ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 34 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.,
Корянов В.В., Тучин А.Г.,
Тучин Д.А.

Основное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в Солнечной системе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Основное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в Солнечной системе / Ю.Ф.Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 34. 24 с. doi:**10.20948/prepr-2019-34**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-34**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,
В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин

Основное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в Солнечной системе

Москва — 2019

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.

Основное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в Солнечной системе

В работе показано, что стандартный и громоздкий способ традиционного обоснования постоянства асимптотической скорости при гравитационных манёврах в модели круговой ограниченной задачи трёх тел (ОЗТТ), применяемый в современной астродинамике, может быть значительно упрощен. Представлены уточняющие формы интеграла Якоби, которые позволяют, помимо прочего, выявить прозрачную взаимосвязь интеграла Якоби и метода сопряжённых конических сечений в ОЗТТ.

Ключевые слова: ограниченная задача трёх тел, интеграл Якоби, параметр Тиссерана, асимптотическая скорость, гравитационный манёвр

Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G., Tuchin D.A.

The basic property of the Jacobi integral for gravity assists maneuvers in the Solar system

It is shown that the standard and bulky method of the general used revealing of the asymptotic velocity invariance during gravity assists maneuvers in the model of the circular restricted three body problem (RTBP), used in modern astrodynamics, can be significantly simplified. The refined forms of the Jacobi integral are presented, which allow, among others, to reveal the transparent relationship of the Jacobi integral and the patched conics method in a RTBP.

Key words: restricted three body problem, Jacobi integral, Tisserand's parameter, asymptotic velocity, gravity assist maneuver

Оглавление

Введение

Aber bald wird mir meine Maske unerträglich - unerträglich
***F. Schiller**. Kabale und Liebe. 1783*

Но скоро моя маска станет нестерпимой... нестерпимой...
***Ф. Шиллер.** Коварство и любовь. 1783*

Проектирование современных космических миссий к телам Солнечной системы предполагает использование гравитационных манёвров. [*Labunsky 1998, Campagnola 2009, Strange 2007, Голубев 2014, Тучин 2018*]. Применение гравитационных маневров уменьшает расход характеристической скорости космического аппарата (КА) и обеспечивает тем самым возможность решения современных комплексных задач изучения космоса.

Каждый гравитационный манёвр (GAM – Gravity Assists Maneuver) можно рассматривать как составной элемент ограниченной задачи трёх тел (ОЗТТ), поскольку, по определению, он предполагает прохождение пробной частицей (КА, кометой, астероидом) сферы действия “малого тела” (планеты, спутника планеты, малого тела Солнечной системы). В рамках Метода сопряжённых Конических Сечений (МсКС) КА пролетает сферу действия планеты по планетоцентрической гиперболе, а вне её – движется по гелиоцентрическому коническому сечению (кеплеровой дуге). Время гиперболического прохождения сферы действия планеты считается пренебрежимо малым по сравнению со временем пролёта гелиоцентрической дуги. Модули скорости КА относительно малого тела (планеты) при пересечении границ её сферы действия приблизительно равны величине асимптотической скорости КА V_∞ для планетоцентрической гиперболы.

В дальнейшем полученное с использованием МсКС решение используется в качестве первого приближения для последующего уточнения в соответствии с полной эфемеридной моделью движения небесных тел.

Таким образом, при поиске приближенного решения задачи перелёта в рамках модели ОЗТТ с использованием МсКС требуется вычисление “передаточного параметра” V_∞ в условиях проведения GAM – при переключении на границах сфер действия малых тел с гелиоцентрических дуг на планетоцентрические участки и обратно.

В рамках ОЗТТ имеет место сохранение (инвариантность) величины V_∞ асимптотической скорости КА относительно “малого тела” – «планеты» – при неоднократном совершении около неё GAM [*Miller 2002*], сохраняющих постоянную интеграла Якоби. В МсКС, являющейся, по сути, аппроксимацией ОЗТТ с помощью последовательной склейки нескольких задач двух тел «текущий центр притяжения – пробная частица» с сингулярным переключением с одной на другую, указанное свойство, вообще говоря, очевидно в силу симметрии пролётной планетоцентрической гиперболы на одиночном гравитационном манёвре (GAM). Вместе с тем при активном маневрировании КА вне сферы действия малой планеты постоянная интеграла Якоби может изменяться.

В рамках круговой ОЗТТ, с использованием её интеграла Якоби J, возможно аналитическое вычисление V_∞ с помощью *основного свойства* этого интеграла для серии GAM: $const = J \approx 3 - V_\infty^2$ (в обезразмеренном через орбитальную скорость планеты виде). Вывод этого свойства осуществляется в астродинамике достаточно громоздким способом [*Себехей 1982, Miller 2002, Campagnola 2009*]: от канонической записи интеграла Якоби в синодической системе координат J необходимо совершить переход к сидерической системе координат и его приближённой модификации при его записи через орбитальные оскулирующие элементы, которая становится идентичной параметру Тиссерана T_{Ti}. Далее используются достаточно громоздкие геометрические соображения (которые будут приведены в этой работе в *Приложении I*), позволяющие, тем не менее, приближённо получить *основное* *свойство* интеграла Якоби для серии GAM в круговой ОЗТТ через связь интеграла Якоби, параметра Тиссерана и величины асимптотической скорости КА в виде: $const = J \approx T_{Ti} \approx 3 - V_\infty^2$.

