



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попов С.Б.

Численно-аналитические
методы в задаче морской
электроразведки в
плоскостной среде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов С.Б. Численно-аналитические методы в задаче морской электроразведки в плоскостной среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 33. 34 с. doi:[10.20948/prepr-2019-33](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-33)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-33>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

С. Б. Попов

**Численно-аналитические методы
в задаче морской электроразведки
в плоскослоистой среде**

Москва — 2019

Попов С.Б.

Численно-аналитические методы в задаче морской электроразведки в плоскостной среде

Работа носит обзорный и методический характер. Дается краткий обзор наиболее распространенных методов активной морской электроразведки. Рассмотрены вопросы эффективного численно-аналитического решения уравнений Максвелла в частотной области для задач электроразведки на основе классической 1D многослойной модели среды. Описано получение отклика электромагнитного поля в виде интегралов Ханкеля, используя подход К. Кеу. Рассмотрено численное вычисление интегралов путем выделения экспоненциальных асимптотик и отдельного вычисления членов с разной скоростью сходимости. При этом используется разработанный автором подход «аддитивной схемы», в которой решение для многослойной среды представляется в виде суммы решений для двух-, трехслойных и т.д. сред. Это не только ускоряет вычисления и повышает их точность, но и удобно для распараллеливания. Построено аналитическое решение для наиболее плохо сходящегося случая двухслойной среды вода—воздух, включающее «воздушную волну». В качестве примера приводятся результаты численных расчетов для разной частоты, глубины расположения углеводородного слоя и толщины водного слоя.

Ключевые слова: электроразведка, интегралы Ханкеля, численное вычисление интегралов, воздушная волна.

Popov, Sergey B.

Numerical and analytical methods in the problem of marine electrical prospecting in a plane-layered medium

This paper is of survey and methodological nature. A brief overview of the most common methods of active marine electrical prospecting is given. The problems of effective numerical and analytical solution of Maxwell's equations in the frequency domain are considered for the electrical prospecting on the basis of the classical 1D multilayer model of the medium. The electromagnetic field response in the form of Hankel integrals is received using the approach proposed by K. Key. The effective numerical calculation of integrals by extraction of exponential asymptotics, and separate calculation of terms with different speed of convergence is considered. In this case, the approach of the "additive scheme" developed by the author is used, in which the solution for a multilayer medium is represented as a sum of solutions for 2-, 3-layer, etc. media. This not only speeds up calculations and improves their accuracy, but is also convenient for parallelization. The analytical solution for the most poorly convergent case of two-layer air-water medium including "air wave" is constructed. As an example, the results of calculations for the different frequencies, depths of the hydrocarbon layer and thicknesses of the water layer are presented.

Key words: electrical prospecting, Hankel integrals, numerical calculation of integrals, air wave.

1. Введение

При проведении геологоразведочных работ методом электроразведки [1-7] возникает необходимость интерпретации полученных данных с целью восстановления электромагнитных (ЭМ) параметров подземной среды. Математически задача интерпретации является обратной задачей, состоящей в минимизации некоторого функционала, выражающего отклонение расчетных (модельных) и фактических значений. Упомянем в этой связи проблему плохой обусловленности обратных задач, требующую регуляризации, в качестве которой обычно используют метод Тихонова А.Н. [8], но на этом здесь мы не будем останавливаться.

Решение обратной задачи сводится к решению большого числа прямых задач расчета процесса распространения ЭМ волн в среде. В связи с этим остро стоят вопросы оптимизации и ускорения процесса решения таких задач. Настоящая работа посвящена разработке эффективного численного алгоритма для решения указанных задач, допускающего распараллеливание. При этом используется широко применяемый подход, когда в качестве модели исследуемой неоднородной среды выбирается так называемая 1D плоскостойкая модель, в которой предполагается, что электромагнитные свойства среды кусочно-постоянны, изотропны и изменяются только по вертикали. В таком случае решение системы уравнений Максвелла в частотной области (после применения преобразования Лапласа или Фурье) может быть сведено к вычислению интегралов типа Ханкеля от функций, явный вид которых может быть получен аналитически. Однако с ростом числа слоев в исследуемой модели аналитические выражения для подынтегральных функций становятся все более громоздкими, и для их практического использования и осуществления численного интегрирования становится необходимым исследование асимптотического поведения подынтегральных выражений, выделение плохо сходящихся членов, преобразование к виду, удобному для интегрирования.

В работе рассмотрена многослойная модель среды применительно к задаче морской электроразведки (источник и приемники расположены в водном слое) и предложены эффективные численно-аналитические методы для расчета процесса распространения электромагнитных волн в такой среде. При этом используется так называемое низкочастотное приближение, заключающееся в замене конечной скорости распространения электромагнитного возмущения в среде (равной, очевидно, скорости света в среде) на бесконечную скорость. Это представляется оправданным для рассматриваемых методов электроразведки.

Разработана методика эффективного численного вычисления интегралов Ханкеля со сложным ядром, содержащим многочисленные комплекснозначные экспоненциальные функции. Для этого автором предложена «аддитивная» («ступенчатая») схема, заключающаяся в представлении решения, отвечающего N слоям, в виде суммы «по слоям» с выделением и отдельным расчетом

выражений для каждого слоя. При этом выражения для разных слоев имеют различное асимптотическое и осциллирующее поведение подынтегральных функций и, соответственно, должны интегрироваться со своими шагами интегрирования. Отдельно рассматривается наиболее трудоемкий случай двухслойного пространства воздух—вода, который практически сводится к интегрально-формульным представлениям, допускающим их эффективное вычисление. Данный двухслойный случай описывает возмущения, распространяющиеся из источника на приемник непосредственно в водном слое и представляющие собой «паразитический» сигнал, способный «забить» полезный сигнал, отвечающий возмущениям, отраженным от неоднородностей в толще земли, в частности от углеводородного слоя (УВС).

При указанном послойном представлении решения непосредственно выясняется влияние каждого слоя, что важно, в частности, для учета «паразитического» сигнала и выделения полезного сигнала. Такой подход не только ускоряет и повышает точность, но и позволяет осуществлять эффективное распараллеливание процесса интегрирования. Кроме того, он позволяет экономить вычисления в случае пересчета при изменении параметров слоя или добавлении нового слоя.

Ниже кратко описаны основные методы активной морской электроразведки, различаемые по типу излучаемого сигнала (метод частотного зондирования и метод зондирования становлением поля) и по расположению источника и приемников в водном слое (приповерхностное и придонное расположение). Заметим, что существует также пассивная электроразведка, основанная на естественных электромагнитных полях (так называемое магнитотеллурическое зондирование), но на ней мы не будем останавливаться.

Изложен процесс построения решения уравнений Максвелла в частотной области — получение отклика электромагнитного поля (ЭП) в виде интегралов Ханкеля с использованием подхода, предложенного К. Кей [9]. В качестве источника и приемника рассматриваются точечные горизонтальные электрические диполи (НED), расположенные в водном слое. Рассмотрен вышеупомянутый вопрос эффективного численного расчета интегралов путем выделения экспоненциальных асимптотик и отдельного вычисления членов с разной скоростью сходимости и разным характером осцилляций.

В качестве примера даны результаты численных расчетов для разной частоты, глубины расположения УВС и толщины водного слоя.

1.1. Методы электроразведки в зависимости от типа излучающего сигнала

Метод частотного зондирования (ЧЗ)

В методе частотного зондирования с гармоническим воздействием электрического поля [1–7] используется возбуждение источника на фиксированной частоте. Для каждой фиксированной частоты измеряется амплитуда и фаза сигнала на приемниках. Т.е. фактически можно получить две

измеренные величины. Для увеличения числа измерений (чтобы увеличить число восстанавливаемых параметров) следует проводить ряд проходов вдоль исследуемого профиля с разными частотами возбуждения в допустимом диапазоне частот. Кроме того, при каждом проходе можно использовать не одну, а несколько секций приемников, находящихся на разном удалении от источника, что увеличивает количество измеренных величин, получаемых за один проход.

Метод зондирования становлением поля (ЗСП)

В методе зондирования на переходных процессах становления электромагнитного поля [1-7, 10-18] используется, например, длинный горизонтальный электрический диполь (HED), по которому пропускают, как правило, знакопеременные прямоугольные импульсы тока с паузами между импульсами. Приемные измерительные электроды располагаются соосно (или параллельно) излучающему диполю либо ортогонально. Во время пауз тока (после выключения тока) на ряд моментов времени $t_i, i = 0, 1, \dots, n$, определяют первые и вторые разности потенциалов на измерительных электродах. В случае измерений с помощью трехэлектродной системы мы можем измерять первую и вторую разность потенциалов, причем первая разность в случае однородной по латерали среды и симметричной конфигурации расположения источников и приемников будет равна нулю. Если же она не равна нулю (что обычно и наблюдается в реальности), ее можно подправить, вводя коэффициент фокусировки так, чтобы она равнялась нулю, — в этом состоит метод фокусировки тока ДНМЭ-ФТ [14], см. ниже. Из совокупности указанных измерений, решая обратную задачу, определяют неизвестные параметры подземных слоев.

Заметим, что вариант зондирования на переходных процессах дает больше информации за один проход по профилю, чем частотный метод на определенной частоте. Кроме того, глубинность исследования методом ЧЗ равна около g/m ($m \sim 3 \div 5$), где g является «разносом», т.е. расстоянием между источником и приемником. Это приводит к необходимости применять значительные разносы (6—10 км), чтобы исследовать глубины порядка 2 км и больше. В то же время установки, использующие переходные процессы становления электромагнитного поля, более компактны, обеспечивая требуемую глубинность исследования при меньших разносах, что также свидетельствует в пользу метода ЗСП.

1.2. Расположение источников и приемников

В настоящее время активная геоэлектроразведка на морском шельфе в основном применяется в двух вариантах расположения приемников и источников: приповерхностное и придонное расположение.

Кроме того, различают соосное расположение генерирующей и приемной электрических линий и ортогональное.

Приповерхностное расположение источников и приемников

Источники и приемники в данном варианте размещены на генераторно-приёмной «косо», буксируемой кораблем в приповерхностном слое морской воды (на глубине 5–10 м). Регистрация и обработка сигналов электроразведки осуществляется бортовым измерительно-вычислительным комплексом. При этом, как правило, используются наиболее информативные методы зондирования на переходных электродинамических процессах:

1. Обычный метод становления поля (ЗСП),

- когда установка включает в себя генераторную и приёмные двухэлектродные электрические линии или диполи [10].

