



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Колмычков В.В.](#), [Мажорова О.С.](#)

Механизм отбора
предпочтительной формы
конвективных структур
вблизи порога устойчивости
в жидкостях с переменной
теплопроводностью

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колмычков В.В., Мажорова О.С. Механизм отбора предпочтительной формы конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 126. 15 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2019-126>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-126>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.В. Колмычков, О.С. Мажорова

**Механизм отбора предпочтительной формы
конвективных структур вблизи порога устойчивости
в жидкостях с переменной теплопроводностью**

Москва — 2019

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Механизм отбора предпочтительной формы конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью

Работа посвящена анализу различий в механизме отбора устойчивых конвективных структур, возникающих вблизи порога устойчивости в жидкостях, коэффициенты температуропроводности которых зависят от температуры или от вертикальной координаты. При анализе используется метод последовательных приближений, а также представление нелинейной части оператора диссипативного переноса тепла в виде внутренних источников.

Ключевые слова: конвекция Рэлея–Бенара, небуссинесковская жидкость, конвективная неустойчивость, численное моделирование, устойчивые планформы, валы, шестиугольные ячейки, число Прандтля, переменная теплопроводность.

Viatcheslav Victorovich Kolmychkov, Olga Semenovna Mazhorova

Selection principle for preferred convective structures in liquids near the stability threshold with non-uniform thermal conductivity

The paper deals with differences in selection principle for stable convective structures in a fluid with thermal conductivity varying with height or temperature. Analysis is based on weakly non-linear technique and interpretation of non-linear part of heat diffusion term as a heat source.

Key words: Rayleigh-Bénard convection, convective stability, non-Boussinesq fluid, numerical simulation, stable planforms, rolls, hexagons, Prandtl number, non-uniform thermal conductivity, weakly non-linear analysis

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00436).

1. Введение

Вблизи порога устойчивости для высоких значений числа Прандтля структура конвективного движения в жидкости с неоднородным коэффициентом теплопроводности хорошо известна – это шестиугольные ячейки, направление движения в которых определяется направлением выпуклости профиля температуры в отсутствие движения [1], [2], [3]. При больших значениях числа Прандтля жидкости с температуропроводностью, зависящей от вертикальной координаты и от температуры, ведут себя аналогичным образом. При малых значениях числа Прандтля это уже не так [4], [5], [6]. Если температуропроводность, зависящая от температуры, приводит только к движению в форме валов, то температуропроводность, зависящая от вертикальной координаты, может породить как конвекцию в форме валов (при малой небуссинесковскости), так и шестиугольных ячеек. Направление циркуляции в ячейках при малых значениях числа Прандтля противоположно тому, что наблюдается при больших.

В данной работе исследуются различия в механизме отбора предпочтительной формы конвективного движения в жидкостях с разным типом неоднородности коэффициента температуропроводности. Цель работы – привести наглядную физическую интерпретацию процесса отбора и формирования шестиугольных ячеек или валов.

2. Постановка задачи

Расширим приближение Обербека–Буссинеска [7] на случай зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и вертикальной координаты. Уравнения термогравитационной конвекции ньютоновской жидкости в безразмерной форме запишем следующим образом:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} T \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0,$$

$$\text{Pr} [\partial_t T + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T] = \text{div}(\chi \text{grad} T) + q. \quad (2)$$

Здесь $\partial_\xi \equiv \partial/\partial\xi$, t – время, x, y, z – декартовы координаты, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\mathbf{V}(t, x, y, z) = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $p(t, x, y, z)$ – давление, $T(t, x, y, z)$ – температура, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$. Безразмерная температура вводится по формуле $T = (T^d - T_{top}^d) / \delta T^d$, T^d – размерная температура, $\delta T^d = T_{bot}^d - T_{top}^d$ – разность температур на верхней и нижней границах в отсутствие движения. Коэффициент тем-

пературопроводности χ^d нормируем на значение на верхней границе: $\chi_0^d = \chi^d(1, T_{top}^d)$, тогда безразмерное значение определяется $\chi = \chi^d(z, T^d) / \chi_0^d$. В качестве масштаба измерения длины выбран вертикальный размер области H , масштаб времени – $t_\nu = H^2 / \nu$, давления – $\rho_0 \nu \chi_0^d / H^2$, ν – коэффициент кинематической вязкости.

