



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 139 за 2019 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Шильников Е.В.](#), Бозоров О.Н.

Численное исследование
точности и устойчивости
метода релаксации потоков

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шильников Е.В., Бозоров О.Н. Численное исследование точности и устойчивости метода релаксации потоков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 139. 12 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2019-139>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-139>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Е.В. Шильников, О.Н. Бозоров

**Численное исследование точности
и устойчивости метода релаксации
ПОТОКОВ**

Москва — 2019

Шильников Е.В., Бозоров О.Н.

Численное исследование точности и устойчивости метода релаксации потоков

В работе на примере численного решения квазилинейного уравнения теплопроводности проведено исследование вычислительных свойств метода релаксации потоков. Проведен анализ точности получаемого решения в зависимости от шага разностной сетки и параметра релаксации для вариантов схем первого и второго порядков аппроксимации по времени. Экспериментально подтверждено, что оба этих варианта метода имеют условие устойчивости курантовского типа. Сделан вывод о том, что на не самых грубых сетках повышение порядка аппроксимации по времени не дает преимуществ ни в смысле точности решения, ни в смысле устойчивости алгоритма.

Ключевые слова: метод релаксации потоков, аппроксимация, условие устойчивости, точность решения.

E.V. Shilnikov, O.N. Bozorov

Numerical investigation of the accuracy and stability properties of the flux relaxation method

The computational properties of the flux relaxation method is studied on the example of a numerical solution of the quasilinear heat conduction equation. The accuracy of the obtained solution is analyzed depending on the step of difference grid and relaxation parameter for schemes of the first and second order approximation in time. It was experimentally confirmed that both of these variants of the method have the stability condition of the Courant type. It is concluded that on not the coarsest grids, increasing the time approximation order does not give advantages either in terms of the accuracy of the solution or in the sense of the algorithm stability.

Key words: flux relaxation method, approximation, stability condition, solution accuracy.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 17-07-01604 А, 18-51-41001 Узб_т и Гранта Агентства по науке и технологиям Республики Узбекистан № MRU-OT-30/2017.

Введение

Метод релаксации потоков был предложен в [1] как способ повышения порога устойчивости явных схем для параболических уравнений и систем уравнений. В этой работе на примере численного решения квазилинейного уравнения теплопроводности было показано, что введение релаксации потоков позволяет добиться для явной двухслойной схемы практически курантовского условия устойчивости $\Delta t \leq C\Delta h$, где C не зависит от шагов сетки. Впоследствии этот метод был успешно применен к моделированию широкого круга задач на современных суперкомпьютерах различной архитектуры. Существенно более мягкое, чем обычное для явных схем, условие устойчивости позволило решать задачи на очень подробных сетках за разумное время. При этом явные численные алгоритмы логически более просты и лучше поддаются эффективной параллельной реализации, чем абсолютно устойчивые, но более сложные неявные схемы. Это особенно существенно для ЭВМ с гибридной архитектурой. Описание результатов применения метода релаксации потоков к моделированию задач газовой динамики на таких вычислительных системах можно найти в [2, 3]. Хорошо себя зарекомендовал этот метод и при решении задач фильтрации в пористых средах [4–6], моделировании процессов криохирургии [7].

Были проведены и теоретические исследования метода релаксации потоков (в некоторых работах он называется методом гиперболизации). Так, например, в работах [8, 9] разными способами проведено сравнение решений параболического уравнения и гиперболизованного уравнения с малым параметром при второй производной по времени. Показано, что разница между ними стремится к нулю при стремлении к нулю параметра релаксации.

Метод релаксации потоков

Простейшим примером параболического уравнения является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} T = -\nabla \mathbf{q}_F, \quad \mathbf{q}_F = -\kappa \nabla T. \quad (1)$$

Следствием параболичности этого уравнения является бесконечная скорость распространения возмущений. Заметим, что уравнение (1) основано на законе Фурье для теплового потока, полученном экспериментально при исследовании квазистационарных процессов. В случае медленных процессов и небольших градиентов изменение потоков действительно можно считать синхронным с изменением температуры. Однако при наличии больших производных по времени или пространству, таких, какие встречаются в задачах о течении разреженных газов, низкотемпературном теплопереносе в твердых телах, электронной теплопроводности в плазме и др., этот факт приводит к

