ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 142 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шестопёров А.И., Ткачев С.С.

Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 142. 18 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2019-142
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-142

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

А.И. Шестопёров, С.С. Ткачев

Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы

Москва — 2019

А.И. Шестопёров, С.С. Ткачев

Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы

Рассматривается задача инерциальной стабилизации космического аппарата (КА), движущегося по геостационарной орбите. За счет поиска подходящих стабилизирующих решений алгебраического уравнения Риккати построены линейно-квадратичные законы управления, позволяющие осуществлять развороты КА на большие углы.

Ключевые слова: инерциальная стабилизация, ПД-регулятор, линейно-квадратичное управление, алгебраическое уравнение Риккати

Aleksey Shestopyorov, Stepan Tkachev

Linear quadratic control for spacecraft large-angle maneuvers

The inertial stabilization problem of a spacecraft moving in a geostationary orbit is considered. Linear quadratic control laws which realize large-angle maneuvers are obtained by means of corresponding selection of algebraic Riccati equation stabilizing solutions.

Key words: inertial stabilization, PD-regulator, linear quadratic control, algebraic Riccati equation

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 17-71-20117

Список сокращений

КА – космический аппарат
ПД-регулятор – пропорционально-дифференцирующий регулятор
ЛКУ – линейно-квадратичный регулятор
ГСО – геостационарная орбита
ИСК – инерциальная система координат
ССК – связанная система координат
АУР – алгебраическое уравнение Риккати

Введение

В работе рассматривается задача инерциальной стабилизации космического аппарата (КА), движущегося по геостационарной орбите. В случае, когда влиянием внешних моментов можно пренебречь, стандартным алгоритмом управления, решающим поставленную задачу, является ПД-регулятор [1]. Также в некоторых случаях удается построить его обобщенные варианты [2].

В свою очередь, известно [3], что линейно-квадратичное управление (ЛКУ) общего вида (с произвольной матрицей усиления) обеспечивает асимптотическую устойчивость линейной стационарной системы. При наличии же нелинейных слагаемых в общем случае, по-видимому, удается показать лишь локальную асимптотическую устойчивость требуемого положения.

В работе для решения задачи инерциальной стабилизации КА в заданном положении используется ЛКУ. Хотя и ЛКУ и ПД-регулятор имеют вид линейной стационарной отрицательной обратной связи по вектору состояния, первый в качестве параметра управления имеет матрицу обратной связи, в то время как второй включает в себя лишь два коэффициента управления. Поэтому в линейных системах ЛКУ представляется более гибким с практической точки зрения как в контексте влияния на переходные процессы, так и в контексте возможности ограничения величины управляющего воздействия.

Указанные способы управления отличаются и подходом к выбору коэффициентов управления. В случае ПД-регулятора они выбираются напрямую (исходя, например, из максимизации степени устойчивости системы [4]), в то время как матрицы усиления в ЛКУ зависят от матриц, задающих квадратичный функционал качества. Именно они и являются опосредованными параметрами управления.

В работе также демонстрируется связь между построением функций Ляпунова для нелинейных уравнений движения КА и поиском соответствующих решений уравнения Риккати для линеаризованных уравнений движения. Это позволяет сблизить концепции ПД-управления и ЛКУ.

1. Постановка задачи

В работе исследуется движение КА – твердого тела на геостационарной орбите (ГСО). При формировании управляющих воздействий влияние внешних моментов на угловое движение КА не учитывается. Действительно, как правило на ГСО наибольшие величины имеют гравитационный момент и момент сил светового давления. Запишем выражение гравитационного момента, действующего на КА:

$$\mathbf{M}_{grav} = 3\omega_0^2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{J}\mathbf{e}_3 . \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{J}$ – тензор инерции КА, ω_0 – орбитальная угловая скорость КА и $\mathbf{e}_3$ – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора КА. Главные моменты инерции твердотельных КА, использующихся на ГСО (в частности, спутников связи), имеют порядок $10^2 - 10^4$ кг $\cdot$ м^2. Следовательно, на геостационарной орбите величина гравитационного момента (1.1), действующего на КА, имеет порядок $10^{-8} - 10^{-6}$ Н $\cdot$ м. В то же время для КА, имеющих характерную конфигурацию для ГСО (например, КА массой несколько тонн, оснащенный солнечной панелью), максимальный момент сил солнечного давления не превосходит 10^{-4} Н $\cdot$ м (для протяженных панелей площадью более 100 м^2 момент может достигать 10^{-3} Н $\cdot$ м). Указанные значения на несколько порядков меньше максимального управляющего момента маховиков, величина которого на практике имеет порядок 0.1 Н $\cdot$ м.