В уравнения (1)-(2) входят следующие безразмерные параметры: число Рэлея $Ra = \beta g \delta T^d H^3 / (\nu \chi_0^d)$, где β – коэффициент теплового расширения, g – модуль ускорения свободного падения; число Прандтля $Pr = \nu / \chi_0^d$ и мощность внутренних источников тепла $q = Qt_\nu / \delta T^d$, Q – размерная мощность источников тепла.

Задача решается в прямоугольной области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, 1]$. Температура нижней границы $T|_{z=0} = 1$, верхней — $T|_{z=1} = 0$, боковые стенки теплоизолированы. Для скорости на всей границе выполняются условия прилипания: $V = 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя и имеет соответствующее равновесное распределение температуры. В начальное распределение температуры в каждой точке плоскости $z = 0.5$ (кроме границ) вносится случайное возмущение. Все расчеты выполнены для значений числа Рэлея, близких к критическому.

3. Известные результаты

В работе [1] при помощи метода последовательных приближений показано, что устойчивой стационарной формой течения в жидкости, температуропроводность которой зависит от температуры, вблизи порога устойчивости являются шестиугольные ячейки, направление циркуляции жидкости в которых зависит от знака производной $\partial\chi/\partial T$. Ячейки, в центре которых жидкость движется вверх, называются up-ячейками. Ячейки с противоположным направлением циркуляции – down-ячейками. Движение в форме шестиугольников является конечноамплитудным и может существовать при значениях числа Рэлея ниже критического (критическое число Рэлея является порогом устойчивости к бесконечно малым возмущениям). Однако полученные результаты справедливы только при достаточно больших значениях числа Прандтля. Область малых значений до сих пор остается недостаточно изученной. Исследование проблемы методом математического моделирования [5], [6] показывает, что в области малых значений числа Прандтля течение имеет форму валов.

Конвективная устойчивость жидкости, теплопроводность которой зависит от вертикальной координаты, менее изучена. В работе [3] теоретически показано, что единственной устойчивой структурой течения в жидкости, теплопроводность

которой зависит от вертикальной координаты, являются шестиугольные ячейки или же одновременно и квадраты и шестиугольники. Направление циркуляции жидкости в шестиугольных ячейках определяется знаком $\partial\chi/\partial z$. Наличие второй производной $\partial^2\chi/\partial z^2$ также может приводить к формированию подкритической конвекции в форме шестиугольников или квадратов. Приведенные результаты справедливы только при достаточно больших значениях числа Прандтля. Исследование задачи с помощью численных методов [5], [6] показало, что при больших значениях числа Прандтля предпочтительной формой течения являются шестиугольные ячейки, при средних значениях — двумерные валы. Для малых значений числа Прандтля могут наблюдаться как валы, так и ячейки, тип которых противоположен наблюдаемому при больших значениях числа Прандтля. Валы при малых значениях числа Прандтля формируются в случае стационарного профиля температуры, близкого к линейному. Какие именно факторы определяют преобладание валов над ячейками при малых значениях числа Прандтля, пока точно неизвестно.

Таким образом, наблюдается существенное отличие в характере течения для температуропроводности, зависящей от температуры и от вертикальной координаты. В области малых значений числа Прандтля этот факт можно объяснить теоретически. Линеаризованная стационарная задача в случае теплопроводности, зависящей от температуры, имеет самосопряженный оператор, в то время как для теплопроводности, зависящей от z , это, вообще говоря, не так. Задача с самосопряженным оператором в области малых значений числа Прандтля не имеет подкритических режимов конвекции. Покажем это для случая зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. Случай $\chi(z)$ разобран в [4].

4. Метод последовательных приближений для $\chi(T)$

Рассмотрим процедуру получения уравнений последовательных приближений для задачи (1)-(2). Представим стационарное решение системы (1)-(2) и число Рэлея в виде рядов относительно некоторого малого параметра ϵ [7, 8]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)}\epsilon + \mathbf{V}^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (3)$$

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}\epsilon + T^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (4)$$

$$p = p^{(0)} + p^{(1)}\epsilon + p^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (5)$$

$$\text{Ra} = \text{Ra}^{(0)} + \text{Ra}^{(1)}\epsilon + \text{Ra}^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (6)$$

Поскольку коэффициент температуропроводности зависит от вертикальной

координаты и от температуры, используя разложение (4), представим его в виде ряда:

$$\chi(z, T) = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}\epsilon + \chi^{(2)}\epsilon^2 + \dots \quad (7)$$

Здесь $\chi^{(0)} = \chi(z, T^{(0)})$, $\chi^{(1)} = \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} T^{(1)}$, $\chi^{(2)} = \partial_T \chi|_{T^{(0)}} T^{(2)} + \partial_{TT}^2 \chi|_{T^{(0)}} (T^{(1)})^2 / 2$ и т.д.

