



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 46 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Зверяев Е.М., Коваленко М.Д.,
Абруков Д.А., Меньшова И.В.,
Кержаев А.П.**

Примеры точных решений
задач изгиба пластины со
свободными лицевыми
плоскостями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Примеры точных решений задач изгиба пластины со свободными лицевыми плоскостями / Е.М.Зверяев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 46. 17 с. doi:[10.20948/prepr-2019-46](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-46)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-46>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**Е.М. Зверяев, М.Д. Коваленко, Д.А. Аbruков,
И.В. Меньшова, А.П. Кержаев**

**Примеры точных решений
задач изгиба пластины
со свободными лицевыми плоскостями**

Москва — 2019

Зверяев Е.М., Коваленко М.Д., Аbruков Д.А., Меньшова И.В., Кержаев А.П.

Примеры точных решений задач изгиба пластины со свободными лицевыми плоскостями

В статье рассматриваются примеры точных решений краевой задачи об изгибе тонкой упругой полубесконечной пластины, у которой длинные стороны свободны, а на торце заданы самоуравновешенные изгибающий момент и обобщенная поперечная сила. Решения получены в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. Неизвестные коэффициенты разложений определяются по замкнутым формулам и выражаются через интегралы Фурье от заданных на торце полуполосы граничных функций.

Ключевые слова: изгиб, полоса, пластина, собственные функции Папковича–Фадля, точные решения

Evgeniy Mikhailovich Zveryaev, Mikhail Denisovich Kovalenko, Denis Aleksandrovich Abruков, Irina Vladimirovna Menshova, Aleksandr Petrovich Kerzhaev

Examples of exact solutions to problems of bending of a plate with free face planes

In this article, we consider examples of exact solutions to the boundary value problem on the bending of a thin elastic semi-infinite plate in which the long sides are free and, at the end, a self-balanced bending moment and a generalized shearing force are specified. The solutions are obtained in the form of series in Papkovich–Fadle eigenfunctions. The unknown expansion coefficients are determined by closed formulas and are expressed via the Fourier integrals of the boundary functions specified at the half-strip end.

Key words: bending, strip, plate, Papkovich–Fadle eigenfunctions, exact solutions

1. Введение

С использованием формул, полученных в работе [1], приводятся примеры точных решений краевых задач теории изгиба тонкой упругой полубесконечной пластинки со свободными лицевыми плоскостями, у которой на торце заданы самоуравновешенные изгибающий момент и обобщенная поперечная сила (четно-симметричная деформация). Список принятых в статье обозначений можно найти в [1]. В основе полученных решений лежит теория, развитая при решении плоской задачи теории упругости в полуполосе [2]. Решения представляются в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в простой замкнутой форме. В упомянутой статье [1] имеются ссылки на публикации с приближенными решениями задач изгиба тонких прямоугольных пластин, а также по бигармонической проблеме в целом, примером которой является рассматриваемая задача.

2. Формулы, описывающие решения

Приведем полученные в [1] окончательные формулы для всех прогибов, углов поворота, поперечных сил и моментов, разделив их на две группы:

1) на торце полуполосы задан изгибающий момент $M_x(0, y) = M_x(y)$ и обобщенная поперечная сила $K_x(0, y) = 0$:

$$\begin{aligned}
 W &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 - \nu y^2(C_3 + 3C_4x) - \\
 &- m_{x1} \frac{\omega(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x - 1) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
 \Phi_x &= C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 - 3\nu y^2 C_4 - m_{x1} \frac{\varphi_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x - \\
 &- \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\varphi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
 \Phi_y(x, y) &= -2\nu y(C_3 + 3C_4x) - \\
 &- m_{x1} \frac{\varphi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x - 1) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\varphi_y(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
 M_x &= -2(1 - \nu^2)(C_3 + 3C_4x) - m_{x1} \frac{\mu_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x - 1) - \\
 &- \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

$$M_y = -m_{x1} \frac{\mu_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1^2 (\lambda_1 x + 1) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)},$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= 6\nu(1-\nu)C_4y - m_{x1} \frac{\mu_{xy}(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \lambda_k \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_x &= -6(1-\nu)^2 C_4 - m_{x1} \frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \lambda_k \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_y &= -m_{x1} \frac{\chi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1^2 (\lambda_1 x + 1) - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \lambda_k \lambda_k \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}; \\
2) \text{ на торце полуполосы } &K_x(0, y) = K_x(y), M_x(0, y) = 0: \\
W &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 - \nu y^2(C_3 + 3C_4x) + \\
&\quad + k_{x1} \frac{\omega(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{M_1} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
\Phi_x &= C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 - 3\nu y^2 C_4 - k_{x1} \frac{\omega(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{M_1} (\lambda_1 x + 1) - \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
\Phi_y &= -2\nu y(C_3 + 3C_4x) + k_{x1} \frac{\varphi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{M_1} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\varphi_y(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_x &= -2(1-\nu^2)(C_3 + 3C_4x) + k_{x1} \frac{\mu_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{M_1} x + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_y &= k_{x1} \frac{\mu_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1 (\lambda_1 x + 2) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\mu_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_{xy} &= 6\nu(1-\nu)C_4y + k_{x1} \frac{\mu_{xy}(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1 M_1} (\lambda_1 x + 1) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_x(x, y) &= -6(1-\nu)^2 C_4 + k_{x1} \frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1 M_1} (\lambda_1 x + 1) + \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_y(x, y) &= k_{x1} \frac{\chi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1 (\lambda_1 x + 2) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Числа m_{xk} , k_{xk} определяются по формулам:

$$m_{xk} = \int_{-h}^h M_x(y) \frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k h} dy, \quad k_{xk} = - \int_{-h}^h K_x(y) \frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k h} dy. \quad (2.3)$$

3. Примеры решений

Будем считать далее, что $h=1$, $\nu=1/3$, $a=0.6$. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть на торце полуполосы $K_x(y) = 0$,

$$M_x(y) = \begin{cases} y^4 - \frac{6}{5}y^2a^2 + \frac{a^4}{5} & (|y| \leq a); \\ 0 & (a \leq |y| \leq h). \end{cases} \quad (3.1)$$

Функция (3.1) самоуравновешенная, поэтому $C_3 = 0$. По формуле

$$m_{xk} = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy = \int_{-a}^a \left(y^4 - \frac{6}{5}y^2a^2 + \frac{a^4}{5} \right) \frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k h} dy \quad (3.2)$$

найдем коэффициенты Лагранжа. Подставив (3.2) в формулы (2.1), получим решение задачи.

На рис. 1–4 показаны кривые, иллюстрирующие решение.

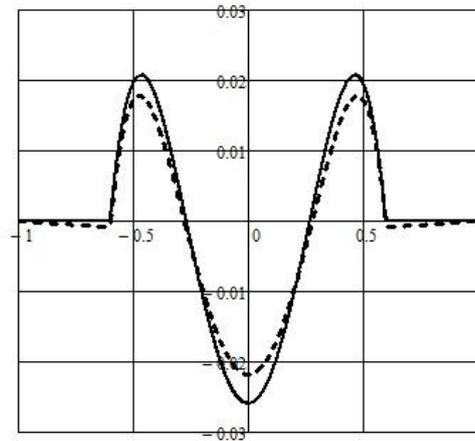


Рис. 1. Распределение изгибающих моментов $M_x(0, y)$ (сплошная линия) и $M_y(0, y)$ (штриховая линия)

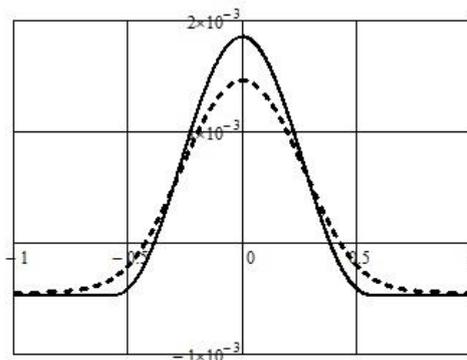


Рис. 2. Прогибы $W(0, y)$ (сплошная линия) и $W(0.2, y)$ (штриховая линия)

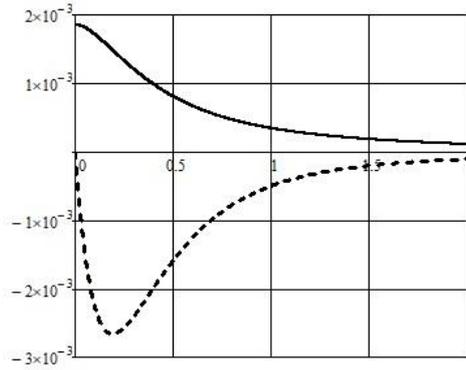


Рис. 3. Прогиб $W(x,0)$ (сплошная линия) и угол поворота $\Phi_x(x,0)$ (штриховая линия)

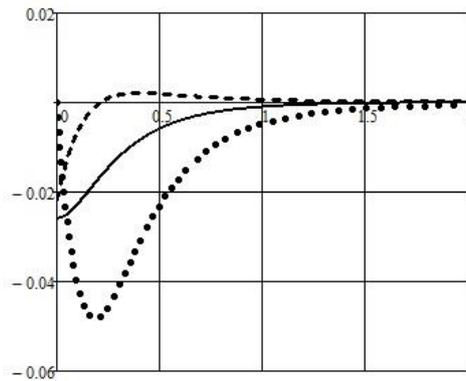


Рис. 4. Моменты $M_x(x,0)$ (сплошная линия), $M_y(x,0)$ (штриховая линия) и поперечная сила $K_x(x,0)$ (точечная кривая)

Пример 2. Пусть теперь на торце пластины $M_x(y)=0$, функция $K_x(y)$ имеет вид (3.1). Тогда

$$k_{xk} = \int_{-h}^h K_x(y) k_{xk}(y) dy = - \int_{-a}^a \left(y^4 - \frac{6}{5} y^2 a^2 + \frac{a^4}{5} \right) \frac{\cos \lambda_k y}{2 \lambda_k \sin \lambda_k h} dy = -m_{xk}. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (2.2), получим решение задачи.