В работе инерциальная система координат $OXYZ$ (ИСК) определяется следующим образом: ее начало лежит в центре масс Земли O, ось OZ перпендикулярна плоскости экватора, OX направлена на точку весеннего равноденствия.

Для записи уравнений движения КА используется связанная с ним система координат $O_s xyz$ (ССК), начало которой лежит в центре масс КА, а оси являются главными центральными осями инерции.

Таким образом, уравнения движения КА в ССК имеют вид:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}, \ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}\right). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор управляющих воздействий, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость корпуса КА, $\left(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ – кватернион ориентации. Уравнение для скалярной части кватерниона λ_0 записывается в виде $\dot{\lambda}_0 = -0.5\left(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}\right)$.

Линеаризованные в окрестности начала координат уравнения (1.2):

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}, \ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}, \tag{1.3}$$

являются линейными стационарными уравнениями и в матричном виде записываются как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \frac{1}{2}\mathbf{E}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix}\mathbf{u}, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^T & \boldsymbol{\lambda}^T \end{pmatrix}^T$ – вектор состояния КА.

В работе рассматривается задача инерциальной стабилизации КА в нулевом положении равновесия: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ ($\lambda_0 = 1$). Классическим законом управления, решающим данную задачу, является ПД-регулятор [1]:

$$\mathbf{u} = -k_\omega \boldsymbol{\omega} - k_\lambda \boldsymbol{\lambda}. \tag{1.5}$$

При использовании стандартной функции Ляпунова [1]

$$V = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) + 2k_\lambda\left(1 - \lambda_0\right), \tag{1.6}$$

глобальная асимптотическая устойчивость требуемого положения равновесия следует из теоремы Барбашина-Красовского [5]. Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + k_\lambda \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} = \\ &= -k_\omega \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) - k_\lambda \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} + k_\lambda \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} = \\ &= -k_\omega \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} - \left(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) = -k_\omega \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \le 0, \end{aligned}$$

причем единственной целой траекторией, принадлежащей множеству $\left\{\dot{V} = 0\right\}$, является нулевое положение равновесия.

В некоторых случаях указанный подход удается обобщить на случай использования линейной стационарной отрицательной обратной связи вида

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{K}_\omega$ и $\mathbf{K}_\lambda$ – матрицы усиления. Основным препятствием здесь является наличие в (1.2) нелинейных слагаемых, в особенности гироскопического слагаемого $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$.

Для преодоления указанного затруднения в [2] был предложен обобщенный вид функции Ляпунова (1.6):

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{K}_\lambda^{-1} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + 2\left(1 - \lambda_0\right). \tag{1.8}$$

Там же говорилось, что для обеспечения глобальной асимптотической устойчивости, матрицы $\mathbf{K}_\omega$ и $\mathbf{K}_\lambda$ должны удовлетворять следующим условиям:

1. матрица $\mathbf{K}_\lambda^{-1}\mathbf{J}$ является положительно определенной;

2. матрица $\mathbf{K}_{\lambda}^{-1}\mathbf{K}_{\omega}$ является положительно определенной;

3. $\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{\lambda}^{-1}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}=0$, где

$$\left[\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое условие обеспечивает корректное задание функции Ляпунова (1.8), в то время как при выполнении второго и третьего условий первая производная функции Ляпунова, найденная в силу уравнений движения, $\dot{V}\le 0$.

Исходя из трех указанных условий в [2] матрицы усиления предлагалось брать в виде

$$\mathbf{K}_{\lambda}=\left(a\mathbf{J}+b\mathbf{E}_{3\times3}\right)^{-1},\ \mathbf{K}_{\omega}=d\mathbf{J}, \tag{1.9}$$

а в случае диагонального тензора инерции (или же просто записанного в своих главных осях) допускалось выбирать матрицу $\mathbf{K}_{\omega}$ в более общем виде, а именно:

$$\mathbf{K}_{\omega}=diag\left(d_1 \quad d_2 \quad d_3\right)\mathbf{J}\,. \tag{1.10}$$

Здесь $a, b, d_i, i=\overline{1,3}$ – положительные постоянные управления. Однако вопрос выбора коэффициентов управления остается открытым.

В текущей работе решать задачу инерциальной стабилизации КА в заданном положении предлагается с помощью ЛКУ.