2. Дифференциально-нормирующий метод электроразведки (ДНМЭ),

- при котором установка имеет двухэлектродную генераторную линию и один или несколько приёмных эквидистантных трёхэлектродных датчиков электрического поля (триполей) [10, 11].

Метод ДНМЭ предпочтительней, чем обычный метод ЗСП, и с его использованием получены наиболее значимые результаты [12, 13].

3. Дифференциально-нормирующий метод электроразведки с фокусировкой электрического тока (ДНМЭ-ФТ) в точке зондирования.

Проблема поиска месторождений УВ на практически важной для освоения части континентального шельфа (при глубинах моря до 250–300 м и глубине залегания целевого объекта относительно дна моря по крайней мере до 1500–2000 м) может быть успешно решена (по уверениям авторов метода) с применением ДНМЭ-ФТ в точке зондирования [14].

Для этого необходимо использовать не только традиционно применяемые осевые, но и ортогональные зондирующие установки.

Осевая установка (при которой генераторная линия и приёмные триполи располагаются на одной линии или параллельно) может применяться [14] при глубинах моря до 50–70 м. При зондированиях на больших глубинах моря предпочтительным представляется использование ортогональной установки, в которой измерительный триполь располагается вдоль линии, перпендикулярной оси генераторной линии.

Придонное расположение источников и датчиков

Отметим, что схемы с придонным расположением источников и приемников много дороже схем с их приповерхностным расположением. В настоящее время существуют следующие основные методы с придонным расположением:

1. Метод “Controlled source electromagnetic sounding” (CSEM).

Приёмными устройствами здесь служат измерительные станции с двухэлектродными датчиками, которые расставляются на морском дне вдоль профиля, секущего исследуемый объект. Генераторная двухэлектродная коса буксируется судном (в непосредственной близости от дна над датчиками) по этому профилю [15-18]. Используются как частотный метод зондирования, так и метод зондирования на переходных процессах.

Вариант зондирования методом CSEM встречает очень большие трудности при поисках нефти и газа при малых глубинах моря (менее 150–200 м), поскольку здесь полезный сигнал от нефтегазовой залежи забивается мешающей «воздушной» волной, представляющей ЭМ волну, проникающую от генератора к приёмнику через воздушное полупространство.

2. Метод “Focus source electromagnetic sounding” (FSEM).

В последнее время разрабатывается новый метод зондирования FSEM [18], использующий метод фокусировки тока на основе частичной или полностью симметричной схемы расположения источников и приемников на дне моря. Используется метод зондирования на переходных процессах.

По утверждению авторов метода [18] (С. Давыдычева, Н. Рыхлинский), FSEM свободен от указанных недостатков метода CSEM, т.е. применим на любых глубинах моря.

2. Математическая формулировка задачи

Перейдем к математической формулировке задачи определения величин компонент электромагнитного поля в точках среды и описанию алгоритма ее решения. Отметим, что нахождение решения необходимо при обработке данных (при решении обратной задачи) в каждом из вышеописанных методов зондирования.

Рассмотрим следующую схему вычисления компонент вектора напряженности электромагнитного поля в плоскостистой среде. Пусть в одном из слоев расположен излучающий точечный горизонтальный электрический диполь (HED), направленный вдоль оси OX. Требуется определить величину E_x вектора напряженности электрического поля на приемном диполе, расположенном в том же слое, в котором расположен излучающий диполь (так называемая аксиальная установка).

Рассмотрим 1D плоскостистую модель, состоящую из $N+1$ слоя. Пусть ось OZ направлена вертикально вниз, а оси OX и OY лежат в горизонтальной плоскости. Нумерация слоев начинается с нуля и идет сверху вниз вдоль оси OZ. Границы разделов сред совпадают с горизонтальными плоскостями $z = h_j, j = 0, \dots, N$.

«Нулевой» слой: $-\infty < z < h_0 = 0$, – полубесконечный слой воздуха;

слой номер 1: $h_0 < z < h_1$, – отвечает водной среде,

- в этом слое располагаются излучающий и приемный диполи;
- слои с номерами 2, 3,... – слои породы земли;
- самый нижний слой с номером N , $h_{N-1} < z < h_N = \infty$,
- полубесконечный слой породы.

Уравнения Максвелла в системе СИ можно записать в следующем виде (после преобразования Фурье или Лапласа, см. Приложение):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= p \boldsymbol{\varepsilon}_j + \mathbf{J}^E, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -p \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_j = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{rj} + \boldsymbol{\sigma}_j / p$ – электрическая проницаемость среды, зависящая от номера слоя j , $\boldsymbol{\varepsilon}_{rj}$ – относительная диэлектрическая проницаемость, $\boldsymbol{\sigma}_j$ – проводимость (в Приложении приведены характерные параметры проводимости воздуха, воды и земли);

$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м, – магнитная проницаемость среды, предполагающаяся равной магнитной проницаемости вакуума, μ_0 ;

$\varepsilon_0 = 10^7 / (4\pi c^2)$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума, c – скорость света;

В случае преобразования Лапласа $p = \alpha - i\omega$, где $\alpha > 0$, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – частота.

В случае преобразования Фурье $p = -i\omega$ (при переходе в частотную область предполагается, что все величины меняются по времени как $\exp(-i\omega t)$, $\omega = 2\pi f$).

Для справки укажем единицы величин:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}] &= \text{А/м}, [\mathbf{A}] = \text{А}, [\mathbf{E}] = \text{В/м}, [\mathbf{J}] = \text{А/м}^2, \\ [\mu] &= \text{Г/м}, [\boldsymbol{\varepsilon}] = \text{Ф/м} = \text{См}/(\text{м} \cdot \text{с}), [\boldsymbol{\sigma}] = \text{См/м}. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче точечный источник (НЭД) находится в слое с номером один («водном» слое) в точке с координатами (x_S, y_S, z_S) . В системе уравнений (1) ему будет соответствовать источник $\mathbf{J}^E = (J_X, 0, 0)$.

Как известно [19-22], решение уравнений Максвелла для плоскостройной среды с расположенным в ней горизонтальным электрическим диполем сводится к нахождению двух компонент векторного потенциала $\mathbf{A} = (A_X, 0, A_Z)$, через которые вычисляются векторы электрической и магнитной напряжённости:

$$\mathbf{E} = -p \mu \left[\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} \right], \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_Z}{\partial y}, \frac{\partial A_X}{\partial z} - \frac{\partial A_Z}{\partial x}, -\frac{\partial A_X}{\partial y} \right),$$

где k – волновое число, $k^2 = -p^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon} = -\mu_0 (p^2 \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{rj} + p \boldsymbol{\sigma}_j)$, $\operatorname{Im} k > 0$.

В рассматриваемых задачах в методах ЧЗ и ЗСП используется **низкочастотное приближение**, при котором пренебрегают влиянием токов смещения по сравнению с влиянием токов проводимости: $\varepsilon_j = \sigma_j / p$, $k_j^2 = -p\mu_0\sigma_j$.

Это связано с тем, что для практически применяемого диапазона частот в методе ЧЗ отношение $p\varepsilon_0\varepsilon_{rj}/\sigma_j$, показывающее значение токов смещения по сравнению с токами проводимости, для реальных сред (вода, земля) пренебрежимо мало в широком диапазоне частот (до десятков килогерц).

Что касается метода ЗСП, то разложение в частотный спектр нестационарного затухающего процесса показывает, что высокочастотные составляющие играют заметную роль только на самой начальной стадии после возникновения (первые десятки микросекунд), которые мало интересны для практики. Поэтому для исследования более поздних стадий установления электромагнитного поля можно пренебречь токами смещения.

Возможность пренебречь токами смещения в воздухе *a priori* не ясна, т.к. его электропроводность много меньше диэлектрической постоянной. В [23] исследовался данный вопрос для случая среды из двух полубесконечных однородных сред (воздух и земля, излучающий диполь – вертикальный магнитный или горизонтальный электрический – лежит на плоской поверхности земли). Распространение возбуждения при этом имеет два типа. Возбуждение первого типа распространяется сначала по воздуху со скоростью v , равной скорости света, и лишь затем проникает в землю. Возбуждение второго типа распространяется непосредственно в земле. Пренебрежение токами смещения в воздухе приводит к бесконечной скорости распространения возмущений по воздуху, $v = \infty$. В результате, пренебрежение токами смещения приводит к замене скорости распространения возмущения порядка скорости света на бесконечную скорость распространения, что оправданно на практике радиозондирования.

Таким образом, низкочастотное приближение представляется практически оправданным не только в ЧЗ, но и в методе ЗСП.

3. Представление в виде преобразования Ханкеля

Следуя [9, 19-23], будем искать компоненты векторного потенциала в каждом слое $j = 0, 1, \dots, N$ в виде преобразования Ханкеля по функциям Бесселя нулевого порядка, J_0

$$A_X^{(j)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty X_j(z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_j},$$

$$A_Z^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{A}_Z^{(j)}, \quad (2)$$

$$\tilde{A}_Z^{(j)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty Z_j(z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_j}.$$

Коэффициент $F = J_X dx_S$ – момент излучающего диполя, отвечающий точечному источнику длины dx_S , ориентированному вдоль оси X ; $r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}$, $\gamma_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$, $\text{Re } \gamma_j > 0$.