Подставляя (3)-(6), (7) в (1)-(2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получим уравнения последовательных приближений. Нулевое приближение совпадает с уравнениями, определяющими стационарное неподвижное состояние системы:

$$\begin{aligned} \nabla p^{(0)} &= \frac{\text{Ra}^{(0)}}{\text{Pr}} T^{(0)} \mathbf{e}_z, \\ \text{div}[\chi^{(0)} \text{grad} T^{(0)}] &= -q. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) определяются температура $T^{(0)} = T^{(0)}(z)$ (с соответствующими краевыми условиями) и градиент давления $\nabla p^{(0)}$, причем $T^{(0)}$ не зависит от значения числа Прандтля. Для членов первого порядка малости получается следующая линейная система уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V}^{(1)} + \left(\frac{\text{Ra}^{(0)}}{\text{Pr}} T^{(1)} + \frac{\text{Ra}^{(1)}}{\text{Pr}} T^{(0)} \right) \mathbf{e}_z - \nabla p^{(1)} &= 0, \\ \text{div} \mathbf{V}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{div}(\chi^{(0)} \text{grad} T^{(1)} + \chi^{(1)} \text{grad} T^{(0)}) - \text{Pr}(\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(0)} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что в уравнении (9) часть подъемной силы, определяемая $T^{(0)}$, может быть представлена в виде градиента и включена в давление $p^{(1)}$. Новое давление обозначим также $-p^{(1)}$.

Перепишем (9)-(10) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{\nu} \mathbf{f} \\ \mathbf{L}^{\mathcal{T}} \mathbf{f} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ T \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}^{\nu} \mathbf{f} &= \Delta \mathbf{V} + \frac{\text{Ra}^{(0)}}{\text{Pr}} T \mathbf{e}_z - \nabla p, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{L}^{\mathcal{T}} \mathbf{f} = \text{div}(\chi^{(0)} \text{grad} T + T \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \text{grad} T^{(0)}) - \text{Pr}(\mathbf{V} \cdot \nabla) T^{(0)}.$$

Поскольку на множестве решений (9)-(10) выполняется условие: $\mathbf{L}^{\nu} \mathbf{f} = 0$, для градиента давления справедливо выражение: $\nabla p = \Delta \mathbf{V} + \frac{\text{Ra}^{(0)}}{\text{Pr}} T \mathbf{e}_z$, т.е. ∇p является линейной функцией \mathbf{f} . Таким образом, на множестве решений задачи (9)-(10) оператор \mathbf{L} является линейным.

4.1. Самосопряженность линейного оператора при $\chi(T)$

Поскольку для стационарного профиля температуры справедливо:

$$\operatorname{div}[\chi^{(0)} \operatorname{grad} T^{(0)}] = 0, \quad (12)$$

$$\chi^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} = C = \text{Const} < 0. \quad (13)$$

При $\chi(T)$ экстремумы температуры должны достигаться только на границе, т.е. внутри области $\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} < 0$.

Введем на множестве функций \mathbf{f} скалярное произведение:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \operatorname{Pr}^2(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) - \frac{\chi^{(0)}}{C} \operatorname{Ra}^{(0)}(T_1, T_2), \quad (14)$$

$$(T_1, T_2) = \int_{\Omega} T_1 T_2 d\Omega,$$

$$(\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2) = \int_{\Omega} ((\mathbf{V}_x^1, \mathbf{V}_x^2) + (\mathbf{V}_y^1, \mathbf{V}_y^2) + (\mathbf{V}_z^1, \mathbf{V}_z^2)) d\Omega.$$

Разделим линейный оператор $\mathbf{L}^{\mathcal{T}} \mathbf{f}$ на $-\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}$ и получим:

$$\mathbf{L}_{\chi}^{\mathcal{T}} \mathbf{f} = -\frac{\chi^{(0)}}{C} \operatorname{div}(\chi^{(0)} \operatorname{grad} T + T \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \frac{C}{\chi^{(0)}}) + \operatorname{Pr} \mathbf{V}_z. \quad (15)$$

