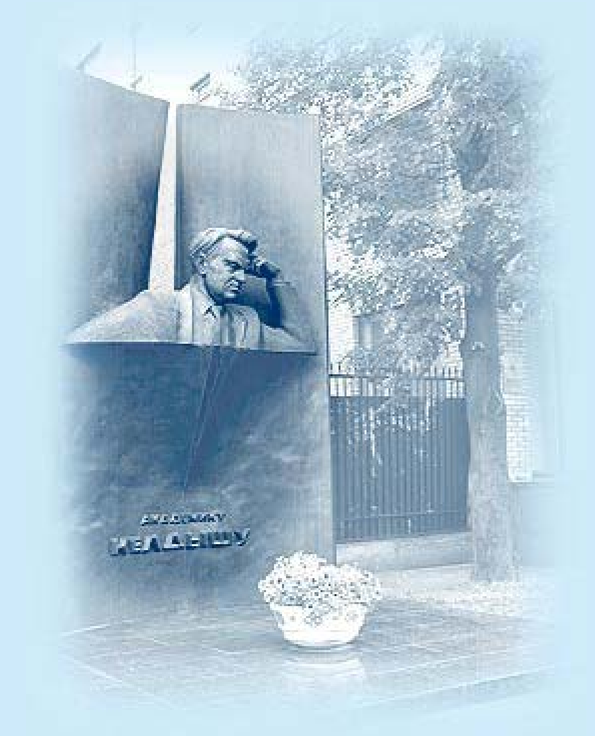
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Засько Г.В., Глазунов А.В.,
Мортиков Е.В., Нечепуренко Ю.М.**

Крупномасштабные структуры в стратифицированном турбулентном течении Куэтта и оптимальные возмущения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Крупномасштабные структуры в стратифицированном турбулентном течении Куэтта и оптимальные возмущения / Г.В.Засько [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 63. 31 с. doi:**10.20948/prepr-2019-63**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-63**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

Г. В. Засько, А. В. Глазунов,
Е. В. Мортиков, Ю. М. Нечепуренко

Крупномасштабные структуры в стратифицированном турбулентном течении Куэтта и оптимальные возмущения

МОСКВА, 2019 г.

Г. В. Засько, А. В. Глазунов, Е. В. Мортиков, Ю. М. Нечепуренко

Крупномасштабные структуры в стратифицированном турбулентном течении Куэтта и оптимальные возмущения

Аннотация. В данных прямого численного моделирования стратифицированного турбулентного течения Куэтта выделено два типа организованных структур — валики, возникающие при нейтральной и близким к нейтральной стратификациях, и слоистые структуры, проявляющиеся при увеличении статической устойчивости. Показано, что оба типа структур имеют пространственные масштабы и конфигурации, совпадающие с масштабами и конфигурациями оптимальных возмущений упрощенной линейной модели данного течения при тех же числах Ричардсона.

Ключевые слова: стратифицированное турбулентное течение Куэтта, мелкомасштабная турбулентность, крупномасштабные структуры, прямое численное моделирование, оптимальные возмущения, максимальная амплификация

G. V. Zasko, A. V. Glazunov, E. V. Mortikov, Yu. M. Nechepurenko

Large-scale structures in stratified turbulent Couette flow and optimal disturbances

Abstract. Direct numerical simulation data of a stratified turbulent Couette flow contains two types of organized structures: the rolls that arise at neutral and close to neutral stratifications, and the layered structures, which manifest themselves as the static stability increases. It is shown that both types of structures have spatial scales and forms that coincide with the scales and forms of the optimal disturbances of the simplified linear model of the Couette flow with the same Richardson numbers.

Key words: stratified turbulent Couette flow, small-scale turbulence, large-scale structures, direct numerical simulation, optimal disturbances, energy amplification

Разработка и реализация используемых алгоритмов выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N 17-71-20149), прямое численное моделирование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-17-01210) на оборудовании Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

1. Введение

Крупномасштабные структуры на фоне мелкомасштабной турбулентности наблюдаются в атмосферных пограничных слоях (АПС) и вносят существенный вклад в обмен импульсом, теплом и влагой между свободной атмосферой и подстилающей поверхностью (см, например, [1]). В шестидесятые и семидесятые годы прошлого века предпринимались многочисленные попытки объяснить пространственные конфигурации, физические механизмы и условия формирования этих структур на основе анализа гидродинамической устойчивости системы, линеаризованной относительно среднего состояния и учитывающей турбулентность при помощи коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности. Такой анализ проводился, в частности, для исследования организованных крупных вихрей в АПС, имеющих вид валиков, ориентированных под небольшим углом к приземному ветру. В работах [2, 3] образование этих валиков объяснялось неустойчивостью, связанной с наличием точки перегиба в профиле скорости среднего течения.

Анализ собственных мод линеаризованной системы не всегда дает результаты, совпадающие с наблюдениями в АПС и прямым численным моделированием (DNS) турбулентности при больших числах Рейнольдса. Отчасти, это связано с тем, что в теоретических исследованиях часто использовались приближения, не согласующиеся с теорией подобия Монина-Обухова [4] и дающие средние профили скорости и плавучести, принципиально отличающиеся от наблюдаемых. Например, в упомянутых работах [2, 3] валики рассматривались на фоне ламинарной спирали Экмана (коэффициент турбулентной вязкости не зависел от высоты). При этом средний профиль скорости, относительно которого выполнялась линеаризация, не совпадал с осредненным профилем скорости турбулентного течения (см., результаты DNS в работе [5]). Подобные различия между реальными турбулентными течениями и течениями, исследуемыми теоретически, отмечались уже в ранних работах, посвященных данной теме (см. обсуждение в работе [2]). Однако до появления DNS- и LES-моделей с высоким пространственным разрешением и большими горизонтальными размерами расчетных областей (например, [6, 7, 8, 9]) не имелось возможности точно определить все параметры АПС, влияющие на возникновение тех или иных крупномасштабных структур. Например, наблюдаемые в природе вытянутые вдоль направления ветра вихри и связанные с ними «облачные улицы», интерпретирующиеся в теории как валики, связанные с неустойчивостью точки перегиба, как показывают расчеты аналогичных течений, могут являться трансформацией конвективных ячеек при достаточно сильном ветре и слабо-неустойчивой стратификации. Соответствующие условия не могут надежно детектироваться при натурных измерениях, проводящихся локально вблизи земли.

Еще одной возможной причиной несоответствия структур, наблюдаемых в турбулентных течениях, и структур, получаемых как неустойчивые моды линеаризованного оператора, является относительно медленное нарастание энергии этих мод. Нелинейные взаимодействия между турбулентностью и неустойчивыми модами могут приводить к разрушению последних раньше, чем их амплитуда и энергия достигнут заметных значений. В работах [14], [10] для анализа крупных структур в АПС были использованы оптимальные возмущения. Такие возмущения являются суперпозицией большого числа собственных мод (в том числе устойчивых) и на конечных промежутках времени нарастают быстрее, чем неустойчивые моды. Помимо валиков этот метод выявил в течении Экмана так называемые «стрики» (вытянутые в продольном направлении крупномасштабные флуктуации с преобладанием продольной компоненты скорости), которые, в отличие от валиков, практически всегда регистрируются при расчетах пристеночной сдвиговой турбулентности. Отметим, что оптимальные возмущения широко используют в аэродинамике для объяснения докритического ламинарно-турбулентного перехода (см. [11] и ее библиографию). Их также использовали для объяснения возникновения крупномасштабных атмосферных явлений [12], [13] и для расширения ансамблей метеорологических прогнозов [15].

Анализ, представленный в работе [10], так же как и большинстве предшествующих работ по данной теме, был проведен в предположении постоянной турбулентной вязкости и только для возмущений бесконечно протяженных вдоль выбранного направления. Такой подход позволяет существенно упростить постановку задачи, сведя линеаризованную систему уравнений к двумерному виду. Трехмерные оптимальные возмущения для турбулентного течения в канале были впервые вычислены в работе [16], а затем для пристеночного течения с нулевым внешним градиентом давления в работе [17]. В этих работах использовался изотропный коэффициент вязкости, зависящий от расстояния до стенки и представляющий собой полу-эмпирическую аппроксимацию эффективного коэффициента турбулентной вязкости (вязкости, обеспечивающей наблюдаемый средний поток импульса по направлению нормали к поверхности). Среднее течение, на фоне которого рассматривались возмущения, также отражало турбулентный характер профиля скорости. Размеры оптимальных возмущений, полученные в этих работах, количественно согласуются с наблюдаемыми размерами крупномасштабных «стриков» в пристеночной турбулентности. Подтверждение применимости изотропной турбулентной вязкости в качестве оператора, аппроксимирующего существенную часть напряжений Рейнольдса, было позднее получено в работе [18] на примере DNS течения Пуазейля с большим числом Рейнольдса, где было показано, что для возмущений с малыми волновыми числами (крупномасштабных структур) использование этого оператора позволяет существенно улучшить линейную модель, получаемую с использованием динамико-стохастического подхода.

В данной работе мы также будем использовать этот простой метод, считая, что взаимодействия искомых крупномасштабных возмущений с турбулентностью в первом приближении можно аппроксимировать изотропной турбулентной вязкостью и турбулентной теплопроводностью с коэффициентами, постоянными по времени и зависящими исключительно от расстояния до стенки. При этом будем полагать, что сами крупномасштабные структуры в исследуемом течении не оказывают определяющего влияния на потоки импульса и тепла, что дает возможность определить величину соответствующих коэффициентов по средним значениям потоков и градиентов того же течения, в котором эти структуры наблюдаются.

В данной работе рассматривается явление, не получившее до настоящего времени объяснения и, по всей видимости, свойственное широкому классу пристеночных устойчиво-стратифицированных турбулентных течений со сдвигом скорости. Как показывают расчеты таких течений по гидродинамическим моделям, в турбулентном поле значений температуры наблюдаются крупномасштабные нерегулярные наклонные слои со слабой стратификацией, разделенные очень тонкими слоями с большими градиентами (см. следующие работы: [9] (устойчиво-стратифицированное течение Экмана, LES), [19] (течение Куэтта в широком диапазоне статической устойчивости, характеризуемой разными значениями числа Ричардсона, DNS и LES), [20] (течение в канале над поверхностью с плохообтекаемыми объектами, LES)). Такая слоистая структура косвенно подтверждается прямыми измерениями температуры в устойчивом АПС [9] [19] и проявляется на эхограммах содарного зондирования (см., Рис.9а из работы [21]). Как будет показано ниже, эти крупные структуры могут проявляться и в том случае, когда линейный анализ не выявляет неустойчивых мод. Таким образом, оптимальные возмущения могут оказаться наиболее вероятной причиной их возникновения.

