где элемент матрицы $\mathbf{A}$ и компонента вектора $\mathbf{b}$ имеют вид:

$$a_{nm} = \sum_{i=1}^{3n} w_i^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial q_n} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}, \; b_n = \sum_{i=1}^{3n} w_i^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial q_n} \xi_i. \tag{44}$$

Для поправки можно записать

$$\Delta\mathbf{q}^{(s)} = -\mathbf{K}_\Phi \mathbf{b}, \; \mathbf{K}_\Phi = \mathbf{A}^{-1}, \tag{45}$$

где $\mathbf{K}_\Phi$ – *ковариационная матрица*.

Таким образом, в МНК на каждом s-м приближении для определения поправок к параметрам, полученным на предыдущем приближении, решается нормальная система уравнений (43). Матрица и правые части этой системы формируются для каждого приближения при помощи (44) из производных и рассогласований между значениями измеряемых величин и их расчётными аналогами, причём производные и рассогласования вычисляются для траектории, определяемой параметрами предыдущего приближения, для каждого момента наблюдения и каждой наблюдаемой величины. Вычисления завершаются приближением с номером s, для которого выполняется $\left|\Delta q_k^{(s)}\right| < \varepsilon_k$, $k = 1,\ldots,m$.

Реализация алгоритмов бортовой АНС показало высокую эффективность обращения матрицы $\mathbf{A}$ методом Гаусса [36].

3.2. Определение положения

Итак, пусть имеются упорядоченные по времени измерения псевдодальности и псевдоскорости, излучённые с бортов НКА в один момент времени $t_{изл}$ и принятые в моменты t_i $\tilde{\Psi}_i^{пд}$, $\tilde{\Psi}_i^{пс}$, $i = 1,\ldots,n$, $n \geq 5$.

Вектор положения КА $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ на момент времени $t = t_1$ находится из условия минимума функции $\Phi_{\text{пд}}$:

$$\Phi_{\text{пд}} = \sum_{i=2}^{n} \left(\left(\tilde{\Psi}_{i1}^{\text{пд}} - \tilde{\Psi}_{1}^{\text{пд}} \right) - \left(\Psi_{t_1}^{\text{пд}_i} - \Psi_{t_1}^{\text{пд}_1} \right) \right)^2 , \tag{46}$$

где $\tilde{\Psi}_{i1}^{\text{пд}}$ − измерение псевдодальности $\tilde{\Psi}_{i}^{\text{пд}}$, полученное на момент времени t_i и редуцированное на момент времени t_1 по формуле:

$$\tilde{\Psi}_{i1}^{\text{пд}} = \tilde{\Psi}_{i}^{\text{пд}} + \tilde{\Psi}_{i}^{\text{пс}} \cdot \left(t_1 - t_i \right), \tag{47}$$

$\Psi_{t_1}^{\text{пд}_i}$ − расчётное значение i-го измерения псевдодальности (1) на момент времени t_1. Отметим, что время излучения i-го измерения $t_{изл}^{i}$ тоже редуцируется по формуле

$$t_{изл}^{i} = t_{изл} - \left(t_i - t_1 \right). \tag{48}$$

Для $\mathbf{r}_{\text{ка}} = \mathbf{r}_{\text{ка}} \left(t_1 \right)$, пренебрегая ионосферными задержками, для разности расчётных значений псевдодальности, используя (1), имеем

$$\begin{gathered} \Psi_{t_1}^{\text{пд}_i} - \Psi_{t_1}^{\text{пд}_1} = \left| \mathbf{r}_{\text{ка}} - \mathbf{r}_{\text{нка}} \left(t_{изл}^{i} \right) \right| - \left| \mathbf{r}_{\text{ка}} - \mathbf{r}_{\text{нка}} \left(t_{изл}^{1} \right) \right| + \\ + c \left(\Delta t_{\text{нка}}^{1} - \Delta t_{\text{нка}}^{i} \right) + \lambda_{зн} \left(\Delta t_{\text{нка}}^{1} - \Delta t_{\text{нка}}^{i} \right). \end{gathered} \tag{49}$$

Минимум функции $\Phi_{\text{пд}}$ (46) ищется МНК с решением системы нормальных уравнений (43) для которой весовая матрица полагается единичной $\mathbf{W} = \mathbf{E}$, расчётные значения измерений псевдодальности $\Psi_{t_1}^{\text{пд}_i}$ получаются по формуле (1) и:

$$\begin{gathered} \xi_i = \left(\tilde{\Psi}_{i1}^{\text{пд}} - \tilde{\Psi}_{1}^{\text{пд}} \right) - \left(\Psi_{t_1}^{\text{пд}_i} - \Psi_{t_1}^{\text{пд}_1} \right), \ i = 1, \dots, n , \ n \geq 5 , \ \mathbf{q} = \mathbf{r}_{\text{ка}} , \ m = 3, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Psi^{\text{пд}}}{\partial \mathbf{r}_{\text{ка}}} . \end{gathered} \tag{50}$$

Производные компонент невязок $\boldsymbol{\xi}$ по компонентам искомого вектора $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ определены в (8).

Перед началом первой итерации полагается: $\mathbf{r}_{\text{ка}} = 0$. На каждом s-м шаге итерационного процесса находится поправка $\Delta \mathbf{q}^{(s)}$.

3.3. Определение скорости

После нахождения компонент вектора положения $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ во вращающейся гринвичской СК уточняются три компоненты вектора скорости с использованием МНК. Минимизируется функция

$$\Phi_{\text{пс}} = \sum_{i=2}^{n} \left(\left(\tilde{\Psi}_{i}^{\text{пс}} - \tilde{\Psi}_{1}^{\text{пс}} \right) - \left(\Psi_{t_i}^{\text{пс}} - \Psi_{t_1}^{\text{пс}} \right) \right)^2 . \tag{51}$$

Отметим, что в силу низкой точности измерений $\tilde{\Psi}_{i}^{\text{пс}}$ псевдоскорости редукция, аналогичная псевдодальности (39), не производится. Для МНК при минимизации $\Phi_{\text{пс}}$ имеем:

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}, \ \xi_i = \left(\tilde{\Psi}_{i}^{\text{пс}} - \tilde{\Psi}_{1}^{\text{пс}} \right) - \left(\Psi_{t_i}^{\text{пс}} - \Psi_{t_1}^{\text{пс}} \right), \ i = 1, \dots, n , \ n \geq 5 , \ \mathbf{q} = \mathbf{v}_{\text{ка}} , \tag{52}$$

$m = 3$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{q}} = -\dfrac{\partial \Psi^{\text{пс}}}{\partial \mathbf{v}_{\text{ка}}}$.

В расчётных значениях невязок ξ_i разностных измерений псевдоскорости $\Psi^{\text{пс}}_{t_i}$ (6) полагается $\Delta f\left(t_i\right) - \Delta f\left(t_1\right) \approx 0$. Частные производные компонент невязок по компонентам искомого вектора $\mathbf{v}_{\text{ка}}$ определены в (8).