На границах разделов сред, как известно, выполняются условия непрерывности тангенциальных компонент магнитного и электрического поля [1-5, 19-22]. Эти условия эквивалентны в рассматриваемом случае следующим:

$$\begin{aligned} [A_X \mu]_h &= 0, [\tilde{A}_Z]_h = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} A_X \right]_h &= 0, \left[\frac{1}{k^2} \left(A_X + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_Z \right) \right]_h = 0, \end{aligned}$$

где квадратные скобки обозначают скачок функции на границе h раздела сред:

$$[A]_h = A_{h+0} - A_{h-0}.$$

В результате на каждой границе (т.е. при $z = h_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$) имеем по четыре соотношения (3), (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_j} X_j(h_j) &= \frac{1}{\gamma_{j+1}} X_{j+1}(h_j), \\ \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial z} X_j(h_j) &= \frac{1}{\gamma_{j+1}} \frac{\partial}{\partial z} X_{j+1}(h_j), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_j} Z_j(h_j) &= \frac{1}{\gamma_{j+1}} Z_{j+1}(h_j), \\ \frac{1}{k_j^2 \gamma_j} \left[X_j(h_j) + \frac{\partial}{\partial z} Z_j(h_j) \right] &= \frac{1}{k_{j+1}^2 \gamma_{j+1}} \left[X_{j+1}(h_j) + \frac{\partial}{\partial z} Z_{j+1}(h_j) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать ядра преобразования Ханкеля $X_j(z), Z_j(z)$ в (3), (4) в следующем виде (в форме, аналогичной представлению К. Кей [9]):

$$\begin{aligned} X_j(z) &= \delta_{j,1} \exp(-\gamma_1 |z - z_S|) + S_j(z), \\ Z_j(z) &= R_j(z) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} S_j(z), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Зависимость функций $X_j(z), Z_j(z)$ от λ, p для сокращения записи опущена. В записи (5) учтено, что источник находится в первом, водном слое, т.е. $h_0 < z_S < h_1$, и используется явное выражение для источника, вытекающее из известного тождества:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\gamma_1|z - z_S|) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \frac{1}{R} \exp(ik_1 R), \quad (6)$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z - z_S)^2}.$$

Будем искать функции $S_j(z), R_j(z)$ в (6) в виде линейной комбинации экспонент $\exp(\gamma_j z)$ и $\exp(-\gamma_j z)$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_j(z) &= (1 - \delta_{j,N}) A_j \exp(\gamma_j z) + (1 - \delta_{j,0}) B_j \exp(-\gamma_j z), \\ R_j(z) &= (1 - \delta_{j,N}) C_j \exp(\gamma_j z) + (1 - \delta_{j,0}) D_j \exp(-\gamma_j z). \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) введены коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j , которые надо определить – всего $4N$ неизвестных. В записи (7) учитываем, что ось Z направлена вглубь, поэтому в самом верхнем, воздушном, полубесконечном слое оставляем решение, затухающее при $z \rightarrow -\infty$, а в самом нижнем полубесконечном слое оставляем решение, затухающее при $z \rightarrow +\infty$.

Соотношения (3), (4), согласно (5), преобразуются к следующему виду:

$$\frac{S_j(h_j)}{\gamma_j} - \frac{S_{j+1}(h_j)}{\gamma_{j+1}} = \exp(-\gamma_1|h_j - z_S|) \left(\frac{\delta_{j+1,1}}{\gamma_{j+1}} - \frac{\delta_{j,1}}{\gamma_j} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{S_j(h_j)}{\gamma_j} - \frac{S_{j+1}(h_j)}{\gamma_{j+1}} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \exp(-\gamma_1|h_j - z_S|) \left(\frac{\delta_{j+1,1}}{\gamma_{j+1}} - \frac{\delta_{j,1}}{\gamma_j} \right)$$

$$\frac{R_j(h_j)}{\gamma_j} - \frac{R_{j+1}(h_j)}{\gamma_{j+1}} = -\frac{1}{\lambda^2} (\delta_{j+1,1} - \delta_{j,1}) \cdot \exp(-\gamma_1|h_j - z_S|) \cdot \text{sign}(h_j - z_S), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{R_j(h_j)}{k_j^2 \gamma_j} - \frac{R_{j+1}(h_j)}{k_{j+1}^2 \gamma_{j+1}} \right] = \frac{\gamma_1}{\lambda^2 k_1^2} (\delta_{j+1,1} - \delta_{j,1}) \cdot \exp(-\gamma_1|h_j - z_S|).$$

При выводе использовалось то, что в силу представления (7)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} S_j(z) = \gamma_j^2 S_j(z).$$

Подставляя в (8), (9) представления (7), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j , причем, как нетрудно видеть, во-первых, эта система состоит из двух независимых систем уравнений – для всех коэффициентов A_j, B_j и для всех C_j, D_j ; во-вторых, все уравнения имеют нулевую правую часть при $j > 1$, и только при $j=0$ и $j=1$ (т.е. для границ слоя, содержащего источник) правая часть будет ненулевой.

Обрисуеть кратко схему решения вышеупомянутой системы линейных уравнений.

Введем новые неизвестные G_j, Q_j и будем искать решение вышеуказанной системы линейных уравнений при $j > 1$ в виде:

$$B_j / A_j = G_j, D_j / C_j = Q_j.$$

Нетрудно видеть, что коэффициент G_j вычисляется явным образом через G_{j+1} , а коэффициент Q_j вычисляется явным образом через Q_{j+1} , причем $G_N = Q_N = 0$.

Таким образом, можно определить рекурсивно все коэффициенты G_j, Q_j , полагая последовательно $j = N - 1, N - 2, \dots, 2$.

Полученные значения G_2, Q_2 подставляются в уравнения с номерами $j = 0$ и $j = 1$ системы (8), (9) с учетом (7). В результате определяются искомые коэффициенты в первом слое, A_1, B_1, C_1, D_1 , которые нас интересуют в первую очередь, т.к. в этом слое находится приемный диполь в точке $M_R = (x_R, y_R, z_R)$. После нахождения коэффициентов для первого слоя, необходимо выполнить соответствующее интегрирование по λ , согласно интегральным представлениям (2):

$$A_X^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty X_1(z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1}, \quad \tilde{A}_Z^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty Z_1(z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$X_1(z) = \exp(-\gamma_1 |z - z_S|) + A_1 \exp(\gamma_1 z) + B_1 \exp(-\gamma_1 z),$$

$$Z_1(z) = C_1 \exp(\gamma_1 z) + D_1 \exp(-\gamma_1 z) - \frac{\gamma_1}{\lambda^2} [A_1 \exp(\gamma_1 z) - B_1 \exp(-\gamma_1 z)].$$

В результате находим искомый отклик электромагнитного поля в частотной области на приемном диполе:

$$E_X(M_R, p) = -p\mu \left[A_X^{(1)} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A_X^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_Z^{(1)} \right) \right]. \quad (10)$$

В случае метода ЗСП необходимо выполнить переход из частотной области во временную, т.е. выполнить обратное преобразование

$$E_X(M_R, p) \Rightarrow E_X(M_R, t).$$

Это можно сделать разными способами (см. Приложение):

а) путем интегрирования по параметру преобразования Лапласа p

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) G(p) dp,$$

где $g(t) = E_X(M_R, t)$, $G(p) = E_X(M_R, p)$;

б) путем интегрирования по ω для преобразования Фурье

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega,$$

где $\hat{g}(\omega) = E_X(M_R, p = -i\omega)$;

в) суммированием ряда Фурье

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n \exp(in\omega t),$$

где $\hat{g}_n = E_X(M_R, p_n = -i\omega n)$.

Третий способ предпочтителен для периодических импульсов тока. Во всех указанных способах преобразований необходимо, чтобы преобразуемая функция $G(p)$ равномерно стремилась к нулю при $|p| \rightarrow \infty$ (что выполняется в рассматриваемой задаче). Если $G(p)$ медленно асимптотически стремится к нулю, то, например, при интегрировании по ω для преобразования Фурье можно повысить эффективность интегрирования, используя лемму Жордана (см., например, [24]) и преобразуя путь интегрирования на комплексной плоскости ω .

Отметим одно важное свойство для рассматриваемой функции-изображения Лапласа, $G(p) = E_X(M, p)$, как комплексной функции от p :

$$G(\bar{p}) = \overline{G(p)},$$

где черта означает комплексное сопряжение. Это следует из того, что для входящих в определение $G(p)$ функций γ_j имеет место соотношение:

$$\gamma_j(\bar{p}) = \overline{\gamma_j(p)}, \text{ т.к. } \operatorname{Re} \gamma_j > 0.$$

Заметим, что $k_j(\bar{p}) = -\overline{k_j(p)}$, но $\exp(iRk_j(\bar{p})) = \exp(-iR\overline{k_j(p)}) = \overline{\exp(iRk_j(p))}$.

Принимая все это во внимание, формулу обращения Лапласа можно записать в следующем виде:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \{ \exp[(\alpha + i\omega)t] G(\alpha + i\omega) \} d\omega.$$

Данная запись более эффективна с вычислительной точки зрения. Кроме того, из нее сразу следует вещественность искомой функции.

Аналогичные упрощающие преобразования можно выполнить и для остальных способов получения $g(t)$, но на этом не будем останавливаться.

Заметим, что в случае протяженных источников при определении разности потенциалов на приемных электродах следует выполнить интегрирование выражения для напряженности электрического поля вдоль источника, а также вдоль линии, соединяющей приемные электроды. Например, рассмотрим следующую аксиальную схему установки. Пусть имеется линейный протяженный источник M_S , расположенный параллельно оси ОХ:

$$(X_{S1} < x_S < X_{S2}, y_S = 0, z_S)$$

Рассмотрим три эквидистантных измерительных электрода $(M_{R1}, M_{R0} = N, M_{R2})$, расположенных на линии, также параллельной оси ОХ:

$$M_{R1} = (X_{R1} = X_N - D_X, Y_{R1} = y_S, Z_{R1} = z_S),$$

$$N = M_{R0} = (X_{R0} = X_N, Y_{R0} = y_S, Z_{R0} = z_S),$$

$$M_{R2} = (X_{R2} = X_N + D_X, Y_{R2} = y_S, Z_{R2} = z_S),$$

где D_X – расстояние между электродами.

Требуется рассмотреть разность потенциалов между парами измерительных электродов. Например,

$$\Delta_{2,0}U = U(M_{R2}) - U(M_{R0}) = - \int_{X_{S1}}^{X_{S2}} \int_{X_{R0}}^{X_{R2}} E_X dx dx_S.$$

4. Методические рекомендации

Приведем ряд методических рекомендаций, касающихся вопросов вычисления интегралов и получения окончательных значений интересующих нас величин.

Необходимо как можно лучше изучить экспоненциальное и осциллирующее поведение подынтегральных функций, выделять члены, имеющие разное экспоненциальное поведение; рассмотреть и учесть асимптотику на бесконечности, применять аналитику для плохо сходящихся членов (там, где это возможно).