В качестве модельной задачи в данной работе рассматривается турбулентное течение Куэтта — течение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести между двумя пластинами, движущимися в противоположных направлениях, при охлаждении нижней пластины и нагреве верхней. Мы ограничились этим каноническим течением, чтобы избежать влияния вторичных факторов, таких как статистическая нестационарность, поворот ветра в спирали Экмана и зависимость турбулентных потоков от высоты, и вместе с тем сохранить близкую аналогию с турбулентностью в АПС.

Все необходимые данные для расчета оптимальных возмущений, в частности осредненные профили скорости и температуры основного течения и коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности, были получены из результатов прямого численного моделирования. Оптимальные возмущения вычислялись на основе линейной модели с помощью технологии, разработанной и описанной в работах [22, 23], и сопоставлялись с крупномасштабными структурами, наблюдаемыми в рамках полной численной гидродинамической модели.

2. Результаты DNS моделирования

Рассмотрим в декартовых координатах x (продольная), y (вертикальная), z (поперечная) движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном трехмерном канале полувысоты h: $-h < y < h$ в поле силы тяжести. Верхняя стенка канала движется со скоростью $(U_0/2, 0, 0)$, нижняя — со скоростью $(-U_0/2, 0, 0)$, на стенках поддерживаются температуры $T_2 > T_1$ соответственно, а для скорости предполагается условие прилипания. Для скорости и температуры в направлениях x и z предполагаются периодические граничные условия.

В приближении Буссинеска в безразмерных переменных движение жидкости определяется системой уравнений Навье-Стокса, теплопроводности и неразрывности:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta U &= 0,\\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta V - \mathrm{Ri}T &= 0,\\
\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial UW}{\partial x} + \frac{\partial VW}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta W &= 0,\\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial UT}{\partial x} + \frac{\partial VT}{\partial y} + \frac{\partial WT}{\partial z} - \frac{1}{\mathrm{PrRe}}\Delta T &= 0,\\
\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа. Здесь x, y, z — обезразмеренные декартовы координаты; U, V, W, p и T — обезразмеренные компоненты вектора скорости (в направлениях x, y, z), удельное давление и температура соответственно; Re, Ri и Pr — числа Рейнольдса, Ричардсона и Прандтля, определяемые следующим образом:

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 h}{\nu}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\mu}, \quad \mathrm{Ri} = g\frac{T_2 - T_1}{T_1}\frac{h}{U_0^2}, \tag{2}$$

где ν — кинематическая вязкость, μ — коэффициент температуропроводности, g — ускорение свободного падения. Уравнения рассматриваются в области $-L_x/2 < x < L_x/2$, $-1 < y < 1$, $-L_z/2 < z < L_z/2$. Температура жидкости T на верхней ($y = 1$) и нижней ($y = -1$) стенках равна соответственно 2 и 1. Стенки движутся со скоростями $1/2$ и $-1/2$ в направлении x.

Численное решение системы уравнений (1) выполнялось с помощью DNS–модели, описанной в работах [24] и [25], с горизонтальными размерами $L_x = 12$, $L_z = 8$. Расчеты проводились при числах Рейнольдса и Ричардсона, лежащих в диапазонах $2 \le \mathrm{Re} \cdot 10^{-4} \le 12$ и $0 \le \mathrm{Ri} \le 0.12$. Результаты расчетов, подробно описанные в работе [19], осреднялись по горизонтальным координатам x, z и времени на достаточно длинном участке траектории модели после достижения турбулентным течением квазиравновесного состояния. Средние значения продольной компоненты скорости U и температуры T мы далее будем обозначать через $\bar{U} = \bar{U}(y)$ и $\bar{T} = \bar{T}(y)$ соответственно. Средние значения остальных компонент скорости на достаточно больших временных интервалах оказались, как и следовало ожидать, пренебрежимо малыми, и их мы далее будем считать нулевыми. Штрихом будем обозначать флуктуации, то есть отклонения соответствующих величин от их средних значений:

$$U' = U - \bar{U}, \; V' = V, \; W' = W, \; T' = T - \bar{T}.$$

Среднюю плотность полной энергии флуктуации $F = (U', V', W', T')^T$ определим как

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2L_x L_z} \int\limits_{-L_z/2}^{L_z/2} \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-L_x/2}^{L_x/2} \left(|U'|^2 + |V'|^2 + |W'|^2 + \rho^2 |T'|^2\right) \, dxdydz,$$

где

$$\rho = \rho(y) = \left(\frac{\mathrm{Ri}}{d\bar{T}/dy}\right)^{1/2}.$$

Мгновенное поле скорости $(W, V) = (W', V')$ в сечении канала $x = 0$, вычисленное в случае нейтральной стратификации ($\mathrm{Ri} = 0$) при $\mathrm{Re} = 40000$, изображено на Рис. 1 сверху. Какие-либо организованные структуры в нем не видны. Аналогичная картина наблюдается и в других сечениях по x. После исключения мелкомасштабной компоненты флуктуации путем осреднения вдоль оси x рассматриваемое мгновенное поле скорости преобразуется в чередующиеся по направлению вращения вихри приблизительно круглой формы, изображенные на Рис. 1 снизу. В трехмерном пространстве эти структуры представляют собой спиралевидные вихри (валики). При нейтральной стратификации валики явно выражены и присутствуют в любой момент времени. С увеличением статической устойчивости их кинетическая энергия уменьшается и появляются промежутки времени, на которых валики почти полностью затухают. В DNS расчетах валики выделяются вплоть до значений числа Ричардсона $\mathrm{Ri} \approx 0.015$.

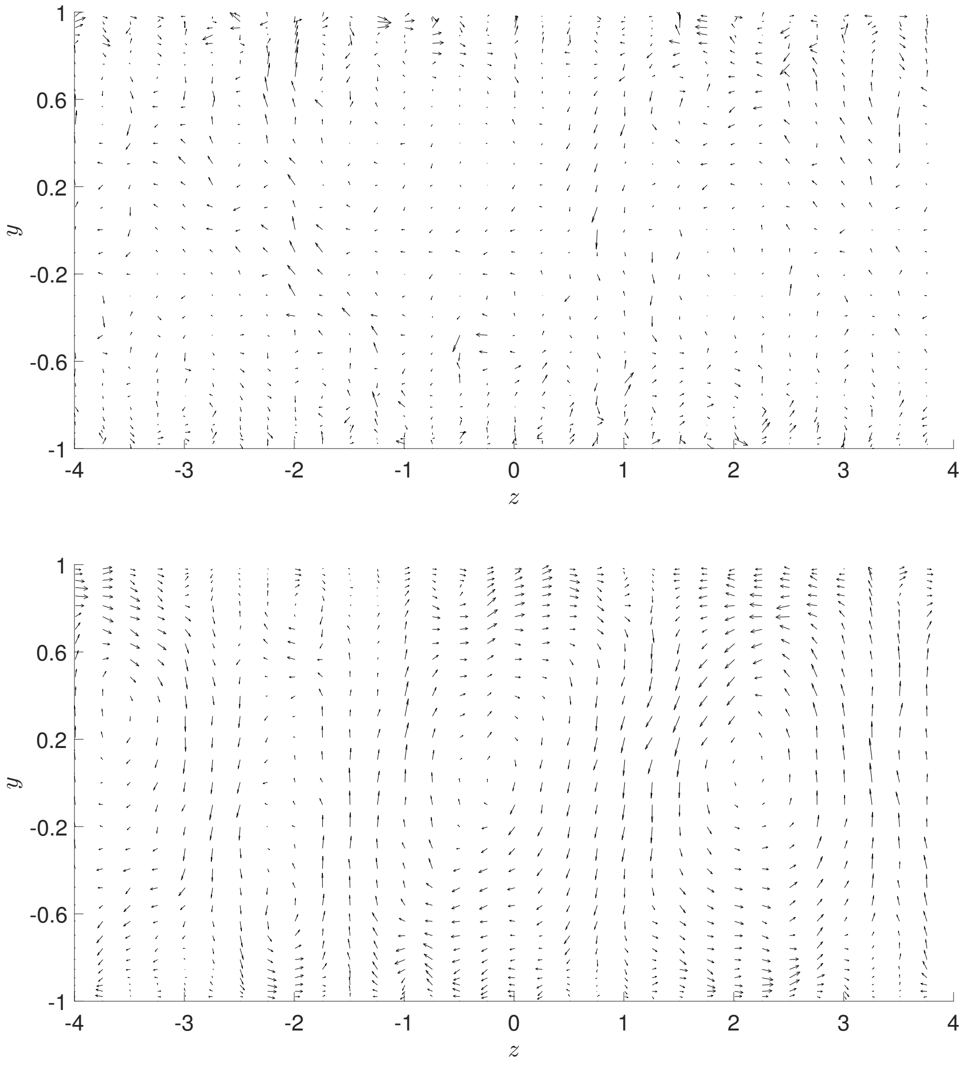


Рис. 1: Флуктуация исходного мгновенного поля скорости (W', V') в сечении $x = 0$ (сверху); она же, осредненная вдоль оси x (снизу).

В свою очередь, во всех экспериментах с устойчивой стратификацией была зафиксирована наклонная слоистая структура флуктуации поля температуры. Здесь мы воспользуемся одним из расчетов (Re = 40000, Ri = 0.03). Для того чтобы выделить крупномасштабные составляющие в этом случае, флуктуация разлагалась в комплексный ряд Фурье по горизонтальным переменным

$$F(x, y, z) = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} F_{k_x k_z}(y) \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} k_x x}{L_x}\right) \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} k_z z}{L_z}\right), \qquad (3)$$

где k_x и k_z — номера гармоник в направлениях x и z соответственно, а i — мнимая единица. Средняя плотность полной энергии отдельной гармоники равна

$$\mathcal{E}_{k_x k_z} = \mathcal{E}(F) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(|U_{k_x k_z}|^2 + |V_{k_x k_z}|^2 + |W_{k_x k_z}|^2 + \rho^2 |T_{k_x k_z}|^2\right) dy. \qquad (4)$$

Отметим, что гармоники с номерами k_x, k_z и $-k_x$, $-k_z$ являются комплексно–сопряженными. Поскольку комплексное сопряжение не меняет среднюю плотность полной энергии, достаточно ограничиться рассмотрением гармоник с неотрицательными k_z.

На Рис. 2 изображена энергетическая спектрограмма, то есть зависимость средней плотности полной энергии $\mathcal{E}_{k_x k_z}$ крупномасштабных гармоник от их номеров, в диапазонах $-20 \le k_x \le 20$, $0 \le k_z \le 20$ в один из моментов времени. Видно, что наибольших значений $\mathcal{E}_{k_x k_z}$ достигает на крупномасштабных гармониках с номерами $(k_x, k_z) = (1, 1)$, $(2, 1)$ и $(2, 2)$. Высокая энергия некоторых гармоник с другими номерами случайна. При осреднении по времени спектрогамм, вычисленных в различные моменты времени, энергия, отвечающая гармоникам с этими номерами, существенно уменьшается.