2. Построение ЛКУ

Для системы (1.4) ЛКУ, минимизирующее квадратичный функционал качества

$$J=\int_0^{\infty}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt, \tag{2.1}$$

где матрица $\mathbf{R}$ в функционале (2.1) является положительно определенной ($\mathbf{R}>0$), а матрица $\mathbf{Q}$ – положительно полуопределенной ($\mathbf{Q}\ge 0$), имеет вид

$$\mathbf{u}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}=-\mathbf{K}_{\omega}\boldsymbol{\omega}-\mathbf{K}_{\lambda}\boldsymbol{\lambda}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{P}$ – решение алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}+\mathbf{Q}=0. \tag{2.3}$$

Заметим, что система (1.4) является управляемой, т.к. ее матрица управляемости

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^6\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0}_{3\times3} & \dots \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\mathbf{J}^{-1} & \dots \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг [6]. Поэтому, выбирая $\mathbf{Q}$ из класса положительно определенных матриц (а не из класса положительно полуопределенных матриц $\mathbf{Q} \geq 0$, как требуется в общей постановке задаче ЛКУ), для системы (1.4) с функционалом качества (2.1) в классе положительно определенных матриц существует единственное решение $\mathbf{P}$ АУР (2.3) (в дальнейшем называющееся стабилизирующим). Оно обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы (1.4) (например, см. [3, теорема 6.1]). Таким образом, задача построения стабилизирующего закона управления сводится к поиску положительно определенного решения АУР (2.3).

Благодаря выбору положительно определенных матриц функционала качества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ стабилизирующие решение АУР выражаются в явном виде через параметры системы и коэффициенты управления. Этот шаг необходим для доказательства глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия системы, замкнутой стабилизирующим ЛКУ. В частности, он позволяет проверить, удовлетворяют ли соответствующие матрицы усиления $\mathbf{K}_\omega$ и $\mathbf{K}_\lambda$ трем условиям из главы 1, что в свою очередь позволяет использовать функцию Ляпунова типа (1.8).

2.1. Построение стабилизирующего решения уравнения Риккати и ЛКУ для линеаризованной системы

Положим, что матрица $\mathbf{Q}$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathbf{Q}_{rig} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ – положительно определенные матрицы ($\mathbf{Q}_1 > 0$, $\mathbf{Q}_2 > 0$), и представим положительно определенное решение (2.3) $\mathbf{P}$ в виде

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{P}_{11} = \mathbf{P}_{11}^T$, $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{22}^T$ – матрицы размера 3x3. Заметим, что в силу механического характера системы, блоки матрицы $\mathbf{P}$ являются квадратными. Этот факт используется при доказательстве асимптотической устойчивости системы (1.2). После представления матрицы $\mathbf{P}$ в виде (2.5), АУР (2.3) примет вид

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{12} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь $\mathbf{Z}=\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}$ – положительно определенная матрица, так как тензор инерции $\mathbf{J}>0$. Отметим, что понятия положительной определенности, равно как и положительной полуопределенности матрицы, подразумевают ее симметричность.

В итоге АУР представляется как система из трех уравнений:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_{12}^T+\mathbf{P}_{12}\right)-\mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11}+\mathbf{Q}_1=0,\ \frac{1}{2}\mathbf{P}_{22}=\mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12},\ \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12}=\mathbf{Q}_2. \tag{2.6}$$

Еще одно уравнение в точности повторяет второе уравнение системы (2.6)

$$\mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11}=\frac{1}{2}\mathbf{P}_{22}=\frac{1}{2}\mathbf{P}_{22}^T=\left(\mathbf{P}_{12}^T\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11}\right)^T=\mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12}.$$

Подберем матрицы $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{R}$ таким образом, чтобы найти решение (2.5) системы уравнений (2.6) в явном виде, а основанный на нем линейно-квадратичный закон управления (2.2) стабилизировал систему (1.4). Это удалось сделать в перечисленных ниже случаях.

I. Возьмем матрицы усиления в виде $\mathbf{Q}_1=a\mathbf{Z}^{-1}$ и $\mathbf{Q}_2=b^2\mathbf{Z}^{-1}$, где a и b – положительные постоянные. Тогда частным решением третьего уравнения из (2.6) является матрица $\mathbf{P}_{12}=b\mathbf{Z}^{-1}$. Подставив ее в первое уравнение системы (2.6)

$$\mathbf{P}_{11}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{11}=\left(a+b\right)\mathbf{Q}_1,$$