Выделение экспонент

В подынтегральных выражениях следует выделять экспоненты, причем все выражения преобразовывать к виду, не содержащему нарастающие экспоненты, а только убывающие, например, следует преобразовать коэффициенты в первом слое:

$$\begin{aligned} A_1 \exp(\gamma_1 z) &= \tilde{A}_1 \exp[-\gamma_1(2h_1 - z_S - z)], \\ B_1 \exp(-\gamma_1 z) &= \tilde{B}_1 \exp[-\gamma_1(z_S + z - 2h_0)], \end{aligned} \quad (11)$$

C_1, D_1 преобразуются аналогично. Тильдой сверху обозначены члены, не имеющие экспоненциального поведения.

Напомним, что источник и приемник находятся в первом слое, в котором $h_0 < z, z_S < h_1$, откуда следует асимптотическое убывание вышеуказанных экспонент с ростом λ , т.к. $\gamma_j \sim |\lambda|$ при больших λ .

Выбор шага интегрирования

При численном вычислении интегралов вида

$$\int H(\lambda) \exp(f(\lambda)) d\lambda,$$

где $f(\lambda) = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ – комплексная функция, $H(\lambda)$ не имеет экспоненциального поведения, шаги интегрирования следует выбирать из условия, чтобы за шаг $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$, функция изменялась по модулю в заданных пределах и не испытывала больше одной осцилляции. Это приводит к следующим соотношениям:

$$|\operatorname{Re}[f(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\lambda_0)]| < \zeta, \quad |\operatorname{Im}[f(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\lambda_0)]| < \theta,$$

где $\zeta \leq 3, \theta \leq \pi$ – параметры точности интегрирования; чем они меньше, тем точнее, но дольше расчет.

Если функция $f(\lambda)$ дифференцируема и ее производная не обращается в нуль на участке интегрирования, то

$$\Delta\lambda = \min \left[\frac{\zeta}{\operatorname{Re} f'(\lambda_0)}, \frac{\theta}{\operatorname{Im} f'(\lambda_0)} \right] \sim \frac{\min(\zeta, \theta)}{|df(\lambda_0)/d\lambda|}.$$

В случае бесконечного интервала интегрирования процесс численного интегрирования прекращается, когда подынтегральная функция становится достаточно мала. Чем быстрее стремится к нулю подынтегральная экспонента, тем быстрее сходится соответствующий интеграл, хотя шаги интегрирования при этом будут более мелкие.

5. «Аддитивная схема» вычислений

Имеет смысл выделить члены, отвечающие случаям с различным числом слоев по вертикали. Кроме практической точки зрения выявления влияния дополнительных слоев, такое представление позволяет осуществлять, как показано ниже, эффективное вычисление соответствующих интегралов Ханкеля. Для этого построим следующую «аддитивную» схему вычислений.

Пусть, например, мы ищем отклик электрического поля $E_X(M_R, p)$ на приемном диполе, расположенном в точке $M_R = (x_R, y_R, z_R)$, в предположении среды с $N = 4$ (т.е. с числом слоев, включая воздух, равным $N + 1 = 5$). Этот отклик представим в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} E_X^{(N=4)}(M_R) &= E_X^{(N=1)} + E_X^{(N=2)} - E_X^{(N=1)} + E_X^{(N=3)} - E_X^{(N=2)} + E_X^{(N=4)} - E_X^{(N=3)} = \\ &= E_X^{(N=1)} + \Delta_2 E_X + \Delta_3 E_X + \Delta_4 E_X, \end{aligned}$$

где $\Delta_k E_X = E_X^{(N=k)} - E_X^{(N=k-1)}$.

Верхним индексом ($N = 1$) обозначено решение, отвечающее среде, в которой присутствуют только два полубесконечных слоя воздуха и воды;

($N = 2$) – среда, в которой имеются воздух, вода и земля (при этом нижний слой рассматривается как один полубесконечный слой с параметрами слоя 2);

($N = 3$) – среда, в которой имеются воздух, вода и 2 слоя в земле (нижний слой рассматривается как полубесконечный слой с параметрами слоя 3), и т.д.

При этом естественным образом рассматриваются «разности» между случаями ($N = 2$) и ($N = 1$), между ($N = 3$) и ($N = 2$) и т.д.

Очевидно, вычисление $\Delta_k E_X$ сводится к вычислению «разностей» коэффициентов в интегралах Ханкеля (в преобразованной форме (11), помеченной тильдой, – после выделения экспонент):

$$\Delta_k \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^{(N=k)} - \tilde{A}_1^{(N=k-1)}, \Delta_k \tilde{C}_1 = \tilde{C}_1^{(N=k)} - \tilde{C}_1^{(N=k-1)} \text{ и т.д.}$$

Обозначим

$$\eta_j = \frac{\gamma_j - \gamma_{j+1}}{\gamma_j + \gamma_{j+1}}, e_s = \exp(-2\gamma_1(z_s - h_0)), e_{j+1} = \exp(-2\gamma_{j+1}(h_{j+1} - h_j)).$$

Можно показать:

$$\tilde{A}_1^{(N=2)} = \eta_1 \frac{1 - e_s \eta_0}{1 + \eta_0 \eta_1 e_1}, \Delta_3 \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^{(N=3)} - \tilde{A}_1^{(N=2)} = H_A^{2,3} e_2,$$

$$H_A^{2,3} = \frac{1 - e_s \eta_0}{1 + \eta_0 \eta_1 e_1} \cdot \frac{(1 - \eta_1^2) \eta_2}{[1 + \eta_1 \eta_2 e_2 + (\eta_1 + \eta_2 e_2) \eta_0 e_1]},$$

$$\Delta_4 \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^{(N=4)} - \tilde{A}_1^{(N=3)} = H_A^{3,4} e_2 e_3,$$

$$H_A^{3,4} = \frac{(1 - e_s \eta_0)(1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2^2) \eta_3}{[1 + \eta_1 \eta_2 e_2 + (\eta_1 + \eta_2 e_2) \eta_0 e_1][(1 + \eta_0 \eta_1 e_1)(1 + \eta_2 \eta_3 e_3) + e_2(\eta_1 + \eta_0 e_1)(\eta_2 + \eta_3 e_3)]},$$

и т.д.

Видно, что при $k > 2$ разности $\Delta_k \tilde{A}_1$ обладают экспоненциальным поведением. В общем случае имеем:

$$\Delta_k \tilde{A}_1 = H_A^{k-1,k} \exp\left(-2 \sum_{j=1}^{k-2} \gamma_{j+1}(h_{j+1} - h_j)\right), 2 < k \leq N.$$

Здесь $H_A^{k-1,k}$ обозначены множители, не имеющие экспоненциального поведения. Аналогичное поведение имеют и «разности» остальных коэффициентов. Можно получить рекурсивные формулы для вычисления $\Delta_k \tilde{A}_1$ (и других коэффициентов) при любом номере k , что позволяет «автоматизировать» процесс вычислений «разностей» с большими номерами k (на этом не будем останавливаться).

Различное экспоненциальное поведение полученных подынтегральных членов делает естественным их интегрирование по отдельности (с соответствующими шагами интегрирования), что обеспечивает эффективное вычисление интегралов с точки зрения ускорения вычислений и повышения точности расчетов. Указанный подход также эффективен для распараллеливания вычислений.

Заметим, что затраты на численное интегрирование снижаются с ростом N , несмотря на нарастание громоздкости соответствующих формул.

Случай $N = 1$ наиболее плохо сходится с точки зрения численного интегрирования, однако этот случай можно вычислить «аналитически» (под этим будем понимать сведение к виду, позволяющему эффективный численный расчет), как показано в следующем параграфе, в котором рассмотрены некоторые аналитические решения: для чисто однородной среды ($N = 0$) и для двухслойной среды вода–воздух ($N = 1$).

6. Аналитические решения для простейших случаев

6.1. Решение в чисто однородной среде ($N = 0$)

Рассмотрим решение в чисто однородной среде ($N = 0$) для точечного горизонтального электрического диполя, расположенного в точке $(x_S, y_S, z_S) = (0, 0, 0)$ и направленного параллельно оси ОХ:

$$\mathbf{A} = (A_X, 0, 0), \quad \mathbf{E} = -p\mu\mathbf{A} - \text{grad } U, \quad U = \frac{p\mu}{k^2} \text{div}\mathbf{A},$$

$$A_X(R, p) = \frac{F}{4\pi} G(R, p), \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z_S)^2}, \quad r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2},$$

где

$$G(R, p) = \frac{\exp(ikR)}{R} = \int_0^\infty \exp(-\gamma|z|) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \text{Re } \gamma > 0;$$

$$E_X(R, p) = -p\mu \frac{F}{4\pi} \left[G(R, p) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(R, p) \right], \quad E_Y(R, p) = -\frac{p\mu F}{4\pi k^2} \frac{\partial^2 G(R, p)}{\partial x \partial y},$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r + \sigma / p$ – электрическая проницаемость среды,

$\mu = \mu_0 \mu_r$ – магнитная проницаемость среды,

ε_r, μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, причем

последняя предполагается постоянной, $\mu_r = 1$;

σ – электрическая проводимость среды (См/м);

$\varepsilon_0 = 10^7 / (4\pi c^2)$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м – магнитная проницаемость вакуума,

$c = 1 / \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме;

$k^2 = -p^2 \mu \varepsilon$, $\text{Im } k > 0$, в низкочастотном приближении $k^2 = -p\mu_0\sigma$.

Для преобразования Лапласа $p = \alpha - i\omega$, где $\alpha > 0$, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота.

В методе ЧЗ $F = \int_{x_S} dx_S = \text{const}$ отвечает моменту точечного источника НЭД гармонических электрических колебаний частоты f , имеющего длину dx_S и ориентированного вдоль оси х.

В методе ЗСП $F = m(p)$ – преобразование Лапласа момента точечного диполя, $m(t) = I(t)dx_S$, отвечающего импульсу тока $I(t)$.