явному расхождению с экспериментальными данными. Потoki могут не успевать подстраиваться под изменения температуры, и необходимо учитывать конечность скорости распространения возмущений. В этом случае естественно считать, что поток тепла релаксирует к значению \mathbf{q}_F с некоторым характерным временем релаксации τ , и вместо уравнения (1) следует рассматривать следующую систему:

$$\frac{\partial}{\partial t} T = -\nabla \mathbf{q}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} = \mathbf{q}_F - \mathbf{q}. \quad (2)$$

Система (2) – это система гиперболического типа, следовательно, она обеспечивает конечную «скорость звука» и при правильном подборе времени релаксации не допускает возникновения нефизических значений теплового потока. При малых по сравнению с характерным временем протекания процесса значениях τ можно пренебречь левой частью второго из уравнений (2), и мы получим привычное уравнение теплопроводности, поскольку в этом случае $q = q_F$. Для гиперболического уравнения условие устойчивости явной схемы имеет курантовский вид $\Delta t < C_1 \Delta x$, в отличие от условия $\Delta t < C_2 (\Delta x)^2$, характерного для параболических уравнений (здесь C_1 и C_2 – константы, не зависящие от шагов сетки). В связи с этим возникает идея строить явную разностную схему для системы (2) вместо решения обычного параболического уравнения теплопроводности и в тех случаях, когда релаксация потока не требуется из физических соображений. В этом случае параметр релаксации можно использовать как регуляризатор, повышающий устойчивость разностной схемы. Естественно, он должен быть достаточно малым, чтобы не вносить больших искажений в решение исходной задачи.

Рассмотрим более общий случай, а именно, систему уравнений, соответствующую законам сохранения

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = (\nabla \mathbf{W})^T. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор консервативных переменных, $\mathbf{W}(\mathbf{U})$ – матрица, в столбцах которой стоят потоки консервативных переменных, оператор $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ формально действует на матрицу по правилу произведения матриц. Потoki \mathbf{W} зависят от переменных \mathbf{U} и их производных. Такой вид имеют, например, уравнения Эйлера, Навье-Стокса, квазигазодинамическая система, уравнения, описывающие многофазную фильтрацию, и т.д. В случае параболичности этой системы она имеет тот же дефект, что и уравнение теплопроводности, – бесконечную скорость распространения возмущений. Существенен этот факт или нет, в любом случае

мы можем ввести в систему релаксацию потоков, используя малый параметр τ как регуляризатор. В результате система (3) заменяется на следующую:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = (\nabla \mathbf{V})^T, \quad \tau \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{W} - \mathbf{V}. \quad (4)$$

Значение τ при этом следует выбирать таким образом, чтобы расчет можно было вести с максимальным шагом по времени, при котором обеспечивается заданная точность. Опыт использования метода релаксации потоков показал его эффективность не только для параболических уравнений и систем. Так, при моделировании невязких течений он позволяет существенно увеличить шаг по времени при наличии сверхсильных разрывов, а также заметно уменьшить энтропийный след.

Тестовая задача и ее аппроксимация

Исследовать точность и устойчивость метода релаксации потоков мы будем на примере пространственно одномерной задачи о распространении тепловой волны по нулевому температурному фону, описываемой квазилинейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \nabla \kappa \nabla T, \quad \kappa = T^2, \quad T(0, t) = 10, \quad T(L, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f. \quad (5)$$

Размер счетной области $L = 5$ и время $t_f = 0.2$ были выбраны таким образом, чтобы тепловая волна не дошла до правой границы области. Эта задача имеет автомодельное решение, что позволяет адекватно оценивать точность получаемого численного решения.

В соответствии с методом релаксации потоков уравнение из (5) заменяем гиперболической системой

$$\frac{\partial}{\partial t} T = -\frac{\partial}{\partial x} q, \quad \tau \frac{\partial}{\partial t} q = q_F - q, \quad q_F = -\kappa(T) \frac{\partial}{\partial x} T. \quad (6)$$

Выбираем стандартную пространственную аппроксимацию второго порядка на равномерной сетке $x_i = iL/N$, $0 \leq i \leq N$, а производную по времени в первом уравнении аппроксимируем по явной схеме Эйлера первого порядка:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t}{h} (q_{i+1/2}^{j+1} - q_{i-1/2}^{j+1}), \quad q_{F,i+1/2} = k \left(\frac{T_{i+1}^j + T_i^j}{2} \right) \cdot \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h}. \quad (7)$$