Изолинии исходного мгновенного поля температуры T в одном из продольных сечений канала изображены на Рис. 3 сверху. Ниже изображены вещественные части температуры вышеперечисленных гармоник. Они являются крупномасштабными структурами, представляющими собой наклонные чередущиеся слои в продольном сечении канала.

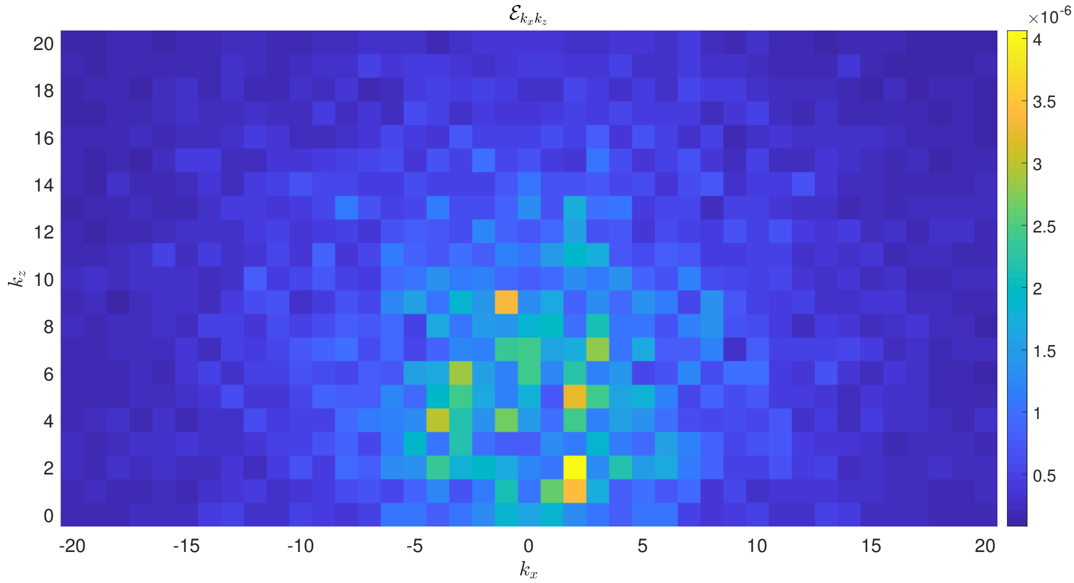


Рис. 2: Энергетическая спектрограмма флуктуации мгновенного поля скорости и температуры.

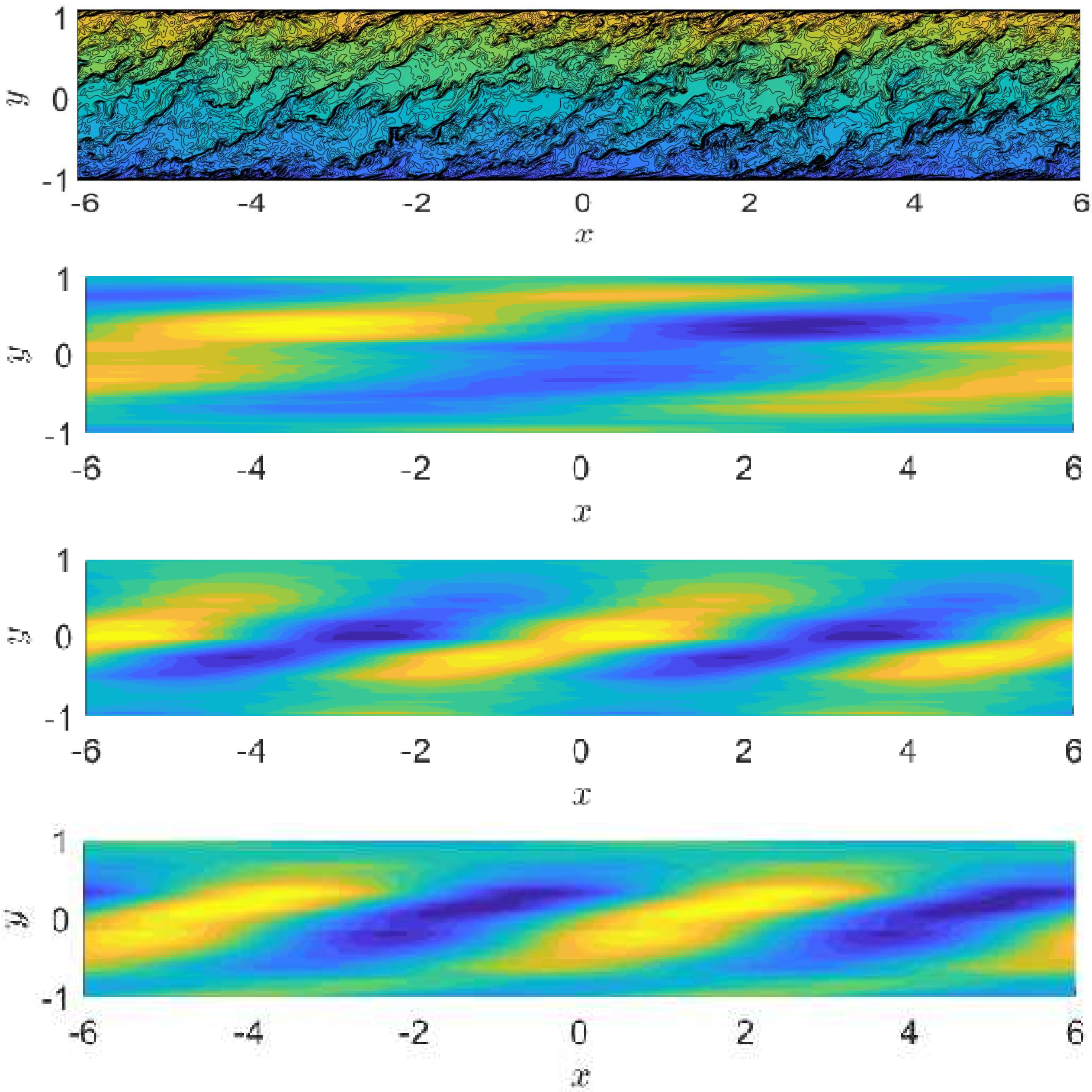


Рис. 3: Сверху вниз: в сечении канала $z = 0$ изолинии мгновенного поля температуры; изолинии вещественных частей крупномасштабных гармоник с номерами $(k_x, k_z) = (1, 1)$, $(2, 1)$ и $(2, 2)$, вычисленных для флуктуации этого поля.

3. Уравнения эволюции крупномасштабных структур

Будем предполагать, что во все моменты времени характерные пространственные масштабы флуктуаций, вносящих существенный вклад в турбулентные потоки тепла и импульса, не превышают горизонтальные размеры расчетной области дискретной модели и, таким образом, осредненные турбулентные профили скорости $\bar{U}(y)$ и температуры $\bar{T}(y)$, а также значения суммарных потоков импульса

$$\tau = \overline{U'V'} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\bar{U}}{dy}$$

и тепла

$$F_T = \overline{T'V'} - \frac{1}{\mathrm{PrRe}}\frac{d\bar{T}}{dy}$$

не зависят от этих размеров при их дальнейшем увеличении. В случае устойчивой стратификации это предположение оправданно, так как крупномасштабные флуктуации значительно ослаблены под действием сил плавучести. Отметим, что величины τ и F_T являются константами ввиду отсутствия внутренних источников импульса и тепла в течении Куэтта.

Будем считать, что флуктуации U', V', W', T' компонент скорости и температуры можно разделить на возмущения $\tilde{U}'$, $\tilde{V}'$, $\tilde{W}'$, $\tilde{T}'$ крупного пространственного масштаба, проявляющиеся в виде организованных структур, и мелкомасштабные турбулентные флуктуации. Будем рассматривать задачу эволюции крупномасштабных составляющих течения, параметризуя все взаимодействия с мелкомасштабной турбулентностью при помощи операторов $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$ турбулентной вязкости и диффузии соответственно, зависящих только от y:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0,\\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial v}{\partial y} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \mathrm{Ri}T = 0,\\
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0,\\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} - \left(\bar{\mu}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\mu}\frac{\partial T}{\partial y} + \bar{\mu}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где $u = \bar{U} + \tilde{U}'$, $v = \tilde{V}'$, $w = \tilde{W}'$ и $T = \bar{T} + \tilde{T}'$. Как и для исходной математической модели (1), на верхней и нижней стенках канала для скорости предполагается условие прилипания, а для температуры — постоянные значения 2 и 1 соответственно. Верхняя и нижняя стенки движутся со скоростями соответственно $1/2$ и $-1/2$ в направлении x.

При выборе коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии следующим образом:

$$\bar{\nu}(y) = -\tau/\left(\frac{d\bar{U}}{dy}\right), \quad \bar{\mu}(y) = -F_T/\left(\frac{d\bar{T}}{dy}\right),$$

система уравнений (5) будет иметь стационарное решение вида

$$u = \bar{U}(y), \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = \bar{p}(y), \quad T = \bar{T}(y), \tag{6}$$

которое мы далее будем рассматривать в качестве основного течения, с профилями скорости, давления и температуры, зависящими только от вертикальной координаты y и полученными описанным выше осреднением данных DNS. Эти профили, а также профили турбулентной вязкости и диффузии изображены на Рис. 4.

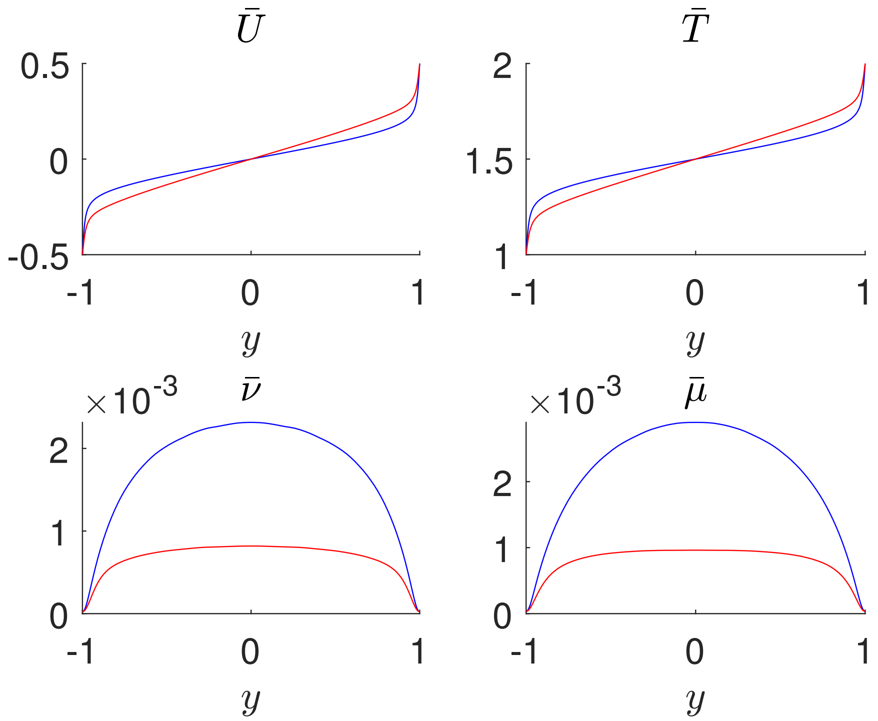


Рис. 4: Профили $\bar{U}(y)$, $\bar{T}(y)$, $\bar{\nu}(y)$, $\bar{\mu}(y)$ при $\mathrm{Re} = 40000$ и $\mathrm{Ri} = 0.01$ (синим), $\mathrm{Ri} = 0.03$ (красным).