В настоящей работе предлагается более короткий метод получения указанного *основного свойства* интеграла Якоби и представлены уточняющие формы интеграла Якоби, которые позволяют, помимо прочего, выявить внятную взаимосвязь интеграла Якоби и МсКС в круговой ОЗТТ.

1. Круговая ограниченная задача трёх тел

В рамках круговой ОЗТТ рассматриваются центральное тело с гравитационным параметром μ_1, малое тело с гравитационным параметром $\mu_2 < \mu_1$ и пробная частица бесконечно малой массы (КА). Предполагается, что центральное и малое тела взаимодействуют по закону Всемирного тяготения и вращаются вокруг барицентра с одинаковыми угловыми скоростями. Вводится вращающаяся (синодическая) барицентрическая система координат $BXYZ$, где ось BX проходит через центральное и малое тело и направлена в сторону малого тела, ось BY перпендикулярна к оси BX и сонаправлена относительной скорости малого тела, ось BZ дополняет их до правоориентированного репера. Пусть a_p – расстояние между центральным и малым телами, $n = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2) / a_p^3}$ – угловая скорость вращения системы $BXYZ$, $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ – расстояния от пробной частицы (КА) до центрального и малого тел соответственно, $\tilde{V}_{sc\_rot}$ – скорость пробной частицы (КА) относительно вращающейся системы координат $BXYZ$. Пробная частица не влияет на движения центрального и малого тел, но сама притягивается к ним по закону Ньютона. При переходе к безразмерному времени $\tau = n\,t$, безразмерным координатам КА X, Y, Z и расстояниям r_1, r_2 от КА до центрального и малого тел, нормированным по a_p, безразмерная скорость V пробной частицы (КА) во вращающейся системе координат $BXYZ$ запишется как $V = \dfrac{\tilde{V}_{\mathrm{sc\_rot}}}{\tilde{V}_p}$, где $\tilde{V}_p$ – средняя орбитальная скорость планеты относительно центрального тела:

$$\tilde{V}_p = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)/a_p} = n\, a_p .$$

Интеграл Якоби J является обобщенным интегралом энергии [*Голубев 2019*], учитывающим действие центробежных сил, и единственным интегралом в круговой ОЗТТ [*Мюррей 1999, Себехей 1982*]. При этом не сохраняются ни энергия системы в обычном понимании, ни её кинетический момент.

Выпишем выражения интеграла Якоби для ограниченной круговой задачи трех тел (в синодической и сидерической системах координат, в размерной и безразмерной форме).

2. Интеграл Якоби

Интеграл **Якоби** $\tilde{J}$ для пробной частицы (КА) *в синодической системе* координат $BXYZ$ можно записать в виде [*Jacobi 1836, Себехей 1982, Murray 1999*]:

$$\tilde{J} = 2\,\tilde{U} - \tilde{V}^2_{sc\_rot} = n^2(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2) + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} + 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} - \tilde{V}^2_{sc\_rot},$$ где

$\tilde{J}$ – размерная константа интеграла Якоби, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ – координаты частицы.

Якоби Карл Густав Якоб (1804-1851)

В сидерической (инерциальной) системе координат $B\xi\eta\zeta$, для которой ось $B\zeta$ сонаправлена с осью BZ, с учетом того, что по теореме сложения скоростей [*Голубев 2019*]

$$\tilde{V}^2 = \dot{\tilde{X}}^2 + \dot{\tilde{Y}}^2 + \dot{\tilde{Z}}^2 = \tilde{v}^2 + n^2(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2) - 2n\,(\tilde{\xi}\,\dot{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\,\dot{\tilde{\xi}}),\ \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2, \quad (1)$$

где $\tilde{v}$ – абсолютная скорость КА, тот же интеграл можно представить в виде

$$\tilde{J} = 2n\,(\tilde{\xi}\,\dot{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\,\dot{\tilde{\xi}}) + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} - 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} - \tilde{v}^2 .$$

В безразмерном виде обе формы интеграла Якоби соответственно примут вид

$$J = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - V^2, \tag{2}$$

$$J = 2\,(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - v^2, \tag{3}$$

где $\mu = \mu_2 / (\mu_1 + \mu_2) \le 1$. В том случае, когда μ_2 – гравитационный параметр какой-нибудь планеты и μ_1 – гравитационный параметр Солнца, будем иметь $\mu \ll 1$. Обе формулы (2) и (3) эквивалентны. При анализе свойств движения КА глубоко в сфере действия малого тела удобно пользоваться формулой (2), а при анализе движения глубоко в сфере действия центрального тела полезные результаты поможет получить формула (3).