В первую очередь рассмотрим случай постоянного тока величины I_0 , включаемого в момент времени $t = 0$:

$$I(t) = I_0\eta(t), \quad m_0 = I_0dx_S, \quad F = m(p) = m_0/p,$$

где $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Подставляя $m(p) = m_0/p$, получим значения компонент ЭП в частотной области для импульса постоянного тока:

$$E_X(R, p) = \frac{m_0}{4\pi} \left[-\mu_0 G(R, p) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{p} G(R, p) \right], \quad E_Y(R, p) = \frac{m_0}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{p} G(R, p).$$

Для получения решения, отвечающего импульсу постоянного тока во временной области, следует провести обратное преобразование Лапласа или Фурье. Заметим, что с формальной точки зрения во временной области нельзя использовать низкочастотное приближение, т.к. указанные обратные преобразования представляют собой интегрирование по всему спектру частот. Однако, как показывают исследования, про которые говорилось выше, с практической точки зрения использование низкочастотного приближения представляется обоснованным и целесообразным.

Производя обратное преобразование Лапласа, в общем случае (для $k^2 = -p^2 \mu \varepsilon$) можно получить [25, 26]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G(R, p)](t) &= F_0(R, t) = \frac{1}{R} \exp(-\chi t) \frac{\partial}{\partial t} \left[\eta(t - t_R) I_0 \left(\chi \sqrt{t^2 - t_R^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{R} \left[\eta(t - t_R) B_0(t_R, t) + \delta(t - t_R) \exp(-\chi t_R) \right], \end{aligned}$$

где

$$B_0(t_R, t) = \chi t_R \exp(-t\chi) I_1 \left(\chi \sqrt{t^2 - t_R^2} \right) / \sqrt{t^2 - t_R^2},$$

I_1 – модифицированная функция Бесселя 1-го порядка,

$$\chi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \text{ – коэффициент затухания в среде,}$$

$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi \text{ Ом}$, $t_R = R/v$ означает время прихода возмущения в точку, находящуюся на расстоянии R от источника при распространении со скоростью света в среде, $v = c / \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$. Следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} G(R, p) \right] (t) = F_{-1}(R, t) = \int_0^t F_0(R, \tau) d\tau,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[E_X^{(N=0)}(R, p)\right](t) = \frac{m_0}{4\pi} \left[-\mu_0 F_0(R, t) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{-1}(R, t) \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[E_Y^{(N=0)}(R, p)\right](t) = \frac{m_0}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{-1}(R, t).$$

Отсюда, используя асимптотику модифицированных функций Бесселя для больших значений аргумента,

$$I_\nu(\zeta) \sim \exp(\zeta) / \sqrt{2\pi\zeta},$$

можно получить выражение для низкочастотного приближения, как предел при $\varepsilon_r \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \frac{1}{R} B_0(t_R, t) = \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \frac{\exp\left[\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \sqrt{t^2 - t_R^2} - t\right)\right] \eta_0 \sigma \sqrt{\mu_r}}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} \sqrt{t^2 - t_R^2}} \frac{1}{2t\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{b}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{R^2 b^2}{t}\right),$$

где $b = \frac{1}{2} \sqrt{\mu_0 \sigma \mu_r}$.

Фактически, как уже говорилось выше, низкочастотное приближение означает замену скорости распространения возмущения в среде, $v = c / \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, на бесконечно большую скорость распространения, $v = \infty$, что является практически оправданным.

Таким образом, в низкочастотном приближении имеем:

$$\mathcal{L}^{-1}[G(R, p)] = F_0(R, t) = \eta(t) \frac{b}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-R^2 \frac{b^2}{t}\right) + \frac{\delta(t)}{R}, \quad (12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} G(R, p)\right] = F_{-1}(R, t) = \int_0^t F_0(R, \tau) d\tau = \frac{\eta(t)}{R} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Rb}{\sqrt{t}}\right)\right], \quad (13)$$

где $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\xi^2) d\xi$ – интеграл вероятности.

Следовательно, в низкочастотном приближении, при $N = 0$, для импульса постоянного тока:

$$E_X^{(N=0)}(R, t) = \mathcal{L}^{-1}\left[E_X^{(N=0)}(p, t)\right](t) = \frac{m_0}{4\pi} \left[-\mu_0 F_0(R, t) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{-1}(R, t) \right] =$$

$$= \eta(t) \frac{m_0}{4\pi} \left[-\frac{\mu_0 b}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-R^2 \frac{b^2}{t}\right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Rb}{\sqrt{t}}\right)\right] \right) \right],$$

$$E_Y^{(N=0)}(R, t) = \mathcal{L}^{-1}\left[E_Y^{(N=0)}(R, p)\right](t) = \frac{m_0}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{-1}(R, t) =$$

$$= \eta(t) \frac{m_0}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{R} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{Rb}{\sqrt{t}} \right) \right] \right).$$

Используя данные выражения, несложно получить формулы для прямоугольного импульса тока длительности τ :

$$E_X^{(N=0)}(R, t, \tau) = E_X^{(N=0)}(R, t) - E_X^{(N=0)}(R, t - \tau),$$

$$E_Y^{(N=0)}(R, t, \tau) = E_Y^{(N=0)}(R, t) - E_Y^{(N=0)}(R, t - \tau).$$

6.2. Решение для двухслойной среды ($N = 1$) в частотной области

Рассмотрим решение для точечного НED расположенного в точке $(x_S = 0, y_S = 0, z_S > 0)$ и направленного параллельно оси OX в случае двухслойной среды, вода–воздух, с плоской горизонтальной границей раздела сред, расположенной при $z = h_0 = 0$.

Заметим, что одним из первых задачи электроразведки в подобных средах (точнее, для диполя, лежащего на поверхности земли в приближении двухслойной среды земля–воздух) рассматривал Тихонов А.Н. [27, 28].

В случае $N = 1$ компоненты векторного потенциала имеют следующее представление.

В воздухе (полубесконечная среда, $z < h_0 = 0$, индекс $j = 0$):

$$A_X^{(0)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty A_0 \exp(\gamma_0 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_0},$$

$$A_Z^{(0)} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{A}_Z^{(0)}, \quad \tilde{A}_Z^{(0)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty C_0 \exp(\gamma_0 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_0},$$

$$k_0^2 = 0, \gamma_0 = |\lambda|.$$

В воде (полубесконечная среда, $z > h_0 = 0$, индекс $j = 1$):

$$A_X^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty [\exp(-\gamma_1 |z - z_S|) + B_1 \exp(-\gamma_1 z)] J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1},$$

$$A_Z^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{A}_Z^{(1)}, \quad \tilde{A}_Z^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty D_1 \exp(-\gamma_1 z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_1}.$$

Из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на границе раздела двух сред (отвечающей $z = h_0 = 0$) следует:

$$B_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0 + \gamma_1} \exp(-\gamma_1 z_S),$$

$$D_1 = \frac{\frac{k_0^2}{k_1^2} - 1}{\frac{\gamma_0 + \frac{k_0^2}{k_1^2}}{\gamma_1}} \frac{2 \exp(-\gamma_1 z_S)}{\gamma_0 + \gamma_1} \cong -2 \frac{\gamma_1 \exp(-\gamma_1 z_S)}{\gamma_0 \gamma_0 + \gamma_1} \quad \text{при } |k_0^2 / k_1^2| \ll 1,$$

$$A_X^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \left[G(R, p) - G(R_+, p) - \frac{2}{k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} G(R_+, p) + \frac{2}{k_1^2} \int_0^\infty \gamma_0 \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right],$$

$$\Pi^{(1)} = A_X^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_Z^{(1)} = \left[\frac{k_0}{k_1} \ll 1 \right] = \frac{F}{4\pi} \left[G(R, p) - G(R_+, p) + 2 \int_0^\infty \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_0} \right]$$

где

$$G(R, p) = \frac{\exp(ik_1 R)}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z_S)^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R_+ = \sqrt{r^2 + h^2}, \quad h = z + z_S.$$

Приближение воздух как изолятор: $k_0^2 = 0, \gamma_0 = \lambda$, дает

$$A_X^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \left[G(R, p) - G(R_+, p) + 2 \int_0^\infty \frac{\exp(-\gamma_1(z_S + z))}{\lambda + \gamma_1} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right],$$

$$\Pi^{(1)} = A_X^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}_Z^{(1)} = \frac{F}{4\pi} \left[G(R, p) - G(R_+, p) + 2 \int_0^\infty \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right].$$

В результате получим выражения для компонент ЭП в частотной области:

$$E_X^{(N=1)}(M, p) = -p\mu_0 \left[A_X^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Pi^{(1)} \right] = \varphi_X(M, p) + \psi_X(M, p) \quad (14)$$

$$E_Y^{(N=1)}(M, p) = -\frac{p\mu_0}{k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pi^{(1)} = \varphi_Y(M, p) + \psi_Y(M, p), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_X(M, p) &= -\mu_0 \frac{pF}{4\pi} [G(R, p) - G(R_+, p)] + \\ &+ \frac{F}{4\pi\sigma_1} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [G(R, p) - G(R_+, p)] - 2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} G(R_+, p) \right\}, \\ \varphi_Y(M, p) &= \frac{F}{4\pi\sigma_1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [G(R, p) - G(R_+, p)], \end{aligned}$$

$$\psi_X(M, p) = \frac{F}{2\pi\sigma_1} \left(k_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) I_A(r, h, p),$$

$$\psi_Y(M, p) = \frac{F}{2\pi\sigma_1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_A(r, h, p),$$

где обозначено:

$$I_A(r, h, p) = \int_0^{\infty} \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) d\lambda = -\frac{\partial}{\partial h} I_F(r, h, k_1),$$

$$I_F(r, h, k_1) = \int_0^{\infty} \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma_1}.$$

Интеграл I_F имеет аналитическое представление, полученное Фоком В.А. (см., например, [3]):

$$I_F(r, h, k_1) = \frac{i\pi}{2} J_0 \left[\frac{k_1}{2} (\sqrt{r^2 + h^2} - h) \right] \cdot H_0^{(1)} \left[\frac{k_1}{2} (\sqrt{r^2 + h^2} + h) \right], \quad (16)$$

где J_0 – функция Бесселя, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода.

Отметим, что в записи (14, 15) фигурируют члены трех типов возмущений, связанных, соответственно, с $G(R, p)$, $G(R_+, p)$ и $I_A(r, h, p)$.