Итерационные процессы по нахождению $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ка}}$ завершаются, когда модули поправок оказываются меньше заданных пороговых значений: $\left|\Delta \mathbf{r}^{(s)}\right| < \varepsilon_{\mathbf{r}}$ и $\left|\Delta \mathbf{v}^{(s)}\right| < \varepsilon_{\mathbf{v}}$.

3.4. Определение служебных параметров

После определения векторов положения $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ и скорости $\mathbf{v}_{\text{ка}}$ оцениваются значения ухода частоты Δf и рассинхронизации шкал времени φ по соотношениям:

$$\Delta f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\Psi}_i^{\text{пс}} - \Psi_{t_i}^{\text{пс}}\right), \tag{53}$$

$$\varphi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\Psi}_{i1}^{\text{пд}} - \Psi_{t_1}^{\text{пд}_i}\right). \tag{54}$$

Начальное определение $\mathbf{r}_{\text{ка}}$, $\mathbf{v}_{\text{ка}}$, Δf и φ отбраковывается, если модули $\left|\xi\right|$ остаточных невязок (после последней итерации МНК) после определения $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ или $\mathbf{v}_{\text{ка}}$ больше определённых пороговых значений. В случае неудовлетворительного решения задачи первоначального определения количество измерений $n \geq 6$ позволяет производить исключение одного измерения из обработки с последующим анализом результатов сходимости. Аномальные измерения могут возникать вследствие прохождения сигнала через атмосферу и ионосферу Земли и вследствие сбоев в корреляторе.

4. Определение орбиты на короткой дуге

Второй этап определения орбиты в АНС подразумевает определение восьмимерного фазового вектора кинематических параметров орбиты КА, ухода частоты ОГ и рассинхронизации шкалы времени КА с ГНСС. Искомый фазовый вектор строится на момент последнего измерения. Обработка происходит на интервалах времени от одной минуты до получаса и зависит от количества видимых НКА.

В основу алгоритма определения по короткой мерной дуге положен итерационный фильтр Калмана. Динамическая система, описывающая поведение фазового вектора, приведена в [12, 1].

4.1. Динамическая система

Обозначим искомый восьмимерный фазовый вектор через

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{r}_{\text{ка}}, \mathbf{v}_{\text{ка}}, \Delta f, \varphi\right)^{\text{T}}. \tag{55}$$

Будем обрабатывать только парные измерения, т.е. дальномерное и скоростное измерение на один момент от одного НКА. Пусть имеется n парных измерений. Найдём оценку вектора $\mathbf{q}_{t_n}$ на момент последнего измерения t_n.

Расчётные значения псевдодальности $\Psi_t^{\text{пд}}$ и псевдоскорости $\Psi_t^{\text{пс}}$ на момент времени t приведены в (1) и (6) соответственно. Пусть вектор невязок есть разность между измеренными и расчётными значениями описывается матрицей n×2:

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\boldsymbol{\xi}^{\text{пд}}, \boldsymbol{\xi}^{\text{пс}}\right) = \left(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{\text{пд}} - \boldsymbol{\Psi}_{\text{пд}}, \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{\text{пс}} - \boldsymbol{\Psi}_{\text{пс}}\right). \tag{56}$$

Компоненты матрицы n×16 частных производных

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{q}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_{\text{пд}}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_{\text{пс}}}{\partial \mathbf{q}}\right) \tag{57}$$

приведены в 8.

Весовая матрица измеренных значений

$$\mathbf{W}_{\text{пд}}^{\text{пс}} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_{\text{пд}}^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{\text{пс}}^2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

сформирована на основании априорных данных, получаемых при калибровке коррелятора [8]: $\sigma_{\text{пд}} = 6.4\,\text{м}$, $\sigma_{\text{пс}} = 3\,\text{см/с}$.

Динамическая модель, описывающая поведение кинематических параметров КА и служебных параметров приёмника, состоит из уравнений движения КА (9) и уравнений авторегрессии с весовой матрицей $\mathbf{W}_{\Delta f}^{\varphi}$:

$$\mathbf{W}_{\Delta f}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_{\Delta f}^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{\varphi}^2 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

которая сформирована на основании априорных данных [8]: $\sigma_{\Delta f} = 10\dfrac{\text{м/с}}{\text{час}}$ $\sigma_{\varphi} = 25\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Пусть матрица 2×(n–1), описывающая поведение ухода частоты ОГ (3) и рассинхронизаци шкал времени (5), задаётся в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\Delta f}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\varphi}\right). \tag{60}$$

Обозначим априорный фазовый вектор через $\mathbf{q}_{\text{а}}$ на момент последнего измерения с соответствующей весовой матрицей 8×8:

$$\mathbf{W}_{\text{а}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tilde{\sigma}_{\Delta f}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tilde{\sigma}_{\varphi}^2 \end{pmatrix}, \text{где} \tag{61}$$

$\tilde{\sigma}_{\Delta f}$ − СКО априорного сдвига ухода частоты ОГ, $\tilde{\sigma}_{\varphi}$ − СКО априорного сдвига рассинхронизации шкал времени. В случае первого определения орбиты по короткой дуге полагают $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ диагональной с первыми тремя диагональными элементами $1/\tilde{\sigma}_{\mathbf{r}}^2$ и вторыми тремя $1/\tilde{\sigma}_{\mathbf{v}}^2$, где $\tilde{\sigma}_{\mathbf{r}} = 50$ км, $\tilde{\sigma}_{\mathbf{v}} = 10$ м/с; и $\tilde{\sigma}_{\Delta f} = 50$ м/с, $\tilde{\sigma}_{\varphi} = \lambda_{зн}$, $\lambda_{зн}$ – зона однозначного измерения (1).

При последующих определениях орбиты по короткой дуге в разрывном навигационном поле с высотами орбиты КА более 2 тыс. км оценка расширенного вектора состояния не может быть получена без использования априорной информации. В качестве такой информации используется расширенный вектор состояния, полученный по измерениям на предшествующем интервале времени. В качестве начального значения ковариационной матрицы $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ подставляется значение, определённое на предыдущем интервале. Затем диагональный элемент, соответствующий уходу частоты умножается на величину $\Delta t \frac{10^2}{3600}$, а соответствующий уходу времени на $\Delta t \frac{25^2}{3600}$, где Δt – интервал времени, прошедший с предыдущего конца интервала на начало текущего.

Оценка фазового вектора $\mathbf{q}_{t_n}$ на момент времени последнего измерения t_n получается в результате минимизации функционала, содержащего взвешенные квадраты невязок измеренных и расчётных значений, взвешенные приращения значений служебных параметров на интервале между измерениями (3), (5) и квадрат взвешенного отклонения априорно заданного фазового вектора от его расчётного значения. Минимизируемый функционал имеет вид:

$$\Phi = \boldsymbol{\xi}\mathbf{W}_{\text{пд}}^{\text{пс}}\boldsymbol{\xi}^{\text{T}} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{W}_{\Delta f}^{\varphi}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{T}} + \left(\mathbf{q}_{\text{а}} - \mathbf{q}_{t_n}\right)^{\text{T}} \mathbf{W}_{\text{а}} \left(\mathbf{q}_{\text{а}} - \mathbf{q}_{t_n}\right). \tag{62}$$

4.2. Оценка фазового вектора

Уравнения (3), (5), (9) описывают динамическую систему, в которой шум влияет на поведение этой системы. Алгоритм оценки фазового вектора для динамических систем такого типа рассмотрен в [12].