3. Движение в сфере действия малого тела

Обозначим $\chi = X - (1-\mu)$ и предположим, что $r_2 = \sqrt{\chi^2 + Y^2 + Z^2} \le \varepsilon \ll 1$. Тогда

$$X^2 + Y^2 = (1-\mu)^2 + 2(1-\mu)\chi + \chi^2 + Y^2 ,$$

$$2\frac{1-\mu}{r_1} = 2\frac{1-\mu}{\sqrt{(1+\chi)^2 + Y^2 + Z^2}} \approx 2(1-\mu)\left(1 - \chi - \frac{\chi^2 + Y^2 + Z^2}{2} + \frac{3}{2}\chi^2\right).$$

Здесь приближение выполнено с точностью до членов третьего порядка малости по χ, Y, Z. С помощью приведенных соотношений формулу (2) можно приближенно представить в виде

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + (3-2\mu)\chi^2 + \mu Y^2 - (1-\mu)Z^2 - 2h_2,\; h_2 = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} . \tag{4}$$

Величина h_2 представляет собой полную энергию системы двух тел, одно из которых КА, а другое есть малое тело ОЗТТ. Если принять, что величина $\mu \le \varepsilon$ есть малая первого прядка, то формула (4) упрощается:

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - 2h_2, \tag{5}$$

откуда

$$2\,h_2 \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - J\,. \tag{6}$$

Видим, что h_2 меняется в основном из-за χ^2 и Z^2, а если движение происходит в плоскости BXY, то, с точностью до величин третьего порядка малости, энергия h_2 будет зависеть только от χ^2.

Энергия h_2 соответствует оскулирующей орбите КА относительно малого тела. Если из формулы (6) получится, что $h_2 < 0$, то указанная оскулирующая орбита будет эллипсом с большой полуосью $a_2 = -\mu/(2h_2)$. Известно [*Тучин 2018*], что безразмерный радиус ρ_2 сферы действия планеты выражается формулой $\rho_2 = \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{2}{5}}$, а сама сфера действия для планет Солнечной системы лежит внутри сферы Хилла. Таким образом, если окажется, что $a_2 \le \rho_2 - 4\varepsilon^2$, то пассивный КА навсегда останется спутником малого тела – планеты.

В том случае, когда из формулы (5) следует, что $h_2 \ge 0$, оскулирующая траектория КА в окрестности планеты представляет собой параболу или гиперболу, и КА гарантированно покидает сферу действия планеты через конечное время. Тогда величина $2h_2 = V_\infty^2 \ge 0$ есть квадрат асимптотической скорости на бесконечности, которую в задаче двух тел приобретет КА при неограниченном удалении от планеты. Формулу (6) можно тогда переписать в виде

$$V_\infty^2 \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - J\,, \tag{7}$$

а приближенное выражение для интеграла Якоби – следующим образом

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - V_\infty^2. \tag{8}$$

Следовательно, для того чтобы в окрестности планеты получить гиперболическую траекторию, лежащую *в плоскости эклиптики*, достаточно обеспечить значение постоянной интеграла Якоби, удовлетворяющее неравенству

$$J \le (1-\mu)(3-\mu) - \varepsilon^2. \tag{9}$$

Если траектория пересекает плоскость BXY, то в точке пересечения координата Z пропадает, а если эта точка служит перицентром орбиты КА, то для нее $\chi = \rho_\pi$. Тогда формула (8) принимает вид:

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\rho_\pi^2 - V_\infty^2. \tag{10}$$

4. Движение в сфере действия центрального тела

Обозначим $\sigma = X + \mu$. Будем считать, что $r_1 = \sqrt{\sigma^2 + Y^2 + Z^2} \le \varepsilon \ll 1$. Тогда

$$X^2 + Y^2 = \mu^2 - 2\mu\sigma + \sigma^2 + Y^2,$$

$$2\frac{\mu}{r_2} = \frac{2\mu}{\sqrt{(1-\sigma)^2 + Y^2 + Z^2}} \approx 2\mu\left(1 + \sigma - \frac{\sigma^2 + Y^2 + Z^2}{2} + \frac{3}{2}\sigma^2\right).$$

Здесь приближение выполнено с точностью до членов третьего порядка малости по σ, Y, Z. С помощью приведенных соотношений формулу (2) можно приближенно представить в виде

$$J \approx \mu(\mu+2) + (1+2\mu)\sigma^2 + (1-\mu)Y^2 - \mu Z^2 - 2h_1,\ h_1 = \frac{V^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1}. \tag{11}$$

Здесь величина h_1 представляет собой полную энергию системы двух тел, одно из которых КА, а другое есть центральное тело ОЗТТ. Если принять, что величина $\mu \le \varepsilon$ есть малая первого порядка, то формула (11) упрощается:

$$J \approx \mu(\mu+2) + \sigma^2 + Y^2 - 2h_1. \tag{12}$$

Видим, что с точностью до величин третьего порядка малости, в выражении интеграла Якоби влияние тяготения малого тела (планеты) сказывается лишь как постоянная добавка 2μ, а величина $(\sigma^2 + Y^2)$ отражает влияние центробежной силы, как если бы начало вращающейся системы координат было смещено в середину C центрального тела, причем точка C остается неподвижной. Слагаемое μ^2 вносит постоянную поправку на перенос начала синодической системы координат. При этом сидерическая (инерциальная) система координат превращается в неинерциальную систему координат Кенига $Cxyz$ [*Голубев 2019*] из-за того, что центральное тело испытывает центробежное ускорение, при вращении вокруг барицентра. Ось Cz параллельна оси BZ. При вращении системы $BXYZ$ вокруг неподвижной оси Cz справедливы формулы, аналогичные (1):

$$V^2 = v^2 + (x^2 + y^2) - 2\,(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}),\; \sigma^2 + Y^2 = x^2 + y^2,$$

где v – безразмерная скорость КА относительно системы $Cxyz$. Таким образом, в кениговой системе координат с началом C в центральном теле интеграл Якоби можно представить в виде

$$J \approx \mu(\mu + 2) + 2c_p - 2h_1, \qquad c_p = x\dot{y} - y\dot{x}. \tag{13}$$

По смыслу величина c_p есть проекция на плоскость вращения планет (плоскость эклиптики) удвоенной площади, заметаемой радиус-вектором КА с началом в центральном теле.