При этом $G(R, p)$ отвечает возмущениям, распространяющимся напрямую от источника к точке приема; $G(R_+, p)$ – возмущениям, распространяющимся с отражением от поверхности воды. Третий тип отвечает возмущениям, имеющим следующую траекторию распространения: сначала от источника к поверхности, затем по воздуху вдоль поверхности воды, а затем от поверхности воды к точке приема. Волны последнего типа называют по-разному: воздушная волна (airwave), боковая волна [17, 18, 20, 25, 26, 29].

Заметим, что можно получить аналитическое (в интегрально-формульном виде) представление решения во временной области для импульса постоянного тока в двухслойной среде ($N = 1$) для возмущений 3-го типа, отвечающих воздушной волне. Первые два типа возмущений при этом, очевидно, обрабатываются по формулам (12), (13). Но в настоящей работе на этом не будем останавливаться.

7. Результаты численных расчетов, ЧЗ

Была разработана и программно реализована описанная в данной работе методика «аддитивной схемы» вычисления выражений для вычисления компонент ЭП в частотной и временной области в N -слойной среде, включающая описанную аналитику для случая $N = 1$.

Приведем некоторые результаты моделирования, полученные с помощью алгоритмов, описанных выше, для случая ЧЗ и точечных источников и приемников. Несмотря на простоту рассматриваемой модели, данные результаты позволяют получить некоторые представления о ряде качественных особенностей проведения электроразведки с помощью ЧЗ.

Во всех последующих примерах расчетов предполагается, что модель среды отвечает $N = 4$, т.е. состоит из следующих слоев:

«нулевой» слой – полубесконечный – соответствует воздуху;

первый – водный слой – имеет мощность 200 или 1000 метров;

второй слой имеет мощность 1000 или 2000 метров и соответствует породе, не содержащей углеводороды;

третий слой имеет мощность 200 метров и соответствует слою УВС (углеводородный слой) или слою породы;

четвертый – последний слой, полубесконечный – соответствует породе.

Удельное сопротивление воды предполагается равным $0,3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$, что соответствует случаю соленой воды, сопротивление породы без УВС считается равным $1,0 \text{ Ом}\cdot\text{м}$, сопротивление слоя УВС предполагается равным $50 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

Точечный приемник (НЕР) во всех рассмотренных случаях расположен на дне, а точечный источник (НЕР) – на расстоянии 30 метров от дна. Момент тока на источнике (произведение величины тока на линейный размер излучающего диполя) равен $1 \text{ А}\cdot\text{м}$.

В расчетах варьировались:

– толщина водного слоя, 200 м и 1000 м («небольшая» и «большая» толщины);

– глубина залегания слоя УВС, 1000 м и 2000 м («небольшая» и «большая» глубины УВС).

Результаты расчетов (рис. 1–4) представляют собой графики зависимости величины амплитуды x -компоненты вектора напряженности электрического поля, $E_x \text{ (В/м)}$, от частоты и от «разноса». Под разносом понимается расстояние в метрах вдоль оси Ox между излучающим горизонтальным диполем с единичным моментом $F = 1 \text{ А}\cdot\text{м}$ и точечным приемником. Кривые, отвечающие разным частотам ($f = 0.001; 0.05; 0.25; 1; 2; 5; 10 \text{ Гц}$), указаны разными цветами (голубой, коричневый, зеленый, фиолетовый, синий, красный, темно-синий). Очень малая частота $f = 0.001 \text{ Гц}$ практически отвечает случаю постоянного тока. Для каждой фиксированной частоты $f \text{ (Гц)}$ и разноса $r \text{ (м)}$ рассматриваются два случая: в породе имеется слой УВС (сплошная линия) либо в породе такого слоя нет (пунктирная линия).

Рис. 1 отвечает относительно небольшой глубине залегания УВС и относительно небольшому слою воды. УВС при этом заметен при частотах $f = 0.001; 0.05; 0.25$ Гц.

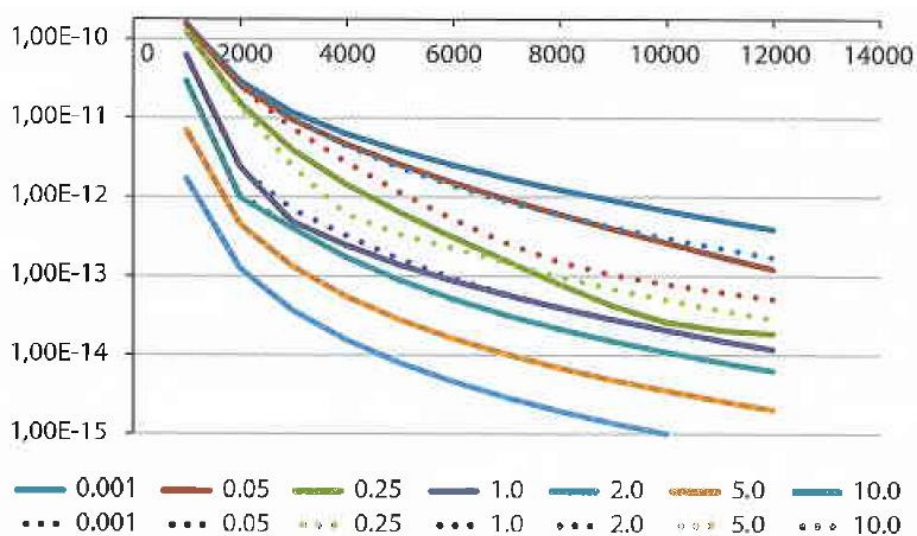


Рис. 1. Глубина залегания УВС 1000 м, толщина водного слоя равна 200 м.

Рис.2 показывает, что большой слой воды, при котором исчезает паразитическое влияние воздушной волны, приводит к улучшению результатов: УВС заметен при частотах f до 5 Гц.

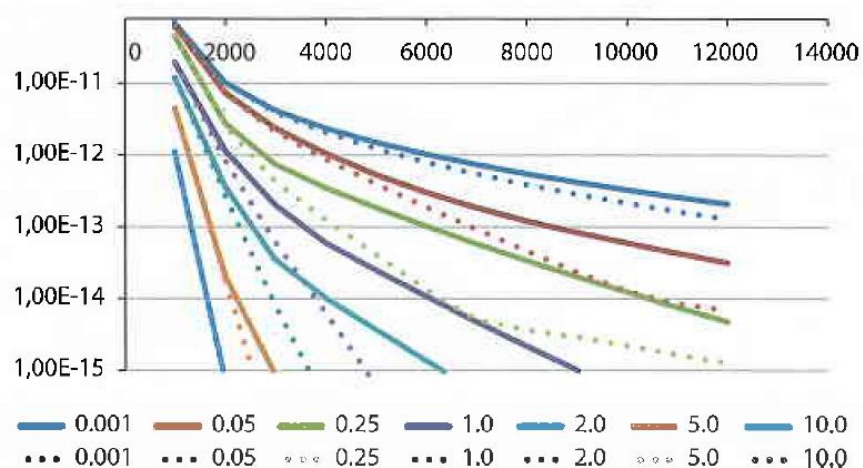


Рис. 2. Глубина залегания УВС 1000 м, толщина водного слоя равна 1000 м.

Рис. 3 показывает, что при относительно большой глубине залегания УВС и относительно небольшой толщине водного слоя, УВС заметен при частотах f до 0.05 Гц, причем слабо.

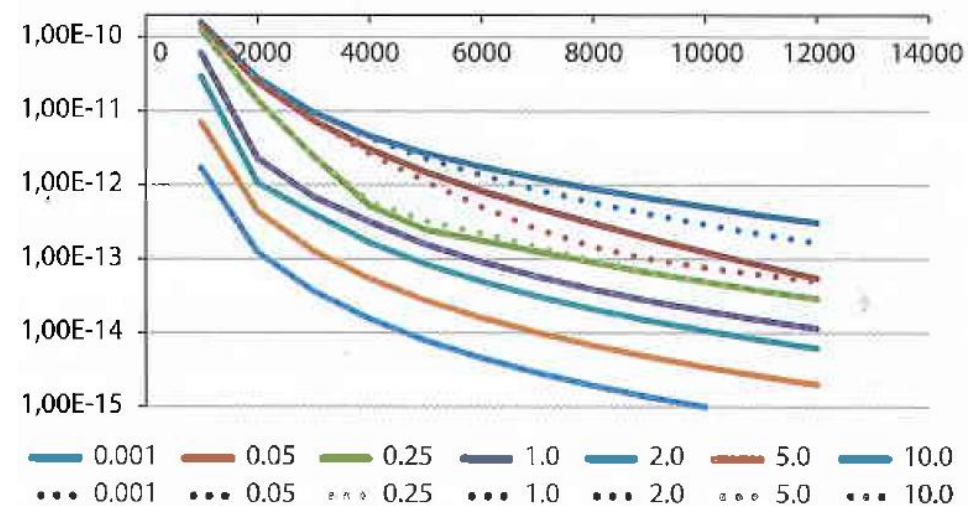


Рис. 3. Глубина залегания УВС 2000 м, толщина водного слоя равна 200 м.

На рис. 4 видно, что при большой глубине залегания УВС и большой толщине водного слоя, УВС заметен при частотах f до 1 Гц (но с очень малыми при 1 Гц значениями).

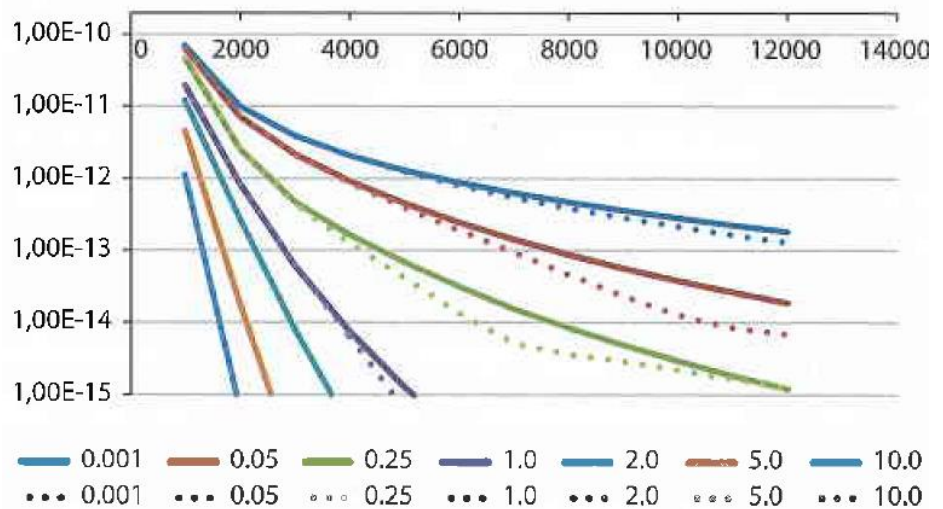


Рис.4. Глубина залегания УВС 2000 м, толщина водного слоя равна 1000 м.