находим его частное решение $\mathbf{P}_{11}=\sqrt{a+b}\,\mathbf{Z}^{-1}$. Матрица $\mathbf{P}_{22}$ находится прямой подстановкой матриц $\mathbf{P}_{12}$ и $\mathbf{P}_{11}$ во второе уравнение системы (2.6): $\mathbf{P}_{22}=2b\sqrt{a+b}\,\mathbf{Z}^{-1}$. Таким образом, получившееся частное решение АУР имеет вид

$$\mathbf{P}^{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}\sqrt{a+b}\,\mathbf{Z}^{-1} & b\mathbf{Z}^{-1}\\ b\mathbf{Z}^{-1} & 2b\sqrt{a+b}\,\mathbf{Z}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{a+b} & b\\ b & 2b\sqrt{a+b}\end{pmatrix}\otimes\mathbf{Z}^{-1}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{N}\otimes\mathbf{M}$ – произведение Кронекера. Представление матрицы в виде произведения Кронекера может быть полезно при поиске ее собственных значений. Действительно, [7, теорема 13.12], если $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ – квадратные матрицы размера n и m соответственно, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы $\mathbf{N}$, $\mu_1,\ldots,\mu_m$ – собственные значения матрицы $\mathbf{M}$, тогда собственными значениями $\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}$ являются $\lambda_i\mu_j$, где $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$.

Для того чтобы показать, что получившееся частное решение АУР является положительно определенным, воспользуемся леммой Шура.

Лемма Шура [7, теорема 10.33]. Пусть матрица $\mathbf{P}^{\mathrm{I}}$ имеет вид (2.5). Тогда для того, чтобы $\mathbf{P}^{\mathrm{I}} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух следующих условий:

1. $\mathbf{P}_{11} > 0$ и $\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{P}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{12} > 0$;
2. $\mathbf{P}_{22} > 0$ и $\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{22}^{-1} \mathbf{P}_{12}^T > 0$.

Применим данную лемму к матрице (2.7). Т.к. $\mathbf{Z}^{-1} > 0$, то и $\mathbf{P}_{11} > 0$. Осталось проверить, что

$$\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{P}_{11}^{-1} \mathbf{P}_{12} = \left(2b\sqrt{a+b} - \frac{b^2}{\sqrt{a+b}} \right) \mathbf{Z}^{-1} > 0,$$

или в силу положительной определенности $\mathbf{Z}^{-1}$, что

$$2\sqrt{a+b} - \frac{b}{\sqrt{a+b}} > 0.$$

Отсюда следует, что если $2a + b > 0$, то $\mathbf{P}^{\mathrm{I}} > 0$. Но по построению a и b – положительные постоянные, что и доказывает требующееся утверждение.

Стабилизирующий линейный квадратичный закон управления (2.2) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{LQR} &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{\mathrm{I}}\mathbf{x} = \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a+b}\,\mathbf{Z}^{-1} & b\mathbf{Z}^{-1} \\ b\mathbf{Z}^{-1} & 2b\sqrt{a+b}\,\mathbf{Z}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\left(\sqrt{a+b}\,\boldsymbol{\omega} + b\boldsymbol{\lambda}\right) = -\mathbf{J}\left(\sqrt{a+b}\,\boldsymbol{\omega} + b\boldsymbol{\lambda}\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где a и b являются параметрами управления. Его отличие от классического ПД-регулятора заключается в наличии постоянного множителя $\mathbf{J}$.

II. Пусть матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ являются диагональными и их диагональные элементы $r_i > 0,\ i = \overline{1,3}$ и $q_i > 0,\ i = \overline{1,6}$. Так как в выбранной ССК тензор инерции КА $\mathbf{J}$ имеет диагональный вид ($\mathbf{J} = diag\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}$), то матрица $\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}$ является диагональной, т.е. $\mathbf{Z} = diag\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$, где $z_i = 1/\left(r_i J_i^2\right),\ i = \overline{1,3}$.

Покажем, что решение (2.5) системы (2.6), в котором матрицы $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}$ имеют диагональный вид

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{pmatrix} p_1' & 0 & 0 \\ 0 & p_2' & 0 \\ 0 & 0 & p_3' \end{pmatrix}, \mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_{22} = \begin{pmatrix} p_1'' & 0 & 0 \\ 0 & p_2'' & 0 \\ 0 & 0 & p_3'' \end{pmatrix},$$

будет положительно определенным, а, следовательно, и единственным стабилизирующим.

В данном случае частным решением третьего уравнения из системы (2.6) является матрица $\mathbf{P}_{12}$ с диагональными элементами

$$p_i = \pm\sqrt{q_{i+3}/z_i} = \pm J_i\sqrt{r_i q_{i+3}},\ i=\overline{1,3}. \tag{2.9}$$

Тогда, найдя из первого уравнения (2.6) диагональные элементы $\mathbf{P}_{11}$

$$\begin{aligned} p_i' &= \pm\sqrt{\frac{p_i + q_i}{z_i}} = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{q_{i+3}/z_i} + q_i}{z_i}} = \\ &= \pm J_i\sqrt{r_i\left(\pm J_i\sqrt{r_i q_{i+3}} + q_i\right)},\ i=\overline{1,3} \end{aligned} \tag{2.10}$$