Из сказанного следует, что ОЗТТ в системе координат $Cxyz$ интерпретируется с точностью до малых третьего порядка, как задача движения КА под действием единственной ньютоновой силы притяжения космического аппарата к центральному телу. Для такой задачи величина h_1 остается постоянной, орбита будет плоской и в общем случае она будет наклонена к плоскости Cxy под углом i. Будет справедлив также интеграл площадей $c = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}|$, где $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор КА, а $\mathbf{v}$ – его скорость в системе координат $Cxyz$. Следовательно, в правой части формулы (13) стоит комбинация постоянных задачи двух тел, которая и определяет приближенное значение константы интеграла Якоби в ОЗТТ:

$$J \approx \mu(\mu + 2) + T_{Ti}, \tag{14}$$

где

$$T_{Ti} = 2c\cos i - 2h_1 \tag{15}$$

есть параметр Тиссерана [*Tisserand 1896*].

В том случае, когда $h_1 < 0$, орбита КА в сфере действия центрального тела будет представлять собой эллипс с большой полуосью $a_1 = -(1-\mu)/(2h_2)$. Параметр Тиссерана для эллиптических орбит в окрестности центрального тела принимает вид [*Tisserand 1896*]

$$T_{Ti} = 2c\cos i - 2h_1 = \frac{1-\mu}{a_1} + 2\sqrt{(1-\mu)a_1(1-e_1^2)}\cos i, \tag{16}$$

где e_1 – эксцентриситет орбиты КА в окрестности центрального тела.

Франсуа Феликс Тиссеран (1845-1896)

Параметр T_{Ti} используется при идентификации разнесённых по времени астрономических наблюдений «пробных частиц» – комет, поскольку сами элементы орбиты комет могут неоднократно меняться при прохождении ими сферы действия планеты Юпитер. Критерий Тиссерана $T_{Ti} \approx const$ опубликовал французский астроном Франсуа Тиссеран в 1896 г. Подчеркнём, что критерий выполняется только на удалении от сферы действия малого тела (планеты).

5. Критерий Тиссерана и нереализуемость баллистического захвата в Солнечной системе в рамках МсКС

В рамках МсКС принимается, что в сфере действия центрального тела орбита перелета представляет собой оскулирующий эллипс с расстоянием $\overline{r}_\alpha$ от центрального тела до апоцентра: $\overline{r}_\alpha \geq r_1 a_p$, где r_1 – безразмерное расстояние от пробной частицы до центрального тела в момент максимального сближения пробной частицы с малым телом. Из формулы $2h_1 = -(1-\mu)/a_1$ получим для скорости v_m пробной частицы в момент её наибольшего сближения с малым телом

$$\mathrm{v}_m^2 = 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2h_1 = (1-\mu)\left[2\frac{1}{r_1} - \frac{(1+e_1)}{r_\alpha}\right].$$

Видим, что при фиксированном эксцентриситете с увеличением r_α скорость v_m возрастает. Она достигает минимума лишь если $r_\alpha = r_1$. Поэтому, если при $r_\alpha = r_1$ баллистический захват не происходит, то он не может произойти при $r_\alpha > r_1$. Рассмотрим с точки зрения возможности баллистического захвата случай $r_\alpha = r_1$. Тогда в безразмерном виде большая полуось оскулирующей орбиты КА запишется следующим образом: $a_1 = (1+\rho_\pi)/(1+e_1)$. Из формулы (16) найдем

$$T_{Ti} = \frac{(1-\mu)(1+e_1)}{r_\alpha} + 2\sqrt{(1-\mu)r_\alpha(1-e_1)}\cos i,\ r_\alpha = 1+\rho_\pi,\ 0 \leq e_1 < 1. \tag{16'}$$

Таким образом, для определения постоянной интеграла Якоби осталось задать лишь эксцентриситет e_1 требуемой орбиты перелета.

Сопоставив формулы (6) и (14), получим значение энергии КА в окрестности малого тела в зависимости от параметра Тиссерана орбиты в сфере действия центрального тела

$$2h_2 \approx 6(1-\mu) + 3(\rho_\pi^2 - 1) - T_{Ti}, \tag{17}$$

или

$$2h_2 \approx \left(6 - \frac{(1+e_1)}{r_\alpha}\right)(1-\mu) + 3r_\alpha(r_\alpha - 2) + 2\sqrt{(1-\mu)r_\alpha(1-e_1)}\cos i\,. \quad (18)$$