Покажем, что оператор \mathbf{L} самосопряжен в смысле скалярного произведения (14):

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) &= -\operatorname{Pr}^2 [(\operatorname{grad} \mathbf{V}_1, \operatorname{grad} \mathbf{V}_2)] + \operatorname{Pr}^2 (\tilde{p}^{(1)}, \operatorname{div} \mathbf{V}_1) + \\ &\quad + \operatorname{Ra}^{(0)} \operatorname{Pr}(T_1 \mathbf{e}_z, \mathbf{V}_2) + \operatorname{Ra}^{(0)} \operatorname{Pr}(\mathbf{V}_1 \mathbf{e}_z, T_2) + \\ &\quad - \operatorname{Ra}^{(0)} \left(\frac{1}{C} \chi^{(0)} \operatorname{div}(\chi^{(0)} \operatorname{grad} T_1 + T_1 \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \frac{C}{\chi^{(0)}}), T_2 \right). \end{aligned}$$

Докажем самосопряженность той части линейного оператора $\mathbf{L}_{\chi}^{\mathcal{T}}$, которая связана с диффузией тепла:

$$\begin{aligned} &(\chi^{(0)} \operatorname{div}(\chi^{(0)} \operatorname{grad} T_1 + T_1 \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \frac{C}{\chi^{(0)}}), T_2) = \\ &= -(\chi^{(0)} \operatorname{grad} T_1 + T_1 \partial_T \chi(z, T)|_{T^{(0)}} \frac{C}{\chi^{(0)}}, \operatorname{grad}(\chi^{(0)} T_2)) = \\ &= -(\operatorname{grad}(\chi^{(0)} T_1), \operatorname{grad}(\chi^{(0)} T_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} grad(\chi^{(0)}T_2) &= \chi^{(0)}gradT_2 + T_2\partial_T\chi(z, T)|_{T^{(0)}}\frac{\partial T_0}{\partial z} = \\ &= \chi^{(0)}gradT_2 + T_2\partial_T\chi(z, T)|_{T^{(0)}}\frac{C}{\chi^{(0)}}. \end{aligned}$$

4.2. Подкритическая конвекция

С точностью до членов второго порядка малости (7) имеет вид:

$$\chi(T) = \chi^{(0)} + \epsilon\chi^{(1)} + \epsilon^2\chi^{(2)} = \chi^{(0)}(z) + \epsilon\check{\chi}^{(1)}(z)T^{(1)} + \epsilon^2\check{\chi}^{(1)}(z)T^{(2)} + \epsilon^2\check{\chi}^{(2)}(z)T^{(1)2}.$$

Здесь $\check{\chi}^{(1)} = \partial_T\chi|_{T^{(0)}}$, $\check{\chi}^{(2)} = \partial_{TT}^2\chi|_{T^{(0)}}$.

Выпишем уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\mathcal{V}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) &= (\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)} - \frac{\text{Ra}^{(1)}}{\text{Pr}} T^{(1)} \mathbf{e}_z, \\ \nabla \mathbf{V}^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{V}^{(2)}, T^{(2)}) = \text{Pr}(\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)} - \text{div}(\check{\chi}^{(1)} T^{(1)} grad T^{(1)} + \check{\chi}^{(2)} T^{(1)2} grad T^{(0)}). \quad (17)$$

Задача (16)-(17) имеет решение, если ее правая часть ортогональна ядру сопряженного оператора [9]. Введем $\bar{T}^{(1)} = T^{(1)}/\text{Pr}$ и запишем условие разрешимости с использованием неизвестных, не зависящих от значения числа Прандтля:

$$\begin{aligned} \text{Ra}^{(1)}(\bar{T}^{(1)} \mathbf{e}_z, \mathbf{V}^{(1)}) &= ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)}) + \text{Pr}^3((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \bar{T}^{(1)}, \bar{T}^{(1)}) - \\ &- \frac{1}{C} \text{Pr}^3 \left[(\check{\chi}^{(1)} \bar{T}^{(1)} grad \bar{T}^{(1)}, grad \chi^{(0)} \bar{T}^{(1)}) + (\check{\chi}^{(2)} \bar{T}^{(1)2} grad \bar{T}^{(0)}, grad \chi^{(0)} \bar{T}^{(1)}) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку конвективные члены не вносят вклад в баланс кинетической и тепловой энергий:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)}) &= 0, \\ ((\mathbf{V}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)}, T^{(1)}) &= 0, \end{aligned}$$

требование ортогональности превращается в:

$$\text{Ra}^{(1)} = -\frac{c_1 + c_2}{c_3 C} \text{Pr}^3,$$

где c_1, c_2, c_3 не зависят от Pr , $c_3 > 0$.