и подставляя коэффициенты p_i и p_i' во второе уравнение, получаем диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}_{22}$:

$$\begin{aligned} p_i'' &= 2z_i p_i' p_i = 2z_i\sqrt{\frac{q_{i+3}}{z_i}\frac{p_i+q_i}{z_i}} = 2\sqrt{q_{i+3}\left(p_i+q_i\right)} = \\ &= 2\sqrt{q_{i+3}\left(\sqrt{q_{i+3}/z_i} + q_i\right)},\ i=\overline{1,3}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из леммы Шура следует, что, для того чтобы $\mathbf{P}^{\mathrm{II}} > 0$, необходимо, чтобы $\mathbf{P}_{11} > 0$ и $\mathbf{P}_{22} > 0$. Отсюда следует, что для положительной определенности решения уравнения Риккати при извлечении корней требуется выбирать решения со знаком плюс. Остается проверить выполнение условие $\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^T\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12} > 0$ или, в случае диагональных матриц, $p_i'' - \left(p_i\right)^2 / p_i' > 0,\ i=\overline{1,3}$. Подставим в данное неравенство выражения для коэффициентов p_i, p_i' и p_i'', полученные выше:

$$2\sqrt{q_{i+3}\left(\sqrt{q_{i+3}/z_i} + q_i\right)} - \frac{q_{i+3}}{z_i}\sqrt{\frac{z_i}{\sqrt{q_{i+3}/z_i} + q_i}} > 0,\ i=\overline{1,3}.$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{q_{i+3}}{z_i}} + 2q_i > 0,\ i=\overline{1,3},$$

которое всегда выполняется в силу положительности коэффициентов z_i, $i=\overline{1,3}$ и q_i, $i=\overline{1,6}$. Таким образом, исходя из (2.9), (2.10) и (2.11), найдено положительно определенное решение АУР, имеющее следующую структуру:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{II}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_1' & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2' & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3' & 0 & 0 & p_3 \\ \hline p_1 & 0 & 0 & p_1'' & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & p_2'' & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_3'' \end{array}\right). \tag{2.12}$$

Линейный квадратичный закон управления (2.2) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{LQR} &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{\mathrm{II}}\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda}\right) = \\ &= -diag\left(\frac{1}{r_i J_i}\right)_{i=1}^3 \left(diag\left(J_i \sqrt{r_i\left(J_i\sqrt{r_i q_{i+3}} + q_i\right)}\right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\omega} + diag\left(J_i\sqrt{r_i q_{i+3}}\right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\lambda} \right) = \\ &= -diag\left(\sqrt{\left(J_i\sqrt{q_{i+3}/r_i} + q_i/r_i\right)}\right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\omega} - diag\left(\sqrt{q_{i+3}/r_i}\right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\lambda} = \\ &= -diag\left(\sqrt{\left(y_i J_i + q_i/r_i\right)}\right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\omega} - diag\left(y_i\right)_{i=1}^3 \boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $y_i = \sqrt{q_{i+3}/r_i}$, $i = \overline{1,3}$.

Таким образом, для определенного класса матриц функционала качества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ построены линейно-квадратичные законы управления (2.8) и (2.13), обеспечивающие локальную асимптотическую устойчивость нулевого положения системы (1.2). Причем соответствующие решения АУР определены в явном виде через параметры системы и коэффициенты управления.

III. Пусть тензор инерции $\mathbf{J}$ имеет недиагональный вид. Например, он может быть задан в ССК, оси которой не совпадают с главными осями тензора инерции. В этом случае он может быть представлен в виде: $\mathbf{J} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{W}^T$, где $\mathbf{W}$ – ортогональная матрица, а $\mathbf{J}^{diag} = diag\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix}$. Пусть матрицы $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{R}$ являются диагональными в том же базисе, что и тензор инерции $\mathbf{J}$, то есть

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{W}\mathbf{Q}_1^{diag}\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}\mathbf{W}^T,$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{W}\mathbf{Q}_2^{diag}\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\begin{pmatrix} q_4 & 0 & 0 \\ 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & q_6 \end{pmatrix}\mathbf{W}^T,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}\mathbf{W}^T,$$

причем диагональные элементы $r_i > 0, i = \overline{1,3}$ и $q_i > 0, i = \overline{1,6}$. Покажем, что в этом случае поиск стабилизирующего решения уравнения Риккати сводится к пункту II. Действительно, будем искать частное решение $\mathbf{P}_{12}$ третьего уравнения системы (2.6) в виде

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T \triangleq \mathbf{W}\mathbf{P}^d\mathbf{W}^T, \qquad (2.14)$$