4. Оптимальные возмущения

Для уменьшения погрешности пространственной аппроксимации мы будем рассматривать систему уравнений (5), записанную в конвективном виде. Представим произвольное решение этой системы в окрестности основного течения следующим образом:

$$\begin{aligned} u = \bar{U} + \delta u' + o(\delta), \quad v = \delta v' + o(\delta), \quad w = \delta w' + o(\delta), \\ p = \bar{p} + \delta p' + o(\delta), \quad T = \bar{T} + \delta T' + o(\delta), \end{aligned} \tag{7}$$

где δ — малый параметр. Требуя, чтобы (7) было решением рассматриваемой системы при всех сколь угодно малых по абсолютной величине δ, для u', v', w', p', T' получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{d\bar{U}}{dy}v' + \frac{\partial p'}{\partial x} - \left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right) - \mathrm{Ri}T' = 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \left(\bar{\nu}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{d\bar{T}}{dy}v' - \left(\bar{\mu}\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\mu}\frac{\partial T'}{\partial y} + \bar{\mu}\frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

которые называют линеаризованными уравнениями распространения возмущений. Уравнения (8) рассматриваются с нулевыми граничными условиями для u', v', w', T' при $y = \pm 1$.

Нас будут интересовать периодические по x и z решения системы (8), дающие максимальный подскок средней плотности полной энергии возмущений. Так как основное течение не зависит от x и z, любое периодическое по x и z решение системы (8) можно разложить в ряд по решениям вида

$$\begin{aligned} u' = e^{\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\gamma z}u_{\alpha\gamma}, \quad v' = e^{\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\gamma z}v_{\alpha\gamma}, \quad w' = e^{\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\gamma z}w_{\alpha\gamma}, \\ p' = e^{\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\gamma z}p_{\alpha\gamma}, \quad T' = e^{\mathrm{i}\alpha x + \mathrm{i}\gamma z}T_{\alpha\gamma}, \end{aligned} \tag{9}$$

где α и γ — вещественные продольное и поперечное волновые числа соответственно, а $u_{\alpha\gamma}$, $v_{\alpha\gamma}$, $w_{\alpha\gamma}$, $p_{\alpha\gamma}$, $T_{\alpha\gamma}$ — комплексные амплитуды, зависящие только от y и t. Кроме того, можно показать [22], что максимальный подскок средней плотности полной энергии достигается на решениях вида (9). Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только таких решений.

Подставив возмущения вида (9) в (8), получим следующую систему уравнений относительно амплитуд возмущений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_{\alpha\gamma}}{\partial t}+\mathrm{i}\alpha\bar{U}u_{\alpha\gamma}+\frac{d\bar{U}}{dy}v_{\alpha\gamma}+\mathrm{i}\alpha p_{\alpha\gamma}+\alpha^2\bar{\nu}u_{\alpha\gamma}-\frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial u_{\alpha\gamma}}{\partial y}+\gamma^2\bar{\nu}u_{\alpha\gamma}=0,\\
\frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial t}+\mathrm{i}\alpha\bar{U}v_{\alpha\gamma}+\frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial y}+\alpha^2\bar{\nu}v_{\alpha\gamma}-\frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y}+\gamma^2\bar{\nu}v_{\alpha\gamma}-\mathrm{Ri}T_{\alpha\gamma}=0,\\
\frac{\partial w_{\alpha\gamma}}{\partial t}+\mathrm{i}\alpha\bar{U}w_{\alpha\gamma}+\mathrm{i}\gamma p_{\alpha\gamma}+\alpha^2\bar{\nu}w_{\alpha\gamma}-\frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial w_{\alpha\gamma}}{\partial y}+\gamma^2\bar{\nu}w_{\alpha\gamma}=0,\\
\frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial t}+\mathrm{i}\alpha\bar{U}T_{\alpha\gamma}+\frac{d\bar{T}}{dy}v_{\alpha\gamma}+\alpha^2\bar{\mu}T_{\alpha\gamma}-\frac{\partial}{\partial y}\bar{\mu}\frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial y}+\gamma^2\bar{\mu}T_{\alpha\gamma}=0,\\
\mathrm{i}\alpha u_{\alpha\gamma}+\frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y}+\mathrm{i}\gamma w_{\alpha\gamma}=0.
\end{gathered}\tag{10}$$

Средняя плотность полной энергии возмущения вида (9) равна

$$\mathcal{E}_t=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(|u_{\alpha\gamma}|^2+|v_{\alpha\gamma}|^2+|w_{\alpha\gamma}|^2+\rho^2|T_{\alpha\gamma}|^2\right)dy.\tag{11}$$

Максимально возможное увеличение

$$\Gamma^{\alpha\gamma}(t)=\max\frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_0}$$

средней плотности полной энергии возмущения, где максимум берется по всем решениям системы (10), будем называть максимальной амплификацией средней плотности полной энергии при фиксированных значениях α, γ и t. Введем обозначения

$$\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}=\max_{t\geq 0}\Gamma^{\alpha\gamma}(t),\quad t^{\alpha\gamma}_{opt}=\arg\max_{t\geq 0}\Gamma^{\alpha\gamma}(t)$$

для соответственно максимальной амплификации средней плотности полной энергии и оптимального момента времени при фиксированных значениях α и γ. Глобальную максимальную амплификацию средней плотности полной энергии и оптимальные значения волновых чисел определим как

$$\Gamma_{\max}=\max_{\alpha,\gamma}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max},\quad (\alpha_{opt},\gamma_{opt})=\arg\max_{\alpha,\gamma}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}.$$

Возмущения, на которых достигаются $\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}$ и $\Gamma_{\max}$, будем называть оптимальным (при фиксированных значениях α и γ) и глобальным оптимальным возмущениями соответственно.

4.1. Пространственная аппроксимация

Аппроксимацию по y системы уравнений (10) будем выполнять методом Галеркина–коллокаций, детально описанным в [26], [27]. В качестве узлов сетки для давления выберем корни $y_1 < \cdots < y_n$ производной L'_{n+1} многочлена Лежандра степени $n+1$, а в качестве узлов сетки для компонент скорости и температуры — те же узлы вместе с точками $y_0 = -1$ и $y_{n+1} = 1$ (узлы Гаусса–Лобатто). В качестве базисных функций для компонент скорости и температуры будем использовать элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа, представимые в виде

$$\psi_i(y) = \frac{(y^2-1)L'_{n+1}(y)}{(n+1)(n+2)(y-y_i)L_{n+1}(y_i)}, \; i = 0, \ldots, n+1,$$

а для давления — элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа, представимые в виде

$$\varphi_i(y) = \frac{(y_i^2-1)L'_{n+1}(y)}{(n+1)(n+2)(y-y_i)L_{n+1}(y_i)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, компоненты возмущения мы будем аппроксимировать как

$$g_{\alpha\gamma}(y,t) \approx \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\psi_i(y), \quad p_{\alpha\gamma}(y,t) \approx \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\varphi_i(y),$$

где g означает u, v, w или T. Коэффициенты $g_i(t)$, $p_i(t)$ при такой аппроксимации являются значениями аппроксимантов в узле y_i.

В качестве пробных функций для каждого из первых четырех уравнений в (10) будем использовать функции $\psi_i(y)$, а для уравнения неразрывности — $\varphi_i(y)$. Для расчета фигурирующих в слабой постановке скалярных произведений будем использовать квадратурную формулу с узлами и весами Гаусса-Лобатто [26]:

$$\int_{-1}^{1} f(y)\,dy \;\approx\; \sum_{k=0}^{n+1} \kappa_i f(y_i), \quad \kappa_i = \frac{2}{(n+1)(n+2)L^2_{n+1}(y_i)},$$

точную для многочленов от y степени не выше $2n+1$.

Обозначим через K_0 положительно определенную диагональную матрицу порядка $n+2$ квадратурных коэффициентов, а через K — ее подматрицу порядка n, отвечающую внутренним узлам. Введем также следующие диагональные матрицы порядка n: U, U_y, N, M и T_y, составленные из значений профиля и производной профиля скорости основного течения, значений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии и значений производной профиля температуры основного течения соответственно в узлах $y_1 < \cdots < y_n$, а также диагональные матрицы N_0, M_0 порядка $n+2$, составленные из значений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии в узлах сетки $y_0 < \cdots < y_{n+1}$. Для вычисления значений в узлах $y_0 < \cdots < y_{n+1}$ производной функции, заданной в узлах $y_1 < \cdots < y_n$ и удовлетворяющей нулевым граничным условиям, будем использовать матрицу дифференцирования D размера $(n+2) \times n$. Также нам потребуется матрица проектирования P размера $(n+2)\times n$, восстанавливающая по значениям функции в узлах $y_1 < \cdots < y_n$ ее значения в узлах $y_0 < \cdots < y_{n+1}$. Эффективные методы вычисления матриц D и P подробно описаны в [28].

Используя введенные выше матрицы, выполним дискретизацию системы уравнений (10) методом Галеркина-коллокаций. В результате получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathrm{J}\mathbf{v} - \mathrm{G}p, \quad \mathrm{F}\mathbf{v} = 0 \tag{12}$$

относительно векторов $\mathbf{v} = E^{1/2}(u^T, v^T, w^T, T^T)^T$ и p, где

$$E = \frac{1}{2}\mathrm{diag}\left(K, K, K, K, \mathrm{Ri}KT_y^{-1}\right).$$

а u, v, w, p, T — это n-компонентные векторы, зависящие только от t, компонентами которых являются значения амплитуд $u_{\alpha\gamma}$, $v_{\alpha\gamma}$, $w_{\alpha\gamma}$, $p_{\alpha\gamma}$, $T_{\alpha\gamma}$ в узлах $y_1 < \cdots < y_n$. Отметим, что при выбранной нормировке дискретным аналогом функционала (11) средней плотности полной энергии будет $\|\mathbf{v}\|_2^2$.