В рамках первого порядка аппроксимации по времени значение q_F во втором уравнении можно считать постоянным на шаге $\Delta t = t^{j+1} - t^j$. Тогда это

уравнение оказывается ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами, и его решение на этом интервале времени выглядит следующим образом:

$$q^{j+1} = q^j D + q_F(1 - D), \quad D = \exp(-\Delta t / \tau). \quad (8)$$

В результате получаем разностную схему (7)–(8), аппроксимирующую систему (6) с первым порядком по времени и вторым по пространству. Именно в такой форме и использовалась релаксация потоков во всех предыдущих работах. Однако аппроксимация первого порядка нередко вызывала сомнение и недоверие у окружающих. В связи с этим было решено проверить, какие преимущества может дать в нашем случае схема второго порядка по времени.

Для повышения порядка аппроксимации вместо явной схемы Эйлера была использована схемы Рунге–Кутты второго порядка (со средней точкой):

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{i+1/2} &= Dq_{i+1/2}^j + (1 - D) \cdot k \left(\frac{T_{i+1}^j + T_i^j}{2} \right) \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h}, \quad \tilde{T}_i = T_i^j + \frac{\Delta t}{2h} (\tilde{q}_{i+1/2} - \tilde{q}_{i-1/2}), \\ q_{i+1/2}^{j+1} &= Dq_{i+1/2}^j + (1 - D) \cdot k \left(\frac{\tilde{T}_{i+1} + \tilde{T}_i}{2} \right) \frac{\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i}{h}, \quad T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t}{h} (q_{i+1/2}^{j+1} - q_{i-1/2}^{j+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Исследование точности решения

Расчёты по схемам первого и второго порядков проводились с различными шагами по времени на различных пространственных сетках. После этого полученные данные сравнивались с распределением температуры на момент времени $t = t_f$, полученным из автомодельного решения задачи (5). Сравнение проводилось в нормах L_1 , L_2 и C . Поскольку решение задачи содержит слабый разрыв на фронте тепловой волны, норма C оказалась мало пригодной для оценки точности. Действительно, при малейшей погрешности в определении положения фронта волны (доли процента) относительная погрешность решения в этой норме оказывалась порядка 10% и слабо менялась при изменении параметров обеих схем. Зависимости же погрешности от параметров схемы в нормах L_1 и L_2 оказались сходными. Практически во всех вариантах расчетов норма в L_2 была в 3-4 раза больше, чем норма в L_1 . В связи с этим в дальнейшем при анализе результатов норма погрешности оценивается в L_2 .

Зависимости погрешности решения по схеме второго порядка от шагов по пространству и по времени представлены на рис. 1 и рис. 2 соответственно. На рис. 1 видно, что при уменьшении шага сетки погрешность решения уменьшается, но в какой-то момент это уменьшение прекращается. На рис. 2 уменьшения погрешности практически незаметно. Дело в том, что погрешность состоит из двух частей: погрешности решения возмущенного уравнения и

погрешности, вносимой самим этим возмущением. И если первая составляющая стремится к нулю со вторым порядком по Δt и Δx , то вторая при заданном параметре релаксации τ остается постоянной. И в данной ситуации эта постоянная существенно превосходит погрешность схемы даже при не очень малых шагах по времени и пространству.

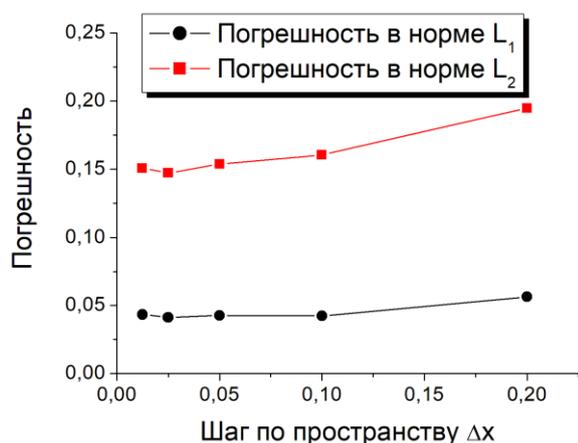


Рис. 1. Зависимость погрешности от Δx при $\tau = 0.0016$, $\Delta t = 0.00005$.