где $\mathbf{K}_{12}^{diag}$ – диагональная матрица с положительными элементами на диагонали, а диагональные элементы матрицы

$$\mathbf{P}^d = \mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

подлежат определению. Подстановка (2.14) в третье уравнение системы (2.6) приводит к матричному уравнению

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T\mathbf{W}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{W}^T \times \\
&\times\mathbf{W}\left(\mathbf{R}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{W}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T = \\
&= \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\left(\mathbf{R}^{diag}\right)^{-1}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T = \\
&= \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T = \\
&= \mathbf{W}\mathbf{R}^{diag}\left(\mathbf{K}_{12}^{diag}\right)^2\mathbf{W}^T = \mathbf{W}\mathbf{Q}_1^{diag}\mathbf{W}^T.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью матрицы $\mathbf{W}$ и перестановочностью диагональных матриц. Из последнего выражения следует равенство $\mathbf{R}^{diag}\left(\mathbf{K}_{12}^{diag}\right)^2 = \mathbf{Q}_1^{diag}$, в котором все матрицы являются диагональными. Находя отсюда матрицу $\mathbf{K}_{12}^{diag}$ и подставляя ее в (2.14), получаем, что диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}^d$ совпадают с соответствующими коэффициентами (2.9) из II пункта данного раздела. Поиск решения $\mathbf{P}_{11}$ первого уравнения системы (2.6) в виде

$$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T \triangleq \mathbf{W}\mathbf{P}'\mathbf{W}^T, \qquad (2.15)$$

где матрицу

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} p_1' & 0 & 0 \\ 0 & p_2' & 0 \\ 0 & 0 & p_3' \end{pmatrix}$$

требуется определить, также приводит нас к уже получившемуся ранее выражению ее диагональных элементов (2.10). Аналогично находится и матрица

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{W}\mathbf{P}''\mathbf{W}^T, \tag{2.16}$$

где диагональные элементы матрицы

$$\mathbf{P}'' = \begin{pmatrix} p_1'' & 0 & 0 \\ 0 & p_2'' & 0 \\ 0 & 0 & p_3'' \end{pmatrix}$$

определяются выражением (2.11). Проводя дальнейшие выкладки в соответствии с пунктом II данного раздела, из леммы Шура получаем, что найденное решение АУР (2.6)

$$\mathbf{P}^{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}' & \mathbf{P}^d \\ \mathbf{P}^d & \mathbf{P}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{W}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{W}^T \end{pmatrix}$$

является положительно определенным и линейно-квадратичный закон управления

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{LQR} &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda}\right) = \\ &= -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{W}\mathbf{P}'\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{W}\mathbf{P}^d\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda}\right) = \\ &= -\mathbf{W}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{W}\left(\mathbf{R}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{W}^T\left(\mathbf{W}\mathbf{P}'\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{W}\mathbf{P}^d\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda}\right) = \\ &= -\mathbf{W}\left(\mathbf{J}^{diag}\right)^{-1}\left(\mathbf{R}^{diag}\right)^{-1}\left(\mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}^{diag}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda}\right) = \\ &= -\mathbf{W}\mathbf{K}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega} - \mathbf{W}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\lambda} \triangleq -\mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{K}_{12}\boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \tag{2.17}$$

стабилизирует линейную систему (1.3). Здесь мы пользуемся тем, что для ортогональной матрицы $\mathbf{W}$ и произвольной положительно определенной диагональной матрицы $\boldsymbol{\Xi}$ матрица $\mathbf{W}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{W}^T$ является положительно определенной.

2.2. Построение стабилизирующего закона управления в нелинейном случае

Требуется проверить, обеспечивают ли полученные линейно-квадратичные законы управления (2.8) и (2.13) глобальную асимптотическую устойчивость нулевого положения нелинейной системы (1.2). Нумерация блоков текущего раздела, использующаяся ниже, соответствует нумерации блоков раздела 2.1.

I. Чтобы управление (2.8) справилось с поставленной задачей, в него необходимо добавить гироскопическое слагаемое

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}\left(\sqrt{a+b}\,\boldsymbol{\omega} + b\boldsymbol{\lambda}\right). \tag{2.18}$$

Тогда уравнения движения, замкнутые управлением (2.18), имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} + \sqrt{a+b}\,\boldsymbol{\omega} + b\boldsymbol{\lambda} = 0, \tag{2.19}$$

и в качестве функции Ляпунова берется функция, которая используется при доказательстве асимптотической устойчивости ПД-регулятора [1],

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} + 2b\left(1-\lambda_0\right).$$

Ее первая производная, найденная в силу уравнений движения,

$$\dot{V} = -\sqrt{a+b}\,\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} \le 0$$

и равна нулю при $\boldsymbol{\omega} = 0$. Но тогда, $\boldsymbol{\lambda} = 0$ и поэтому единственной целой траекторией, принадлежащей множеству $\left\{\dot{V} = 0\right\}$, является нулевое положение равновесия. В силу теоремы Барбашина-Красовского нулевое решение системы (2.19) является асимптотически устойчивым.