На рис. 5–7 показаны графики, иллюстрирующие решение.

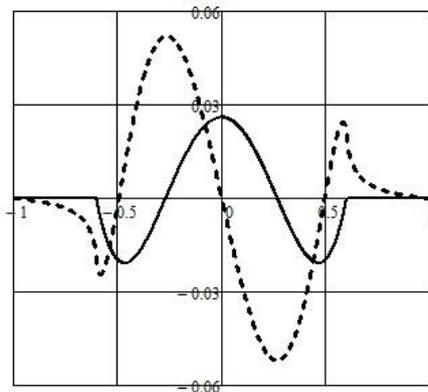


Рис. 5. Поперечные силы $K_x(0,y)$ (сплошная линия) и $K_y(0,y)$ (штриховая линия)

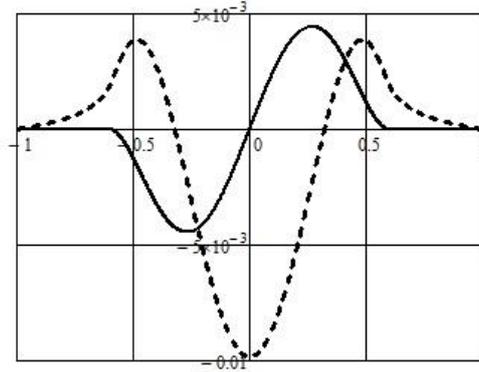


Рис. 6. Моменты $M_{xy}(0, y)$ (сплошная линия) и $M_y(0, y)$ (штриховая линия)

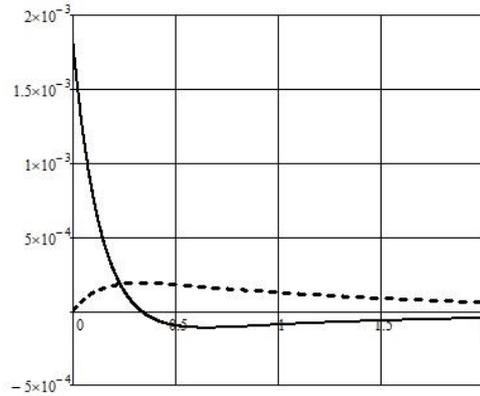


Рис. 7. Угол поворота $\Phi_x(x, 0)$ (сплошная линия) и прогиб $W(x, 0)$ (штриховая линия)

Пример 3. Пусть на торце полуполосы $M_x(y) = 0$, а вместо $K_x(y)$ задан крутящий момент $M_{xy}(0, y) = M_{xy}(y)$. Учитывая связь между финитными частями биортогональных функций [1]

$$m_{xyk}(y) = -\frac{d}{dy}k_x(y) \quad (3.4)$$

и интегрируя по частям, получим, например

$$\begin{aligned} k_{xk} &= \int_{-h}^h K_x(y)k_{xk}(y)dy = -\int_{-a}^a \left(y^4 - \frac{6}{5}y^2a^2 + \frac{a^4}{5} \right) \left(\int m_{xyk}(y)dy \right) dy = \\ &= \int_{-a}^a M_{xy}(y)m_{xyk}(y)dy = m_{xk}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$M_{xy}(y) = \int \left(y^4 - \frac{6}{5}y^2a^2 + \frac{a^4}{5} \right) dy = \frac{1}{5} \left(y^5 - 2y^3a^2 + ya^4 \right). \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) можно записать и в такой форме:

$$K_x(y) = \frac{d}{dy}M_{xy}(y). \quad (3.7)$$

Допустим, что

$$M_x(y) = 0, M_{xy}(y) = y. \quad (3.8)$$

Согласно (3.7), задача эквивалентна следующей:

$$K_x(y) = 1 - [\delta(y-h) + \delta(y+h)], M_x(y) = 0. \quad (3.9)$$

Этот результат можно рассматривать как следствие известных в классической теории пластин статически эквивалентных преобразований Томсона–Гэта [3].

