[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](#) • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 54 за 2019 г.](#)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Коновалов В.С.

Перенос излучения в квазиодномерной модели течений ионизующегося газа в канале плазменного ускорителя

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Коновалов В.С. Перенос излучения в квазиодномерной модели течений ионизующегося газа в канале плазменного ускорителя // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 54. 24 с. doi:**10.20948/prepr-2019-54**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-54**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В.С. Коновалов

Перенос излучения в квазиодномерной модели течений ионизующегося газа в канале плазменного ускорителя

Москва — 2019

Коновалов В.С.

Перенос излучения в квазиодномерной модели течений ионизующегося газа в канале плазменного ускорителя

Разработаны алгоритмы решения задачи о переносе излучения на основе методов длинных и коротких характеристик с учетом их оптимизации в рамках квазиодномерного приближения, используемого для исследований осесимметричных течений ионизующегося газа в коаксиальных каналах плазменных ускорителей.

Ключевые слова: перенос излучения, методы длинных и коротких характеристик, течения ионизующегося газа, квазиодномерное приближение

Veniamin Sergeevich Konovalov

Radiation transport in quasi-one-dimensional model of the ionizing gas flows in the plasma accelerator channel

Algorithms for solving the problem of radiation transport are developed based on the methods of long and short characteristics taking into account their optimization in the framework of the quasi-one-dimensional approximation used to study the axisymmetric flows of the ionizing gas in coaxial channels of plasma accelerators.

Key words: radiation transport, long and short characteristic methods, ionizing gas flows, quasi-one-dimensional approximation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-29-21007_мк.

Оглавление

Введение

Аккуратный учет излучения при описании динамики плазмы является актуальной задачей современной вычислительной физики. В данной работе рассматривается решение уравнения переноса излучения методом характеристик в трехмерной постановке для задач со сложной геометрией, характерной для проточных плазмодинамических систем. К таким осесимметричным системам относится квазистационарный плазменный ускоритель (КСПУ) [1-15], схематично изображенный на рис. 1. Простейший плазменный ускоритель состоит из двух коаксиальных электродов, подключенных к электрической цепи. На входе в ускоритель между электродами подается нейтральный или слабоионизованный газ. Между электродами происходит электрический пробой с образованием фронта ионизации. Пробой замыкает электрическую цепь, и в системе возникает электрический ток. Протекающий вдоль внутреннего электрода ток создает в азимутальное магнитное поле, которое взаимодействует с радиальным током. В результате плазма ускоряется за счет силы Ампера в продольном направлении, в направлении выхода из канала. Таким образом создается тяга в системе ускорителя.

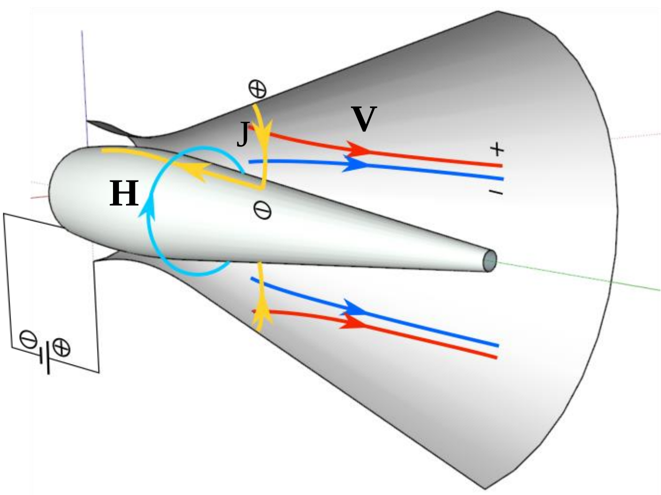

Рис. 1. Схема КСПУ

Модель радиационной магнитной газодинамики (РМГД) включает: 1) систему уравнений магнитной газодинамики [1, 4, 12, 13], 2) модель переноса излучения [14-24], и 3) модель поуровневой кинетики [25].

Излучение участвует в процессе перераспределения энергии в объеме вещества, а также в процессе ионизации [25-33], от которого зависит эффективность ускорения плазмы. В полном объеме решение спектрального уравнения переноса излучения в трехмерной постановке является трудоемкой задачей как с точки зрения построения численной модели, так и в отношении затрат машинного времени [15, 20-22, 31-33, 41]. В связи с этим возникает необходимость построения упрощенной модели переноса излучения, которая бы обладала рядом полезных свойств:

- для полноценной РМГД модели требуется, чтобы затраты машинного времени на расчет всех частей общей системы уравнений были сбалансированы друг с другом и в итоге приводили к приемлемому времени расчета всей задачи;
- необходимо, чтобы точность решения каждой части модели не занижала требуемой точности всей модели;
- по-прежнему необходима параллельная реализация используемых алгоритмов.

Течения в канале КСПУ обладают рядом особенностей, среди которых выделим следующие: 1) движение плазмы происходит главным образом в направлении оси симметрии системы, 2) в основном потоке газодинамические и термодинамические параметры плазмы слабо меняются в радиальном направлении. Эти особенности позволяют использовать квазиодномерное приближение [3, 17, 18] для решения задачи.

Переход от двумерной системы МГД уравнений к их квазиодномерному представлению эффективно сокращает время расчета. При этом мы пренебрегаем некоторыми эффектами, которые имеют двумерную природу, например, взаимодействием со стенками канала, образованием области компрессии, влиянием продольного магнитного поля [2-5, 10-11]. В то же время процесс ионизации, происходящий в узком месте канала, и процесс ускорения плазмы могут быть рассмотрены в квазиодномерном приближении. В связи с этим возникает необходимость разработать упрощенную модель переноса излучения, учитывающую трехмерную геометрию канала.

Цель данной работы – предложить качественный и быстрый способ решения уравнения переноса излучения на основе метода характеристик для квазиодномерных моделей течения ионизующегося газа и плазмы с учетом геометрии канала, спектра излучения и возможности параллельной реализации вычислительного кода.

Модель течения в квазиодномерном приближении

Задача о течении плазмы в ускорителе рассматривается в одножидкостной модели ($\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}$). Соответствующая система уравнений включает уравнения магнитной газодинамики с учетом конечной проводимости среды, теплопроводности, процесса ионизации и переноса тепла излучением. Течение рассматривается в узком осесимметричном канале заданного сечения в рамках квазиодномерного приближения. Предполагаем, что зазор $\Delta r(z)$ между электродами мал и средний радиус канала $r = r_0$ является постоянной величиной. Площадь сечения канала равна $f(z) = 2\pi r_0 \Delta r(z)$, где z – координата вдоль канала. В приближении узкого канала можно пренебречь изменением основных переменных поперек узкой трубки. Параметры зависят только от переменных t и z при условии аксиальной симметрии течения $(\partial / \partial \varphi = 0)$. В задаче участвуют азимутальная компонента магнитного поля $H = H_\varphi$ и продольная компонента скорости $V = V_z$.

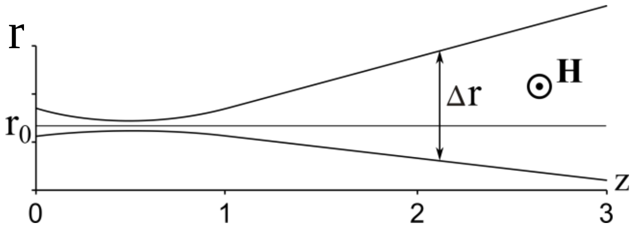

Рис. 2. Профиль сечения канала

С учетом сделанных замечаний уравнения можно записать в безразмерной форме следующим образом [27-30]:

$$\frac{\partial n_e f}{\partial t} + \frac{\partial n_e V f}{\partial z} = f\,\tilde{\Gamma}_e; \quad \tilde{\Gamma}_e = n_a\, n_e\, \tilde{\beta}_{ion} - n_e^2\, n_i\, \tilde{\alpha}_{rec} + \tilde{\beta}_\omega\, n_a - n_e\, n_i\, \tilde{\alpha}_\omega$$

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho V f}{\partial z} = 0\ ; \qquad \rho = n_a + n_i$$

$$\frac{\partial \rho V f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V f) V}{\partial z} = -f\,\frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{H^2}{2}\right); \qquad P = \frac{\beta}{2}(1+\alpha)\,\rho\, T$$

$$\frac{\partial \rho\, \varepsilon\, f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho\, \varepsilon\, f) V}{\partial z} = -P\,\frac{\partial V f}{\partial z} + f\,\nu \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial\, f\, q}{\partial z} - \frac{\partial\, f\, W_{rad}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H f}{\partial t} + \frac{\partial H V f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\, f\,\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\beta (1+\alpha) T}{2(\gamma - 1)} + \frac{\beta}{2}\,\varsigma\,\alpha\, T^*; \quad n_e = n_i; \quad \alpha = \frac{n_e}{\rho}; \quad n_a = (1-\alpha)\,\rho; \quad q = -\tilde{\kappa}\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\nu = 1/\sigma_o = 1/\sigma_1 + 1/\sigma_2; \qquad \sigma_1 = \alpha \sigma_{10} / (1-\alpha)\sqrt{T}; \qquad \sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2}$$

На входе при $z = 0$ имеем $\rho = 1$, $T = 1$, $H = 1$, $\alpha = \alpha_{en}$.

На выходе из ускорителя $z = z_{out}$ граничные условия отвечают свободному вытеканию. В качестве единиц измерения выберем значения характерных величин на входе: концентрации n_o $(\rho_o = m\, n_o)$, температуры T_o, магнитного поля H_o, а также L – длину канала либо его части. Характерное магнитное поле $H_o = 2\, J_p / c\, r_o$ определяется разрядным током в системе J_p, неизменным в процессе расчетов. С помощью данных величин формируются единицы: давления – $H_o{}^2 / 4\pi$, скорости – $V_o = H_o / \sqrt{4\pi\, \rho_o}$, времени – L/V_o и электрического поля – $E_o = H_o V_o / c$. Безразмерные параметры имеют вид: $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$ $(P_o = k_B n_o T_o)$, $\nu = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$, $T^* = I / k_B T$. Магнитная вязкость ν и безразмерная проводимость $\sigma_o = \mathrm{Re}_m$ или магнитное число Рейнольдса содержат величины, которые выражаются через исходные размерные параметры и физические константы. В данной системе $\tilde{\Gamma}_e$ – интенсивность образования электронов за счет процессов ионизации и рекомбинации, W_{rad} – поток энергии излучения в продольном направлении. В целом используются общепринятые обозначения.