Минимум квадратичной формы (62) ищется методом последовательных приближений. На шаге s итерационного процесса ищется минимум квадратичной формы следующего вида:

$$\begin{aligned}\Phi^{(s)} = &\left(\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{(s-1)}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^{(s)}\right) \mathbf{W}_{\text{пд}}^{\text{пс}} \left(\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{(s-1)}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^{(s)}\right)^{\text{T}} + \\ &+ \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}\mathbf{W}_{\Delta f}^{\varphi}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}\right)^{\text{T}} + \left(\mathbf{q}_{\text{а}} - \mathbf{q}_{t_n}^{(s-1)}\right)^{\text{T}} \mathbf{W}_{\text{а}} \left(\mathbf{q}_{\text{а}} - \mathbf{q}_{t_n}^{(s-1)}\right)\end{aligned}, \tag{63}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}$ – матрица оценок параметров авторегрессий поведения служебных параметров на шаге s, $\mathbf{q}_{t_n}^{(s-1)}$ – оценка фазового вектора на шаге s. Поправка $\Delta \mathbf{q}^{(s)}$ к фазовому вектору $\mathbf{q}_{t_n}^{(s-1)}$ динамической системы вычисляется с использованием метода фильтра Калмана.

Для $i=1,\ldots,n$ последовательно переносится ковариационная матрица с момента t_{i-1} на t_i

$$\mathbf{K}_i^{\text{пс}} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{q}_{i-1}} \mathbf{K}_{i-1} \left(\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{q}_{i-1}} \right)^{\text{T}}, \ \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{q}_{i-1}} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{q}_{t_n}^{(s)}} \left(\frac{\partial \mathbf{q}_{i-1}}{\partial \mathbf{q}_{t_n}^{(s)}} \right)^{-1}, \tag{64}$$

где $\dfrac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{q}_{t_n}^{(s)}}$ − матрица частных производных текущего фазового вектора по фазовому вектору на момент t_n последнего измерения на шаге итераций s:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{q}_{t_n}^{(s)}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_{t_n}^{(s)}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_i - t_n & 1 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

$\mathbf{K}_i^{\text{пс}}$ формируется переносом ковариационной матрицы с момента t_{i-1} на момент t_i. $\mathbf{K}_i^{\text{пд}}$ − это усечение $\mathbf{K}_i^{\text{пс}}$ за счет измерения псевдоскорости на момент времени t_i.

Матрица частных производных $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_{t_n}}$ находится интегрированием уравнений в вариациях (11) с начальными условиями на момент t_n.

Поправка к фазовому вектору на момент t_i вычисляется по формуле.

$$\Delta \mathbf{q}_i = \Delta \mathbf{q}_{i-1} + \Delta \mathbf{q}_i^{\text{пс}} + \Delta \mathbf{q}_i^{\text{пд}}. \tag{66}$$

Пусть

$$\mathbf{h}_i^{\text{пс}} = \frac{\partial \xi_i^{\text{пс}(s)}}{\partial \mathbf{q}}, \ \chi_{\text{пс}} = \left(\mathbf{h}_i^{\text{пс}} \right)^{\text{T}} \cdot \mathbf{K}_i^{\text{пс}} \cdot \mathbf{h}_i^{\text{пс}} + \sigma_{\text{пс}}^2, \tag{67}$$

тогда

$$\Delta \mathbf{q}_i^{\text{пс}} = \frac{1}{\chi_{\text{пс}}} \left(\xi_i^{\text{пс}(s)} - \left(\mathbf{h}_i^{\text{пс}} \cdot \Delta \mathbf{q}_{i-1} \right) \right) \cdot \mathbf{K}_i^{\text{пс}} \cdot \mathbf{h}_i^{\text{пс}}. \tag{68}$$

Рассчитывается или *усекается* новая ковариационная матрица $\mathbf{K}_i^{\text{пд}}$ для обработки измерения псевдодальности

$$\mathbf{K}_i^{\text{пд}} = \mathbf{K}_i^{\text{пс}} - \frac{1}{\chi_{\text{пс}}} \left(\mathbf{h}_i^{\text{пс}} \cdot \mathbf{K}_i^{\text{пс}} \right) \cdot \left(\mathbf{h}_i^{\text{пс}} \cdot \mathbf{K}_i^{\text{пс}} \right)^{\text{T}}. \tag{69}$$

Аналогично рассчитывается поправка в (66) с использованием измерения псевдодальности:

$$\mathbf{h}_i^{\text{пд}} = \frac{\partial \xi_i^{\text{пд}(s)}}{\partial \mathbf{q}}, \ \chi_{\text{пд}} = \left(\mathbf{h}_i^{\text{пд}} \right)^{\text{T}} \cdot \mathbf{K}_i^{\text{пд}} \cdot \mathbf{h}_i^{\text{пд}} + \sigma_{\text{пд}}^2. \tag{70}$$

Наконец,

$$\Delta\mathbf{q}_i^{\text{пд}} = \frac{1}{\chi_{\text{пд}}}\left(\xi_i^{\text{пд}(s)} - \left(\mathbf{h}_i^{\text{пд}}\cdot\left(\Delta\mathbf{q}_{i-1} + \Delta\mathbf{q}_i^{\text{пс}}\right)\right)\right)\cdot\mathbf{K}_i^{\text{пд}}\cdot\mathbf{h}_i^{\text{пд}}, \tag{71}$$

и усекается ковариационная матрица для обработки следующей пары измерений:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i^{\text{пд}} - \frac{1}{\chi_{\text{пд}}}\left(\mathbf{h}_i^{\text{пд}}\cdot\mathbf{K}_i^{\text{пд}}\right)\cdot\left(\mathbf{h}_i^{\text{пд}}\cdot\mathbf{K}_i^{\text{пд}}\right)^{\text{T}}. \tag{72}$$

Поправка к фазовому вектору $\Delta\mathbf{q}^{(s)}$ на шаге s при минимизации квадратичной формы (62) полагается $\Delta\mathbf{q}^{(s)} = \Delta\mathbf{q}_n$.

В АНС для минимизации функционала (62) используются пять фиксированных итераций. При этом контролируются значения компонент поправки $\Delta\mathbf{q}^{(s)}$ на последней итерации.

Реализация алгоритма определения орбиты по короткой мерной дуге включает в себя проведение локальной обработки измерений в процессе их накопления и определения временного интервала обработки. На этапе накопления n измерений на момент t_n происходит определение интервала измерений $t_{инт}$ по среднему количеству измерений $\bar{n} = \dfrac{n}{t_n - t_1}$ в секунду с использованием таблицы 4. Максимальная величина интервала обработки зависит от поведения ухода частоты ОГ Δf относительно его эталонного значения (3), (5).