К сожалению, в случае превышения гироскопической силой допустимого значения управляющего момента, закон управления не может быть использован.

II. Покажем, что закон управления (2.13) обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы (1.2), не накладывая при этом ограничений на величину гироскопической силы. Так как при его построении матрица $\mathbf{R}$ полагалась диагональной, в силу диагональности тензора инерции КА матрица $\mathbf{Z} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}$ также является диагональной.

Динамические уравнения, замкнутые обратной связью (2.13), имеют вид

$$\mathbf{Z}^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) + \mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{2.20}$$

В соответствии с [2], в качестве функции Ляпунова возьмем

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\boldsymbol{\omega} + 2\left(1-\lambda_0\right), \tag{2.21}$$

Так как матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{P}_{12}$ являются положительно определенными и диагональными, то матрица $\mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{Z}^{-1} = \left(\mathbf{Z}\mathbf{P}_{12}\right)^{-1}$ также является положительно определенной (т.к. диагональные матрицы коммутируют). Первая производная функции V, найденная в силу уравнений движения, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{Z}^{-1} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} = \\
&= -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{JR}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) - \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\lambda} = \\
&= -\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{JR}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

где

$$\mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{JR} = diag\left(\frac{1}{J_i \sqrt{r_i q_{i+3}}} \right)_{i=1}^{3} diag\left(J_i\right)_{i=1}^{3} diag\left(r_i\right)_{i=1}^{3} =$$

$$= diag\left(\sqrt{\frac{r_i}{q_{i+3}}} \right)_{i=1}^{3} = diag\left(\frac{1}{y_i} \right)_{i=1}^{3}.$$

Подберем коэффициенты $r_i > 0,\, i = \overline{1,3}$ и $q_i > 0,\, i = \overline{1,6}$ таким образом, чтобы второе слагаемое в $\dot{V}$ оказалось равным нулю. Для этого запишем его в скалярном виде

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{JR}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(J_3 - J_2\right)\omega_2\omega_3 \\ \left(J_1 - J_3\right)\omega_1\omega_3 \\ \left(J_2 - J_1\right)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \omega_1\omega_2\omega_3 \left(\frac{\left(J_3 - J_2\right)}{y_1} + \frac{\left(J_1 - J_3\right)}{y_2} + \frac{\left(J_2 - J_1\right)}{y_3} \right).$$

Без ограничения общности будем считать, что $J_3 \ge J_2 \ge J_1$. Слагаемое $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1} \mathbf{JR}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right)$ не является знакопостоянным ни при каких параметрах y_i, поэтому для положительности (2.22) достаточно выполнения условия

$$\frac{\triangle J_{32}}{y_1} - \frac{\triangle J_{31}}{y_2} + \frac{\triangle J_{21}}{y_3} = 0, \tag{2.23}$$

в котором

$$\triangle J_{32} = J_3 - J_2 > 0,\ \triangle J_{31} = J_3 - J_1 > 0,\ \triangle J_{21} = J_2 - J_1 > 0.$$

Окончательно, если коэффициенты управления удовлетворяют условию

$$y_2 = \frac{\triangle J_{31} y_1 y_3}{y_3 \triangle J_{32} + y_1 \triangle J_{21}}, \tag{2.24}$$

где $y_i = \sqrt{q_{i+3}/r_i},\, i = \overline{1,3}$, то второе слагаемое в (2.22) равно нулю и $\dot{V} \le 0$, т.к. $\mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{P}_{11}$ – положительно определенная диагональная матрица, причем $\dot{V} = 0$ при $\boldsymbol{\omega} = 0$. Однако тогда $\boldsymbol{\lambda} = 0$, и поэтому единственной целой траекторией, принадлежащей множеству $\left\{\dot{V} = 0\right\}$, является нулевое положение равновесия.

Таким образом, в силу теоремы Барбашина-Красовского нулевое решение системы (2.20) является глобально асимптотически устойчивым.