Уравнение переноса излучения

Рассмотрим стационарное уравнение переноса излучения, содержащее коэффициент поглощения $\kappa_\nu(\mathbf{r})$ и излучательную способность $\eta_\nu(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \tag{1}$$

Решением уравнения (1) является интенсивность $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ как функция координаты $\mathbf{r}$, угла $\mathbf{\Omega}$ и частоты фотонов ν. По известной интенсивности определяются ее угловые моменты – спектральная плотность энергии излучения $U_\nu(\mathbf{r})$ и спектральный поток энергии излучения $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r})$:

$$U_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega\,, \qquad \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}) = \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, \mathbf{\Omega}\, d\Omega\,. \tag{2}$$

В уравнениях радиационной магнитной газодинамики используются интегральные по спектру плотность $\mathsf{U}(\mathbf{r})$ и поток $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ энергии излучения.

$$\mathsf{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega\, d\nu\,, \qquad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, \mathbf{\Omega}\, d\Omega\, d\nu\,.$$

Далее для удобства изложения будем рассматривать одногрупповое приближение и опустим индекс ν в (1) и (2).

На рис. 3 представлена геометрия и пространственная дискретизация, а также линия, отмеченная красным цветом, на которой вычисляется решение в квазиодномерной модели.

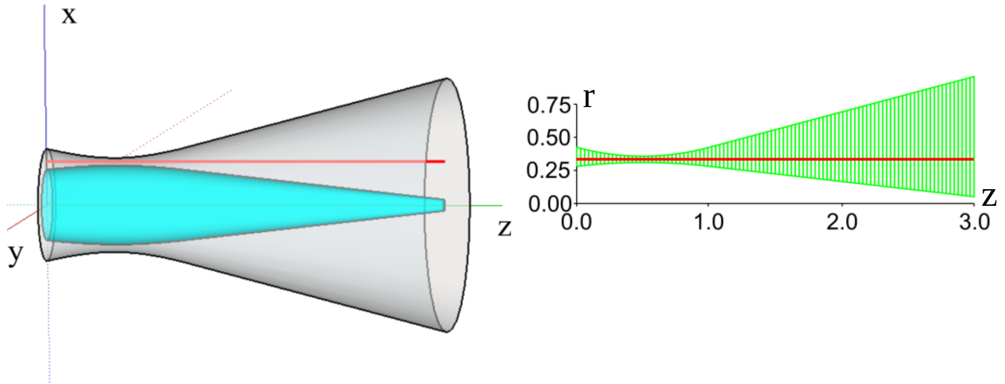

Рис. 3. Структура сетки в квазиодномерной модели

Канал состоит из двух коаксиальных электродов, сужается в его входной части и расширяется к выходу (справа). Решение уравнения (1) будем искать в точках, расположенных на красной линии между электродами (рис. 3). Пусть N_z – количество узлов на линии, например, $N_z = 201$. Тогда количество ячеек равно $N_c = 200$, а количество граничных поверхностей будет $N_b = 402$, включая границы на входе и выходе. Для каждого узла координатной сетки построим угловую сетку с количеством лучей N_Ω, которое может варьироваться (рис. 4).

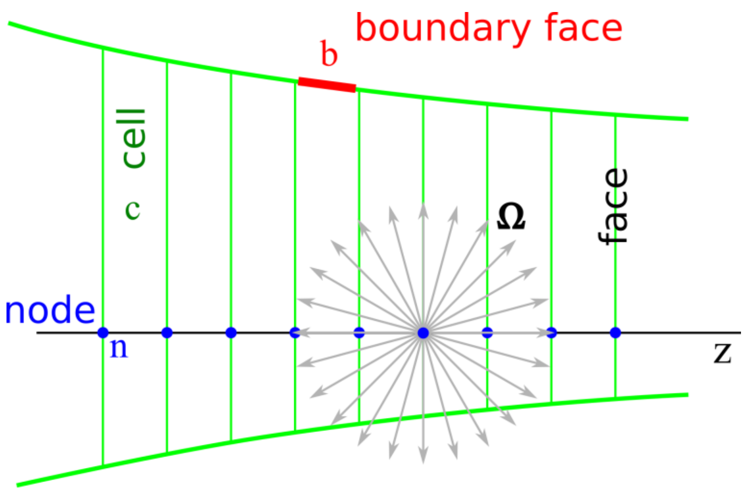

Рис. 4. Пространственная и угловая дискретизация

Коэффициент поглощения $\kappa_\nu(\mathbf{r})$ и излучательная способность $\eta_\nu(\mathbf{r})$ в уравнении (1) зависят от состояния среды, ее плотности и температуры. Индекс ν говорит о зависимости этих величин от частоты или энергии фотонов $h\nu$. Данные величины определяются с помощью известных соотношений (см., например, [14,23, 31-39]).

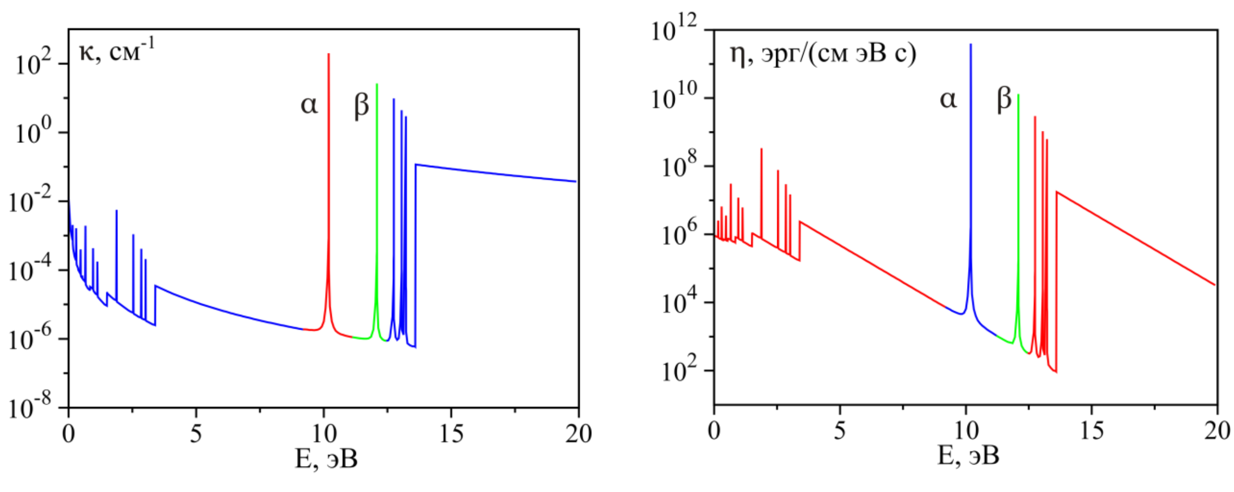

Рис. 5. Характерные зависимости коэффициента поглощения и излучательной способности от энергии излучения

На рис. 5 представлены графики зависимости κ_ν и η_ν от энергии фотонов для водородной плазмы с учетом первых 20 энергетических уровней при характерной температуре $T = 1$ *эВ* и плотности частиц $n = 10^{16}$ *см*$^{-3}$. Населенности различных состояний атомов считаем равновесными. В условиях локального термодинамического равновесия населенности состояний связаны уравнением Саха и формулой Больцмана. На приведенных рисунках весь спектр делится на 521 группу. Следует заметить, что величина, обратная коэффициенту поглощения, соответствует характерной длине свободного пробега фотонов $l_\nu = 1/\kappa_\nu$ с частотой ν.

Метод длинных характеристик

Характеристическими линиями уравнения переноса излучения (1) являются лучи, вдоль которых распространяется излучение. Явление рефракции или преломления лучей в данной работе не учитывается.

Рассмотрим решение на характеристиках (см., например, [14-19, 31-33, 40-43]). На рис. 6 изображена пространственная сетка, где синими точками отмечены узлы, в которых определяются интенсивность, коэффициент поглощения и излучательная способность. В пределах каждой ячейки данные величины считаются постоянными. Решение на характеристике с направлением $\mathbf{\Omega}_\mathrm{i}$ в точке n строится от границы расчетной области с известным значением интенсивности на границе $I(\mathbf{r}_\mathrm{b},\mathbf{\Omega}_\mathrm{i})$ [16, 31-33]:

$$I(\mathbf{r}_\mathrm{n},\mathbf{\Omega}_\mathrm{i}) = I(\mathbf{r}_\mathrm{b},\mathbf{\Omega}_\mathrm{i})\cdot e^{-\tau^\mathrm{i}_\mathrm{nk}} + \sum_{\mathrm{j=n+1}}^{\mathrm{k}} \frac{\eta_\mathrm{j}}{\kappa_\mathrm{j}}\left(1-e^{-\tau^\mathrm{i}_\mathrm{jj}}\right)\cdot e^{-\tau^\mathrm{i}_\mathrm{nj}} + \frac{\eta_\mathrm{n}}{\kappa_\mathrm{n}}\left(1-e^{-\tau^\mathrm{i}_\mathrm{nn}}\right), \quad (3)$$

где $\tau^\mathrm{i}_\mathrm{nk} = \sum\limits_{\mathrm{j=n,\ldots,k}} \kappa_\mathrm{j}\cdot\Delta l^\mathrm{i}_\mathrm{j}$ – оптическая длина пути фотона вдоль заданной характеристики с направлением $\mathbf{\Omega}_\mathrm{i}$ от ячейки n до ячейки k, $\Delta l^\mathrm{i}_\mathrm{j}$ – пространственная длина пути внутри ячейки j, в данном случае $\Delta l^\mathrm{i}_\mathrm{j} = \Delta z_\mathrm{j}/\cos\theta_\mathrm{i}$, b – индекс граничного элемента, i – индекс направления характеристики на рис. 6. Далее используем обозначение $I_\mathrm{ni} \equiv I(\mathbf{r}_\mathrm{n},\mathbf{\Omega}_\mathrm{i})$.