4. Собственные функции Папковича–Фадля

Введем три новые функции Папковича–Фадля, аналогичные тем, что были использованы в плоской задаче теории упругости в задачах для полуполосы с разрывами перемещений [2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_k, y) &= -m_{xy}(\lambda_k, y) + \frac{i}{2}[m_y(\lambda_k, y) - m_x(\lambda_k, y)], \\ \Psi(\lambda_k, y) &= -\frac{\nu-1}{2}X(\lambda_k, y) + \frac{\nu-3}{2}m_{xy}(\lambda_k, y) + i\frac{\nu m_y(\lambda_k, y) - m_x(\lambda_k, y)}{\nu+1}, \\ F(\lambda_k, y) &= \frac{\nu-1}{2}X(\lambda_k, y) - \frac{1+\nu}{2}m_{xy}(\lambda_k, y) + i(\nu-1)\varphi'_y(\lambda_k, y), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$X_y(\lambda_k, y) = \int \chi_y(\lambda_k, y) dy.$$

В приложении приведены полезные формулы, которые были использованы при построении выражений (4.1).

Как и в плоской задаче теории упругости, функции (4.1) удовлетворяют равенствам

$$\frac{d}{dy}\Psi(\lambda_k, y) = i\lambda_k\Phi(\lambda_k, y), \quad \frac{d}{dy}\Phi(\lambda_k, y) = i\lambda_k F(\lambda_k, y) \quad (4.2)$$

и равенству

$$\Psi(\lambda_k, y) = 2\Phi(\lambda_k, y) - F(\lambda_k, y). \quad (4.3)$$

Представим формулы (4.1) в таком виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_k, y) &= \Phi^S(\lambda_k, y) + i\Phi^C(\lambda_k, y), \quad \Psi(\lambda_k, y) = \Psi^S(\lambda_k, y) + i\Psi^C(\lambda_k, y), \\ F(\lambda_k, y) &= F^S(\lambda_k, y) + iF^C(\lambda_k, y). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi^S(\lambda_k, y) &= -\frac{\lambda_k^3(1-\nu)}{2} \left[((\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + 2 \sin \lambda_k h) \sin \lambda_k y - \right. \\ &\quad \left. - (\nu-1)\lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \right], \\ \Phi^C(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k^3(1-\nu)}{2} \left[(-(\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h - 2 \sin \lambda_k h) \cos \lambda_k y - \right. \\ &\quad \left. - (\nu-1)\lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^S(\lambda_k, y) &= -\frac{\lambda_k^3(1-\nu)}{2} \left[((\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu+1) \sin \lambda_k h) \sin \lambda_k y - \right. \\
&\quad \left. - (\nu-1)\lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \right], \\
F^S(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k^3(1-\nu)}{2} \left[((\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + (3-\nu) \sin \lambda_k h) \sin \lambda_k y - \right. \\
&\quad \left. - (\nu-1)\lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \right], \\
F^C(\lambda_k, y) &= -\frac{\lambda_k^3(1-\nu)}{2} \left[((\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + (3-\nu) \sin \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \right. \\
&\quad \left. + (\nu-1)\lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right], \\
\Psi^C(\lambda_k, y) &= -\frac{\lambda_k^3(1-\nu)}{2} \left[((\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu+1) \sin \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \right. \\
&\quad \left. + (\nu-1)\lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right].
\end{aligned} \tag{4.5}$$

По формулам (4.4) найдем

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_k, y) &= -e^{i\lambda_k y} \frac{\lambda_k^3(\nu-1)}{2i} \left[(-(\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + 2 \sin \lambda_k h) + \right. \\
&\quad \left. + (\nu-1)\lambda_k i y \sin \lambda_k h \right], \\
\Psi(\lambda_k, y) &= -e^{i\lambda_k y} \frac{\lambda_k^3(\nu-1)}{2i} \left[(-(\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + (\nu+1) \sin \lambda_k h) + \right. \\
&\quad \left. + (\nu-1)\lambda_k i y \sin \lambda_k h \right], \\
F(\lambda_k, y) &= -e^{i\lambda_k y} \frac{\lambda_k^3(\nu-1)}{2i} \left[(-(\nu-1)\lambda_k h \cos \lambda_k h + (3-\nu) \sin \lambda_k h) + \right. \\
&\quad \left. + (\nu-1)\lambda_k i y \sin \lambda_k h \right].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Заменим в этих формулах iy на $z = x + iy$. Тогда функции (4.6) можно рассматривать как определенные при $x=0$ значения аналитических функций $\Phi(\lambda_k, z)$, $\Psi(\lambda_k, z)$, $F(\lambda_k, z)$. С использованием этих функций можно строить точные решения для бесконечной полосы с разрывами прогибов, углов поворота, изгибающих моментов или поперечных сил. Примеры решений аналогичных задач плоской теории упругости можно найти в статьях [2, 4–6].