Таблица 4 − Интервал накопления измерений

$\bar{n}$	**Интервал $t_{инт}$, с**
0 − 2	1800
3	420
4	120
5 и более	60

Если $(t_n - t_1) \geq t_{инт}$, то начинается обработка по алгоритму п. 4.2.

На этапе накопления измерений и определения интервала времени обработки происходит инициализация локальной обработки измерений.

4.3. Локальная обработка измерений

При определении орбит КА существенную роль играет этап *локальной обработки измерений* [16], [17]. Локальная обработка псевдодальности и псевдоскорости на короткой мерной дуге состоит в выявлении и отбраковке аномальных измерений. Локальная обработка требует наличия начального приближения орбиты, которое позволяет анализировать не сами измерения $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{\text{пд}}$ и $\tilde{\mathbf{\Psi}}_{\text{пс}}$, а их рассогласования $\boldsymbol{\xi}^{\text{пд}}$ и $\boldsymbol{\xi}^{\text{пс}}$ (56) с расчётными аналогами, математическое ожидание которых свободно от значительных нелинейностей.

На первом этапе локальной обработки отбраковываются аномальные измерения, связанные со сбоями в аппаратуре. Простым способом проверки является отбраковка по значению невязки с проверкой условий:

– модуль значения псевдоскорости $\left|\Psi_t^{\text{пс}}\right|$ должен быть меньше $\Psi_{\max}^{\text{пс}} = 20\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$:

$$\left|\Psi_t^{\text{пс}}\right| < \Psi_{\max}^{\text{пс}}; \tag{73}$$

– рассогласование приращения псевдодальности от одного НКА на секундном интервале $\Delta t = 1\,\text{с}$ с псевдоскоростью должно быть меньше порогового значения:

$$\left|\left(\Psi_t^{\text{пд}} - \Psi_{t-\Delta t}^{\text{пд}}\right) - \Psi_t^{\text{пс}}\right| < 3\sigma_{\text{пд}}, \tag{74}$$

где $\sigma_{\text{пд}}$ – априорная точность измерения псевдодальности (58);

– модуль приращения псевдоскорости на секундном интервале должен быть меньше априорного радиального ускорения $a_{\max} = 15\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$:

$$\left|\Psi_t^{\text{пс}} - \Psi_{t-\Delta t}^{\text{пс}}\right| < a_{\max}. \tag{75}$$

На втором этапе локальной обработки обеспечивается автоматическая идентификация аномальных измерений, при которой определяются коэффициенты линейной функции от времени для аппроксимации невязок между измеренными и расчётными значениями. Анализируется СКО построенной аппроксимации. Если СКО построенной аппроксимации больше предельного значения, то измерение исключается из дальнейшей обработки.

Для каждой группы измерений псевдодальности и псевдоскорости строится линейная регрессия невязок измерений (56) $\xi_i = b + at_i + \varepsilon_i$ по множеству пар $\left(\xi_i, t_i\right)$, где $t_i = T_i - T_m$, $i = 1,\ldots,n$, n – количество измерений в сеансе, T_i – момент измерения, T_m – момент середины интервала. Значения a и b определяются по следующим формулам.

Пусть

$$\Sigma_t = \sum_{i=1}^{n} t_i,\ \Sigma_{t^2} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2,\ \Sigma_\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ \Sigma_{\xi^2} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \Sigma_{t\xi} = \sum_{i=1}^{n} t_i \xi_i. \tag{76}$$

Тогда

$$a = \frac{n\Sigma_{t\xi} - \Sigma_t \Sigma_\xi}{n\Sigma_{t^2} - \Sigma_t^2},\ b = \frac{\Sigma_{t^2}\Sigma_\xi - \Sigma_t \Sigma_{t\xi}}{n\Sigma_{t^2} - \Sigma_t^2}, \tag{77}$$

а среднеквадратичное значение σ^2 величин ε_i, $i = 1,\ldots,n$ вычисляется по формуле

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma_{\xi^2} + a^2\Sigma_{t^2} + nb^2 + 2\left(ab\Sigma_t - a\Sigma_{t\xi} - b\Sigma_\xi\right)}{n-2}. \tag{78}$$

На втором этапе локальной обработки из n измерений исключаются k измерений, для которых выполняется условие:

Если после отбраковки по гистограмме функционал больше 1-го порога, то он сравнивается с порогом 2 и принимается (79) решение о корректности НУ.

.

В случае большого количества отбракованных измерений $\frac{k}{n} \geq 0.1$ Весь интервал отбраковывается и производится накопление следующей группы измерений. При повторении такой ситуации сбрасывается признак наличия НУ и обработка начинается с первоначального определения.

Результатом определения орбиты КА по короткой дуге является восьмимерный фазовый вектор $\mathbf{q} = \left(\mathbf{r}_{\text{ка}}, \mathbf{v}_{\text{ка}}, \Delta f, \varphi\right)^{\text{T}}$ (55). Значения ухода частоты ОГ Δf и рассинхронизации шкал времени φ используются при формировании сигнала точного времени в АНС на интервале накопления следующего интервала измерений.

После проверки порядков величин кинематические векторы положения $\mathbf{r}_{\text{ка}}$ и скорости КА $\mathbf{v}_{\text{ка}}$ проверяются на «орбитальность». Вычисляются оскулирующие элементы орбиты с проверкой эксцентриситета, высоты апоцентра и перицентра. В случае достоверности вектор положения сохраняется как нормальное место $\mathbf{r}^{\text{н}} = \mathbf{r}_{\text{ка}}$ с $\sigma^{\text{н}} = \sigma_{\xi^{\text{пд}}}$ − СКО остаточной невязки псевдодальности на последней итерации определения орбиты на короткой дуге. В нормальное место сохраняется и количество парных измерений псевдодальности и псевдоскорости, по которым произошло определение орбиты на короткой дуге. Осуществляется переход на третий этап определения орбиты в АНС.

5. Обработка нормальных мест

Нормальное место представляет собой трёхмерный вектор положения $\mathbf{r}^{\text{н}}$ в гринвичской вращающейся СК, привязанный к моменту времени и имеющий вес каждой компоненты $\omega = 1/\sigma_{\text{н}}$, где $\sigma^{\text{н}}$ − СКО, определяемое в задаче обработки измерений на короткой дуге. Нормальные места рассматриваются как трёхмерные измерения, результатом обработки которых является вектор НУ на момент последнего измерения. Схема алгоритма определения орбиты по нормальным местам представлена на рис. 2.

Алгоритм обработки, как и алгоритм определения по короткой дуге, начинается с локальной обработки (п. 4.3).