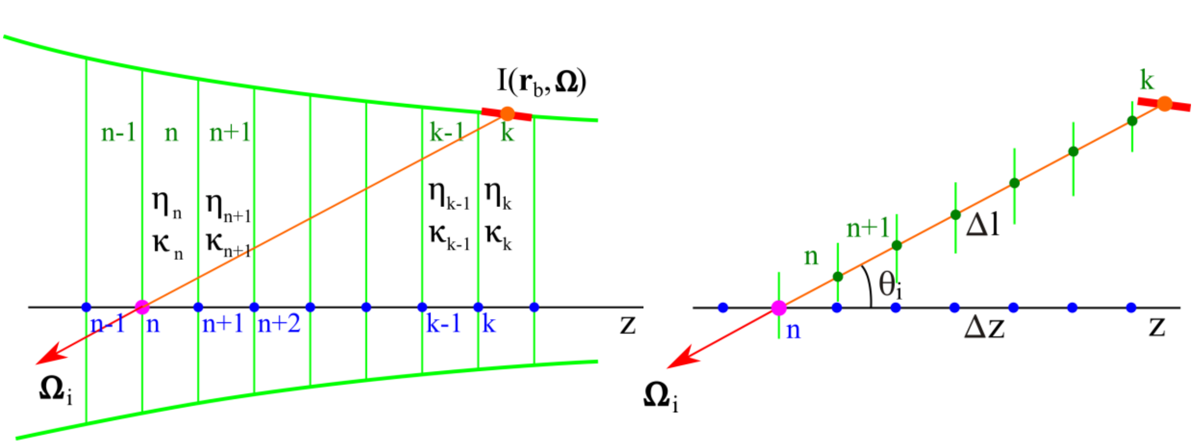

Рис. 6. Пересечение луча с гранями ячеек

Количество слагаемых в сумме (3) равно количеству сегментов или ячеек, пересекаемых характеристикой. В результате на заданных пространственной и угловой сетках рассчитываются интенсивности излучения для всех лучей и узлов $\left\{I\left(\mathbf{r}_{\mathrm{n}},\Omega_{\mathrm{i}}\right)\right\}_{\mathrm{n}=1,\ldots,\mathrm{N_z}}^{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}_\Omega}$, где N_Ω – число лучей угловой сетки.

Определим порядок решения уравнения переноса излучения методом длинных характеристик.

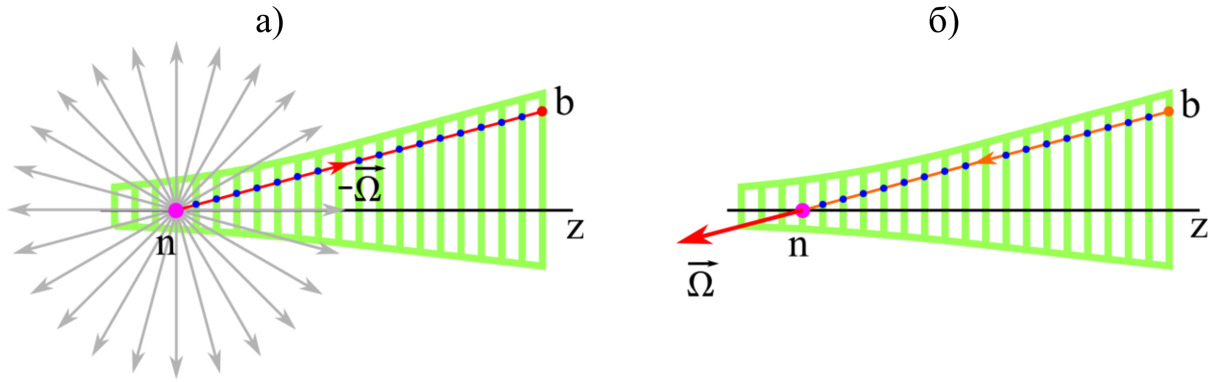

Рис. 7. а) Трассировка луча, б) поиск решения

На предварительном этапе выполняется трассировка расчетной области лучами (рис. 7 а). Лучи исходят из каждой точки (n) координатной сетки в направлениях, определяемых выбранной угловой сеткой. Прослеживается путь каждого луча от исходной точки до границы области (b). При этом сохраняется информация о пересечении лучами каждой ячейки, через которую проходит луч. На следующем этапе решения задачи (рис. 7 б) для текущей точки пространства $\mathbf{r}_{\mathrm{n}}$ и каждого луча вычисляется интенсивность излучения как функция координаты и направления $\left\{I\left(\mathbf{r}_{\mathrm{n}},\Omega_{\mathrm{i}}\right)\right\}_{\mathrm{n}=1,\ldots,\mathrm{N_z}}^{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}_\Omega}$. Учитывая зависимость от частоты фотонов ν, предполагается поиск решения для всех спектральных групп. Далее для найденных интенсивностей $\left\{I_{\mathrm{ni}}\right\}_{\mathrm{n}=1,\ldots,\mathrm{N_z}}^{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}_\Omega}$ с помощью соотношений (2) вычисляются плотность энергии $U_{\mathrm{n}} = U(\mathbf{r}_{\mathrm{n}})$ и плотность потока энергии $\mathbf{W}_{\mathrm{n}} = \mathbf{W}(\mathbf{r}_{\mathrm{n}})$ излучения в узлах пространственной сетки. При этом интегралам по углу отвечают соответствующие суммы, в которых индекс частоты для удобства опущен:

$$U_{\mathrm{n}} = \frac{1}{c}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}_\Omega} I_{\mathrm{ni}}\,\Delta\Omega_{\mathrm{i}}\,, \qquad \mathbf{W}_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}_\Omega} I_{\mathrm{ni}}\,\mathbf{\Omega}_{\mathrm{i}}\,\Delta\Omega_{\mathrm{i}}\,. \tag{4}$$

Рассмотрим результаты решения уравнения переноса излучения в 3D геометрии для точек линии, параллельной оси Oz, расположенной между электродами и отмеченной красным цветом на рис. 3. Пример расчета и характерные распределения плотности и температуры в канале представлены на рис. 8 для $n_o = 8\cdot 10^{16}\ см^{-3}$, $T_o = 500\,K$, $J_p = 60\,кА$ и $L = 20\,см$.

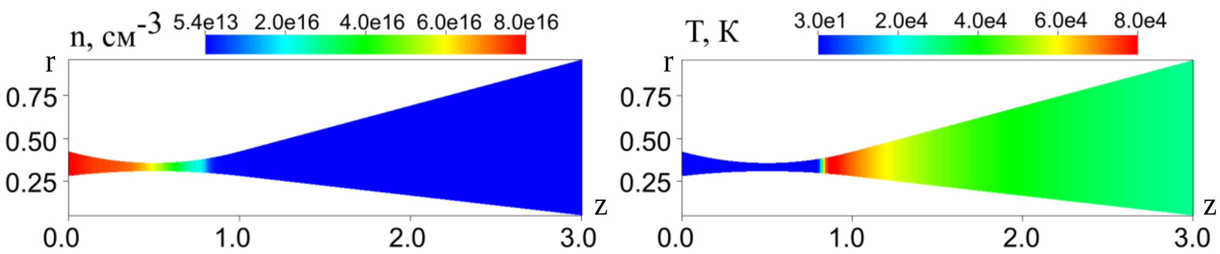

Рис. 8. Распределение плотности и температуры в канале ускорителя

На рис. 9 и 10 изображены графики зависимости интегральных по спектру величин U(z) и $W_z(z)$ для различных значений числа лучей N_Ω угловой сетки. В скобках на рисунках указано время расчета в секундах. Количество узлов координатной сетки равно 201, спектральных групп – 521.

Как видно, для различных значений N_Ω получены достаточно близкие результаты, но даже при $N_\Omega = 60$ время расчета, равное 12 сек, слишком велико, чтобы использовать метод длинных характеристик на каждом временном шаге МГД задачи, которая требует порядка 10^4 шагов по времени. При этом газодинамический шаг занимает около 0.1 сек на используемом персональном компьютере.

Расчетное время в основном уходит на вычисление большого количества экспонент, которое примерно равно удвоенному числу слагаемых в формуле (3). Чтобы оценить количество вычисляемых экспонент, учтем, что в среднем каждая характеристика проходит через $N_S \approx 50$ слоев или сегментов расчетной области (см. рис. 7б). Тогда общее количество вычисляемых экспонент для одной спектральной группы будет равно $2 \cdot N_S \cdot N_z \cdot N_\Omega = 2 \cdot 50 \cdot 201 \cdot 60 \approx 1.2 \cdot 10^6$.