Результаты расчетов демонстрируют следующее:

1) малая толщина слоя воды приводит к превалированию «воздушной» волны, «забывающей» полезный сигнал, отраженный от нижних слоев земли, причем, чем больше частота, тем в большей степени; так что при малых водных глубинах надо использовать очень малые частоты;

2) чем глубже глубина УВС, тем слабее полезный сигнал;

3) чем больше частота, f , тем слабее сигнал, т.к. с возрастанием частоты усиливается затухание сигнала в процессе его распространения. Кроме того, с возрастанием частоты уменьшается глубина проникновения, δ , в породу. В однородном пространстве, как известно, имеем:

$$\delta = 1 / \sqrt{\pi \sigma \mu_0 f},$$

где σ, μ_0 – проводимость и магнитная проницаемость свободного пространства.

В частности, на графиках, соответствующих глубине залегания УВС, равной 2000 м, можно заметить практически полное совпадение кривых с УВС и без УВС для частот выше 1 Гц, для всего рассмотренного диапазона разносов между источником и приемником. Поэтому частоты выше 1 Гц для данной глубины залегания в данной модели среды применять нецелесообразно.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами работ [17, 18], в которых рассматривалась 1D модель со следующими вариантами: малая (200 м, shallow water) и большая глубины воды (600 м, deep water); углеводородсодержащая аномалия – слой толщиной 250 м – на глубине 1000 м. Вода, порода, УВС имеют сопротивление 0.3, 1.0, 50 Ом·м. Уровень естественного электрического поля (магнитотеллурический шум) принимался равным 10^{-14} В/м; частота варьировалась: $f = 0.001, 0.05, 0.25, 1.0, 2.0$ Гц.

В этих работах содержатся следующие выводы (аналогичные выводам настоящей работы).

Для неглубокой воды при высоких частотах отклик аномалии УВС слабый, а при очень низких – сильнее (например, при почти постоянном токе, $f < 0.05$ Hz), так как при таких частотах влияние воздушной волны слабее. Для глубокой воды полезный отклик резервуара будет сильнее при больших частотах, однако сигнал при высоких частотах слабее и его уровень при больших разносах приближается к уровню естественного шума, что затрудняет интерпретацию измерений (решение обратной задачи).

8. Заключение

Применительно к задачам морской электроразведки рассмотрен процесс распространения электромагнитного возмущения в рамках классической многослойной плоскостройной модели среды и предложены эффективные численно-аналитические методы для расчета этого процесса.

В работе описано получение решения уравнений Максвелла в частотной области в виде интегралов Ханкеля. Разработана «аддитивная схема», заключающаяся в представлении решения, отвечающего N слоям, в аддитивном виде с выделением и отдельным расчетом выражений для каждого слоя. В частности, отдельно рассмотрен наиболее трудоемкий случай двухслойного пространства вода–воздух, который практически сводится к форме, позволяющей эффективный численный расчет. Такое рассмотрение важно, например, для учета «паразитического» сигнала и выявления полезного сигнала на приемнике, отвечающего возмущениям, отраженным от неоднородностей в толще земли. Указанное построение «аддитивной схемы» полезно для выявления влияния каждого слоя, обеспечивает эффективное численное интегрирование, а также удобно для распараллеливания задачи. Под эффективным численным интегрированием мы понимаем ускорение вычислений и повышение их точности, что обуславливается адекватным выбором шагов интегрирования. Кроме того, это экономит действия при организации пересчета в случае изменения параметров одного слоя или добавления нового слоя.

Приведенные результаты показывают, что выбор рабочих частот и разносов в методе ЧЗ связан с глубиной исследования, толщиной слоя воды и предполагаемым распределением электропроводности по слоям. Для различных глубин наиболее информативными являются измерения, проводимые на соответствующей рабочей частоте, – для больших глубин лучше использовать сигналы большей частоты, обладающие большим разрешением. Однако при этом следует учитывать, что с возрастанием частоты усиливается затухание сигнала и полезный отклик ослабевает, уменьшается глубина проникновения в породу.

При небольшой толщине слоя воды и малых разносах в получаемом на приемниках отклике превалирует «паразитический» ЭМ сигнал, отвечающий возмущениям, распространяющимся от источника к приемнику

непосредственно в слое воды и «забивающим» полезный сигнал. Как известно (и показано в настоящей работе), указанный «паразитический» сигнал состоит из нескольких типов возмущений: воздушная волна, волна, идущая напрямую от источника к приемнику, и волна, распространяющаяся с отражением от границы слоя вода–воздух. Все эти составляющие можно априори определить численно-аналитически (например, по формулам для двухслойного пространства вода–воздух, рассмотренным в настоящей работе), используя известные значения электропроводности воды и геометрию расположения источника и приемника. На основе этой информации можно эффективно учесть указанные «паразитические» сигналы и выделить полезные.

Приложение

III. Характерные значения электропроводности

Приведем для справки некоторые характерные значения. Относительные диэлектрические проницаемости воздуха и воды:

$$\varepsilon_{r0} = 1, \varepsilon_{r1} = 81.$$

Электропроводность воздуха, $\sigma_0 = 10^{-12} - 10^{-13}$ См/м.

Удельная электропроводность воды (УЭП) зависит от содержания солей:

$УЭП$ (мкСм/см) = содержание солей (мг/л) / 0,65:

для речных и пресных озерных вод, УЭП = 20÷800 мкСм/см.

Электропроводность морской воды, $\sigma = 5$ См/м.

Вода в Каспии – с разным содержанием солей: от 0,05 ‰ близ устья Волги до 11÷13 ‰ на юго-востоке.

Земная кора древних платформ имеет большое сопротивление, т.к. в процессе развития породы коры подвергались нагреванию под большим давлением. Верхняя часть коры имеет сопротивление $\rho = 10^3 - 10^4$ Ом·м.

Верхний, осадочный слой земной коры обычно имеет небольшие сопротивления: $\rho = 1 \div 100$ Ом·м.

В связи с этим в геоэлектрике часто рассматривается упрощенная модель коры: проводящий осадочный чехол лежит на слабо проводящем основании или "фундаменте".

Уровень естественного электрического поля Земли (магнетотеллурический шум) зависит от многих причин (в том числе от солнечной активности, гроз и др.) имеет характерные значения порядка 1 мВ/км = 10^{-6} В/м. Этот шум надо учитывать при интерпретации измерений – полезный сигнал должен превосходить уровень шума. Один из способов увеличения уровня полезного сигнала – проведение многих измерений одного и того же участка с суммированием отклика.

П2. Эффект вызванной поляризации (Induced Polarisation, IP)

При рассмотрении электрических свойств пород земли надо, вообще говоря, учитывать, что под воздействием электромагнитного поля может происходить поляризация вещества, меняющая значение электрической проводимости (эффект вызванной поляризации, [30-32]).

В соответствии с моделью Cole-Cole эффекта вызванной поляризации [30] имеем следующую эмпирическую формулу для комплексного сопротивления горной породы в зависимости от частоты:

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left(1 - \eta \left(1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^C} \right) \right),$$

$$\rho(\omega=0) = \rho_0, \quad \rho(\omega=\infty) = \rho_0 \cdot (1 - \eta), \quad (i\omega\tau)^C = (\omega\tau)^C \exp(i\pi C/2),$$

где ω – круговая частота [рад/сек]; ρ_0 является удельным сопротивлением [Ом·м] при $\omega = 0$, что соответствует постоянному току; τ , η , C – параметры вызванной поляризации:

τ – параметр времени затухания;

η – внутренняя емкость (intrinsic chargeability) – характеризует интенсивность эффекта IP;

C – параметр релаксации (relaxation parameter).

Обычно параметр C рассматривается в диапазоне $0 \leq C \leq 1$. Этот параметр считается малоинформативным, поэтому его можно положить равным $C = 0.5$.

Коэффициенты η и τ обычно равны нулю во многих проводящих породах (resistive rocks), таких как базальты, карбонаты или горные соли (rock salt), но не равны нулю в глинах, некоторых песчаниках и УВ-содержащих породах.

IP параметры дают важную информацию для установления различия между УВ и другими типами пород, обладающими электросопротивлением.

Для осадочных пород величина η колеблется от 0.002 до 0.15.

Величина τ изменяется в диапазоне секунд и минут в случае пород с электронной проводимостью (deposits), а для пород с ионной проводимостью τ обычно не превышает нескольких десятых долей секунды. В области залежей углеводородов постоянная времени затухания разностей потенциалов IP имеет значение: $\tau_1 \sim 0.01 - 0.5$ сек и является одним из поисковых признаков скоплений углеводородов. При этом чем тяжелее фракция УВ, тем значение τ_1 выше. Например, в области газовой залежи значения этого параметра меньше значений в области газоконденсатной – нефтяной, по существу – залежи.

Аномально повышенное значение вызванной поляризации наблюдается также и в том случае, когда во вмещающих геологических породах присутствуют вкрапленные сульфиды и металлы. Здесь постоянная времени, τ_2 , достаточно велика (десятки секунд). Практически на всех временах наблюдения переходного процесса при поисках УВ этот параметр, связанный с

данными вкраплениями, сохраняет квазипостоянное значение и поэтому легко распознаётся.

Отсюда следует возможность осуществления классификации поляризующихся геологических объектов по вещественному составу (газ, нефть, битумы, пириты) с использованием постоянной времени τ как классификационного параметра.

П3. Преобразование Лапласа

Для справки приведем формулы преобразования Лапласа, прямого и обратного, для функции $g(t)$ (см., например, [33]):

$$g(t) \Leftrightarrow G(p),$$

$$G(p) = \mathcal{L}[g(t)](p) = \int_0^{\infty} g(t) \exp(-pt) dt,$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) G(p) dp, \text{ – формула Меллина.}$$

Параметр c в формуле обращения преобразования Лапласа выбирается так, чтобы все особенности подынтегральной функции лежали левее c на комплексной плоскости p .