Биортогональные к собственным функциям Папковича–Фадля функции $\Phi(\lambda_k, y)$, $\Psi(\lambda_k, y)$ и $F(\lambda_k, y)$ находятся так же, как в статье [2], т.е. как решения уравнений

$$\begin{aligned}
a) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, y) \Phi_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda, y) \Psi_k(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \\
c) \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, y) F_k(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda - \lambda_k)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Полагая

$$\begin{aligned}\Phi_k(y) &= \Phi_k^S(y) - i\Phi_k^C(y), \quad \Psi_k(y) = \Psi_k^S(y) - i\Psi_k^C(y), \\ F_k(y) &= F_k^S(y) - iF_k^C(y),\end{aligned}\quad (4.8)$$

вместо уравнений (4.7) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}a) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^S(\lambda, y) \Phi_k^S(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & b) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^C(\lambda, y) \Phi_k^C(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ c) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^S(\lambda, y) \Psi_k^S(y) dy &= \frac{\lambda \lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & d) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^C(\lambda, y) \Psi_k^C(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ e) \int_{-\infty}^{\infty} F^S(\lambda, y) F_k^S(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, & f) \int_{-\infty}^{\infty} F^C(\lambda, y) F_k^C(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Формулы для финитных частей соответствующих биортогональных функций определяются так же, как это было сделано раньше:

$$\begin{aligned}a) \varphi_k^S(y) &= \frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h}, & b) \varphi_k^C(y) &= -\frac{\cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h}, & c) \psi_k^S(y) &= \frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h}, \\ d) \psi_k^C(y) &= -\frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h} + \frac{\delta(y-h) + \delta(y+h)}{2}, \\ e) \psi_0^C(y) &= \frac{\nu[\delta(y-h) + \delta(y+h)]}{2(1+\nu)}, \\ f) f_k^S(y) &= \frac{1}{2\lambda_k} \left\{ \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - \frac{y}{h} \right\}, & g) f_k^C(y) &= -\frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k h}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Рассмотрим еще две задачи.

Задача 1. Пусть в бесконечной пластине $\{\Pi: |y| \leq h, |x| < \infty\}$ задан разрыв прогибов

$$W^+(0, y) - W^-(0, y) = 2W(y). \quad (4.11)$$

Остальные функции (углы поворота, моменты и поперечные силы) на стыке $\{x=0, |y| \leq h\}$ правой $\{\Pi^+ | y| \leq h, x \geq 0\}$ и левой $\{\Pi^- | y| \leq h, x \leq 0\}$ пластин остаются непрерывными. Через $W^\pm(0, y)$ обозначены равные $\pm W(y)$ прогибы соответственно справа и слева на разрыве.

Воспользуемся функциями $\Phi(\lambda_k, y), F(\lambda_k, y)$, чтобы сформулировать краевую задачу. По аналогии с плоской задачей теории упругости [2] получим два уравнения ($\text{Re } \lambda_k < 0$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[a_k^+ \Phi(\lambda_k, y)] - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[a_k^- \Phi(-\lambda_k, y)] &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[a_k^+ F(\lambda_k, y)] - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \text{Re}[a_k^- F(-\lambda_k, y)] &= 2iF^C(y),\end{aligned}\quad (4.12)$$

где

$$F^C(y) = (\nu - 1)\Phi'_y(y) = (\nu - 1)W''(y), \quad (4.13)$$

a_k^+ , a_k^- — неизвестные коэффициенты разложений соответственно для правой и левой пластин.

Обозначим

$$s_1 = \lambda_1, \quad s_2 = -\lambda_1, \quad s_3 = \lambda_2, \quad s_4 = -\lambda_2, \dots, \quad a_k^+ = A_k, \quad a_k^- = -A_k. \quad (4.14)$$

Тогда уравнения (4.12) можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(A_k \Phi(s_k, y)) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(A_k F(s_k, y)) = 2iF^C(y). \quad (4.15)$$

Пользуясь соотношениями биортогональности, вытекающими из формул (4.9), для каждого номера $k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_k s_k N_k + \overline{A_k s_k N_k} = 0, \\ A_k N_k + \overline{A_k N_k} = 2f_k^C, \quad (N_k = 2M_k), \end{cases} \quad (4.16)$$

где

$$f_k^C = \int_{-h}^h (\nu - 1)W''(y) f_k^C(y) dy = \int_{-h}^h W(y) w_k(y) dy = w_k. \quad (4.17)$$

Решая систему уравнений (4.16) и возвращаясь к обозначениям (4.14), найдем

$$a_k^+ = \frac{-\overline{\lambda_k}(w_k + \overline{w_k})}{(\lambda_k - \overline{\lambda_k})M_k}. \quad (4.18)$$

Формула (4.18) совпадает с формулой (3.2) из статьи [1], когда на торце полуполосы задан самоуравновешенный изгибающий момент $M_x(y)$, а $K_x(y) = 0$. Поэтому решение рассматриваемой задачи будет описываться формулами (2.1), если в них коэффициенты Лагранжа m_{xk} заменить на w_k . Заметим, что если в формуле (4.17) принять $M_x(y) = -(\nu - 1)W''(y)$ и учесть, что $\varphi_k^C(y) = -m_{xk}(y)$, то получим $f_k^C = m_{xk}$.