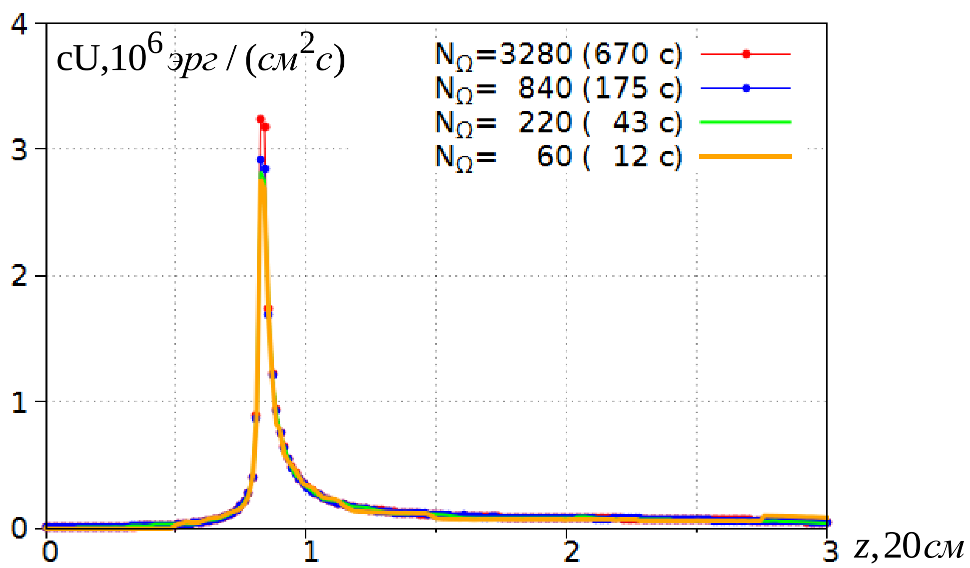

Рис. 9. Значения плотности энергии излучения, рассчитанные на разных угловых сетках методом длинных характеристик

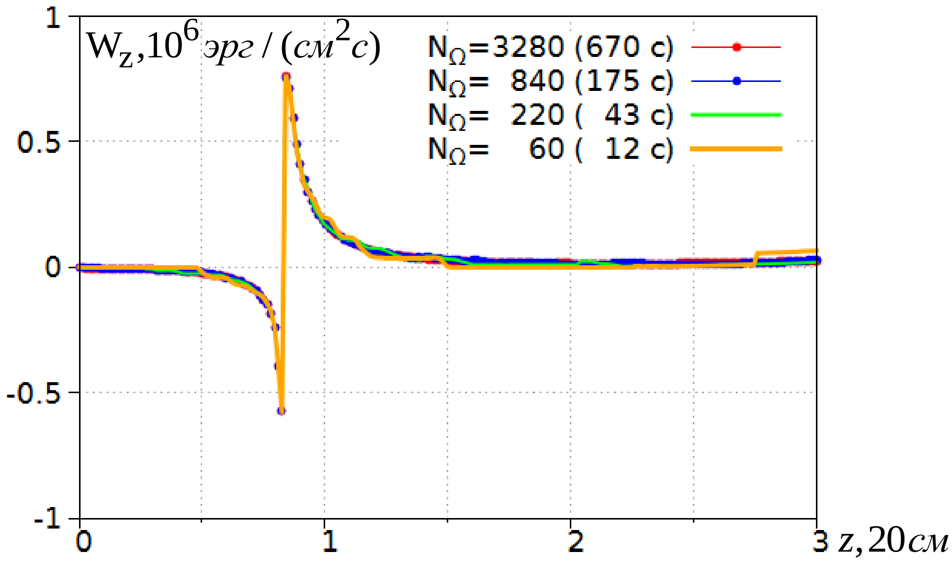

Рис. 10. Значения плотности потока энергии излучения, рассчитанные на разных угловых сетках методом длинных характеристик

1-й способ оптимизации расчета переноса излучения

В методе длинных характеристик количество операций и соответственно время расчета зависит от количества лучей N_Ω угловой сетки. Для квазиодномерных распределений температуры и плотности можно существенно сократить время решения задачи о переносе излучения, учитывая слоистую структуру распределения термодинамических параметров в канале. Суммирование по направлениям угловой сетки можно заменить суммированием по элементам границы. При этом сумму экспонент в формулах (3) и (4) по направлениям лучей, попадающих на определенный элемент границы, можно заменить одной экспонентой от некоторой табулированной функции. Это позволяет существенно уменьшить количество вычисляемых экспонент $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e^{-\tau\beta_j} \approx a e^{-b(\tau)}$ (рис. 11).

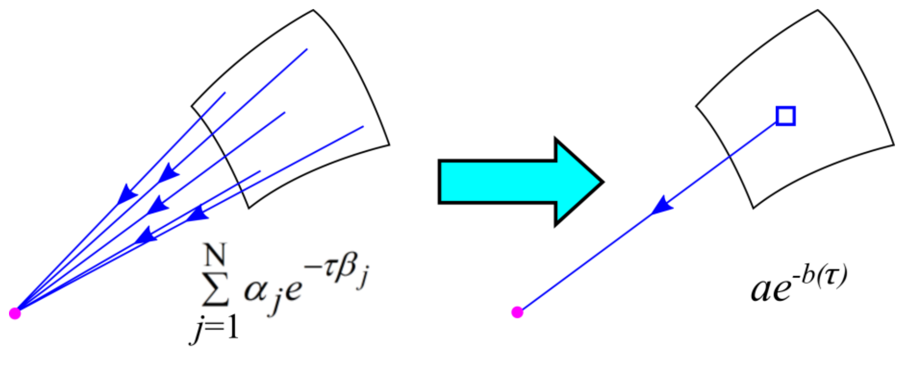

Рис. 11. Иллюстрация замены вычисления суммы экспонент

Сделаем подробную трассировку, исключая теневые области. Рассмотрим группу лучей O_{nb}, исходящих от элемента границы b и приходящих в узел расчетной сетки с индексом n (рис. 12). Тогда выражения (4) можно переписать следующим образом:

$$U_n = \frac{1}{c} \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{i \in O_{nb}} I_{ni}\, \Delta\Omega_i\,, \qquad \mathbf{W}_n = \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{i \in O_{nb}} I_{ni}\, \mathbf{\Omega}_i \Delta\Omega_i\,.$$

В данных соотношениях рассмотрим более подробно суммы по группе лучей O_{nb} и введем обозначение:

$$U_{nb} = \frac{1}{c} \sum_{i \in O_{nb}} I_{ni}\, \Delta\Omega_i\,, \qquad \mathbf{W}_{nb} = \sum_{i \in O_{nb}} I_{ni}\, \mathbf{\Omega}_i \Delta\Omega_i\,. \tag{5}$$

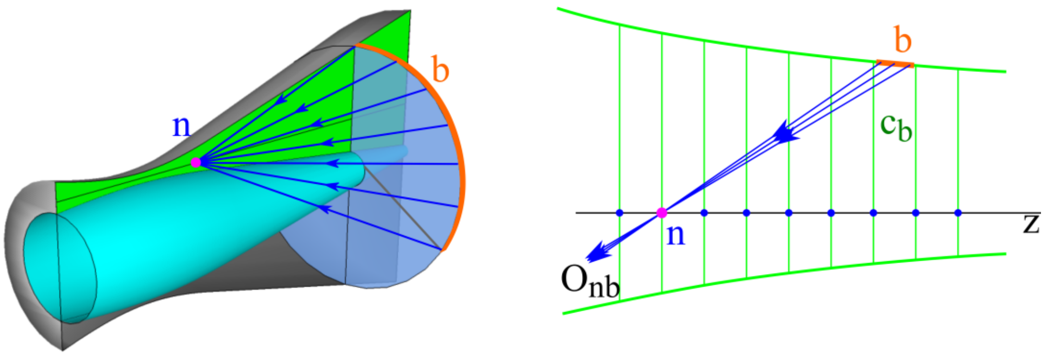

Рис. 12. Трассировка лучей, идущих от участка границы

Учтем, что задача одномерная и нас интересует поток в направлении оси z. Распишем более подробно суммы (5):

$$U_{nb} = \frac{1}{c} \frac{\eta_{c_b}}{\kappa_{c_b}} \sum_{i \in O_{nb}} \left(1 - e^{-\tau^i_{c_b c_b}}\right) \cdot e^{-\tau^i_{n c_b - 1}} \Delta\Omega_i\,, \tag{6}$$

$$W_{z\,nb} = \frac{\eta_{c_b}}{\kappa_{c_b}} \sum_{i \in O_{nb}} \left(1 - e^{-\tau^i_{c_b c_b}}\right) \cdot e^{-\tau^i_{n c_b - 1}} \cos\theta_i\, \Delta\Omega_i\,, \tag{7}$$

где c_b – индекс ячейки или малой части, относящейся к элементу границы b. Длина оптического пути луча от ячейки c_b в узел n вычисляется как сумма:

$$\tau^i_{nc} = \sum_{j=n}^{c} \kappa_j \cdot \Delta l^i_j = \sum_{j=n}^{c} \kappa_j \cdot \Delta z_j / \cos\theta_i\,.$$

Удобно выделить зависимость от направления луча. Для этого введем величину $\tau_{nc} = \sum_{j=n}^{c} \kappa_j \cdot \Delta z_j$ и запишем, что

$$\tau^i_{nc} = \tau_{nc} / \cos\theta_i\,. \tag{8}$$

Подставив (8) в (6) и (7), приходим к следующим соотношениям

$$U_{\mathrm{nb}} = \frac{1}{c}\frac{\eta_{\mathrm{c_b}}}{\kappa_{\mathrm{c_b}}} \sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{O_{nb}}} \left(e^{-\tau_{\mathrm{nc_b}\text{-}1}/\cos\theta_{\mathrm{i}}} - e^{-\tau_{\mathrm{nc_b}}/\cos\theta_{\mathrm{i}}} \right) \cdot \Delta\,\Omega_{\mathrm{i}}\ ,$$

$$W_{z\,\mathrm{nb}} = \frac{\eta_{\mathrm{c_b}}}{\kappa_{\mathrm{c_b}}} \sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{O_{nb}}} \left(e^{-\tau_{\mathrm{nc_b}\text{-}1}/\cos\theta_{\mathrm{i}}} - e^{-\tau_{\mathrm{nc_b}}/\cos\theta_{\mathrm{i}}} \right) \cos\theta_{\mathrm{i}}\, \Delta\,\Omega_{\mathrm{i}}\ ,$$

в которых присутствуют типичные суммы:

$$P_{\mathrm{nb}}(\tau) = \sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{O_{nb}}} e^{-\tau/\cos\theta_{\mathrm{i}}}\ \Delta\,\Omega_{\mathrm{i}}\ ,$$

$$R_{\mathrm{nb}}(\tau) = \sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{O_{nb}}} e^{-\tau/\cos\theta_{\mathrm{i}}} \cos\theta_{\mathrm{i}}\ \Delta\,\Omega_{\mathrm{i}}\ .$$