Коэффициент при $(1-\mu)$ в формуле (18) заведомо положителен. Поэтому захват КА малым телом может произойти, если будет выполнено неравенство

$$\delta^2 + 2b_1\delta - b_2 < 0, \quad (19)$$

где

$$0 \le \delta = \sqrt{1-\mu} < 1,\ b_1 = \frac{r_\alpha\sqrt{r_\alpha(1-e_1)}\cos i}{6r_\alpha - (1+e_1)},\ b_2 = \frac{3r_\alpha^2(2-r_\alpha)}{6r_\alpha - (1+e_1)} > 0\,.$$

Квадратный трехчлен в (19) имеет положительный и отрицательный корни и, следовательно,

$$0 < \delta < \delta_0 = \left(\sqrt{b_1^2 + b_2} - b_1\right) = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2} + b_1} \quad (20)$$

удовлетворяет неравенству (19). Видим, что величина δ_0 достигает максимума при $b_1 = 0$. Поэтому $\delta_0^2 \le b_2$. Отметим, что

$$b_2 = \frac{3r_\alpha^2(2-r_\alpha)}{6r_\alpha - (1+e_1)} \le \frac{3}{4}(1+\varepsilon)^2,$$

и если взять $\varepsilon < 1/(2\sqrt{3}+3)$, то будет $b_2 < 1$. Поскольку по предположению $\varepsilon \ll 1$, то можно считать, что неравенство $b_2 < 1$ заведомо выполняется. Более того, если значение δ оказывается в диапазоне $b_2 < \delta < 1$, то пролетная траектория в сфере действия малой планеты окажется гиперболической. Для наиболее массивной планеты Солнечной системы – Юпитера – имеем $\delta \approx 1 - 9\cdot 10^{-4} > b_2$ при принятых ограничениях относительно малости величин. Таким образом, в постановке ОЗТТ оказывается, что для всех планет Солнечной системы, когда большим телом служит Солнце, пролетная траектория в сфере действия малой планеты будет гиперболической и баллистический захват в модели МсКС невозможен. Рассмотренная математическая модель удобна для анализа последовательности гравитационных маневров, однако не позволяет проводить описание баллистического захвата [*Белбруно 2011*].

Аналогичный результат вытекает и при анализе ОЗТТ для систем планет и их естественных спутников в Солнечной системе [*Standish 1998, JPL Planetary Satellite 2019*] (максимальными в Солнечной системе оказываются отношения гравитационных параметров спутника и планеты–«хозяина» для системы Земля–Луна, $\mu_2/\mu_1 \approx 0.0123$, и системы Плутон–Харон, $\mu_2/\mu_1 \approx 0.0117$). Гигантские галилеевы луны Юпитера – Ио, Европа, Ганимед и Каллисто, так же как и крупнейший естественный спутник Солнечной системы – сатурнианский Титан, имеют еще меньшее значение μ_2/μ_1 в силу значительной величины гравитационной постоянной их планет-хозяев: $\mu_2/\mu_1 \leq 0.00008$ для галилеевых лун и $\mu_2/\mu_1 \approx 0.00023$ для системы Сатурн–Титан.

Вместе с тем из формулы (20) видно, что величину V_∞ при пролете малого тела можно менять в ограниченных пределах за счет изменения параметра b_1. Для того чтобы уменьшить величину V_∞, следует уменьшать b_1. Поэтому для экономии рабочего тела предпочтение нужно отдавать траекториям с большим наклонением к плоскости эклиптики и с большим эксцентриситетом e_1.

6. Экспресс-вывод основного свойства интеграла Якоби для GAM в круговой ОЗТТ

Маска
Я знаю... Тебя!

М.Ю. Лермонтов. *Маскарад. 1835*

Вывод основного свойства интеграла Якоби в круговой ОЗТТ исполняется в астродинамике достаточно громоздким способом [*Себехей 1982, Miller 2002, Campagnola 2009*]: от канонической записи интеграла Якоби в синодической системе координат необходимо совершить переход к сидерической системе координат и записать его приближённое выражение через орбитальные оскулирующие элементы, которое оказывается идентичным параметру Тиссерана. Далее, с использованием весьма громоздких геометрических соображений (Приложение I), становится возможным получить в приближённом виде основное свойство через связь интеграла Якоби, параметра Тиссерана и величины асимптотической скорости КА при совершении гравитационных манёвров. Учитывая результат раздела 5, представим более короткий и наглядный вывод этого свойства с использованием модели МсКС, даже не выходя при этом из синодической системы координат.

1. Пусть в качестве центрального тела выбрано Солнце. Тогда для всех небесных тел Солнечной системы сфера действия малого небесного тела аппроксимируется слегка сплюснутым эллипсоидом вращения с характерным безразмерным радиусом $\rho_2 \ll 1$. Как следствие, при моделировании GAM, для значений $r_2 \le \rho_2$ расстояние $\tilde{R}_1$ от КА до центрального тела можно в нулевом приближении заменить расстоянием a_p от планеты до центрального тела, поскольку, очевидно, согласно неравенству треугольника, при проходе сферы действия планеты выполнено:

$$a_p - \rho_2 a_p \le \tilde{R}_1 \le a_p + \rho_2 a_p,$$

$$1 - \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2/5} \le r_1 \le 1 + \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2/5},$$

$$r_1 \big|_{GAM} \approx 1. \tag{21}$$

2. Напомним, что в выражении интеграла Якоби (2) величина V является скоростью пробной частицы относительно синодической системы координат. Однако при сближении с планетой и совершении около неё GAM выполняется (21), и скорость КА относительно синодической системы

координат приблизительно равна скорости КА относительно планеты, замороженной в этой системе координат.