Алгоритм обработки нормальных мест учитывает численную ошибку формирования матрицы нормальных уравнений (МНУ) (43). Вследствие ошибки может возникнуть ситуация, при которой ковариационная матрица $\mathbf{K}_{\Phi}$ (45) имеет отрицательные диагональные элементы после обращения МНУ. В [37] приведён метод Левенберга-Маркардта, являющийся альтернативой градиентного метода Гаусса-Ньютона, суть которого заключается многократном увеличении диагональных элементов матрицы $\mathbf{A}$ (43) с определением поправок к НУ. Т.е. на каждом шаге метода Левенберга-Маркардта вместо нормального уравнения МНК (43) решается

$$\left(\mathbf{A}+(k-1)\mathbf{A}_{\text{диаг}}\right)\cdot\Delta\mathbf{q}^{(s)}=-\mathbf{b}, \tag{80}$$

где $\mathbf{A}_{\text{диаг}}$ − диагональная матрица из диагональных элементов $\mathbf{A}$, а k − коэффициент. В АНС процесс метода Левенберга-Маркардта состоит из четырёх шагов s с коэффициентами $k_s=10^{4-s}$, $s=1,2,3,4$.

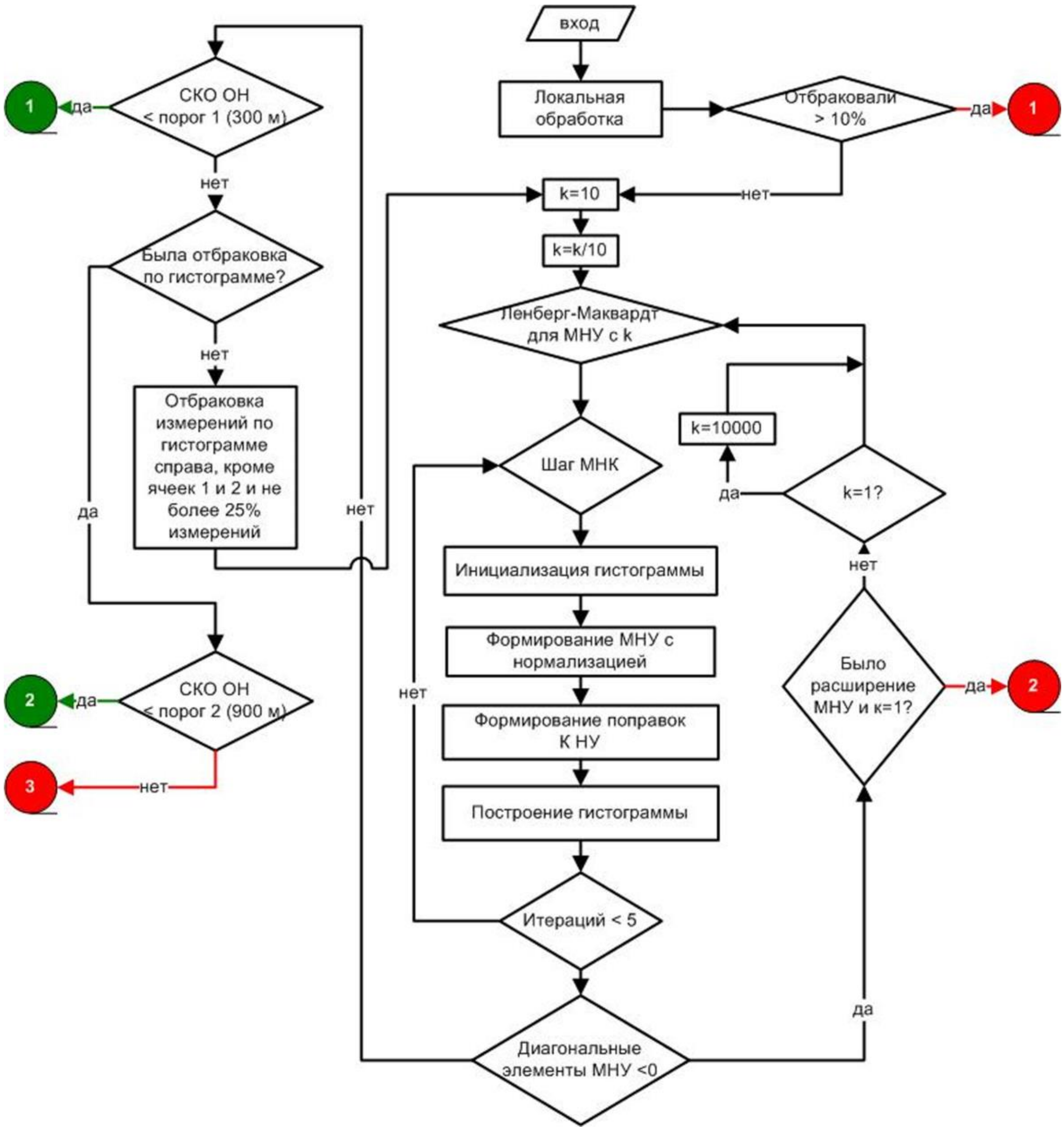

Рисунок 2 − Схема алгоритма определения орбиты по нормальным местам

Также в АНС для минимизации численных ошибок при формировании МНУ $\mathbf{A}$ (43) из матрицы 3×6 $\dfrac{\partial \xi}{\partial \mathbf{q}}$ частных производных (44) i-го трёхмерного измерения, имеющей размерность, выполняется операция нормализации. Элементы первых трёх столбцов $\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{q}}$ умножаются на $\omega_i k_{\text{норм}}$, а элементы следующих трёх столбцов − на $\omega_i k^2_{\text{норм}}$. Невязка измерения умножается $\omega_i k_{\text{норм}}$.

На каждой итерации МНК строится гистограмма n остаточных невязок (ОН) ξ_i нормальных мест и их расчётных значений в логарифмической шкале по следующему алгоритму.

Строятся величины

$$\eta_i = \log_2\left(\xi_i \cdot \omega_i\right), \tag{81}$$

где ω_i − вес нормального места. Пусть $\eta_{\text{макс}} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \eta_i$, тогда для элемента гистограммы $\boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n_{\text{гст}}}\right)^{\text{T}}$ из $n_{\text{гст}}$ карманов выполняется

$$\begin{gathered}\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} \left(n_i : \frac{j-1}{n_{гст}} \eta_{\text{макс}} <= \eta_i < \frac{j}{n_{гст}} \eta_{\text{макс}}, \quad 0 : \text{иначе} \right), \ j = 1, \ldots, \left(n_{\text{гст}} - 1\right), \\ \gamma_{n_{\text{гст}}} = \sum n_i - \sum_{j=1}^{n_{\text{гст}}-1} \gamma_j ,\end{gathered} \tag{82}$$

где n_i − количество измерений парных измерений псевдодальности и псевдоскорости, обработанных по короткой дуге. В АНС реализована гистограмма с $n_{\text{гст}} = 10$ ячейками.

Полученный после МНК (в АНС фиксированное число итераций 5) функционал сравнивается с пороговым значением (порог 1) (рис. 2), при превышении которого требуется отбраковка аномальных измерений с построением гистограммы. Проводится анализ НУ, по результатам которого производится решение о принятии результата определения орбиты. С использованием гистограммы $\boldsymbol{\gamma}$ последовательно отбраковываются измерения, попавшие в карманы, начиная с последнего, но при этом нельзя исключать более 25% измерений.