Матрицы, фигурирующие в (12), устроены следующим образом: J — квадратная матрица порядка $4n$, а G и F — прямоугольные матрицы размеров $4n \times n$ и $n \times 4n$, причем $\mathrm{F} = -\mathrm{G}^*$:

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} S_\nu & -U_y & 0 & 0 \\ 0 & S_\nu & 0 & R \\ 0 & 0 & S_\nu & 0 \\ 0 & -R & 0 & S_\mu \end{bmatrix}, \quad \mathrm{G} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\alpha I \\ G \\ \mathrm{i}\gamma I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{F} = -\mathrm{G}^*,$$

где I — единичная матрица порядка n,

$$S_\nu = -\mathrm{i}\alpha U - \alpha^2 N + L_\nu - \gamma^2 N, \quad S_\mu = -\mathrm{i}\alpha U - \alpha^2 M + L_\mu - \gamma^2 M,$$

а G, F, L_ν, L_μ и R — квадратные вещественные матрицы порядка n: $G = -K^{-1/2}D^T K_0 P K^{-1/2}$ и $F = -G^T$ — дискретные аналоги оператора $\partial/\partial y$ в градиенте давления и уравнении неразрывности соответственно, $L_\nu =$

$-K^{-1/2}D^TK_0N_0DK^{-1/2}$ и $L_\mu = -K^{-1/2}D^TK_0M_0DK^{-1/2}$ — соответственно дискретные аналоги операторов

$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{\nu}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial y},$$

а $R = \sqrt{\mathrm{Ri}}T_y^{1/2}$.

Из второго уравнения системы (12) следует, что ее решение принадлежит ядру матрицы F. После замены переменных $\mathbf{v} = \mathrm{V}\mathbf{u}$, где V — прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в ядре матрицы F, и умножения полученного уравнения слева на V^*, а также с учетом того, что $\mathrm{G} = -\mathrm{F}^*$, мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathrm{H}\mathbf{u}, \tag{13}$$

где $\mathrm{H} = \mathrm{V}^*\mathrm{J}\mathrm{V}$ — квадратная матрица порядка $3n+1$ при $\alpha = \gamma = 0$ и порядка $3n$ в остальных случаях. Подробное обоснование такого типа редукций линейных дифференциально-алгебраических систем дано в [29].

В силу унитарной инвариантности второй нормы дискретный аналог функционала средней плотности полной энергии $\|\mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2$.

4.2. Алгоритмы вычисления максимальной амплификации и оптимальных возмущений

Произвольное решение редуцированной системы (13) представимо в виде

$$\mathbf{u}(t) = \exp\{t\mathrm{H}\}\mathbf{u}^0,$$

причем $\|\mathbf{u}(t)\|_2^2$ является дискретным аналогом средней плотности полной энергии соответствующего возмущения вида (9). Поэтому с точностью до погрешности аппроксимации

$$\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \max_{t\geq 0}\Gamma^{\alpha\gamma}(t),$$

где

$$\Gamma^{\alpha\gamma}(t) = \|\exp\{t\mathrm{H}\}\|_2^2.$$

Таким образом, вычисление максимальной амплификации $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ средней плотности полной энергии возмущений сводится к вычислению для заданной квадратной комплексной матрицы H глобального максимума функции $\Gamma^{\alpha\gamma}(t)$.

Найти $t = t^{\alpha\gamma}_{\text{opt}}$, дающее максимум $\Gamma^{\alpha\gamma}(t)$ с заданной относительной точностью δ, можно, вычислив $\Gamma^{\alpha\gamma}(t)$ на равномерной сетке по t с достаточно мелким шагом. Для решения этой задачи будем использовать эффективный алгоритм, предложенный в работе [23] и основанный на малоранговой аппроксимации.

Пусть $\mathbf{u}^0_{opt}$ означает нормированный правый сингулярный вектор, отвечающий максимальному сингулярному числу матрицы $\exp\{t^{\alpha\gamma}_{\text{opt}}\mathrm{H}\}$. Средняя плотность полной энергии оптимального возмущения может быть вычислена по формуле

$$E_{opt}(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_2^2,$$

где $\mathbf{u}(t) = \exp\{t\mathrm{H}\}\mathbf{u}^0_{opt}$, а ее кинетическая часть — по формуле

$$E^K_{opt}(t) = \|\mathrm{diag}(I, I, I, 0)\mathrm{V}\mathbf{u}(t)\|_2^2.$$

Значения в узлах расчетной сетки амплитуд соответствующего оптимального возмущения вида (9) могут быть вычислены по формуле

$$(u^T, v^T, w^T, T^T)^T = E^{-1/2}\mathrm{V}\mathbf{u}.$$

4.3. Результаты расчетов

Все расчеты проводились при фиксированном числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 40000$ и числах Ричардсона $\mathrm{Ri} = 0.01$ и 0.03. Число узлов n сетки по y бралось равным 102. Было проверено, что дальнейшее увеличение числа узлов сетки не влияет на описанные ниже результаты. Как показали дополнительные расчеты (результаты которых здесь не приводятся), при рассмотренных числах Рейнольдса и Ричардсона основное течение является линейно устойчивым.

На Рис. 5 изображены линии уровня максимальной амплификации $\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}$ средней плотности полной энергии возмущений в плоскости (α, γ) на равномерной сетке с числом узлов 30 по каждому из волновых чисел. При $\mathrm{Ri} = 0.01$ глобальная максимальная амплификация достигается при $\alpha = \alpha_{opt} = 0$, $\gamma = \gamma_{opt} \approx 1.0$ и равна примерно 28.2, а при $\mathrm{Ri} = 0.03$ — при $\alpha = \alpha_{opt} \approx 0.4$, $\gamma = \gamma_{opt} \approx 1.0$ и равна примерно 30.0.

На Рис. 6 показана зависимость от времени t максимальной амплификации при оптимальных волновых числах $\Gamma^{\alpha_{opt}\gamma_{opt}}(t)$ в момент времени t, средней плотности полной энергии глобального оптимального возмущения $E_{opt}(t)$ и ее кинетической части $E^K_{opt}(t)$. При $\mathrm{Ri} = 0.01$ глобальная максимальная амплификация $\Gamma_{\max}$ достигается при значении $t_{opt} = t^{\alpha_{opt}\gamma_{opt}}_{opt} \approx 120$, а при $\mathrm{Ri} = 0.03$ — при $t_{opt} = t^{\alpha_{opt}\gamma_{opt}}_{opt} \approx 50$. Видно, что в обоих случаях, в начальный момент времени в энергии оптимального возмущения доминирует ее потенциальная часть, а с развитием возмущения — кинетическая.

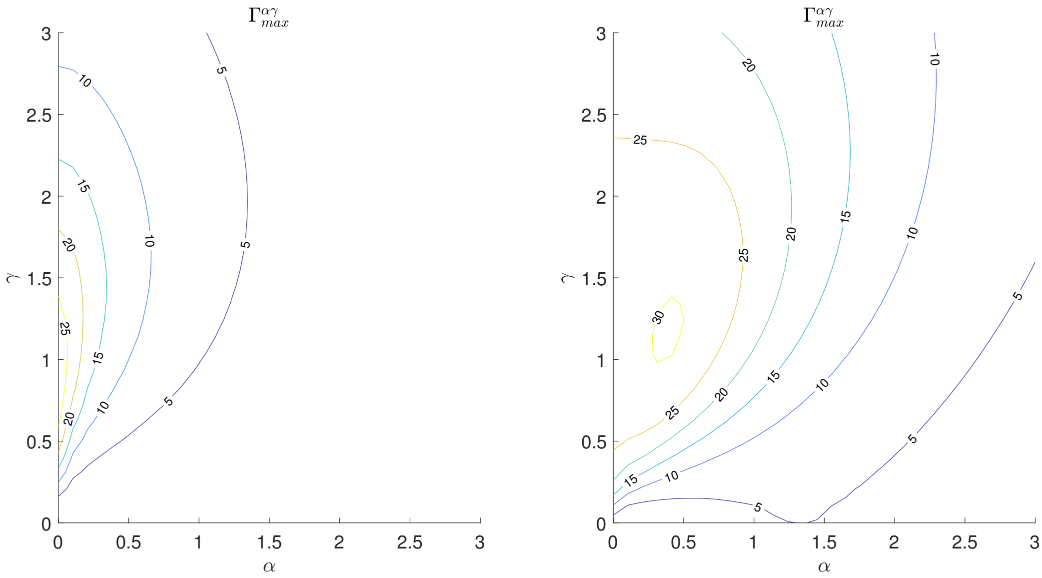


Рис. 5: Линии уровня $\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}$ при $\mathrm{Ri} = 0.01$ (слева) и $\mathrm{Ri} = 0.03$ (справа) в плоскости (α, γ).

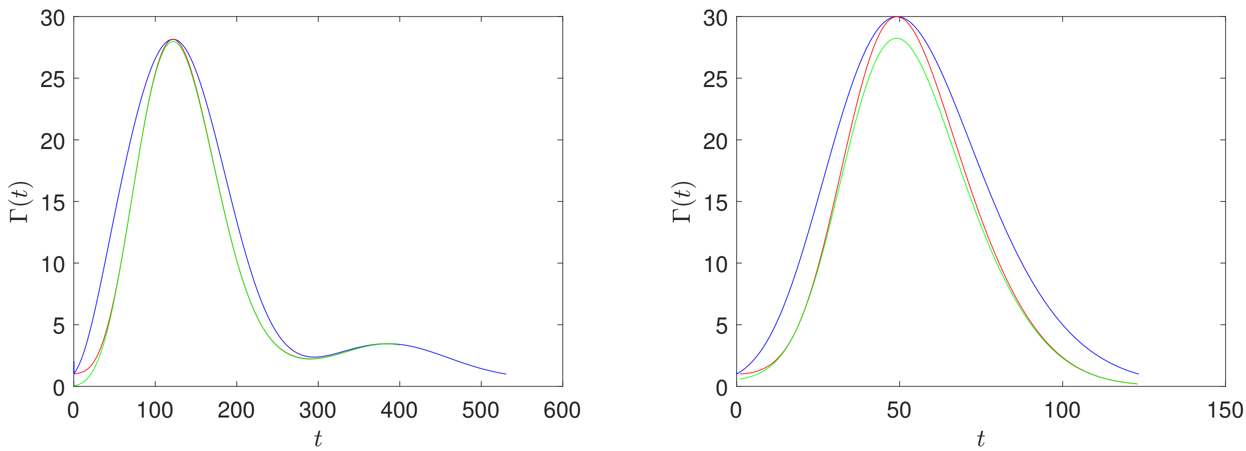


Рис. 6: Зависимость $\Gamma^{\alpha_{opt}\gamma_{opt}}(t)$ (синим), $E_{opt}(t)$ (красным) и $E^K_{opt}(t)$ (зеленым) при $\mathrm{Ri} = 0.01$ (слева) и $\mathrm{Ri} = 0.03$ (справа).