3. С учётом (2) приходим к выражению интеграла Якоби при совершении GAM:

$$J\,\big|_{GAM} = J = 1 + 2\frac{1-\mu}{r_1} - V_\infty^2 \approx 3 - 2\frac{\mu}{r_1} - V_\infty^2 \approx 3 - V_\infty^2 .$$

Более строго: с учётом (2) при совершении GAM верно:

$$J\,\big|_{GAM} = J = 1 + 2\frac{1-\mu}{r_1} - 2h_2 .$$

В соответствии с разделом 5 для всех гравитационных маневров в Солнечной системе имеем $h_2 > 0$. Тогда $2h_2 = V_\infty^2$ и

$$J \approx 3 - V_\infty^2 . \tag{22}$$

Выражение (22) является хотя и приближенным, но общим для всех планет и планетных систем Солнечной системы. Оно очень удобно для предварительных оценочных расчетов эффективности гравитационных маневров.

4. Из формулы (14) в том же приближении, что и для формулы (22), найдем

$$J \approx T_{Ti}, \qquad T_{Ti} \approx \frac{1}{a_1} + 2\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\cos i ,$$

где по-прежнему a_1, e, i – нормированная большая полуось оскулирующей орбиты КА относительно центрального тела, её эксцентриситет и наклонение.

Выражение (22) означает, что величина V_∞ асимптотической скорости КА относительно малого тела, будучи связанной непосредственно с интегралом Якоби, останется постоянной для всех гравитационных маневров, выполняемых последовательно с этой планетой и сохраняющих константу интеграла Якоби, хотя само направление вектора асимптотической скорости может при этом существенно изменяться.

Заключение

При поиске решения задач межпланетных перелётов в рамках модели ОЗТТ с использованием метода сопряжённых конических сечений регулярно требуется вычисление “передаточного параметра” V_∞ в условиях проведения GAM – при переключении с гелиоцентрических дуг на планетоцентрические участки и обратно. В рамках круговой ОЗТТ поиск V_∞ может производиться с использованием интеграла Якоби J, на основе *основного свойства* интеграла Якоби для GAM в постановке круговой ОЗТТ: $const = J \approx T_{Ti} \approx 3 - V_\infty^2$. Согласно этому свойству величина V_∞ не изменяется при совершении многократных гравитационных манёвров, сохраняющих константу интеграла Якоби.

В астродинамике это свойство известно, но выводится достаточно громоздким способом [*Себехей 1982, Miller 2002, Campagnola 2009*]. В настоящей работе предложен более короткий метод получения *основного свойства интеграла Якоби для* GAM в постановке ограниченной круговой задачи трёх тел и представлены новые, уточненные формы интеграла Якоби.

Список использованных источников

1. *Белбруно 2011* Белбруно Э. Динамика захвата и хаотические движения в небесной механике с приложениями к конструированию малоэнергетических перелётов. Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 264 с.
2. *Голубев 2014* Голубев Ю.Ф. Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные манёвры космического аппарата в системе Юпитера // Известия РАН. Теория и системы управления, 2014, № 3. С. 149-167.
3. *Голубев 2019* Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е издание, переработанное и дополненное – М.: МГУ, 2019. – 728 с.
4. *Охоцимский 1968* Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов. – М.: МГУ, 1968. – 157 с.
5. *Пуанкаре 1971* Пуанкаре А. Избранные труды в 3 т. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971.
6. *Себехей 1982* Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
7. *Субботин 1968* Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука,1968.
8. *Тучин 2018* Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы. Под ред. А.Г. Тучина. МО., Химки, «НПО Лавочкина», 336 с.
9. *Campagnola 2009* Campagnola S., Russell R.P. The Endgame problem part B: the multi-body technique and the T-P graph, 2009. Preprint AAS 09-227.
10. *Campagnola 2010* Campagnola S., Russell R.P. Endgame Problem. Part 2: Multi-Body Technique and TP Graph // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. № 2. P. 476–486, doi:10.2514/1.44290

11. *Campagnola 2011* Campagnola S., Skerritt P., Russell R.P. Flybys in the planar, circular, restricted, three-body problem // Astrodynamics 2011: Proc. of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Girdwood, Alaska. 2011. AAS Paper 11-425.
12. *Campagnola 2012* Campagnola S., Boutonnet A., Schoenmaekers J., Grebov D.J., Petropoulos A.E., Russell R.P. Tisserand-Leveraging Transfers // AAS/AIAA Space Flight Mech. Meeting, Charleston, SC, 2012. AAS Paper 12-185.
13. *Jacobi 1836* Jacobi C.G.J. "Sur le Movement d'un Point et sur un cas Particulier du Probleme des Trois Corps," Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol. 3, 1836, pp. 59–61.
14. *JPL Planetary Satellite 2019* JPL Planetary Satellite Physical Parameters. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_phys_par
15. *Labunsky 1998* Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // Earth Space Institute Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 33–68.
16. *Miller 2002* Miller J. K., Weeks C. J. Application of Tisserand's Criterion to the Design of Gravity Assist Trajectories // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Monterey, GA, 2002. AIAA 2002-4717.
17. *Murray 1999* Murray C.D., Dermot S.F. Solar System Dynamics // Cambridge, England: Cambridge University Press, 1999. P. 68–71. (ISBN 0-521-57597-4)
18. *Standish 1998* Standish E. M. 1998. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405.
19. *Strange 2007* Strange N.J., Russell R., Buffington B. Mapping the V_∞ Globe // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Mackinac Island, MI, 2007. AAS Paper 07-277.
20. *Tisserand 1896* Tisserand F.F. Traité de Méchanique Céleste. V. 4. Gauthier-Villars et fils. Paris, 1896. P. 203–205.