III. Снова возьмем функцию Ляпунова в виде (2.21). Ее первая производная имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{12}^{-1}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\lambda} = \\
&= -\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{12}^{-1}\mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{12}^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) - \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\lambda} = \\
&= -\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{12}^{-1}\mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{12}^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right) = \\
&= -\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{K}_{12}^{-1}\mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{W}\mathbf{K}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{W}\mathbf{J}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega}\right) = \\
&= -\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{W}\left(\mathbf{K}_{12}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{K}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{W}\mathbf{K}_{12}^{diag}\left(\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}^{diag}\mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega}\right) = \\
&= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\left(\mathbf{K}_{12}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{K}_{11}^{diag}\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{K}_{12}^{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{J}^{diag}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\right),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{W}^T\boldsymbol{\omega}$. Здесь использовано тождество $\mathbf{W}\left(\mathbf{y}\times\mathbf{z}\right) = \mathbf{W}\mathbf{y}\times\mathbf{W}\mathbf{z}$, где $\mathbf{W}$ – ортогональная матрица. Таким образом, снова приходим к соответствующему выражению первой производной (2.22) из пункта II, с диагональным тензором инерции и диагональными матрицами усиления. Таким образом, при выполнении условия (2.24) и в силу матричного неравенства $\left(\mathbf{K}_{12}^{diag}\right)^{-1}\mathbf{K}_{11}^{diag} > 0$, по теореме Барбашина-Красовского нулевое решение нелинейной системы (1.2) является глобально асимптотически устойчивым.

Закон управления, схожий с законом из пункта II, был получен и в [2]. Однако есть существенные отличия, связанные как с методологией построения закона управления, так и с процедурой выбора коэффициентов управления.

Исходно управление (2.13), обеспечивающее лишь локальную асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия (1.2), имеет шесть независимых каналов воздействия на каждую из компонент вектора состояния. Однако для обеспечения глобальной асимптотической устойчивости необходимо, чтобы матрица $\mathbf{K}_\lambda$ удовлетворяла условию 3 из раздела 1. Поэтому на коэффициенты управления накладывается ограничение (2.23), в результате чего мы имеем пять независимых каналов управления. В свою очередь, в [2] матрица усиления $\mathbf{K}_\lambda$ по построению зависит лишь от двух параметров и автоматически удовлетворяет всем трем условиям из раздела 1.

Также отметим, что закон управления (2.13) минимизирует простой функционал качества

$$J = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{6}\left(q_i\omega_i^2 + q_{i+3}\lambda_i^2 + r_i u_i^2\right)dt,$$

что, в свою очередь, делает процедуру выбора параметров управления $r_i > 0,\, i = \overline{1,3}$ и $q_i > 0,\, i = \overline{1,6}$ более наглядной. Действительно, чем большим берется соответствующий коэффициент управления в функционале, тем больше мы штрафуем компоненты вектора состояния и управления за отклонение от требуемых значений.

Заключение

В работе построены три линейно-квадратичных закона управления, обеспечивающих локальную асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия КА. Благодаря выбору положительно определенных матриц $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ в функционале качества, стабилизирующие решения алгебраического уравнения Риккати, а следовательно, и матрицы усиления в законах управления, выражаются в явном виде через параметры системы и коэффициенты управления, что позволяет получить аналитические выражения соответствующих функций Ляпунова.

Первый закон представляет собой ПД-регулятор умноженный на тензор инерции КА $\mathbf{J}$. При добавлении гироскопического слагаемого $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ он обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия нелинейных уравнений движения КА. Для КА с диагональным тензором инерции показано, что с помощью введения соответствующих ограничений на выбор коэффициентов управления второй закон управления также успешно решает рассматриваемую в работе задачу инерциальной стабилизации. Третий закон управления является обобщением предыдущего на случай недиагонального тензора инерции КА. Отметим, что последние два закона обладают пятью независимыми каналами управления.

В отличие от классического ПД-регулятора или его аналогов, построенные линейно-квадратичные законы управления нагляднее показывают природу выбора коэффициентов управления, определяющихся через матрицы усиления функционала качества.

Также данная работа может быть полезна тем, что в ней демонстрируется связь между построением функций Ляпунова для нелинейных уравнений движения КА и поиском соответствующих решений уравнения Риккати для линеаризованных уравнений движения КА.

Список литературы

1. Markley F.L., Crassidis J.L. Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control (Space Technology Library). — Springer. — 2014. — P. 486.

2. Wie B., Weiss H., Arapostathis A. Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations // J. Guid. Control. Dyn. — 1989. — Vol. 12. — № 3. — P. 375–380.

3. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory // Princeton, NJ: Princeton university press. —2012. — P. 256.

4. Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР, ОТН. — 1945. — №12. — с. 1163–1168.

5. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. — М.: Наука. — 1970. с. 240.

6. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. — М.: Наука. — 1986. — с. 616.

7. Laub A. Matrix analysis for scientists and engineers. — SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics. — 2005. — P. 184.

Оглавление