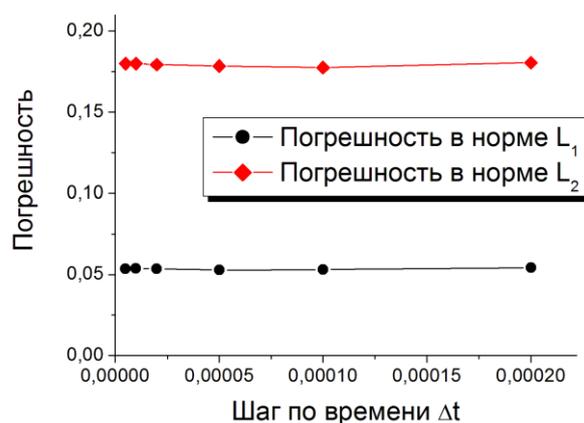


Рис. 2. Зависимость погрешности от Δt при $\tau = 0.002$, $\Delta x = 0.05$.

На рис. 3 приведена зависимость погрешности решения от параметра τ при заданных шагах Δt и Δx . Видно, что эта зависимость линейна. Таким образом, можно сделать вывод, что для повышения точности решения исходной задачи (5) необходимо не только дробить сетку, но и уменьшать параметр релаксации.

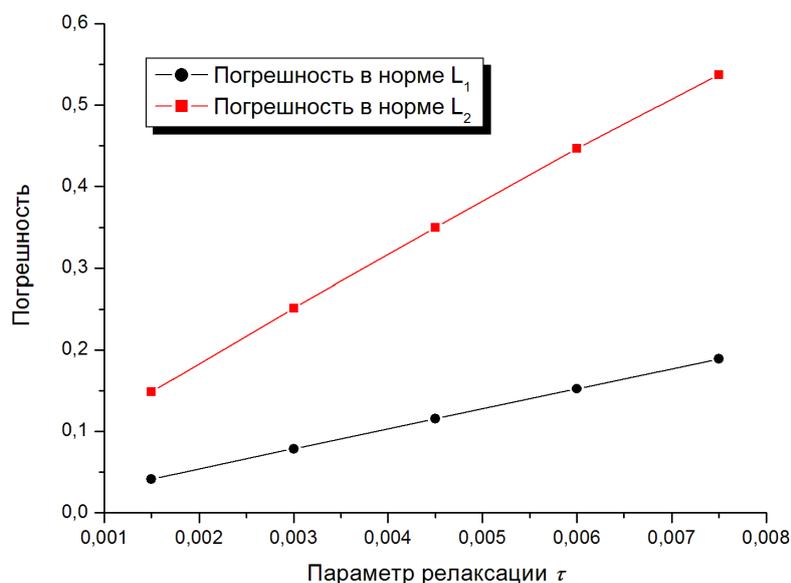


Рис. 3. Зависимость погрешности решения от τ при $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.0002$.

Следует отметить, что решаемая задача о распространении тепловой волны – не самый простой тест для метода релаксации потоков. Дело в том, что погрешность, вносимая возмущением уравнения, пропорциональна максимуму второй производной решения по времени [9]. А в окрестности достаточно крутого фронта тепловой волны, где решение имеет слабый разрыв, эта производная оказывается достаточно большой. Следовательно, в случае необходимости получения решения с заданной точностью параметр релаксации следует выбирать достаточно малым для ее обеспечения.

Исследование устойчивости алгоритма

Преобразуем систему (6) к одному гиперболическому уравнению второго порядка относительно $T(x,t)$ и найдем его характеристики

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} T + \frac{\partial}{\partial t} T = \nabla \kappa \nabla T, \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}. \quad (10)$$