Таблица 5 − Параметры алгоритма обработки нормальных мест

Параметр	Описание	Значение
порог 1	пороговое значение оценки остаточной невязки	300 м
порог 2	пороговое значение оценки остаточной невязки для инициализации отбраковки по гистограмме	300 − 900 м
итерации	количество итераций МНК	5
$k_{\text{норм}}$	коэффициент нормализации	0.001
k_4	начальный коэффициент метода Левенберга-Маркардта	1000
$n_{\text{гст}}$	количество ячеек при построении гистограммы	10
порог 3	пороговое значение для отбраковки НУ методом сравнения	3 км

На рис. 2 красным цветом обозначены аварийные выходы алгоритма обработки нормальных мест в АНС, а зелёным − штатное завершение программы. Диспетчер АНС, анализирующий работу алгоритма, выставляет счётчики возникновения аварийных ситуаций 1, 2, 3 и счётчик штатного завершения с плохой точностью 2. При превышении значения счётчиков диспетчер принимает решение о сбросе измерений или начальной инициализации работы программ АНС.

При штатном завершении алгоритма обработки нормальных мест (на рис. 2 − коды 1 и 2) производится анализ полученных НУ КА методом сравнения с НУ, полученными на предыдущем шаге. Для этого предыдущие НУ прогнозируются на момент текущих НУ и производится сравнение кинематического вектора положения с пороговым значением.

В таблице 5 приведены параметры работы алгоритма бортовой АНС при обработке нормальных мест.

В случае решения навигационной задачи в АНС ежесекундно рассчитывается вектор положения и скорости КА с ковариационной матрицей, соответствующие времени выдаваемой секундной метки.

6. Численное моделирование

Приведём результаты экспериментальной отработки алгоритмов и программ на макете АНС [8] с использованием британского имитатора сигналов ГНСС Spirent GSS7700/STR4780. Имитатор позволяет моделировать радионавигационные сигналы ГЛОНАСС и GPS для объекта, движение которого задаётся таблицей положения, скорости и ускорения. Для проведения вычислительного эксперимента смоделирована орбита КА на ВЭО с оскулирующими параметрами, приведёнными в таблице 6.

Таблица 6 − Элементы орбиты

параметр	значение
период	11:57:33
полуось	26550 км
эксцентриситет	0.69663
долгота восходящего узла	−70º42'
наклонение	63º42'
высота апоцентра	38668 км
высота перицентра	1676 км

Макет АНС был запущен в режиме первоначального определения орбиты без возможности определения по короткой дуге и нормальным местам. На рис. 3 и рис. 4 изображены точности начального определения положения и скорости соответственно. Испытания проводились на интервале около четырёх часов. По оси абсцисс графиков показано время в формате «ч:мм».

Большие ошибки определения на больших высотах полёта КА обусловлены геометрией расположения спутников ГНСС, от которой напрямую зависит первоначальное определение в перицентре ВЭО (п. 3). Плохие точности применения геометрического метода решения навигационной задачи в очередной [3] раз показывают, что эти кинематические векторы нельзя использовать как НУ. Конечное определение по нормальным местам (п. 5) после обработки измерений по короткой дуге (п. 4) происходит с метровой точностью по положению и сантиметровой ошибкой по скорости уже после получаса обработки информации.

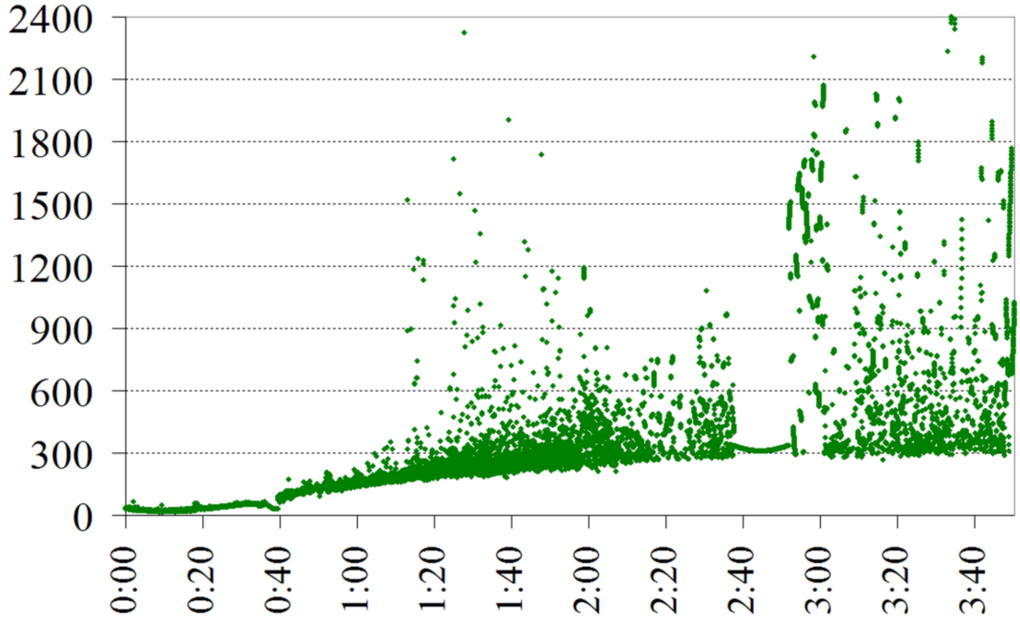

Рисунок 3 − Ошибка первичного определения положения, м

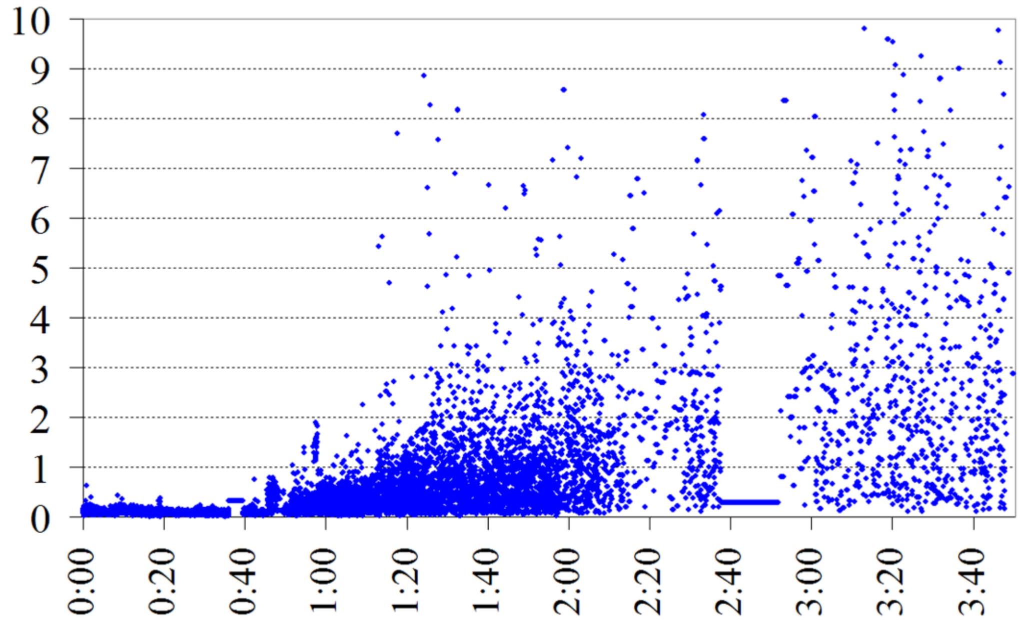

Рисунок 4 − Ошибка первичного определения скорости, мм/с

На рис. 5 и рис. 6 изображены графики ошибок положения и скорости на интервале двух суток (4 витков) соответственно. По оси абсцисс показано время в формате «сут чч:мм».Красным цветом изображена ошибка по радиусу орбиты, зелёным − ошибка вдоль направления движения, перпендикулярно радиусу (трансверсаль), синим − ошибка в направлении, ортогональном плоскости орбиты (бинормаль).