Приложение I

Резюме классического вывода основного свойства серии гравитационных манёвров: $V_\infty = const$.

Представим основные этапы традиционного получения в астродинамике основного свойства $V_\infty = const$ для гравитационных манёвров, сохраняющих постоянную интеграла Якоби [*Miller 2002, Campagnola 2009*].

1. Выписывается выражение для J во вращающейся (синодической) барицентрической системе координат $BXYZ$:

$$J = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - V^2 .$$

2. С использованием теоремы сложения скоростей и интеграла площадей переходят к выражению интеграла Якоби в инерциальной (сидерической) системе координат $B\xi\eta\zeta$:

$$J = 2\,(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - v^2 .$$

3. С использованием оскулирующих орбитальных элементов, при допущении верности предельного перехода $\frac{\mu}{r_2} \to 0$ (то есть μ мало и КА находится за пределами сферы действия планеты), в качестве промежуточного вспомогательного результата выводится классический критерий Тиссерана:

$$J \approx T_{Ti} \approx \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{(1-\mu)\,a\,(1-e^2)}\cos i . \qquad \text{(P1)}$$

4. На этом, в рамках классической модели круговой ОЗТТ [*Murray 1999, Себехей 1982*], ход традиционных преобразований заканчивается. Для вычисления V_∞ и вывода *основного свойства*

подключается модель GAM, а формула для модуля асимптотической скорости КА относительно планеты V_∞ выводится с помощью следующих геометрических рассуждений. Согласно формулам (16), (19) из [*Miller 2002*] либо (A19), (A20) [*Campagnola 2009*], с использованием (3) и (5) при $r_1 \to 1, \mu \to 0$ и теоремы косинусов для основного треугольника GAM верно:

$$\tilde{V}_\infty^2 = \tilde{v}^2 + \tilde{V}_p^2 - 2\,\tilde{v}\,\tilde{V}_p \cos A,$$

$$V_\infty^2 = v^2 + 1 - 2\,v \cos\gamma \cos i,$$

$$v^2 = V_\infty^2 - 1 + 2\,v \cos\gamma \cos i,$$

где $\cos A = \cos\gamma \cos i$, γ – траекторный угол орбиты КА при пересечении сферы действия планеты.

5. Выпишем выражения для $\dfrac{1}{a}$ и h:

$$\frac{1}{a} = 2 - v^2,\ v\cos\gamma = h,\ \frac{1}{a} \approx 2 - V_\infty^2 + 1 - 2h\cos i,$$

откуда

$$V_\infty^2 \approx 3 - \frac{1}{a} - 2h\cos i.$$

6. В результате, с использованием (P1) и выражения $h = \sqrt{(1-\mu)\,a\,(1-e^2)}$, приходим, наконец, к получению *основного свойства* круговой ОЗТТ для серии GAM:

$$const = J \approx T_{Ti} \approx \frac{1}{a} + 2h\cos i = 3 - 2h\cos i - V_\infty^2 + 2h\cos i = 3 - V_\infty^2. \qquad \text{(P2)}$$

Формула (P2) выражает важнейшее свойство серии GAM в модели круговой ОЗТТ: $V_\infty = const$, что позволяет, в целях эффективного баллистического проектирования космических миссий с использованием GAM, оперировать в её рамках с такими геометрически прозрачными объектами, как V_∞-*globe* (сфера с радиусом V_∞, центр которой находится на конце вектора скорости $\mathbf{V}_p$ планеты) и её проекциями на плоскость *Tour maps* [*Strange 2009*]. Как при движении КА по гелиоцентрической дуге, так и при совершении им гравитационного манёвра конец вектора асимптотической скорости $\mathbf{V}_\infty$ всегда будет оставаться на V_∞-сфере (рис. Р1). Отметим, что, в частности, непосредственно при совершении GAM, в рамках задачи двух тел, пополненной понятием сферы действия малого тела, свойство $V_\infty = const$ следует из того, что КА движется относительно планеты в сфере действия планеты по планетоцентрической гиперболе [*Голубев 2019*, *с.267*].