С учетом новых обозначений $P_{\mathrm{nb}}(\tau)$ и $R_{\mathrm{nb}}(\tau)$ можно переписать формулы для вычисления величин U_{n} и $\mathrm{W}_{z\,\mathrm{n}}$:

$$U_{\mathrm{n}} = \frac{1}{c} \sum_{\mathrm{b}=1}^{\mathrm{N_b}} \frac{\eta_{\mathrm{b}}}{\kappa_{\mathrm{b}}} \cdot \left(P_{\mathrm{nb\text{-}1}}(\tau_{\mathrm{nb\text{-}1}}) - P_{\mathrm{nb}}(\tau_{\mathrm{nb}}) \right)\ , \tag{9}$$

$$W_{z\,\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{b}=1}^{\mathrm{N_b}} \frac{\eta_{\mathrm{b}}}{\kappa_{\mathrm{b}}} \cdot \left(R_{\mathrm{nb\text{-}1}}(\tau_{\mathrm{nb\text{-}1}}) - R_{\mathrm{nb}}(\tau_{\mathrm{nb}}) \right)\ . \tag{10}$$

Функции $P_{\mathrm{nb}}(\tau)$ и $R_{\mathrm{nb}}(\tau)$ в соотношениях (9) и (10) можно представить следующим образом:

$$P_{\mathrm{nb}}(\tau) \approx \Omega_{\mathrm{nb}} \cdot e^{-\mathrm{p_{nb}}(\tau)}, \tag{11}$$

$$R_{\mathrm{nb}}(\tau) \approx \Omega_{z\,\mathrm{nb}} \cdot e^{-\mathrm{r_{nb}}(\tau)}, \tag{12}$$

где $\mathrm{p_{nb}}(\tau)$ и $\mathrm{r_{nb}}(\tau)$ – некоторые параметризованные функции, величина $\Omega_{\mathrm{nb}} = P_{\mathrm{nb}}(0) = \sum\limits_{\mathrm{i}\in \mathrm{O_{nb}}} \Delta\,\Omega_{\mathrm{i}}$ отвечает телесному углу видимости границы слоя b из точки n, величину $\Omega_{z\,\mathrm{nb}} = R_{\mathrm{nb}}(0) = \sum\limits_{\mathrm{i}\in \mathrm{O_{nb}}} \cos\theta_{\mathrm{i}}\, \Delta\,\Omega_{\mathrm{i}}$ можно интерпретировать как проекцию на ось z вектора телесного угла видимости границы слоя b из точки n. Соответственно перепишем выражения для U_{n} и $W_{z\,\mathrm{n}}$:

$$U_{\mathrm{n}} = \frac{1}{c} \sum_{\mathrm{b}=1}^{\mathrm{N_b}} \frac{\eta_{\mathrm{b}}}{\kappa_{\mathrm{b}}} \cdot \Omega_{\mathrm{nb}} \left(e^{-\mathrm{p_{nb}}(\tau_{\mathrm{nb\text{-}1}})} - e^{-\mathrm{p_{nb}}(\tau_{\mathrm{nb}})} \right)\ , \tag{13}$$

$$W_{z\,\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{b}=1}^{\mathrm{N_b}} \frac{\eta_{\mathrm{b}}}{\kappa_{\mathrm{b}}} \cdot \Omega_{z\,\mathrm{nb}} \left(e^{-\mathrm{r_{nb}}(\tau_{\mathrm{nb\text{-}1}})} - e^{-\mathrm{r_{nb}}(\tau_{\mathrm{nb}})} \right)\ . \tag{14}$$

Суммирование теперь происходит не по направлениям лучей в количестве N_{Ω}, а по элементам границы с количеством слагаемых, равным $\mathrm{N_b}$, каждое из которых содержит только две экспоненты. В данном случае время расчета не зависит от качества трассировки и количества лучей угловой сетки, так как трассировка выполняется один раз на подготовительном этапе для определения функций-параметров $p_{ik}(\tau)$ и $r_{ik}(\tau)$. Подготовительная процедура может быть выполнена сколь угодно подробно.

2-й способ оптимизации расчета переноса излучения

Чтобы уменьшить время расчета без потери точности, используем методику из предыдущего раздела, применив ее не только к внешней границе слоя, но ко всему слою сразу. Обозначим через O_{nc} группу лучей, идущих от слоя c и приходящих в узел n расчетной сетки. На рис. 13 слой плазмы выделен желтым цветом. Для плотности энергии и плотности потока энергии излучения аналогично (13) и (14) приходим к следующим соотношениям:

$$U_n = \frac{1}{c}\sum_{c=1}^{N_{nc}} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \cdot \Omega_{nc}\left(e^{-p_{nc}(\tau_{nc\text{-}1})} - e^{-p_{nc}(\tau_{nc})}\right), \qquad (15)$$

$$W_{z\,n} = \sum_{c=1}^{N_{nc}} \frac{\eta_c}{\kappa_c} \cdot \Omega_{z\,nc}\left(e^{-r_{nc}(\tau_{nc\text{-}1})} - e^{-r_{nc}(\tau_{nc})}\right), \qquad (16)$$

где N_{nc} – количество лучей, приходящих в точку n от слоя c.

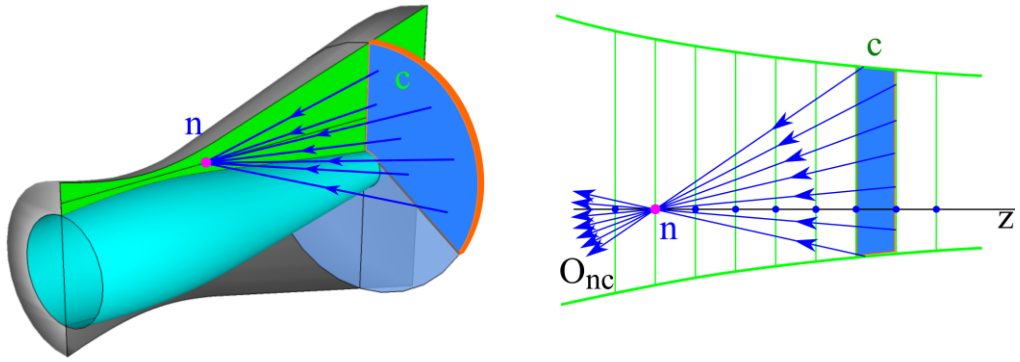

Рис. 13. Трассировка лучей, идущих от слоя плазмы

Количество слоев или элементов объема равно $N_c = 200$ и примерно в 2 раза меньше, чем количество граничных элементов $N_b = 402$. Поэтому время расчета также можно заметно сократить.

Сравнение результатов расчетов стандартным методом характеристик, методом суммирования по элементам границы и методом суммирования по элементам объема представлено на рис. 14 и 15. На данных рисунках в скобках указано время расчета. Видно, что при сохранении качества и точности решения время расчета при условии суммирования по элементам объема составляет 4.5 секунды на используемом компьютере. Это в два раза меньше времени расчета при условии суммирования по элементам границы и существенно меньше в случае использования метода характеристик.

Следует отметить, что способ суммирования по элементам границы позволяет задать граничные условия на всей границе. В то же время способ оптимизации, основанный на интегрировании по элементам объема на основе соотношений (15) и (16), исключает задание граничных условий на поверхности электродов ускорителя, но предполагает задание граничных условий на входе и выходе из канала, что обеспечивает качественное решение задачи о переносе излучения.

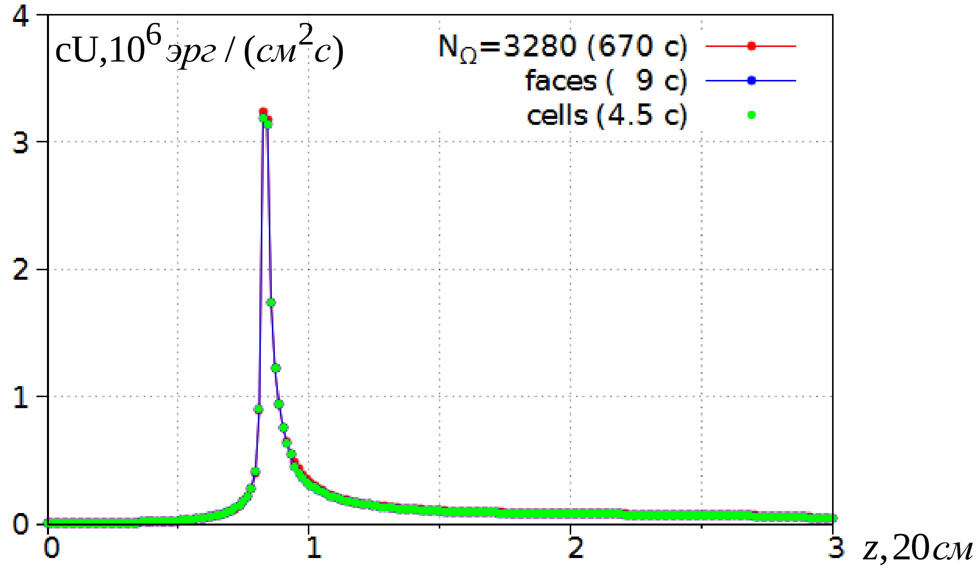

Рис. 14. Плотность энергии излучения, рассчитанная стандартным методом характеристик, суммированием «по границе» и «по ячейкам»