Вертикальные пунктирные линии обозначают время прохождения апоцентра орбиты.

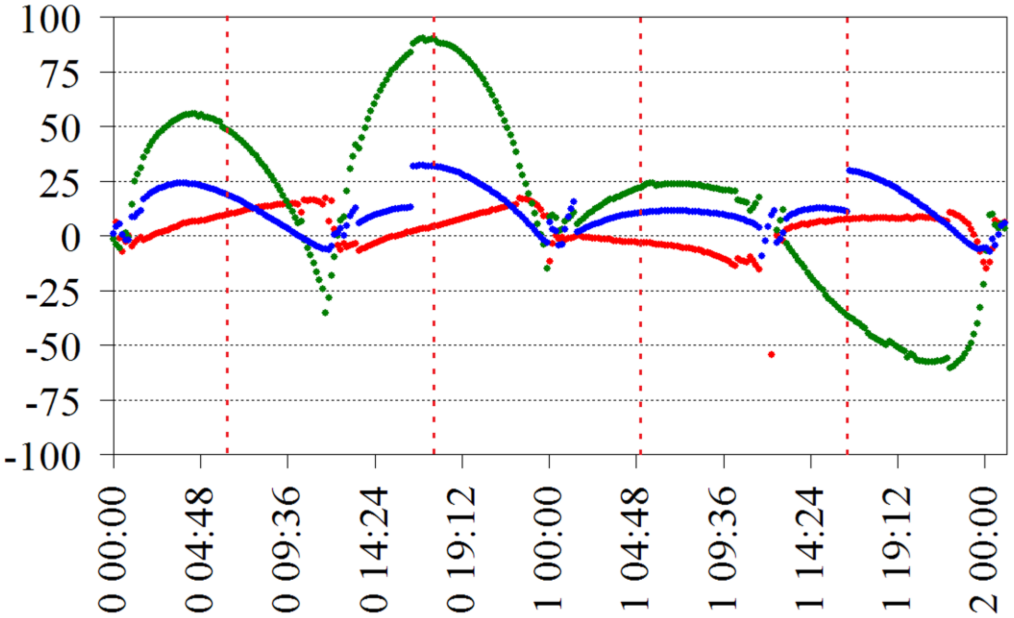

Рисунок 5 − Ошибка определения компонент вектора положения, м

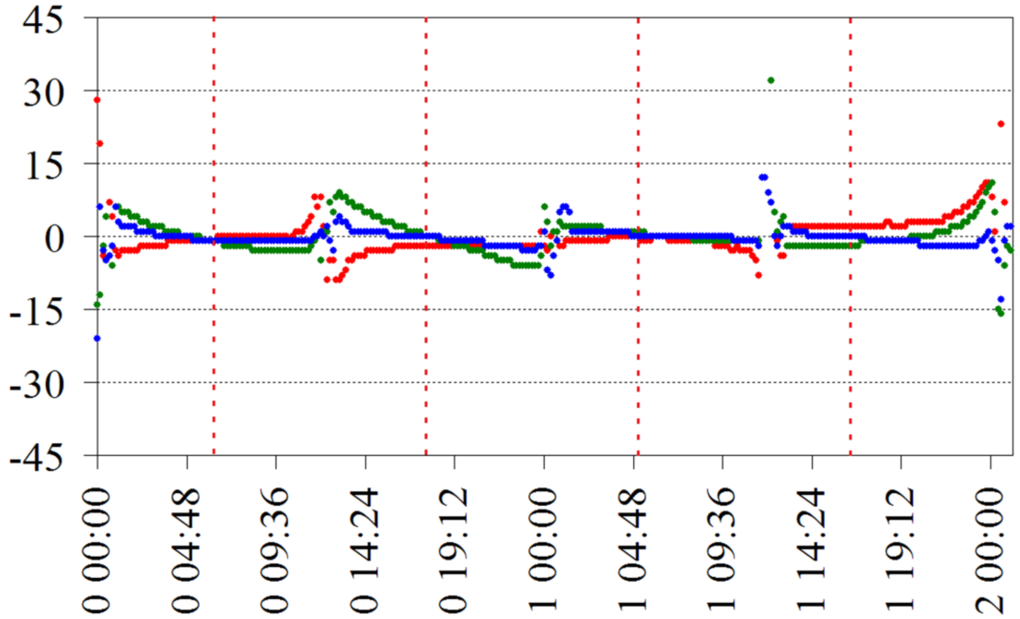

Рисунок 6 − Ошибка определения компонент вектора скорости, мм/с

На интервале 2 суток на орбите ВЭО точность (СКО) определения положения составила 24 м, а точность определения скорости − 3 мм/с, что на порядок превосходит точности системы автономной навигации (САН) КА «Электро-Л» № 2 на ГСО [7].

Заключение

Представлены методы и алгоритмы высокоточного определения орбиты в бортовой навигационной системе по первичным измерениям спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS с использованием законов динамики движения КА.

Надёжность построения АНС основана на независимости получения измерений навигационных спутников от их обработки. Обработка измерений проходит на специализированном процессоре по трёхэтапному алгоритму, включающему первоначальное определение орбиты, определение орбиты по короткой дуге с определением параметра бортового времени и окончательное определение параметров движения на интервале времени более периода.

Разработанные методы и алгоритмы апробированы на модельных измерениях с использованием имитатора спутниковых систем. Точности в определении орбиты КА позволяют создать бортовую автономную навигационную систему определения орбиты КА, превосходящую по оперативности и точности наземный измерительный комплекс.

Разработанные методы и алгоритмы макета АНС позволяют определять орбиту КА на ВЭО с апоцентром около 39 тыс. км в каждой её точке с точностью 24 м по положению и 3 мм/с по скорости.