Будем далее для краткости обозначать через u, v, w, T вещественные части компонент скорости и температуры рассматриваемого возмущения вида (9).

На Рис. 7 изображено поле (w, v) скорости и линии уровня температуры вещественной части глобального оптимального возмущения при $\mathrm{Ri} = 0.01$ в начальный момент времени $t = 0$ (слева) и в момент $t = t_{opt}$ (справа). Видно, что поле скорости в момент максимального подскока представляет собой замкнутые циркуляции, аналогичные циркуляциям, выделенным из результатов DNS и изображенным на Рис. 1 (снизу).

На Рис. 8 изображено поле (u, v) скорости и линии уровня температуры вещественной части глобального оптимального возмущения в сечении

$z = 0$ при $\mathrm{Ri} = 0.03$ в начальный момент времени $t = 0$ (слева) и в момент $t = t_{opt}$ (справа), а на Рис. 9 аналогичным образом изображены вещественные части компонент глобального оптимального возмущения при $\mathrm{Ri} = 0.03$ в сечении $x = 0$. Обратим внимание на наклон структур, изображенных на Рис. 8. В момент времени $t = 0$ линии уровня температуры отклонены против часовой стрелки относительно вертикали, и по мере развития возмущения они приобретают противоположный наклон, характерный для структур, наблюдаемых в данных DNS (см. Рис. 3). В поле скорости, рассчитанном в DNS, аналогичный наклон структур визуально выделить не удается, однако ниже будет показано (на основе вычисления коэффициентов корреляции), что и крупномасштабные флуктуации в поле скорости очень близки по форме к оптимальным возмущениям в момент их максимального подскока.

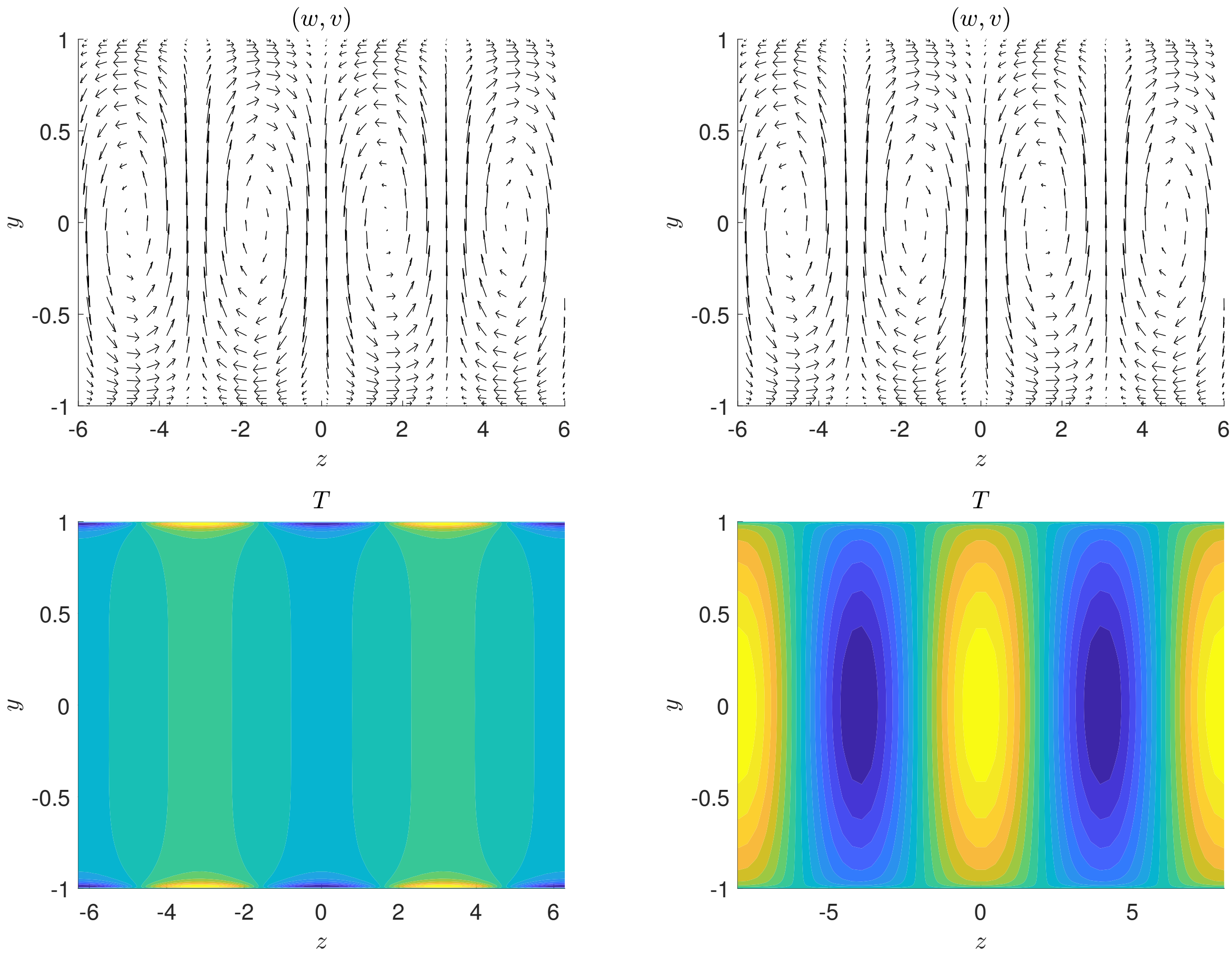


Рис. 7: Вещественные части компонент глобального оптимального возмущения при $\mathrm{Ri} = 0.01$ в сечении $x = 0$ в моменты времени $t = 0$ (слева) и $t = t_{opt}$ (справа).

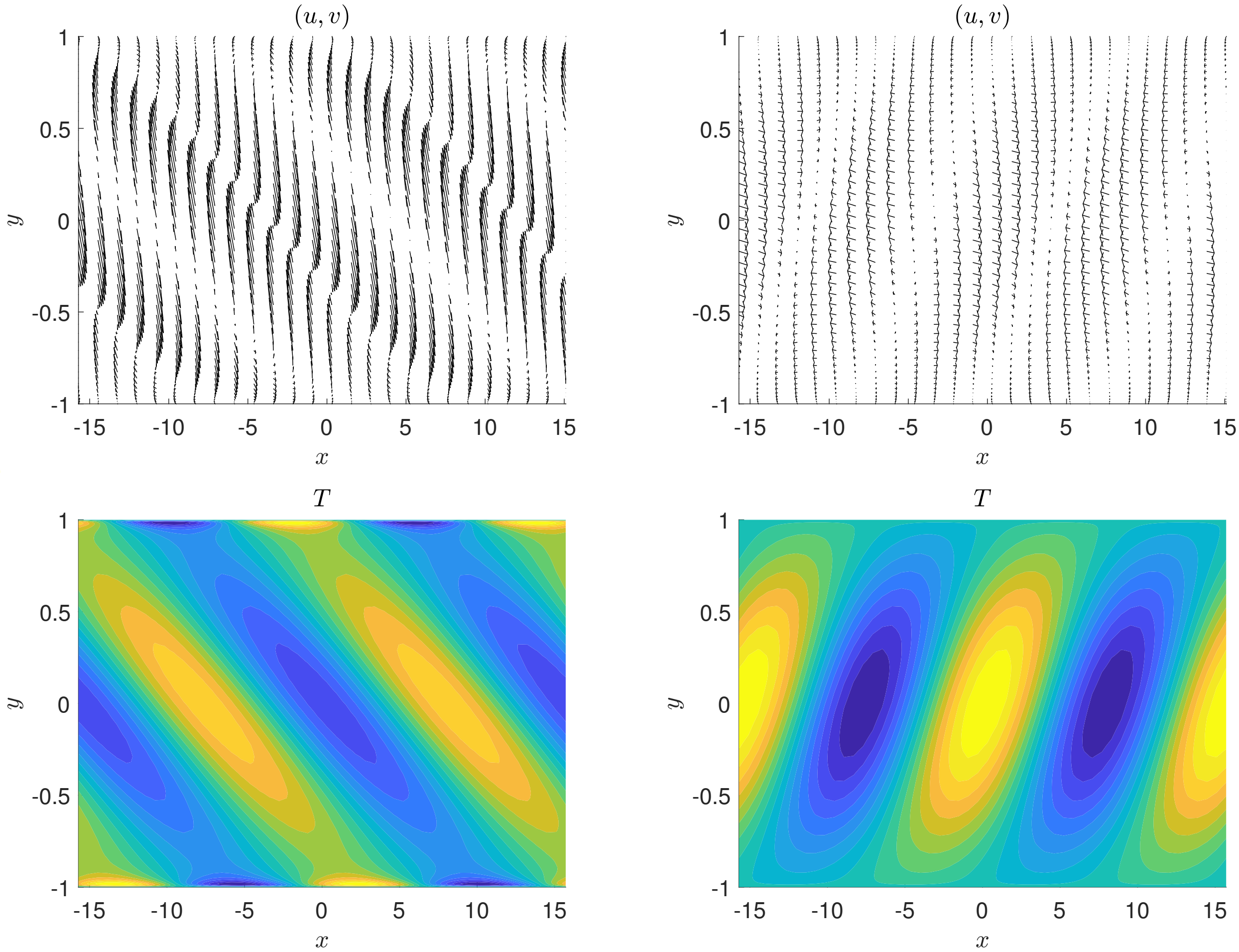


Рис. 8: Вещественные части компонент глобального оптимального возмущения при $\mathrm{Ri} = 0.03$ в сечении $z = 0$ в моменты времени $t = 0$ (слева) и $t = t_{opt}$ (справа).