Известно [10], что двухслойная трехточечная явная разностная схема для волнового уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ устойчива при выполнении условия Куранта $\Delta t \leq \Delta x / c$. Геометрическая интерпретация этого условия связана с наклоном характеристик. Схема устойчива, если характеристика, выпущенная из узла x_i на слое t^{j+1} , не выходит (в зависимости от ее направления) за пределы ячейки (x_{i-1}, x_i) или (x_i, x_{i+1}) на слое t^j . При этом область зависимости для этой точки, определяемая дифференциальным уравнением, лежит внутри соответствующей области зависимости разностной схемы. Логично предположить, что для уравнения (10) условие устойчивости будет аналогичным. Характеристики линейного уравнения – прямые линии. В нашем случае уравнение (10) является квазилинейным, и прямолинейность характеристик не гарантирована. Однако на шаге по времени характеристику можно приблизить прямой, считая коэффициент теплопроводности κ постоянным и равным, например, его значению в средней точке временного интервала. Отсюда получается условие Куранта, где роль скорости звука выполняет $\sqrt{\kappa / \tau}$. Усилим это условие, заменив в нем значение κ его максимальным значением в расчетной области. В результате получаем:

$$\Delta t \leq \Delta x \left/ \left| \frac{dx}{dt} \right| \right. \leq \Delta x \sqrt{\tau / \kappa_{\max}}. \quad (11)$$

В работе [1] исследование устойчивости схемы первого порядка (7)–(8) проводилось следующим образом. Для каждого значения шага по пространству определялось максимальное значение параметра τ , которое обеспечивает близость полученного решения к решению параболического уравнения с точностью до 2%. Затем подбиралось максимальное значение шага по времени,

при котором расчет оставался устойчивым. В данной работе таким же способом с небольшой корректировкой проведено исследование схемы второго порядка (9). Корректировка заключается в том, что если в результате увеличения Δt при определении его максимально допустимой величины погрешность решения выходила за рамки 2%, то значение τ немного уменьшалось и подбор шага по времени повторялся. Это приходилось делать только при больших значениях Δx , поскольку, как отмечено в предыдущем разделе, на подробной сетке погрешность схемы намного меньше погрешности, вносимой возмущением уравнения. С учетом этой корректировки были повторены и расчеты для схемы первого порядка. Кроме того, работа [1] труднодоступна для читателя, так как она опубликована в CD-Proceedings конференции, которые отсутствуют в интернете. Одновременно с этим было проверено соответствие получаемого таким экспериментальным методом условия устойчивости схемы условию (11).

Результаты расчетов собраны в табл. 1. В ней для разных шагов по пространству Δx указаны максимальные допустимые шаги по времени Δt при значениях $\tau_{\text{опт}}$, обеспечивающих требуемую точность. Напомним, что погрешность решения оценивалась в норме L_2 . В этой норме погрешность 2% соответствует абсолютному значению 0.15. Приведены результаты, полученные для схем первого и второго порядков аппроксимации по времени. Для сравнения в двух последних колонках указаны максимально допустимые шаги по времени для расчетов по явной и неявной схемам для невозмущенного уравнения теплопроводности (1).

Таблица 1

Δx	Схема 1-го порядка		Схема 2-го порядка		Явная схема	Неявная схема
	Δt_{max}	$\tau_{\text{опт}}$	Δt_{max}	$\tau_{\text{опт}}$		
0.1	$3.8 \cdot 10^{-4}$	0.0014	$3.4 \cdot 10^{-4}$	0.0017	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
0.05	$1.9 \cdot 10^{-4}$	0.0015	$1.6 \cdot 10^{-4}$	0.0018	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$
0.025	$9.4 \cdot 10^{-5}$	0.0016	$8.0 \cdot 10^{-5}$	0.0018	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$
0.0125	$4.6 \cdot 10^{-5}$	0.0016	$4.1 \cdot 10^{-5}$	0.0018	$8.0 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$

Результаты расчетов показали, что повышение порядка аппроксимации не позволило получить каких-либо преимуществ с точки зрения устойчивости. Более того, для всех рассмотренных сеток допустимые шаги по времени для схемы первого порядка оказались чуть выше, чем для схемы второго порядка.

Для проверки условия (11) во всех вариантах расчетов (не только приведенных в таблице, но и в расчетах с большими значениями параметра релаксации) вычислялась величина числа Куранта с учетом того, что в задаче (1) значение $\kappa_{\text{max}} = 100$.

$$C_{ii} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{10}{\sqrt{\tau}}. \quad (12)$$

Расчеты показали, что для схемы первого порядка число Куранта варьировалось в пределах от 0.95 до 0.99. Отметим, что в соответствии с (11) это число должно быть не больше единицы. При расчетах по схеме второго порядка диапазон его изменений (от 0.75 до 0.8) также оказался достаточно малым. Независимость числа Куранта от шага по пространству показывает, что действительно схемы с релаксацией потоков как первого, так и второго порядков, имеют условие устойчивости, характерное для уравнений гиперболического типа.