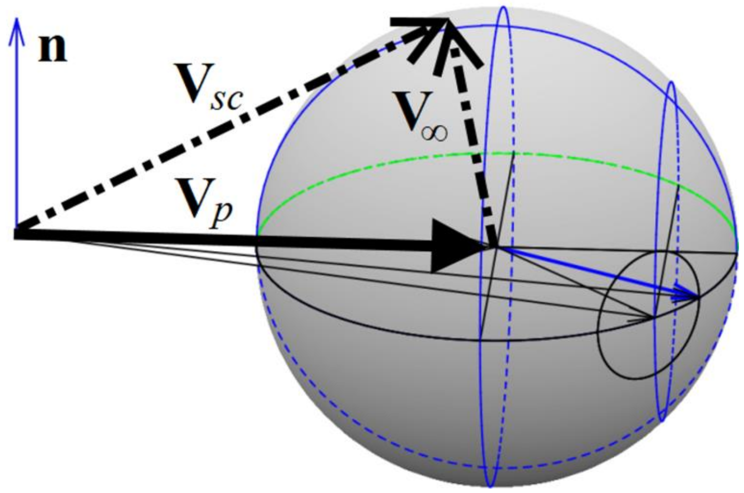

Рис. Р1. *V_∞-сфера* всевозможных положений конца вектора $\mathbf{V}_\infty$ при совершении гравитационного манёвра

Приложение II

Симметричная формула интеграла Якоби и уточнение источников в западной литературе

В астродинамике используется как представленная выше, классическая форма интеграла Якоби [*Субботин 1968*, *Себехей 1982*, *Murray 1999*], так и вторая, симметричная его форма, получающаяся добавлением к $\tilde{U}, U$ констант $\frac{\mu_1\mu_2}{2a_p(\mu_1+\mu_2)}$ и $\mu(1-\mu)/2$ соответственно, которые не меняют уравнений движения [*Себехей 1982, Miller 2002, Campagnola 2009*]. Для симметричных форм $\tilde{U}*$, $J*$ будем иметь $2\tilde{U}* = 2\tilde{U} + \mu_1\mu_2$, $J* = J + \mu(1-\mu)$.

Тогда

$$\tilde{J}* = 2\tilde{U}* - \tilde{V}^2_{sc\_rot} = n^2(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2) + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} + 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} + \frac{\mu_1\,\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)a_p} - \tilde{V}^2_{sc\_rot},$$

$$J* = 2U* - V^2 = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) - V^2.$$

Осуществим переход к сидерической системе координат $B\xi\eta\zeta$, в которой ось $B\zeta$ сонаправлена с осью BZ. После ряда преобразований обе формы интеграла Якоби в размерном и безразмерном виде в сидерической системе координат можно записать как [*Murray 1999, Себехей 1982*]:

$$\tilde{J}* = 2n(\tilde{\xi}\,\dot{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\,\dot{\tilde{\xi}}) + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} - 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} + \mu_1\mu_2 - \tilde{v}^2,$$

$$J* = 2(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) + 2\frac{1-\mu}{r_1} - 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) - v^2.$$

Можно записать также интеграл Якоби с использованием оскулирующих орбитальных элементов движения КА по эллиптической орбите относительно центрального тела [*Охоцимский 1968, Murray 1999*]:

$$J* = \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)(1-\mu)}\cos i + 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu).$$

В приведенной записи оскулирующие элементы a, e, i не постоянны, но меняются на решении круговой ОЗТТ.

Осуществим перевод начала инерциальной системы координат из барицентра в центр масс центрального тела с помощью преобразования $X = x - \mu,\ Y = y,\ Z = z$ [*Себехей 1982*]:

$$U* = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + (1-\mu)\mu = (1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2},$$

$$J^* = ((x-\mu)^2 + y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + (1-\mu)\mu - v^2 - (x^2+y^2) + 2h\cos i\,.$$

Здесь уже $r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2,\ r_2^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2$ (и функция $U^* = U^*(x,y,z)$ в пространственном случае, очевидно, уже будет зависеть от z). Теперь, с использованием оскулирующих орбитальных элементов, выражение для интеграла Якоби будет иметь вид

$$J^* = \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{a\,(1-e^2)\,(1-\mu)}\cos i + 2\frac{\mu}{r_2} - 2x\mu + \mu\,. \qquad \text{(P3)}$$

Формула (P3) является нашим исправлением [*Голубев 2014*] формулы (A17) в обзорной по рассматриваемой тематике работе [*Campagnola 2010*], в которой допущена ошибка. В этой же работе, в формуле (A9), тоже допущены ошибки. Отметим, что эти ошибки не влияют на справедливость последующих выкладок. В работах [*Campagnola 2011, 2012*], ссылающихся на [*Campagnola 2010*], также репродуцированы описки (формулы (7) и (3) соответственно): пропущена степень два у скорости в записи интеграла Якоби. Указанная ситуация не нова в рассматриваемой практике записи интеграла Якоби: формулы ограниченной задачи трех тел корректируются со времен Пуанкаре [*Пуанкаре 1971, Себехей 1982*].

При предельном переходе $\dfrac{\mu}{r_2} \to 0,\ x\mu \to 0$ в (P3) по-прежнему получается *классический* критерий Тиссерана (Ti*-критерий*) тождественности комет:

$$J \approx T_{Ti} \equiv \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{(1-\mu)\,a\,(1-e^2)}\cos i\,.$$

Как уже отмечалось, T_{Ti} может быть использован для идентификации разнесённых по времени астрономических наблюдений «пробных частиц» – комет, поскольку сами элементы орбиты комет могут неоднократно меняться при прохождении ими сферы действия планеты Юпитер. В сфере действия планеты T_{Ti} является оскулирующей величиной, но при выходе из неё снова принимает стационарное значение.