Отсюда видно, что при малых значениях Pr , $\text{Ra}^{(1)}$ является величиной, близкой к нулю, т.е. устойчивой формой течения будут двумерные валы, а при больших – ячейки, тип которых определяется знаком c_2 и c_3 .

5. Двойственная природа температуропроводности, зависящей от температуры

Представим температуру в виде $T=T_0+\tilde{T}$, где T_0 — стационарный профиль температуры, \tilde{T} — отклонение от стационарного профиля. Пусть \tilde{T} мало, что, безусловно справедливо, для малых значений числа Прандтля и является стандартным допущением при больших [1]. Выполним разложение $\chi(T)$ в ряд по малому параметру, пренебрегая членами высокого порядка малости. Запишем оператор Лапласа в уравнении теплопроводности в виде:

$$\operatorname{div}(\chi(T)\nabla T) \approx \operatorname{div}(\chi(T_0)\nabla T + \partial_T\chi(T)\tilde{T}\nabla T_0) = \operatorname{div}(\chi_z(z)\nabla T) + q_{sp}, \text{ где} \\ \chi_z(z) = \chi(T_0(z)) \quad (18)$$

$$q_{sp} = \partial_z(\partial_T\chi(T)|_{T_0}\tilde{T}\partial_z T_0) = \partial_z(\check{\chi}^{(1)}(z)\tilde{T}\partial_z T_0). \quad (19)$$

В работе [5] было проведено сравнение численных решений задачи (1)-(2) при $\chi=1+40T^{15}$, $q=0$ с ее решениями при $\chi=\chi_z$, $q=q_{sp}$ из (18), (19). Обе задачи имеют одинаковый стационарный профиль температуры в отсутствие движения. Результаты численного моделирования показывают, что критическое значение числа Рэлея задачи после разложения отличается от критического значения исходной задачи при $\chi(T)$ на 5%. Типы наблюдаемых в расчетах вблизи порога устойчивости течений совпадают: в обоих случаях для больших значений числа Прандтля устанавливается течение в виде шестиугольных down-ячеек, для малых значений движение имеет форму валов.

Таким образом, с точки зрения формы наблюдаемых стационарных течений жидкость с температуропроводностью, зависящей от температуры, ведет себя также, как жидкость с температуропроводностью, зависящей от вертикальной координаты и с внутренними источниками тепла специального вида. Воспользуемся этим фактом для сравнения и построения наглядной физической интерпретации механизмов отбора конвективных структур в случае температуропроводности, зависящей от температуры, и в случае температуропроводности, зависящей от вертикальной координаты.

6. Физическая интерпретация

В работе [10] показано, что при небольшой надкритичности в качестве критерия отбора предпочтительного течения можно использовать максимальный перепад температур на дне области. Здесь, в силу иных граничных условий, перепад

температур на дне области равен нулю, а наибольшие перепады температур достигаются в горизонтальных сечениях, расположенных в средней части области. Критерий отбора можно модифицировать и рассматривать максимальный перепад на произвольной произвольной высоте внутри области.

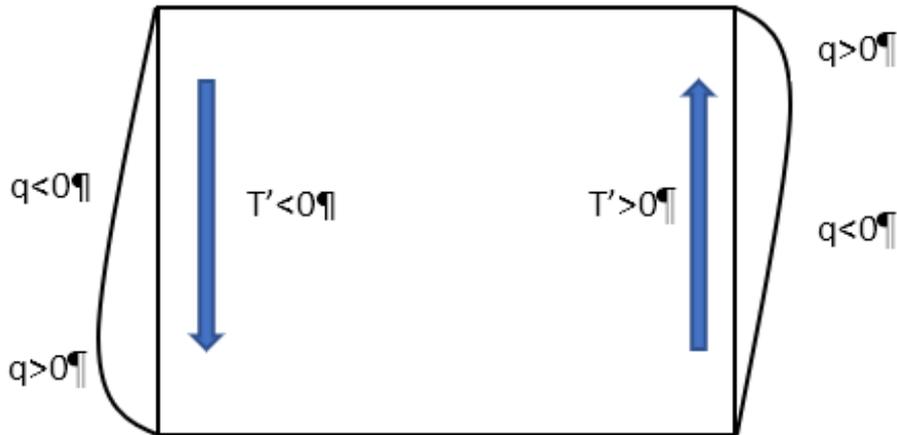


Рис. 1. Иллюстрация формирования теплового перепада в жидкости с внутренними источниками тепла $q = -\partial_z T'$