Для сравнения в двух последних колонках в табл. 1 указаны максимально допустимые шаги по времени для расчетов по явной и полностью неявной схемам для невозмущенного уравнения теплопроводности (1). Сравнение оказывается явно не в пользу явной схемы, имеющей условие устойчивости $\Delta t < C(\Delta x)^2$. Отдельно следует остановиться на полностью неявной схеме. Она является безусловно устойчивой, но при больших шагах по времени точность результата резко падает. В частности, скорость распространения тепловой волны оказывается меньше, чем в точном решении, а при дальнейшем уменьшении Δt на фронте формируется разрыв температуры, похожий на ударную волну. В связи с этим в последнем столбце табл. 1 приведены значения шага по времени, при которых обеспечивается заданная точность 2%. Видно, что величина этого шага при всех значениях Δx всего лишь примерно в 2.5 раза больше, чем для схемы с релаксацией потоков.

Заключение

Проведенные исследования подтвердили, что метод релаксации потоков позволяет существенно увеличить шаг по времени для явных разностных схем. Удалось подтвердить, что действительно схемы с релаксацией потоков как первого, так и второго порядков аппроксимации по времени имеют условие устойчивости, характерное для уравнений гиперболического типа. Однако требование точности накладывает ограничение сверху на величину релаксационного параметра. При этом влияние этого параметра на точность решения на подробных сетках существенно превышает влияние погрешности разностной схемы. В результате повышение порядка аппроксимации не позволяет добиться большей точности получаемого решения без одновременного уменьшения параметра релаксации. В свою очередь, уменьшение последнего ведет к ухудшению устойчивости алгоритма.

Таким образом, можно сделать вывод, что использование во всех предыдущих работах варианта метода релаксации потоков с первым порядком аппроксимации по времени является вполне оправданным.

Список литературы

1. Boris N. Chetverushkin and Evgeny V. Shilnikov. Flux Relaxation as an Approach to the Stability Improvement for Explicit Finite Difference Schemes. *CD proceedings of the II International conference on Engineering Optimization (EngOpt-2010)*, Lisbon, Portugal, September 2010.
2. Alexander A. Davydov and Evgeny V. Shilnikov. Numerical Simulation of the Low Compressible Viscous Gas Flows on GPU-based Hybrid Supercomputers. In: M. Bader, A. Bode, H.-J. Bungartz, M. Gerndt, G.R. Joubert, F. Peters (eds.); *Computing: Accelerating Computational Science and Engineering (CSE). Advances in Parallel Computing*, №25, pp. 315-323, 2014, IOS Press. <http://dx.doi.org/10.3233/978-1-61499-381-0-315>.
3. Elizarova T.G. and Shilnikov E.V. Hypersonic flows simulation using QGD-based parallel program complex "EXPRESS-3D". *High Temperature Material Processes: An International Quarterly of High-Technology Plasma Processes*, 2018, v.22, №2, Pp. 99-113.
4. Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // *Математическое Моделирование*, 2010, т. 22, №4, сс. 99-109.
5. Исупов Н.В., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Моделирование процессов просачивания многофазных жидкостей в слоистой пористой среде // *Математическое моделирование*, 2010, т.22, №6, с.84-98.
6. Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование трёхфазной фильтрации явными методами на гибридных вычислительных системах // *Математическое моделирование*, 2014, т.26, № 4, с.33–43.
7. Shilnikov K.E. and Kochanov M.B. Numerical simulation of cryosurgery in biological tissue with developed circulatory system. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/657/1/012039>.
8. Четверушкин Б.Н., Репин С.И. Оценка разности приближённых решений задач Коши для параболического диффузного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // *Доклады РАН*, 2013, т.451, №3, с.255–258.
9. Мышечная Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // *ЖВМиМФ*, 2015, т.55, № 8, с.1299–1304.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: "Наука", 1989, 616 с.

Оглавление

Введение	3
Метод релаксации потоков.....	3
Тестовая задача и ее аппроксимация.....	5
Исследование точности решения.....	6
Исследование устойчивости алгоритма.....	8
Заключение.....	10
Список литературы.....	11