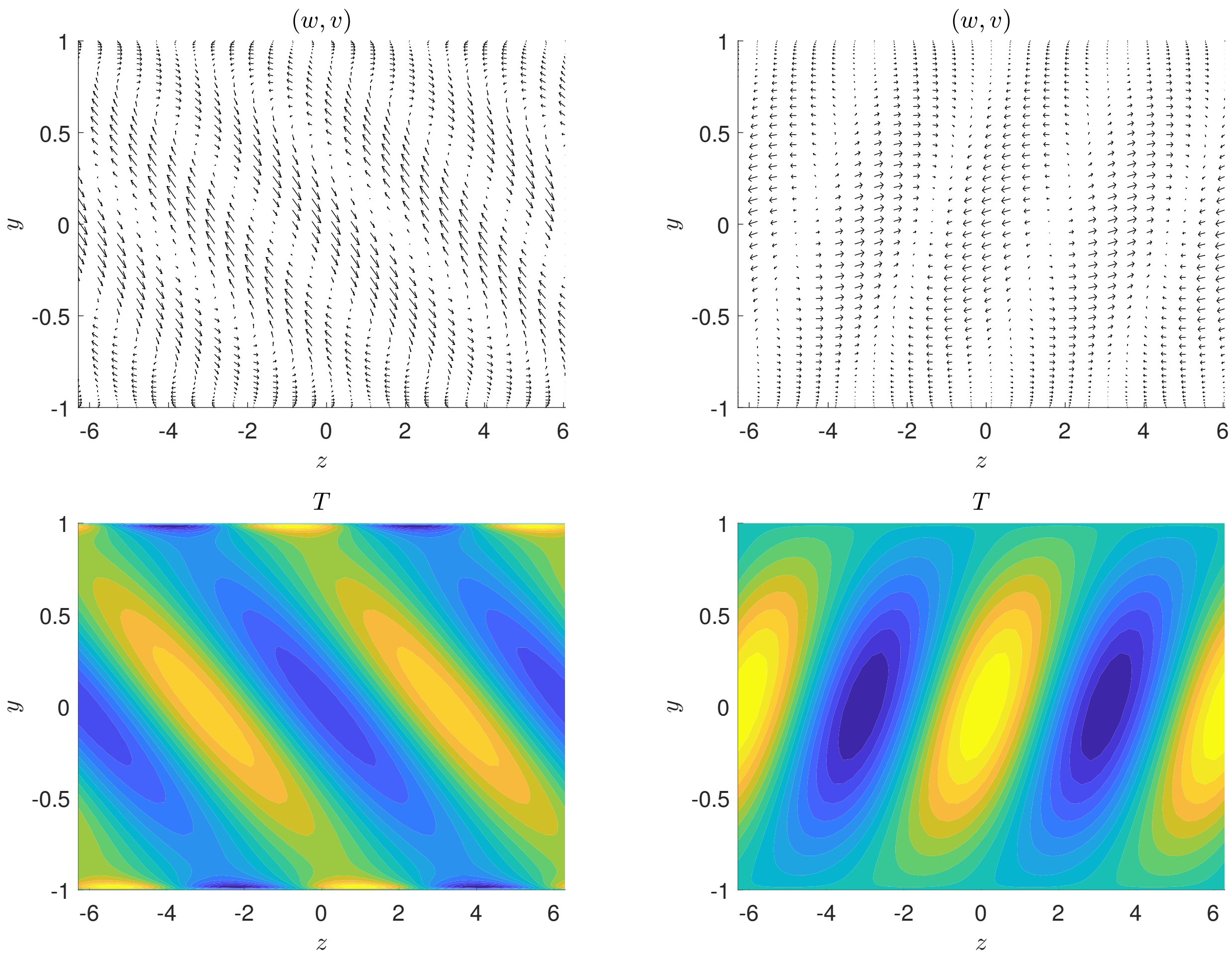


Рис. 9: Вещественные части компонент глобального оптимального возмущения при $\mathrm{Ri} = 0.03$ в сечении $x = 0$ в моменты времени $t = 0$ (слева) и $t = t_{opt}$ (справа).

5. Сравнение крупномасштабных структур и оптимальных возмущений

В предыдущем разделе мы рассматривали оптимальные возмущения с произвольными периодами. Однако поскольку DNS-моделирование проводилось при фиксированном горизонтальном размере расчетной области, то далее мы будем рассматривать только те возмущения вида (9), период которых равен этому размеру.

Поле (w, v) скорости вещественной части оптимального возмущения при $(\alpha, \gamma) = (0, \pi/4)$ в случае, близком к нейтральной стратификации ($\mathrm{Ri} = 0.01$), в момент времени $t = t_{opt}^{\alpha\gamma}$ изображено на Рис. 10 сверху. Это оптимальное возмущение имеет амплификацию, примерно равную 27.9, максимальную среди всех возмущений вида (9), не зависящих от x и имеющих период по z, равный $L_z = 8$. Видно, что пространственная структура этого оптимального возмущения в момент его максимальной амплификации совпадает с пространственной структурой валиков при нейтральной стратификации, изображенных на Рис. 1. Отметим, что оптимальное возмущение с волновыми числами $(0, \pi/2)$ имеет амплификацию 22.8, а остальные возмущения, не зависящие от x и имеющие период по z, равный 8, имеют значительно меньшую амплификацию (см. Рис. 5, слева). Следует также отметить, что оптимальное возмущение с $(\alpha, \gamma) = (0, \pi/4)$ достигает максимальной амплификации при $t_{opt}^{\alpha\gamma} \approx 150$, а с $(0, \pi/2)$ при $t_{opt}^{\alpha\gamma} \approx 82.6$.

Возможность развития оптимального возмущения на большом временном интервале при нейтральной стратификации вероятно связано с тем, что в этом случае и характерные времена турбулентных флуктуаций также достаточно большие. Напротив, при устойчивой стратификации отношение времени нарастания оптимального возмущения с нулевым продольным волновым числом к турбулентному масштабу времени увеличивается и соответствующие организованные структуры (валики) либо не успевают возбудиться, либо разрушаются турбулентностью по мере своего нарастания. Эта гипотеза требует дополнительной проверки с привлечением более подробных данных DNS.

Ниже на Рис. 10 изображены линии уровня температуры вещественных частей оптимальных возмущений в случае устойчивой стратификации ($\mathrm{Ri} = 0.03$) при значениях волновых чисел $(\alpha, \gamma) = (\pi/6, \pi/4)$, $(\pi/3, \pi/4)$, $(\pi/3, \pi/2)$ в моменты времени $t = t_{opt}^{\alpha\gamma}$, соответствующих крупномасштабным гармоникам с номерами $(k_x, k_z) = (1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, выделенным из результатов DNS (см. Рис. 3). Видно хорошее совпадение пространственных структур крупномасштабных гармоник и соответствующих оптимальных возмущений.

Отметим, что оптимальные возмущения определены с точностью до произвольной ненулевой комплексной мультипликативной константы. Следовательно, при визуальном сравнении крупномасштабных структур, изображенных на Рис. 1 и 3, с оптимальными возмущениями, изображенными на Рис. 10, нужно учитывать произвольность фазы этих возмущений, отвечающей за пространственный сдвиг в горизонтальной плоскости.

Для количественного сравнения крупномасштабных гармоник и соответствующих им по волновым числам оптимальных возмущений были вычислены коэффициенты их корреляции $r_{\mathcal{E}}$ в энергетическом скалярном произведении, отвечающем функционалу энергии (4). Для этого амплитуды оптимальных возмущений интерполировались на сетку по y, использованную в модели (1). В каждом случае была проведена максимизация $r_{\mathcal{E}}$ на достаточно мелкой равномерной сетке по фазе оптимального возмущения. Вычисления дали следующие результаты: $r_{\mathcal{E}} = 0.826, 0.812, 0.842$ для соответственно $(k_x, k_z) = (1, 1), (2, 1), (2, 2)$.

На Рис. 11 линии уровня максимальной амплификации $\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}$ (Рис. 5) и линии уровня оптимального момента времени $t^{\alpha\gamma}_{opt}$ при $\mathrm{Ri} = 0.03$ сопоставляются с энергетической спектрограммой (Рис. 2). При этом полагалось $\alpha = 2\pi k_x/L_x$, $\gamma = 2\pi k_z/L_x$. Видно, что выделенным в разделе 2 крупномасштабным гармоникам соответствуют оптимальные возмущения, достигающие больших значений максимальной амплификации при сравнительно небольшом времени их нарастания.

6. Заключение

Представленные в данной работе результаты позволяют заключить, что как валики, так и слоистые структуры, наблюдаемые в устойчиво–стратифицированном турбулентном течении Куэтта, имеют пространственные масштабы и конфигурации, совпадающие с масштабами и конфигурациями оптимальных возмущений линейной модели. При больших числах Ричардсона наибольшая максимальная амплификация в линейной модели достигается на слоистых структурах, а при стратификации, близкой к нейтральной, — на валиках. Тип крупномасштабных организованных структур в результатах DNS при различных числах Ричардсона соответствует типу вычисленных оптимальных возмущений.

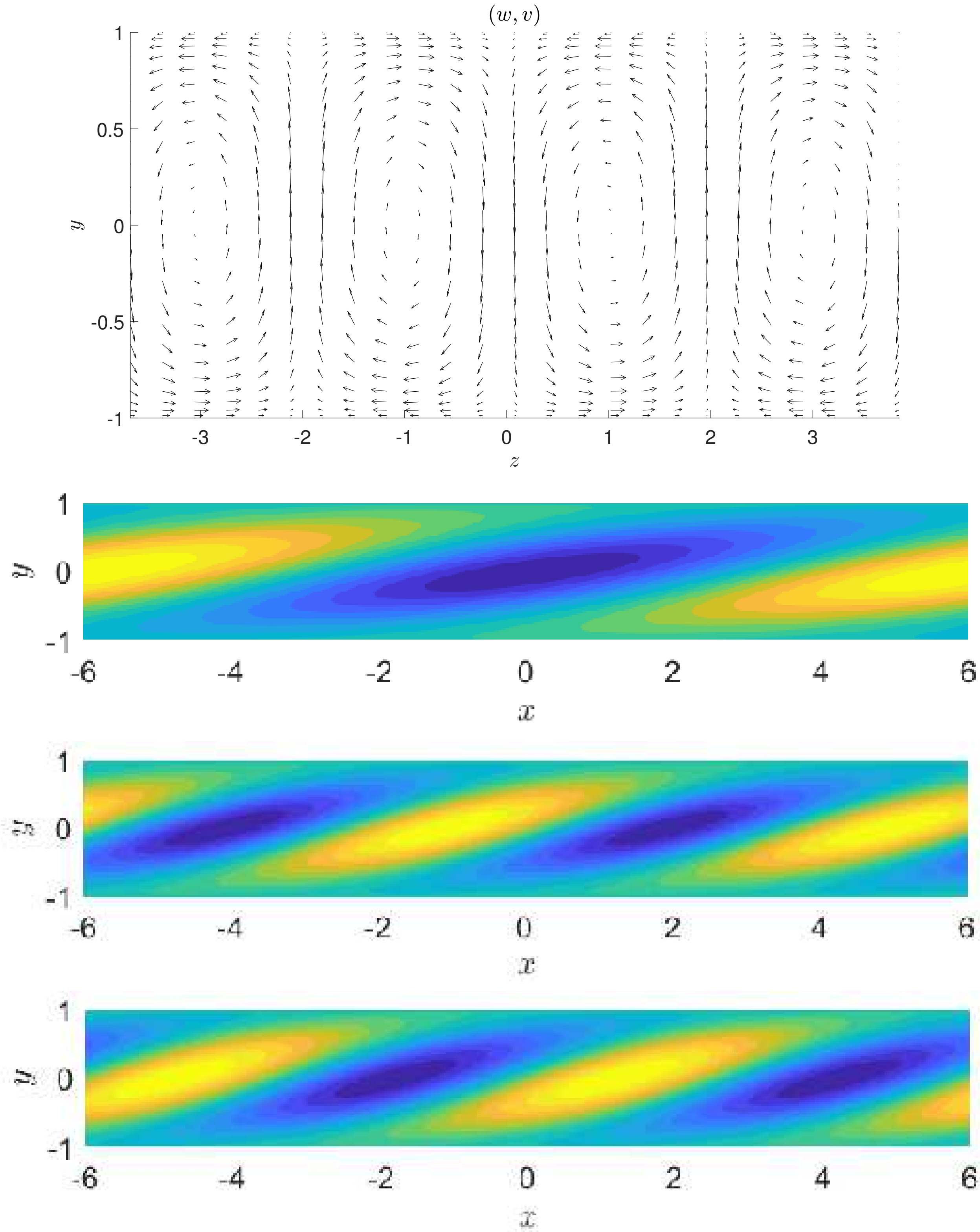


Рис. 10: Сверху вниз: поле скорости вещественной части оптимального возмущения при $\mathrm{Ri} = 0.01$ в сечении $x = 0$ при $\alpha = 0$, $\gamma = \pi/4$; температура вещественных частей оптимальных возмущений при $\mathrm{Ri} = 0.03$ и значениях $(\alpha, \gamma) = (\pi/6, \pi/4)$, $(\pi/3, \pi/4)$, $(\pi/3, \pi/2)$.