Отметим ряд полезных свойств преобразования Лапласа:

- предельные теоремы (справедливые, если все полюса функции $pG(p)$ находятся в левой полуплоскости):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pG(p), \quad \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pG(p);$$

- интегрирование оригинала:

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{p} G(p);$$

- дифференцирование изображения:

$$-t \cdot g(t) \Leftrightarrow dG(p)/dp;$$

- теорема о свертке:

$$\int_0^t g_1(\tau) g_2(t-\tau) d\tau = g_1 * g_2 \Leftrightarrow G_1(p) \cdot G_2(p).$$

П4. Преобразование Фурье

Напомним также формулы преобразования Фурье (см., например, [34]):

$$g(t) \Leftrightarrow \hat{g}(\omega),$$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Рассмотрим функцию времени $m(t) = m_0 \eta(t)$, отвечающую скачку тока в излучающем точечном НЕР ($m_0 = I_X dx$ – момент диполя), $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Фурье-образ функции Хевисайда содержит дельта-функцию:

$$\eta(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right],$$

- по формулам обращения, имеем Фурье представление функции Хевисайда:

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \frac{d\omega}{\omega} + \frac{1}{2}.$$

Отметим, что при преобразовании Лапласа функции Хевисайда нет дельта-функции:

$$\eta(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}[\eta](p) = \frac{1}{p},$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) \frac{dp}{p}.$$

Заметим, что преобразование Лапласа представляется несколько более удобным, чем преобразование Фурье для импульсных процессов, имеющих момент включения тока, хотя фактически эти преобразования эквивалентны.

П5. Ряд Фурье

Рассмотрим функцию $g(t)$ вещественной переменной t , определенную на конечном промежутке $[\theta, \theta + T]$, – это может быть отрезок, равный периоду периодической с периодом T функции. Пусть функция удовлетворяет на данном промежутке так называемым **условиям Дирихле**: всюду однозначна, конечна и кусочно-непрерывна, а также имеет конечное число экстремумов. Тогда на этом промежутке имеют место следующие представления в виде экспоненциального или тригонометрического рядов Фурье(см., например, [34]): где $\omega = 2\pi/T$, $i = \sqrt{-1}$, коэффициенты тригонометрического ряда:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g(t) \cos(n\omega t) dt, a_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g(t) \sin(n\omega t) dt,$$

коэффициенты экспоненциального ряда:

$$\hat{g}_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g(t) \exp(-in\omega t) dt.$$

Напомним ряд известных свойств ряда Фурье.

В точках разрыва функции, $t = s$, ряд Фурье сходится к значению

$$\frac{1}{2} [g(s-0) + g(s+0)].$$

На границах промежутка $[\theta, \theta + T]$ ряд сходится к значению

$$\frac{1}{2} [g(\theta+0) + g(T + \theta - 0)].$$

Справедливо равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} g^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n \hat{g}_{-n}.$$

Скорость сходимости ряда Фурье связана со степенью гладкости функции: если функция $g(t)$ принадлежит классу $C^{(k)}$, то $\hat{g}_n = o(1/|n|^k)$.

Представляется, что ряды Фурье для периодических функций удобнее, нежели преобразования Фурье или Лапласа.

Для примера рассмотрим следующий периодический импульс тока:

$$I(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_1 \\ 0, & T_1 < t < T = T_1 + T_2 \end{cases} = \eta(t) - \eta(t - T_1),$$

Коэффициенты представления этого импульса тока в виде ряда Фурье:

$$\hat{g}_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} dt = \frac{T_1}{T},$$

$$\hat{g}_m = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} \exp(-im\omega t) dt = \frac{\exp(-im\omega T_1) - 1}{-im\omega T}, \quad m \neq 0.$$

Библиографический список

- [1] Заборовский А.И. Электроразведка. М.: Гостоптехиздат, 1963, - 424 с.
- [2] Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М.: Недра, 1965.
- [3] Жданов М.С. Электроразведка. М.: Недра, 1986.
- [4] Якубовский Ю.В., Ренард И.В. Электроразведка. 3-е изд. М.: Недра, 1991.
- [5] Хмелевской В.К. и др. Геофизические методы исследований / Учебное пособие для геологических специальностей вузов. Петропавловск-Камчатский: изд-во КГПУ, 2004, - 232 с.

- [6] Zhdanov, M.S. Geophysical Electromagnetic Theory and Methods, Methods in Geochemistry and Geophysics // 43, Elsevier, 2009, 868 pages, ISBN-10: 0-444-52963-2.
- [7] Пархоменко А.К., Полехин И.Ю., Попов С.Б. О численной реализации аналитического метода решения задачи распространения электромагнитных волн в плоскостистой среде применительно к морской электроразведке // «Вестник ЦКР Роснедра», 2013, Вып.3, с. 23–29.
- [8] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1979. Изд. 2-е. – 285 с.
- [9] Key K. 1D inversion of multicomponent, multifrequency marine CSEM data. Methodology and synthetic studies for resolving thin resistive layers // Geophysics, 2009, Vol.74, No.2, p.F9-F20.
- [10] Петров А.А. Возможности метода становления электрического поля при поисках углеводородов в шельфовых зонах // Геофизика. – 2000, №5, с. 21-26.
- [11] Рыхлинский Н.И., Давыдычева С.Н., Легейдо П.Ю. и др. Способ морской геоэлектроразведки (варианты). / Патент Российской Федерации: Ru. 2236028 от 07.10.2003, Бюллетень 2004, №25.
- [12] Богданов Г.А., Кобзарев Г.Ю., Делия С.В. и др. Опыт применения и геологические результаты работ дифференциальным нормированным методом электроразведки на Российской акватории Каспийского моря // Геофизика — 2004, №5. с. 38–41.
- [13] Davydycheva S., Rykhlini N., Legeido P. Electrical prospecting method for hydrocarbon search using the induced-polarization effect // Geophysics, 2006, Vol.71, No.4, p.G179-G180.
- [14] Рыхлинский Н.И., Лисин А.С., Яковлев А.Г. Метод становления поля с фокусировкой электрического тока для поисков скоплений углеводородов на морском шельфе // Труды международной конференции «Нефть и газ Арктического шельфа». — Мурманск, 2006 г.
- [15] MacGregor L., Andries D., Tomlinson J., Barker N. Controlled-source electromagnetic imaging on Nuggets-I reservoir // The leading edge, 2006, p. 984-992.
- [16] Constable S., Srnka L.J. An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration // Geophysics, 2007, Vol.72, No.2, p.WA3-WA12.

- [17] Frenkel M.A. and Davydycheva S. A modeling study of Low- Frequency CSEM in Shallow Water // 71-st Annual International Conference Technical Exhibition, EAGE 2009.
- [18] Davydycheva S., Rykhlini N. Focused source EM survey – New solution for both shallow and deep water // 71-st Annual International Conference Technical Exhibition, EAGE 2009, Extended Abstracts, 5677.
- [19] Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967.
- [20] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Изд.2. М.: Наука, 1973.
- [21] Дворецкий П.И., Ярмахов И.Г. Электромагнитные и гидродинамические методы при освоении нефтегазовых месторождений. М.: Недра, 1998, - 318 с.
- [22] Wait J.R. Geo-electromagnetism. Academic Press, 1982.
- [23] Шейнман С.М. Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикладная геофизика, выпуск 3, 1947.
- [24] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. / 5-е изд., М.: Наука, Физматлит, 1999, – 319 с., ISBN 5-02-015233-1.
- [25] Попов С.Б. Процесс распространения коротких электромагнитных импульсов в слоисто-неоднородных средах // Математическое моделирование, 2000, т.12, №2, с.84–100.
- [26] Попов С.Б., Ярмахов И.Г. Зондирование в скважинах сверхкороткими электромагнитными импульсами. Изд-во: LAP LAMBERT Academic Publishing, ISBN: 978-3-659-82580-4, 2016,84 с.
- [27] Тихонов А.Н. О становлении электромагнитного поля в слоистой среде // Изв. АН СССР. Сер. Геогр. и Геофиз. 1950а, Т.14, №3, с.199-223.
- [28] Тихонов А.Н. О распространении переменного электромагнитного поля в слоистой анизотропной среде // Докл. АН СССР. 1959. Т.126, №5, с.967-971.
- [29] Banos A. Dipole radiation in the presence of a conducting half-space. Oxford, England: Pergamon Press, 1966.
- [30] Cole, K. S., and Cole, R. H. Dispersion and absorption in dielectrics // J. Chem. Phys., 1941, 9, p.343-351.
- [31] Комаров В.А. Электроразведка методом вызванной поляризации. / изд. 2, переработанное и дополненное. Ленинград: «Недра», 1980.

[32] Zhdanov, M.S. Generalized effective-medium theory of induced polarization // *Geophysics*, **73**, 2008, No.5, p.197–211.

[33] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979.

[34] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Серия: "Курс высшей математики и математической физики". М.: Наука, 1965. - 608 с.

Оглавление

1. Введение.....	3
1.1. Методы электроразведки в зависимости от типа излучающего сигнала	4
Метод частотного зондирования (ЧЗ).....	4
Метод зондирования становлением поля (ЗСП).....	5
1.2. Расположение источников и приемников.....	5
Приповерхностное расположение источников и приемников	6
Придонное расположение источников и датчиков.....	6
2. Математическая формулировка задачи	7
3. Представление в виде преобразования Ханкеля.....	9
4. Методические рекомендации.....	14
Выделение экспонент.....	14
Выбор шага интегрирования.....	14
5. «Аддитивная схема» вычислений.....	15
6. Аналитические решения для простейших случаев.....	17
6.1. Решение в чисто однородной среде ($N = 0$).....	17
6.2. Решение для двухслойной среды ($N = 1$) в частотной области	20
7. Результаты численных расчетов, ЧЗ	22
8. Заключение.....	26
Приложение	27
П1. Характерные значения электропроводности	27
П2. Эффект вызванной поляризации (Induced Polarisation, IP)	28
П3. Преобразование Лапласа	29
П4. Преобразование Фурье	29
П5. Ряд Фурье	30
Библиографический список.....	31