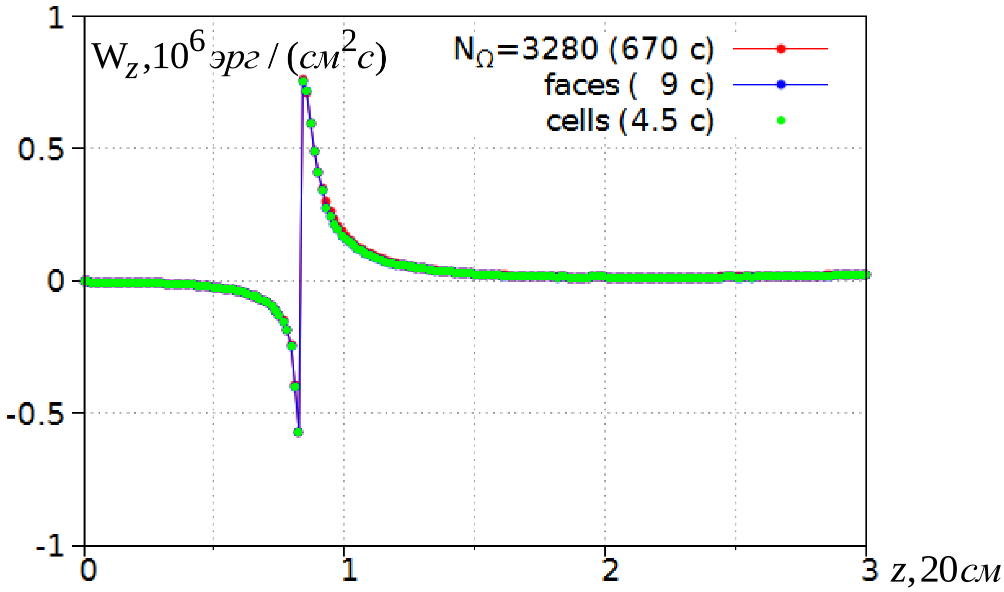

Рис. 15. Плотность потока энергии излучения, рассчитанная стандартным методом характеристик, суммированием «по границе» и «по ячейкам»

Определение функций-параметров для оптимизации расчетов

Рассмотрим функции-параметры $p_{ik}(\tau)$ и $r_{ik}(\tau)$, входящие в выражения (11) и (12). Характерные зависимости функций-параметров от оптической длины τ представлены на рис. 16. При нулевых значениях τ функции $p_{ik}(\tau)$ и $r_{ik}(\tau)$ равны нулю. При больших значениях τ они асимптотически стремятся к линейной функции. Поэтому их достаточно точно можно аппроксимировать функцией вида:

$$f(\tau) = \frac{k\tau}{a\tau+1} + b\tau . \tag{17}$$

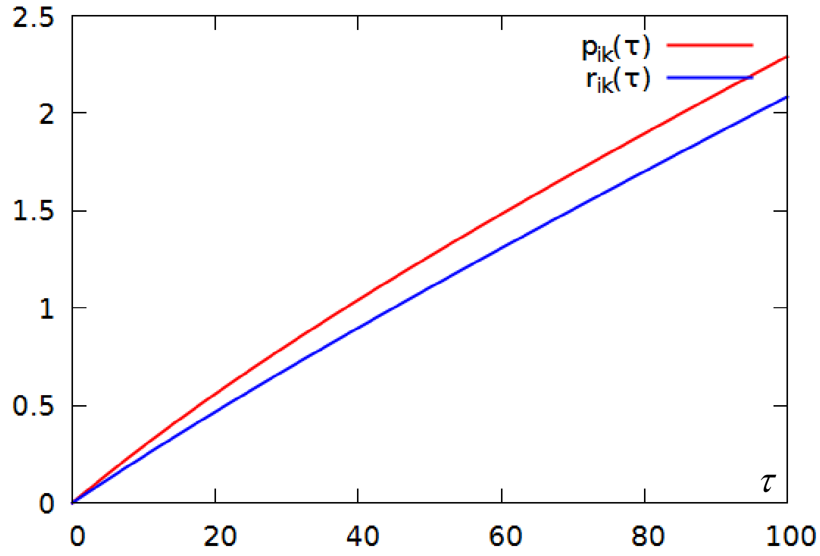

Рис.16. Характерные зависимости функций-параметров от оптической длины

Параметры *k*, *a* и *b* в (17) легко определяются, если известны значения $f(\tau)$ в трех произвольных точках τ_1, τ_2 и τ_3, отличных от нуля. Значения $f_1 = f(\tau_1)$, $f_2 = f(\tau_2)$ и $f_3 = f(\tau_3)$ легко вычислить после проведения трассировки. Для определения параметров *k*, *a* и *b* в (17) введем дополнительные величины:

$$D_{10} \equiv \frac{f_1}{\tau_1} = \frac{k}{(a\tau_1+1)} + b$$

$$D_{21} \equiv \frac{f_2 - f_1}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{k}{(a\tau_1+1)(a\tau_2+1)} + b ,$$

$$D_{32} \equiv \frac{f_3 - f_2}{\tau_3 - \tau_2} = \frac{k}{(a\tau_2+1)(a\tau_3+1)} + b ,$$

$$\chi \equiv \frac{D_{21} - D_{10}}{\tau_2 - \tau_0} = \frac{ka}{(a\tau_1+1)(a\tau_2+1)} ,$$

$$\varphi \equiv \frac{D_{32} - D_{21}}{\tau_3 - \tau_1} = \frac{ka}{(a\tau_1+1)(a\tau_2+1)(a\tau_3+1)} .$$

Из последних двух выражений следует, что $\varphi = \chi / (a\tau_3 + 1)$. Соответственно вычисляем величину *a*:

$$a = (\chi / \varphi - 1) / \tau_3,$$

при условии $\varphi \neq 0$. С учетом данного соотношения из выражения для χ находим *k*:

$$k = \chi(\tau_1 + 1/a)(\tau_2 + 1/a),$$

при условии $a \neq 0$. Далее определяем *b*:

$$b = D_{10} - \frac{\mathrm{k}}{(a\tau_1 + 1)}.$$

Вырожденный случай $\varphi = 0$ и $a = 0$ возможен только в ситуации $D_{10} = D_{21} = D_{32}$, что означает строго линейную зависимость $\mathrm{f}(\tau)$, т.е. $\mathrm{f}(\tau) = b\tau$. При этом можно положить $a = 0,\ k = 0$ и $b = \mathrm{f}_1 / \tau_1$.

Таким образом, построены функции-параметры $P_{\mathrm{ik}}(\tau)$ и $R_{\mathrm{ik}}(\tau)$:

$$P_{\mathrm{ik}}(\tau) = \Omega_{\mathrm{ik}} \cdot e^{-\mathrm{p}_{\mathrm{ik}}(\tau)},$$

$$R_{\mathrm{ik}}(\tau) = \Omega_{\mathrm{z\,ik}} \cdot e^{-\mathrm{r}_{\mathrm{ik}}(\tau)},$$

где функции $\mathrm{p}_{\mathrm{ik}}(\tau)$ и $\mathrm{r}_{\mathrm{ik}}(\tau)$ имеют вид:

$$\mathrm{p}_{\mathrm{ik}}(\tau) = \frac{k_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}} \cdot \tau}{a_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}} \cdot \tau + 1} + b_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}} \cdot \tau,$$

$$\mathrm{r}_{\mathrm{ik}}(\tau) = \frac{k_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}} \cdot \tau}{a_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}} \cdot \tau + 1} + b_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}} \cdot \tau.$$

Наборы параметров $\{\Omega_{\mathrm{ik}}, k_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}}, a_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}}, b_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{p}}\}$ и $\{\Omega_{\mathrm{z\,ik}}, k_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}}, a_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}}, b_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}}\}$ могут быть сохранены для текущей геометрии и в дальнейшем используются, исключая необходимость повторной трассировки. В качестве опорных точек могут быть выбраны значения $\tau_1 = 1,\ \tau_2 = 10$ и $\tau_3 = 100$ или другие варианты.

Адаптированный метод коротких характеристик

Одним из методов численного решения уравнения переноса излучения является метод коротких характеристик, идея которого заключается в том, что интенсивность излучения в данной точке пространственной сетки определяется только ее значениями в соседних точках. В случае оптически плотной среды, когда излучение становится локализованным, метод коротких характеристик позволяет получить хорошие результаты. Для прозрачной среды этот метод также часто используется. В этом разделе рассматривается адаптация метода коротких характеристик к рассматриваемой задаче, что позволяет значительно уменьшить время расчета. Если в методе, основанном на «суммировании по элементам объема», количество вычислений экспонент было равно $2 \cdot \mathrm{N_z} \cdot (\mathrm{N_z} + 1) \approx 8 \cdot 10^4$ при количестве узлов $\mathrm{N_z} = 201$, то в методе коротких характеристик это количество будет равно $2 \cdot \mathrm{N_z} \cdot 2 \approx 8 \cdot 10^2$, т.к. решение в данной точке определяется только по двум соседним ячейкам. Для решения используем формулы, аналогичные (15) и (16), проводя суммирование только по двум соседним ячейкам. Обозначим излучение, идущее слева направо, верхним индексом «+», а излучение, идущее справа налево, – верхним индексом «-». Тогда для плотности энергии излучения можно написать (рис. 17):

$$U_{\mathrm{n}} = U_{\mathrm{n}}^{+} + U_{\mathrm{n}}^{-},$$

$$U_{\mathrm{n}}^{+} = \frac{1}{c}\frac{\eta_{\mathrm{n\text{-}1}}}{\kappa_{\mathrm{n\text{-}1}}} \cdot \Omega_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}\left(1 - e^{-\mathrm{p}_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}(\tau_{\mathrm{n\,n\text{-}1}})}\right) + U_{\mathrm{n\text{-}1}}^{+} \cdot \frac{\Omega_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}}{\Omega_{\mathrm{n\,n\text{-}2}}} \cdot e^{-\mathrm{p}_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}(\tau_{\mathrm{n\,n\text{-}1}})},$$

$$U_{\mathrm{n}}^{-} = \frac{1}{c}\frac{\eta_{\mathrm{n}}}{\kappa_{\mathrm{n}}} \cdot \Omega_{\mathrm{n\,n}}\left(1 - e^{-\mathrm{p}_{\mathrm{nn}}(\tau_{\mathrm{nn}})}\right) + U_{\mathrm{n+1}}^{-} \cdot \frac{\Omega_{\mathrm{n\,n}}}{\Omega_{\mathrm{n\,n+1}}} \cdot e^{-\mathrm{p}_{\mathrm{nn}}(\tau_{\mathrm{nn}})}.$$