Задача 2. Пусть в полосе Π на стыке правой и левой пластин задан разрыв угла поворота

$$\Phi_x^+(0, y) - \Phi_x^-(0, y) = 2\Phi_x(y). \quad (4.19)$$

Остальные функции (прогиб, моменты и поперечные силы) на стыке остаются непрерывными. Через $\Phi_x^\pm(0, y)$ обозначены равные $\pm\Phi_x(y)$ углы поворота, соответственно справа и слева на разрыве.

Вновь воспользуемся функциями $\Phi(\lambda_k, y)$, $F(\lambda_k, y)$ для того, чтобы сформулировать краевую задачу. В соответствии с формулой

$$M_{xy}(x, y) = (\nu - 1) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}$$

имеем

$$\Phi^S(\lambda_k, y) = -(\nu - 1)\varphi'_x(\lambda_k, y). \quad (4.20)$$

Поэтому на разрыве получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}[a_k^+ \Phi(\lambda_k, y)] - \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}[a_k^- \Phi(-\lambda_k, y)] &= 2\Phi^S(y), \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}[a_k^+ F(\lambda_k, y)] - \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}[a_k^- F(-\lambda_k, y)] &= 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\Phi^S(y) = -(\nu - 1)\Phi'_x(y). \quad (4.22)$$

Соответствующая система алгебраических уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} A_k s_k N_k + \overline{A_k s_k N_k} = 2\varphi_k^S, \\ A_k N_k + \overline{A_k N_k} = 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

где

$$\varphi_k^S = \int_{-h}^h -(\nu - 1)\Phi'_x(y)\varphi_k^S(y)dy = \int_{-h}^h \Phi_x(y)f_{xk}(y)dy = f_{xk}. \quad (4.24)$$

Из (4.23) найдем

$$a_k^+ = \frac{f_{xk} + \overline{f_{xk}}}{(\lambda_k - \overline{\lambda_k})M_k}. \quad (4.25)$$

Формула (4.25) совпадает с формулой (3.2) из статьи [1], когда на торце полуполосы задана самоуравновешенная поперечная сила $K_x(y)$, а изгибающий момент $M_x(y) = 0$. Поэтому решение рассматриваемой задачи будет описываться формулами (2.2), если в них коэффициенты Лагранжа k_{xk} заменить на f_{xk} .

Если в выражении (4.24) интегрирование по частям выполнить иначе и принять, что $K_x(y) = -(\nu - 1)\Phi''_x(y)$, то получим

$$\varphi_k^S = \int_{-h}^h -(\nu - 1)\Phi'_x(y)\varphi_k^S(y)dy = \int_{-h}^h -(\nu - 1)\Phi''_x(y)k_{xk}(y)dy = k_{xk}. \quad (4.26)$$

5. Обсуждение результатов

1. В статьях [2, 4] было показано, что для того, чтобы граничным условиям на торце полуполосы придать математически строгий характер, нужно решение из правой полуполосы продолжить в левую так, чтобы для правой полуполосы выполнялись требуемые граничные условия на торце. В плоской задаче теории упругости это можно сделать, задавая на стыке полуполос разрывы продольных или поперечных перемещений. В задаче изгиба пластин на стыке полуполос задаются разрывы прогибов и углов поворота относительно оси y . Следуя [2], рассмотрим свободную от напряжений, но не плоскую, а деформированную

правую пластину, в каждой точке которой прогиб $W(x, y)$ описывается формулой (2.1). Одновременно с правой рассмотрим такую же деформированную левую пластину с прогибами, равными $-W(x, y)$, т.е. направленными в противоположную сторону. Приложим к обеим деформированным пластинам некоторую внешнюю поверхностную нагрузку, такую, что после этого они приобретут форму плоских полос. В конечном положении эта нагрузка ортогональна к плоскости правой и левой полосы и равна соответственно $q(x, y)$ и $-q(x, y)$. Непрерывно соединим полосы вдоль их прямолинейных торцов и затем снимем внешнюю нагрузку. В результате получим плоскую бесконечную полосу, в которой поперечные силы, моменты, прогиб и углы поворота определяются по формулам (2.1), а граничные условия выполняются строго на прямолинейных (недеформированных) сторонах плоских полос. Нагрузку $q(x, y)$ можно определить, если подставить формулу (2.1) для прогиба $W(x, y)$ в уравнение совместности деформаций в перемещениях. Тогда получим

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (5.1)$$

Аналогичные операции сделаем при соединении правой и левой полос с разрывом угла поворота. На рис. 8 показаны сечения правой и левой деформированных полуполос вдоль оси симметрии x и их взаимное положение перед соединением в бесконечную полосу. Сплошным кривым соответствует задача с разрывом прогибов, пунктирным — задача с разрывом углов поворота.