Оценим воздействие внутренних источников тепла $q_{sp} = \partial_z(\partial_T \chi(T)|_{T_0} \tilde{T} \partial_z T_0)$, связанных с зависимостью коэффициента температуропроводности от температуры, на формирование горизонтального теплового перепада. Пусть $\partial_T \chi(T) > 0$, т.е. профиль температуры выпуклый вверх. Поскольку в состоянии покоя жидкость неустойчиво стратифицирована (теплая жидкость находится внизу, холодная наверху), $\partial_z T_0 < 0$. Произведение $\partial_T \chi(T)|_{T_0} \partial_z T_0 = f(z) < 0$ является функцией, зависящей только от z . Обозначим $T' = -f(z)\tilde{T}$, тогда источник имеет вид $q_{sp} = -\partial_z T'$.

Рассмотрим произвольное движение жидкости, в котором можно выделить восходящие и нисходящие потоки. В нисходящем потоке значение величины $\tilde{T} < 0$, а следовательно, и $T' < 0$. На верхней и нижней границах $\tilde{T} = T' = 0$. Таким образом в нисходящем потоке в нижней части области от нижней границы до точки минимума величины T' источник осуществляет нагрев ($q > 0$), в верхней части – охлаждение (см. рис. 1). Другими словами, опускающийся холодный поток в процессе движения дополнительно охлаждается. Амплитуда T' , а следовательно и \tilde{T} , растет, в результате чего скорость движения увеличивается. Это затем компенсируется в нижней части области дополнительным нагревом и торможением. Аналогично рассмотрим восходящий поток. На восходящем движении \tilde{T} и $T' > 0$. Здесь, в нижней части области от нижней границы до точки максимума величины

T' , источник осуществляет дополнительное охлаждение жидкости ($q < 0$) и в результате уменьшение подъемной силы (т.е. замедление), в верхней части – нагрев.

Таким образом, источник q_{sp} ускоряет нисходящие холодные потоки и замедляет восходящие. В результате движение принимает форму down-ячеек, для которых характерна высокая скорость движения жидкости вниз в центре и в несколько раз меньшая скорость подъема вещества на границе ячейки. При малых значениях числа Прандтля величина $\tilde{T} \sim Pr$ и сила источника q_{sp} ослабевает по сравнению с конвективными членами $V_z \partial_z T_0 \sim 1$.

Покажем, как процессы дополнительного нагрева и охлаждения проявляют себя в случае температуропроводности, зависящей от температуры. Пусть $\partial\chi/\partial T > 0$. В нисходящих потоках, где холодная жидкость опускается вниз, ее температуропроводность ниже, чем у окружающей жидкости, и это помогает сохранять низкую температуру вещества при движении вниз. В восходящих потоках теплое вещество поднимается вверх и имеет более высокую температуропроводность, чем у окружающей среды, в результате тепло из восходящего потока уходит в стороны более активно. Таким образом, если тепловое взаимодействие между восходящим и нисходящим потоками минимально (между ними широкий слой жидкости с “нейтральной” температурой), нисходящий поток будет иметь высокое отклонение температуры от диффузионного распределения в узкой области, восходящий – меньшее отклонение и в более широкой области. Это приводит к формированию ячеек down-типа. Иными словами, температуропроводность зависящая от температуры, способствует down-ячейкам и противодействует up-ячейкам.

Тепловое взаимодействие между восходящим и нисходящими потоками можно считать малым при больших значениях числа Прандтля, когда теплопроводность мала по сравнению с вязкостью и преобладает вязкое взаимодействие. В случае малых значений числа Прандтля восходящий и нисходящий потоки в результате высокой теплопроводности расширяют зону своего теплового влияния на всю ширину конвективной структуры. С другой стороны, при таких значениях числа Прандтля отклонение температуры от стационарного профиля настолько мало, что температуропроводность практически превращается в величину, зависящую от высоты, и разница в теплопроводности в восходящем и нисходящем потоке на одной высоте становится малой. В результате происходит выравнивание тепловых перепадов на движении вниз и вверх, а следовательно, и выравнивание объемов движущегося вниз и вверх вещества – течение принимает форму валов.