Аналогично для плотности потока энергии излучения получим соотношения, в которых W_{n} отвечает проекции вектора потока на ось z:

$$W_{\mathrm{n}} = W_{\mathrm{n}}^{+} - W_{\mathrm{n}}^{-},$$

$$W_{\mathrm{n}}^{+} = \frac{\eta_{\mathrm{n\text{-}1}}}{\kappa_{\mathrm{n\text{-}1}}} \cdot \Omega_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}\left(1 - e^{-\mathrm{r}_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}(\tau_{\mathrm{n\,n\text{-}1}})}\right) + W_{\mathrm{n\text{-}1}}^{+} \cdot \frac{\Omega_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}}{\Omega_{\mathrm{n\,n\text{-}2}}} \cdot e^{-\mathrm{r}_{\mathrm{n\,n\text{-}1}}(\tau_{\mathrm{n\,n\text{-}1}})},$$

$$W_{\mathrm{n}}^{-} = \frac{\eta_{\mathrm{n}}}{\kappa_{\mathrm{n}}} \cdot \Omega_{\mathrm{n\,n}}\left(1 - e^{-\mathrm{r}_{\mathrm{nn}}(\tau_{\mathrm{nn}})}\right) + W_{\mathrm{n+1}}^{-} \cdot \frac{\Omega_{\mathrm{n\,n}}}{\Omega_{\mathrm{n\,n+1}}} \cdot e^{-\mathrm{r}_{\mathrm{nn}}(\tau_{\mathrm{nn}})}.$$

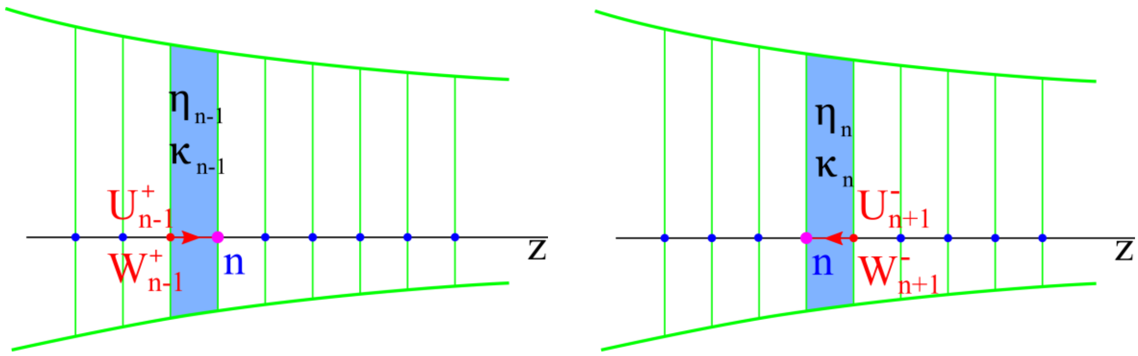

Рис. 17. Учет излучения, приходящего слева и справа, в адаптированном методе коротких характеристик

Первые слагаемые в U_{n}^{+} и U_{n}^{-} отвечают излучению, приходящему от ближайших слоев слева и справа от текущего узла сетки, и вычисляются точно. Вторые слагаемые аппроксимируют излучение, приходящее от ячеек, более отдаленных от данного узла. Эти слагаемые вычисляются приближенно, и их можно корректировать, вводя дополнительные множители. На рис. 18 и рис. 19 представлено сравнение решений, полученных с помощью методов длинных и коротких характеристик. В методе длинных характеристик использовалась корректировка телесного угла для удаленных ячеек. Данный метод наиболее эффективен для прозрачной плазмы.

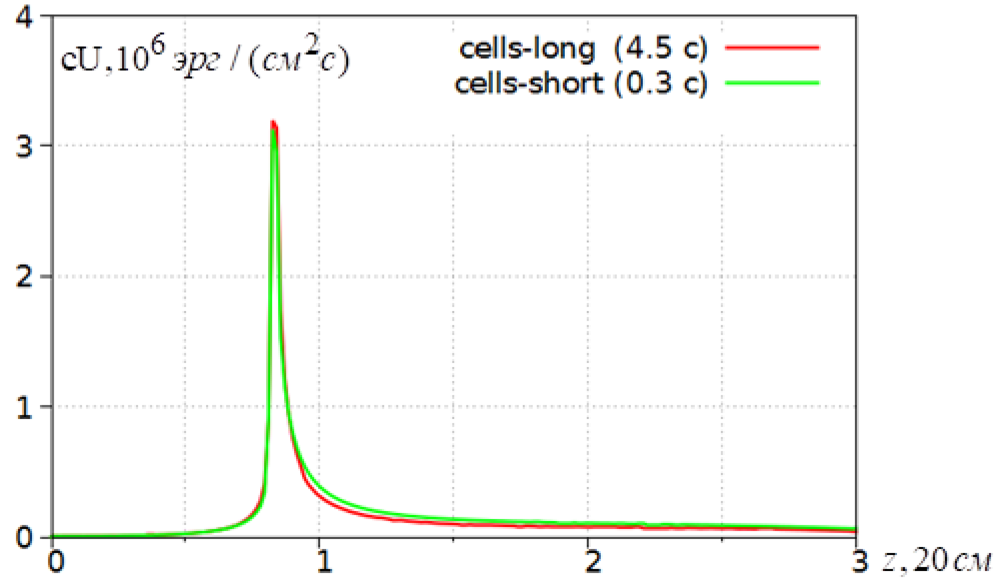

Рис. 18. Сравнение плотности энергии излучения, рассчитанной методом длинных и «коротких» характеристик

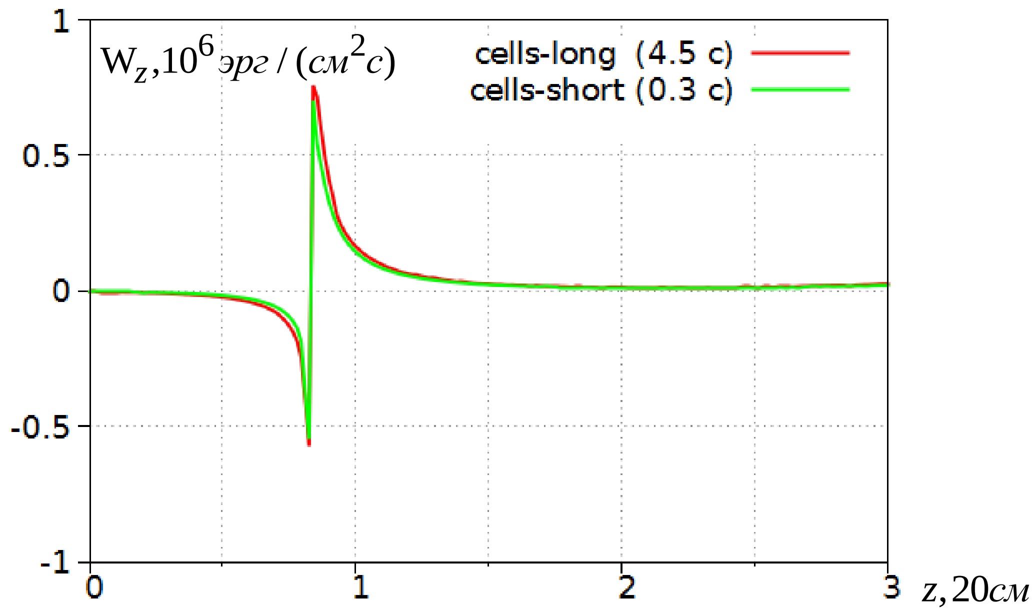

Рис. 19. Сравнение плотности потока энергии излучения, рассчитанной методом длинных и «коротких» характеристик

Далее сравним результаты расчетов переноса излучения, полученные на разных частотах на основе метода длинных характеристик (long) и с помощью адаптированного метода коротких характеристик (short). Для расчета переноса излучения методом коротких характеристик используем точечный источник, расположенный в точке с координатой z = 0.74, с единичной излучательной способностью $\eta = 1 эрг/(см^3 с\, стерад)$. Расчеты переноса излучения проведены для среды с разными коэффициентами поглощения. На рис. 20 и 21 представлены распределения плотности энергии излучения в линейном и логарифмическом масштабах соответственно. Очевидно, что наблюдаются существенные различия при переносе излучения в прозрачной ($l = 1/\kappa >> 1$) и непрозрачной ($l = 1/\kappa << 1$) областях спектра. Расчеты показали, что адаптированный метод коротких характеристик и метод длинных характеристик дают близкие результаты. На рис. 20 видно, что в широком диапазоне длин свободного пробега расчет переноса излучения является корректным. В то же время в логарифмическом масштабе на рис. 21 видно, что излучение в непрозрачной части спектра, рассчитанное с помощью модифицированного метода коротких характеристик, затухает быстрее, чем это происходит согласно точному решению, отвечающему методу длинных характеристик.