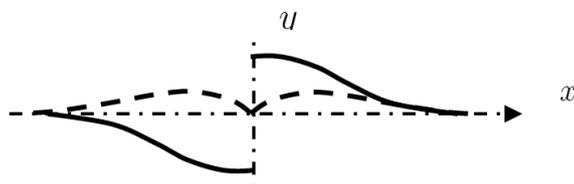


Рис. 8. Положение правой и левой полос перед их соединением в бесконечную полосу

2. Напряжения (поперечные силы и моменты), которые при этом возникают в плоской полосе, называются остаточными. Для них, как известно, не выполняется условие совместности деформаций (5.1). Если полосу вновь разрезать по линии стыка полос, то остаточные напряжения сбрасываются, а полосы приобретают первоначальную форму деформированных полос с ненулевыми прогибами и углами поворота, но с нулевыми поперечными силами и моментами. Отличительной особенностью решений, описывающих остаточные напряжения, является то, что в этом случае граничные условия ставятся строго на прямолинейных границах полосы. В классической теории изгиба пластин внешние нагрузки по границам полосы по умолчанию переносятся на недеформированные поверхности. Благодаря этому уравнение совместности деформаций (5.1) выполняется (подробнее этот вопрос был рассмотрен в статье [2]).

3. Из физических соображений понятно, что изгибающие моменты и поперечные силы на стыке полуполос самоуравновешены. Поэтому в уравнениях (4.12), (4.21) нет слагаемых, соответствующих элементарным решениям. Кроме того, если функция $W(y)$ в формуле (4.11) и функция $\Phi_x(y)$ в формуле (4.19) не равны нулю на концах отрезка, то сброс остаточных напряжений будет сопровождаться относительными перемещениями полос (одна вверх, другая вниз) на величину

$$C_1 = w_0 = \int_{-h}^h w(y)w_0(y)dy = \frac{\nu}{\nu+1}w(h) \quad (5.2)$$

и относительными поворотами (одна по часовой стрелке, другая — против) на угол

$$C_2 = f_{x0} = \int_{-h}^h \Phi_x(y)f_{x0}(y)dy = \frac{\nu}{\nu+1}\Phi_x(h) \quad (5.3)$$

как абсолютно жестких.

4. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если на торце пластины $K_x(0, y) = 0$, то тогда и $M_{xy}(0, y) = 0$. Это прямо следует из формулы (2.1) для момента $M_{xy}(x, y)$.

5. Рассмотрим решение (2.1) для бесконечной пластины с остаточными напряжениями. Разрежем пластину по оси y и заменим действие левой части на правую приложенными к ее торцу изгибающими моментами $M_x(y)$. Обратим внимание на то, что стороны прямолинейны и граничные условия выполняются строго на прямолинейных сторонах пластины. Рассмотрим также краевую задачу для пластины со свободными лицевыми плоскостями в традиционной формулировке, когда стороны пластины прямолинейны до деформации и искривляются только после приложения нагрузки. В качестве такой выберем рассмотренную выше пластину с остаточными напряжениями. Пусть на ее торце $M_x(0, y) = -M_x(y)$, $K_x(0, y) = 0$. При этом изгибающий момент на торце станет равным нулю и, следовательно, обратятся в нуль поперечные силы и моменты во всей пластине, т.е. остаточные напряжения сбрасываются и при этом возникают перемещения (2.1). Таким образом, если в краевой задаче для пластины, рассматриваемой в классической постановке, задать на торце нормальные напряжения $M_x(0, y) = -M_x(y)$, то в ней возникнут поперечные силы и моменты, равные по величине и обратные по знаку остаточным. Но перемещения будут того же знака, т.к. они совпадают с перемещениями, возникающими при сбросе остаточных напряжений. Отсюда следует, что формулы (2.1) описывают также классическое решение об изгибе пластины с заданными на ее торце изгибающим моментом $M_x(0, y) = M_x(y)$ и нулевой поперечной силой $K_x(0, y) = 0$. При этом прогиб и углы поворота в формулах (2.1) нужно взять с обратным знаком.