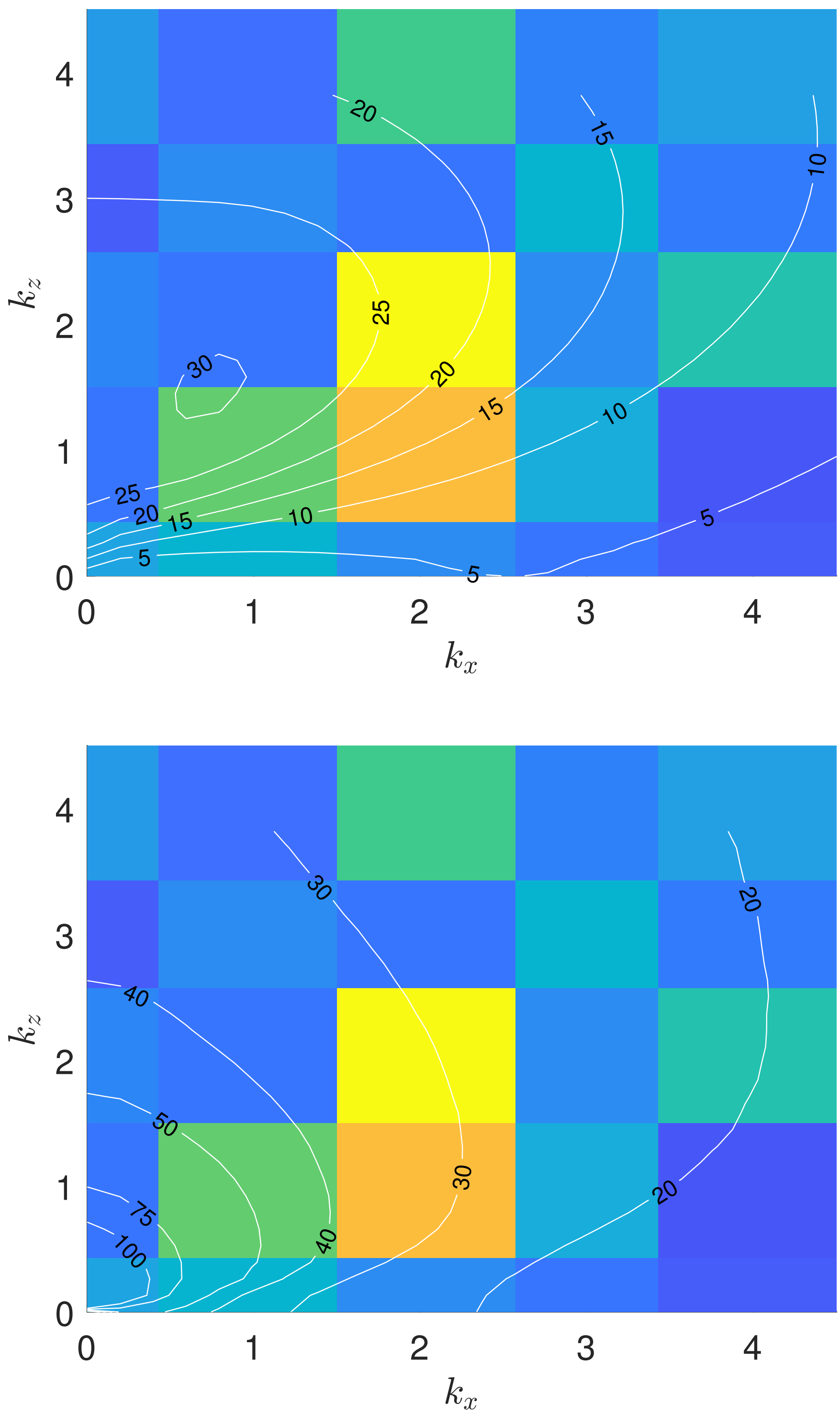


Рис. 11: Сравнение энергетической спектрограммы с линиями уровня $\Gamma^{\alpha\gamma}_{\max}$ (сверху) и $t^{\alpha\gamma}_{opt}$ (снизу).

Список литературы

[1] *Drobinski P., Brown R., Flamant P., Pelon J.* Evidence of organized large eddies by ground-based doppler lidar, sonic anemometer and sodar //

Boundary-Layer Meteorology. 1988. Vol. 88. No. 3, P. 343—361.

[2] *Lilly D. K.* On the instability of Ekman Boundary Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1966. Vol. 23. No. 5, P. 481—494.

[3] *Brown A. R.* A Secondary Flow Model for the Planetary Boundary Layer // Journal of the Atmospheric Sciences. 1970. Vol. 27. No. 5, P. 742—757.

[4] *Монин А. С., Обухов А. М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофизического института АН СССР. 1954. Т. 24. № 151, С. 163—187.

[5] *Spalart P. R., Coleman G. N., Johnstone R.* Direct numerical simulation of the Ekman layer: a step in Reynolds number, and cautious support for a log law with a shifted origin // Physics of Fluids. 2008. Vol. 20. No. 10, P. 101507.

[6] *Глазунов А. В.* О влиянии направления геострофического ветра на турбулентность и квазиупорядоченные крупномасштабные структуры в пограничном слое атмосферы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 6, С. 786—807.

[7] *Глазунов А. В, Дымников В. П.* Пространственные спектры и характерные горизонтальные масштабы флуктуаций температуры и скорости в конвективном пограничном слое атмосферы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 1, С. 37—61.

[8] *Deusebio E., Brethouwer G., Schlatter P., Lindborg E.* A numerical study of the unstratified and stratified Ekman layer // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 755. P. 672—704.

[9] *Sullivan P. P., Weil J. C., Patton E. G., Jonker H. J., Mironov D. V.* Turbulent winds and temperature fronts in large-eddy simulations of the stable atmospheric boundary layer // Journal of the Atmospheric Sciences. 2016. Vol. 73. No. 4, P. 1815—1840.

[10] *Foster R. C.* Structure and energetics of optimal Ekman layer perturbations // Journal of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 333. P. 97—123.

[11] *Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2011. P. 271.

[12] *Дымников В. П.* О связи естественных ортогональных составляющих полей метеоэлементов с собственными функциями динамических операторов // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. №7, С. 675—683.

[13] *Farrell B. F.* Optimal excitation of baroclinic waves // Journal of the Atmospheric Sciences. 1989. Vol. 46. №9, P. 1193—1206.

[14] *Butler K. M., Farrell B. F.* Optimal perturbations and streak spacing in wall - bounded turbulent shear flow // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1993. Vol. 5. No. 3, P. 774—777.

[15] *Toth Z., Kalnay E.* Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method // Monthly Weather Review. 1997. Vol. 125. No. 12, P. 3297—3319.

[16] *Del Alamo J. C., Jimenez J.* Linear energy amplification in turbulent channels // Journal of Fluid Mechanics. 2006. Vol. 559. P. 205—213.

[17] *Cossu C., Pujals G., Depardon S.* Optimal transient growth and very large–scale structures in turbulent boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. 2009. Vol. 619. P. 79—94.

[18] *Illingworth S. J., Monty J. P., Marusic I.* Estimating large-scale structures in wall turbulence using linear models // Journal of Fluid Mechanics. 2018. Vol. 842. P. 146—162.

[19] *Глазунов А. В., Мортиков Е. В., Барсков К. В., Каданцев Е. В., Зилитинкевич С. С.* О слоистой структуре устойчиво-стратифицированных турбулентных течений со сдвигом скорости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019 (в печати).

[20] *Глазунов А. В.* Численное моделирование устойчиво–стратифицированных турбулентных течений над плоской и городской поверхностями // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 3, С. 271—281.

[21] *Petenko I., Argentini S., Casasanta G., Genthon C., Kallistratova M.* Stable Surface-Based Turbulent Layer During the Polar Winter at Dome C, Antarctica: Sodar and In Situ Observations // Boundary-Layer Meteorology. 2019. Vol. 171. No. 1, P. 101—128.

[22] *Бойко А. В., Клюшнев Н. В., Нечепуренко Ю. М.* Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. С. 123.

[23] *Nechepurenko Yu. M., Sadkan M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2011. Vol. 32. No. 2, P. 349—363.

[24] *Мортиков Е. В.* Численное моделирование движения ледяного киля в стратифицированной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52, № 1, С. 120—128.

[25] *Mortikov E. V., Glazunov A. V., Lykosov V. N.* Numerical study of plane Couette flow: turbulence statistics and the structure of pressure-strain correlations // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2019. Vol. 34. No. 2, P.119—132.

[26] *Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006.

[27] *Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A.* Spectral methods. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics. Berlin: Springer, 2007.

[28] *Weideman J. A. C., Reddy S. C.* A MATLAB Differentiation Matrix Suite // ACM Transactions on Mathematical Software. 2000. Vol. 26. No. 4, P. 465—519.

[29] *Нечепуренко Ю. М.* О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // Доклады РАН. 2012. Т. 445. №1, С. 17—19.

Содержание

1. Введение **3**

2. Результаты DNS моделирования **6**

3. Уравнения эволюции крупномасштабных структур **12**

4. Оптимальные возмущения **13**

4.1 Пространственная аппроксимация 16

4.2 Алгоритмы вычисления максимальной амплификации и оптимальных возмущений 18

4.3 Результаты расчетов 19

5. Сравнение крупномасштабных структур и оптимальных возмущений **24**

6. Заключение **25**