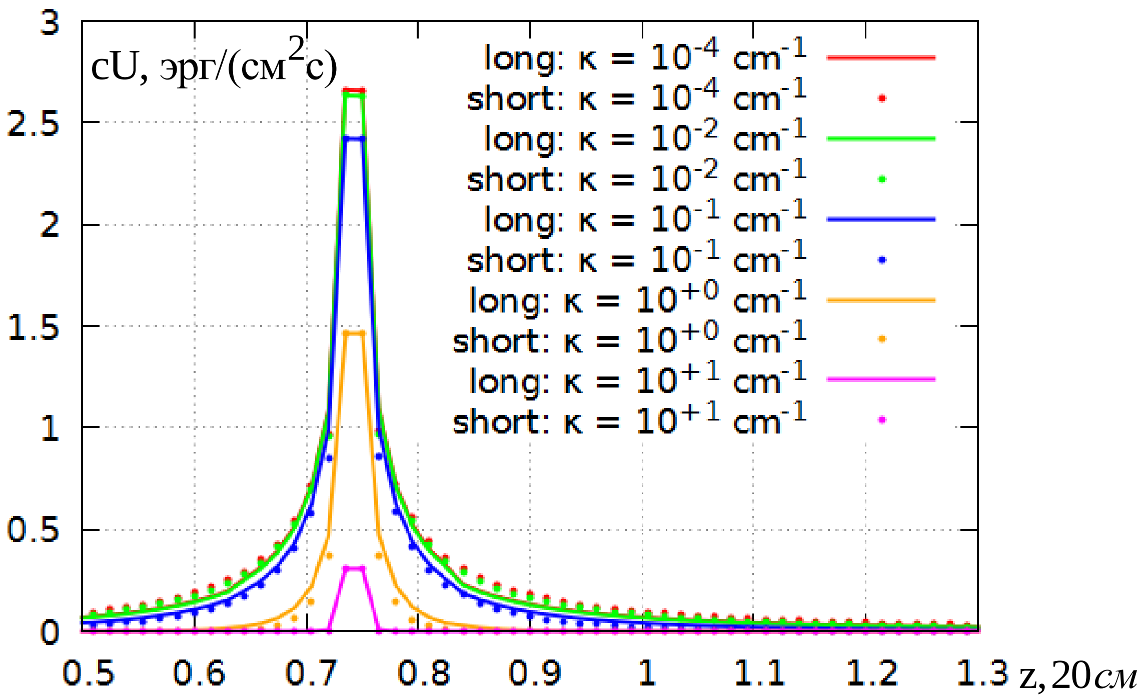

Рис. 20. Распределения плотности энергии излучения в канале для точечного источника (z = 0.74) при разных коэффициентах поглощения среды, постоянных вдоль канала. Сплошные линии – метод длинных характеристик, точки – адаптированный метод коротких характеристик.

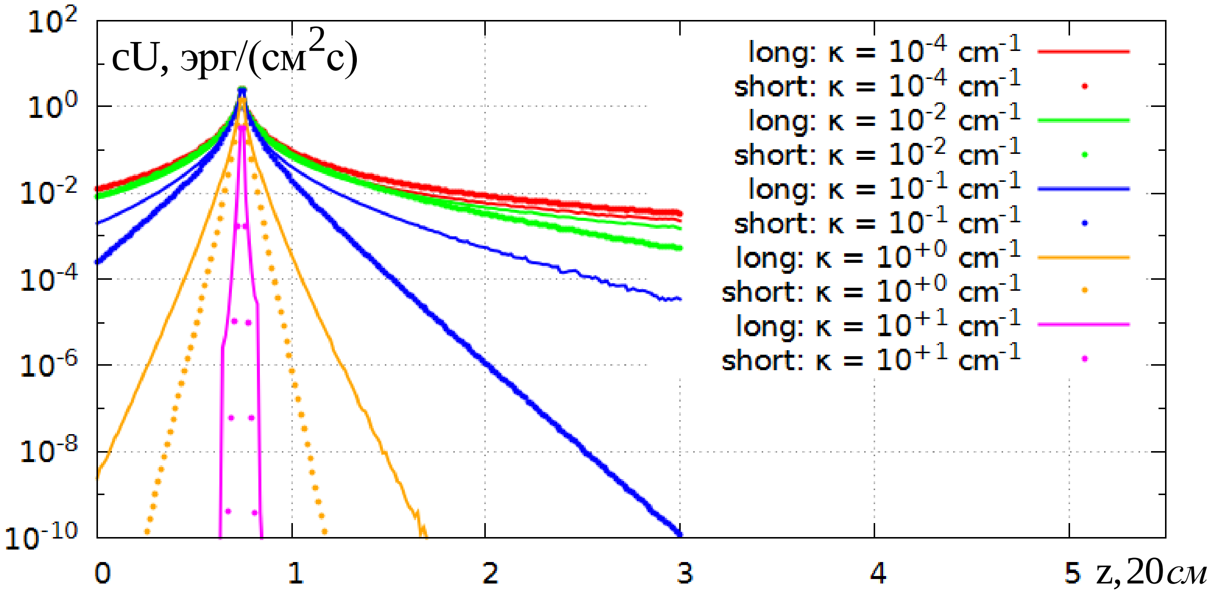

Рис. 21. Распределения плотности энергии излучения в логарифмическом масштабе для точечного источника в канале при разных коэффициентах поглощения среды, постоянных вдоль канала. Сплошные линии – метод длинных характеристик, точки – метод коротких характеристик.

Корректный расчет переноса излучения на больших расстояниях необходим для прозрачной части спектра ($\kappa << 1$, см. рис. 21). Для быстро затухающего излучения с малой длиной свободного пробега ($\kappa >> 1$, см. рис. 20) требуется адекватный расчет переноса излучения на малых расстояниях. Проведенные расчеты удовлетворяют данным требованиям согласно представленным графикам. Поэтому метод коротких характеристик оказывается пригодным для оценок и расчетов излучения в рассмотренной задаче.

С использованием изложенных методик написан компьютерный код, решающий задачу о переносе излучения в трёхмерной, двумерной и квазиодномерной геометрии методом длинных и коротких характеристик на неструктурированных сетках. В уравнении переноса излучения (1) частота играет роль независимого параметра, что позволяет использовать распараллеливание цикла по частоте. В имеющемся коде это сделано по технологии OpenMP и DVM. Метод длинных характеристик позволяет распараллелить компьютерный код по технологии OpenMP, также и цикл по координатным точкам, в отличие от метода коротких характеристик, где возникает дерево наследования информации от узла к узлу.

Заключение

Рассмотрены численные алгоритмы решения уравнения переноса излучения методом длинных и коротких характеристик для осесимметричных течений ионизующегося газа в коаксиальных каналах плазменных ускорителей. Оптимизация указанных методов в рамках квазиодномерного приближения, используемого для исследований течений, позволяет значительно сократить время расчета по сравнению с 3D моделью переноса излучения. Сравнение с точным трехмерным решением показывает, что предложенная адаптация метода длинных характеристик к квазиодномерной модели с использованием суммирования по границе и ячейкам позволяет получить корректные совпадающие результаты. Показано, что метод коротких характеристик, адаптированный к квазиодномерной модели, также пригоден для расчета переноса излучения, но его применимость требует проверки корректности решения и сравнения с результатом, поученным на основе метода длинных характеристик.

Библиографический список

1. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 3-87.
2. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 88-163.
3. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
4. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
5. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
6. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С.168-175.
7. Tereshin V.I., Bandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhlaj V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V. Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces // Plasma Phys. Contr. Fusion. 2007. V. 49. P. A231-A239.
8. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 176-185.
9. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 186-196.

10. Kozlov A.N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field // J. Plasma Physics. 2008. V. 74, No.2. P. 261-286.
11. Козлов А.Н. Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.
12. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1. С. 183-272.
13. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
14. Михалас Д. Звездные атмосферы (1 часть). М.: Мир, 1982. 352 с.
15. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
16. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
17. Имшенник В.С., Морозов Ю.П. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. М.: Атомиздат, 1981. 88 с.
18. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981. 454 с.
19. Castor John I. Lectures on radiation hydrodynamics. – Lawrence Livermore National Laboratory, 2000.
20. Ольховская О.Г., Гасилов В. А., Котельников А.М., Якобовский М.В. Параллельный алгоритм трассировки лучей для анализа поля излучения и построения обскурограмм излучающего газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 143. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-143.
21. Гасилов В.А. и др. Пакет прикладных программ MARPLE3D для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 1, с. 55–87.
22. Basko M.M., Maruhn J.A., Tauschwitz An. Development of a 2D Radiation-Hydrodynamics Code RALEF for Laser Plasma Simulations. // GSI Report 2010-1, GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, 2010, p. 410.
23. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г. Сравнение различных методов расчёта переноса излучения для трёхмерных задач. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2014, № 48, 14 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-48.
24. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at ionization front in the quasi-steady plasma accelerator // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2013, No.1. P. 128-130.
25. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
26. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука,1966.686 с.
27. Козлов А.Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.

28. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Пульсирующие режимы течений ионизующегося газа в коаксиальных плазменных ускорителях // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014, № 1. 28 с.
29. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизующегося газа в каналах плазменных ускорителей // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416.
30. Бармин А.А., Козлов А.Н. Структура стационарного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 155-167.
31. Козлов А.Н., Коновалов В.С. 3D модель переноса излучения в потоках ионизующегося газа и плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, № 86, 32 с.
32. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS). 2017. V. 51. P. 169-179.
33. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Radiation transport in the ionizing gas flow in the quasi-steady plasma accelerator // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 946. Ar. 012165.
34. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
35. Фортов В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
36. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука. 1979. 319 с.
37. Gu M.F. The flexible atomic code // Canadian Journal of Physics, 2008, V. 86. P. 675-689. https://doi.org/10.1139/p07-197.
38. Вичев И.Ю., Грушин А.С., Новиков В.Г., Соломянная А.Д. KIAM_DB: база атомных данных для расчетов спектральных свойств плазмы // Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016.
39. NIST Standard Reference Database 78. Atomic Spectra Database. https://dx.doi.org/10.18434/T4W30F.
40. Carlson B.G. A Method of Characteristics and Other Improvements in Solutions Methods for the Transport Equations // NSE. 1976. V. 61. P. 408-425.
41. Воронков А.В., Сычугова Е.П. Решение уравнения переноса нейтронов в двумерной R-Z и трехмерной X-Y-Z геометриях методом дискретных ординат // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 1995, № 6.
42. Сычугова Е.П. Численные методы решения уравнения переноса в многогрупповом приближении в трехмерной геометрии в пакете «РЕАКТОР» // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2007, № 78, 22 с.
43. Цыбулин И.В., Скалько Ю.И., Павлова Е.С. Распределенный метод длинных характеристик для решения уравнения переноса излучения // Труды Московского физико-технического института. 2015. Т. 7, № 2. С.51–59.