Приложение. Некоторые использованные в работе формулы

В этом разделе собраны некоторые полезные формулы, полученные на основании следующих выражений:

$$\Phi_x(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y},$$

$$M_x(x, y) = -\left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right], \quad M_y(x, y) = -\left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right],$$

$$M_{xy}(x, y) = (v-1) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y},$$

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial M_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y}, \quad Q_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x},$$

$$K_x(x, y) = Q_x(x, y) + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y}, \quad K_y(x, y) = Q_y(x, y) + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 M_x(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

В них, для удобства, вместо собственных функций Папковича–Фадля использованы порождающие функции. Дифференцирование по переменной y обозначено штрихом. Операция дифференцирования по переменной x обозначена как α . Тогда $\alpha = \partial / \partial x$, $\alpha^2 = \partial^2 / \partial x^2$ и т.д. С учетом этих обозначений можно записать, например

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \{ \omega(\lambda, y) e^{\lambda x} \} = \lambda^2 \omega'(\lambda, y).$$

Формулы для порождающих функций:

- 1) $\lambda^2 \mu_x(\lambda, y) + 2\lambda \mu'_x(\lambda, y) + \mu''_x(\lambda, y) = 0$, 2) $\lambda^4 \omega(\lambda, y) + 2\lambda^2 \omega''(\lambda, y) + \omega''''(\lambda, y) = 0$,
- 3) $\mu_x(\lambda, y) = -\lambda^2 \omega(\lambda, y) - v \omega''(\lambda, y) = -[\lambda \varphi_x(\lambda, y) + v \varphi'_y(\lambda, y)]$,
- 4) $\mu_y(\lambda, y) = -\omega''(\lambda, y) - v \lambda^2 \omega(\lambda, y) = -[\varphi'_y(\lambda, y) + v \lambda \varphi_x(\lambda, y)]$,
- 5) $\mu_{xy}(\lambda, y) = (v-1) \lambda \omega'(\lambda, y) = (v-1) \lambda \varphi_y(\lambda, y) = (v-1) \lambda \varphi'_x(\lambda, y)$,
- 6) $\mu_y(\lambda, y) - \mu_x(\lambda, y) = (v-1) \varphi'_y(\lambda, y) - (v-1) \lambda \varphi_x(\lambda, y)$,
- 7) $\mu_y(\lambda, y) - v \mu_x(\lambda, y) = (v^2 - 1) \omega''(\lambda, y)$,
- 8) $\mu_x(\lambda, y) - v \mu_y(\lambda, y) = (v^2 - 1) \lambda^2 \omega(\lambda, y) = (v^2 - 1) \lambda \varphi_x(\lambda, y)$,
- 9) $\kappa_x(\lambda, y) = -\lambda^3 \omega(\lambda, y) - \lambda \omega''(\lambda, y)$, 10) $\kappa_y(\lambda, y) = -\lambda^2 \omega'(\lambda, y) - \omega'''(\lambda, y)$,
- 11) $\lambda \kappa_y(\lambda, y) = \kappa'_x(\lambda, y)$,
- 12) $\chi_x(\lambda, y) = \kappa_x(\lambda, y) + \mu'_{xy}(\lambda, y) = -\lambda^3 \omega(\lambda, y) - (2-\lambda) \lambda \omega''(\lambda, y)$,
- 13) $\chi_y(\lambda, y) = \kappa_y(\lambda, y) + \lambda \mu_{xy}(\lambda, y) = -\omega'''(\lambda, y) - (2-\lambda) \lambda^2 \omega'(\lambda, y)$,

$$14) \lambda \chi_x(\lambda, y) = -\mu_y''(\lambda, y), \quad 15) \chi_y'(\lambda, y) = -\lambda^2 \mu_x(\lambda, y),$$

$$16) 2\lambda \mu_{xy}'(\lambda, y) = \chi_y'(\lambda, y) + \lambda \chi_x(\lambda, y),$$

$$17) 2\lambda \mu_{xy}(\lambda, y) = \chi_y(\lambda, y) - \mu_y'(\lambda, y) = \frac{2}{1+\nu} [\mu_x(\lambda, y) - \nu \mu_y(\lambda, y)]'.$$

Библиографический список

1. О разложениях по функциям Папковича–Фадля в задаче изгиба пластины / Е.М. Зверяев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 38. 28 с. doi:10.20948/prepr-2019-38 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-38>
2. О свойствах точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе и их приложение к теории остаточных напряжений в горных породах / Е.М. Зверяев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 56. 28 с. doi:10.20948/prepr-2018-56 URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018>
3. Thomson W., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. Part 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1883.
4. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
5. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Guangming Yu. Mixed boundary value problems in the theory of elasticity in an infinite strip // Acta Mech. 2018. Vol. 229, no. 11. P. 4339–4356.
6. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. Displacement discontinuity as a result of residual stress relief // 2017 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE 2017). Prague, 2017. P. 179–183.

Оглавление

1. Введение	3
2. Формулы, описывающие решения	3
3. Примеры решений	5
4. Собственные функции Папковича–Фадля $\Phi(\lambda_k, y)$, $\Psi(\lambda_k, y)$, $F(\lambda_k, y)$	9
5. Обсуждение результатов	12
Приложение. Некоторые использованные в работе формулы	15
Библиографический список.....	17