Библиографический список

1. *Аким Э.Л., Астахов А.П., Бакитько Р.В, ... Тучин Д.А. и др.* Автономная навигационная система околоземного космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 2, С. 139−158.
2. Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса. Монография // Под ред. Молотова Е.П., Тучина А.Г. − М.: Радиотехника, 2016. − 232 с., ил.
3. *Гордиенко Е.С., Ильин И.С., Мжельский П.В., ...Тучин Д.А. и др.* Баллистико-навигационное обеспечение полёта малых космических аппаратов «Зонд-ПП» и «Рэлек» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2016. № 2. С.31-43. URL: http://vestnik.laspace.ru/archives/02-2016/
4. *Заславский Г.С., Захваткин М.В., Ильин И.С., ...Тучин Д.А. и др.* Баллистико-навигационное обеспечение полёта космического аппарата «Спектр-Р» // Космонавтика и ракетостроение, 2014, № 1 (74), С. 15-29.
5. *Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П., Степаньянц В.А., Тучин А.Г.* Небесно-механическая интерпретация и первичная обработка измерений КА Гранат и Интербол // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1997. № 114. 21 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1997-114
6. *Аким Э.Л., Тучин Д.А.* Ионосферная составляющая измерений псевдодальности околоземных космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 4. 18 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-4
7. *Паненко В.С., Усиков С.Б.* Оценка точности определения и прогнозирования параметров орбиты космического аппарата типа «Электро−Л» по измерительной информации, предоставляемой различными источниками // Космонавтика и ракетостроение. 2017. № 2(95). С. 126-134.

8. *Тучин Д.А.* Алгоритмы приёма сигналов навигационных спутников на борту космического аппарата с использованием коррелятора // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 4. 32 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2018/prep2018_4.pdf
9. *Тучин Д.А.* Кодовые измерения псевдодальности системы GPS. Модель ошибок и априорная оценка точности определения вектора положения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2002. № 30. 17 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-30
10. Многофункциональная космическая платформа «Навигатор» / Автор-составитель Ефанов В.В.; под ред. Лемешевского С.А. − Химки. Издатель ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина», 2017. − 360 с., ил.
11. *Аким Э.Л., Капралов М.А., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А.* Определение параметров движения космического аппарата бортовой навигационной системой по измерениям псевдоскорости и псевдодальности спутниковых навигационных систем// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 20. 25 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-20
12. *Тучин А.Г.* Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии шума в динамической системе // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2004. № 2. 32 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-2
13. *Аким Э.Л., Энеев Т.М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. т. 1, вып. 1., 1963, С.5-50. URL: ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/lib/article/akim/1963_akimenee.pdf
14. *Платонов А.К., Казакова Р.К.* Создание проектного и оперативного баллистического обеспечения полётов космических аппаратов. Проектные работы на первых ЭВМ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 37. 35 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-37
15. *Платонов А.К., Казакова Р.К.* Создание проектного и оперативного баллистического обеспечения полётов космических аппаратов. Оперативные работы на первых ЭВМ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 38. 28 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-38
16. *Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П., Степаньянц В.А., Тучин А.Г.* Локальная обработка измерений радиосистемы межпланетных космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2002. № 11. 20 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-11
17. *Тучин А.Г., Горохова А.А.* Локальная обработка измерений дальности для околоземных орбит космических аппаратов скорости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1990. № 99. 18 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1990-99

18. *Комовкин С.В., Лавренов С.М., Тучин А.Г., Тучин Д.А. и др.* Небесно-механическая интерпретация запросных радиотехнических измерений радиальной скорости космических аппаратов научного назначения // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015. № 4. С.77-80. URL: https://vestnik.laspace.ru/archives/04-2015/
19. *Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П. и др.* Небесно-механическая интерпретация измерений радиосистемы межпланетных космических аппаратов «Квант-Д» // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2002. № 2, 20 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-2
20. Global Position System Wing (GPSW) Systems Engineering & Integration. Interface Specification IS-GPS-200. Revision E. Navstar GPS Space Segment / Navigation User Interfaces, 2010. URL: ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/lib/icd/icd200e.pdf
21. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ, редакция 5.1. М., 2002. URL: ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/lib/icd/ikd51ru.pdf
22. URL: http://www.morion.com.ru/rus/
23. Параметры Земли 1990 года (ПЗ–90.02). Параметры общеземного эллипсоида и гравитационного поля Земли. − М. 2006 URL: ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/lib/PZ90_02_2.rtf
24. *Картан Э.* Интегральные инварианты 1940. Перевод с французского Бермана Г.Н. под редакцией проф. Степанова В.В. − Москва − Ленинград: Изд. технико-теоретической литературы, 1940. − 216 с.
25. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. − М.: Машиностроение, 1966. − 448 с.
26. *Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H.* The Planetary and Lunar Ephemeris DE421 / The Interplanetary Network Progress Report, vol. 42-178, JPL, Pasadena, California, pp. 1–34, August 15, 2009.
27. *Монтенбрук О., Пфлегер Т.* Астрономия на персональном компьютере. − Спб.: Питер, 2002. − 320 с., ил.
28. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. − М.: Наука, 1983. − 284 с.
29. Машиностроение. Энциклопедия. Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. − М.: Машиностроение. Ракетно-космическая техника. Т.IV-22 // Аджян А.П., Аким Э.Л., Алифанов О.М. и др.; под ред. Легостаева В.П. В 2 кн. Кн.1. 2012. − 925 с.
30. *Аким Э.Л., Бажинов И.К., Павлов В.П., Почукаев В.Н.* Поле тяготения Луны и движение ее искусственных спутников − М.: Машиностроение, 1984. − 288 с., ил.
31. URL: http://www.kiam1.rssi.ru/~den/solar.html
32. *Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., ... Тучин Д.А. и др.* Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических

космических аппаратов к телам Солнечной системы / Под ред. д.ф.-м.н. Тучина А.Г. Химки: Издатель АО «НПО Лавочкина», 2018. − 232 с., ил.
33. Proceedings of the IERS Workshop on the Implementation of the New IAU Resolutions / IERS Technical Note № 29 / Observatoire de Paris, Paris, France, 18 – 19 April 2002.
34. WGS-84. Department of defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. 3 January 2000 URL: http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf
35. *Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др.* Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» − «Союз» − «Прогресс». − М.: Наука, 1985. − 376 с.
36. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. − М.: Наука, 1966. − 664 с.
37. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация: пер. с англ. − М.: Мир, 1985. − 509 с., ил.

Сокращения

АНС	−	автономная навигационная система
АСН	−	аппаратура спутниковой навигации
ВЭО	−	орбита с большим эксцентриситетом
ГЛОНАСС	−	глобальная навигационная спутниковая система
ГНСС	−	глобальная навигационная спутниковая система
ГСО	−	геостационарная орбита
ДУ	−	двигательная установка
ЖРД	−	жидкостной ракетный двигатель
ИСК	−	инерциальная система координат
КА	−	космический аппарат
МНК	−	метод наименьших квадратов
МНУ	−	матрица нормальных уравнений
НКА	−	навигационный космический аппарат
НОКО	−	низкоорбитальный космический объект
НУ	−	начальные условия
ОГ	−	опорный генератор
ОН	−	остаточная невязка
ОСК	−	орбитальная система координат
ПСП	−	псевдошумовая последовательность
САН	−	система автономной навигации
СК	−	система координат
СКО	−	среднеквадратичная ошибка
ССК	−	связанная система координат
ЭРДУ	−	электроракетная двигательная установка
GPS	−	Global Positioning System
SBAS	−	Space Based Augmentation System
UTC	−	Coordinated Universal Time