Перейдем теперь к рассмотрению жидкости, температуропроводность которой зависит от высоты. Пусть $\partial\chi/\partial z < 0$, тогда диффузионный профиль температуры будет выпуклым вверх, как и в случае $\partial\chi/\partial T > 0$. Рассмотрим нисходя-

щий холодный тепловой поток. В отличие от $\partial\chi/\partial T$ здесь нет механизма, уменьшающего горизонтальную теплопередачу, и вещество, двигаясь вниз, попадает в область с большей температуропроводностью, распределение тепла становится более ровным в горизонтальном направлении. Восходящие тепловые потоки, наоборот, попадают в область с меньшей температуропроводностью и заостряются. Покажем, что это подходит для ячеек обоих типов.

Сначала рассмотрим большое значение числа Прандтля, тогда скорость движения жидкости по сравнению со скоростью переноса тепла велика. Жидкость, двигаясь вниз с большой скоростью, не успеет набрать много тепла от соседних слоев и сохранит свою температуру. Восходящий теплый поток попадает в область с малой теплопроводностью, где теряет тепло медленнее и высокая скорость движения не обязательна. Таким образом для формирования максимального перепада температуры между восходящим и нисходящими потоками нисходящий поток должен двигаться быстрее, чем восходящий. Такая картина движения соответствует down-ячейкам.

Для малых значений числа Прандтля скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью переноса тепла, нисходящий поток будет сильно прогреваться от окружающего вещества, даже если увеличить скорость движения в несколько раз. Однако сохранить величину отклонения от стационарного профиля температуры можно за счет увеличения объема опускающейся жидкости. При достаточном объеме вещество хоть и будет прогреваться, но в большей степени будет охлаждать соседние жидкие слои. Восходящий же поток, как и в случае большого значения числа Прандтля, попадает в область с меньшей температуропроводностью и сохраняет величину \tilde{T} с меньшими затратами, чем нисходящий поток. Движение в форме up-ячеек удовлетворяет обоим приведенным условиям – по краям медленный нисходящий поток большого объема, в центре быстрый восходящий поток. Также естественно предположить, что если значение температуропроводности с высотой меняется незначительно (“небуссинесковскость” невелика), то восходящий поток мало отличается от нисходящего и течение должно иметь форму валов.

7. Заключение

В работе сделана попытка разобраться в особенностях механизма отбора устойчивых конвективных структур, возникающих вблизи порога устойчивости в жидкостях, коэффициенты температуропроводности которых зависят от температуры

или от вертикальной координаты. При одинаковом поведении в области больших значений числа Прандтля, эти два вида зависимости демонстрируют существенные отличия в механизмах отбора в области малых его значений.

С помощью метода последовательных приближений показано, что при малых значениях числа Прандтля в жидкости с температуропроводностью, зависящей от температуры, конвективное движение принимает форму двумерных валов. Температуропроводность, зависящая от температуры, обладает дополнительной нелинейностью, эквивалентной внутренним источникам тепла специального вида. Приводится физическая интерпретация действия этих источников на структуру конвективного движения. В случае профиля температуры, выпуклого вверх, эти источники обладают свойством усиливать движение в форме down-ячеек и подавлять up-ячейки. Аналогичным образом интерпретируется механизм отбора предпочтительной формы течения для температуропроводности, зависящей от температуры, и приводится наглядная интерпретация процесса отбора структуры конвективного движения в случае температуропроводности, зависящей от вертикальной координаты.

Список литературы

1. Busse F.H. The stability of finite amplitude cellular convection and it's relation to an extremum principle // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30, no. 4. Pp. 625–649.
2. Palm E. Nonlinear Thermal Convection // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1975. Vol. 7. Pp. 39–61.
3. Riahi N. Nonlinear convection with variable coefficient of thermal expansion // *Acta Mechanica.* 1985. Vol. 60. Pp. 143–155.
4. Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть первая — анализ упрощенных моделей // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2018. no. 64. P. 30. doi: 10.20948/prepr-2018-64.
5. Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть вторая — вычислительный эксперимент // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2018. no. 210. P. 20. doi: 10.20948/prepr-2018-210.
6. Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2019. no. 68. P. 16. doi:10.20948/prepr-2019-68.
7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 стр.
8. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection // *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 23, no. 1. Pp. 129–144.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
10. Kolmychkov V. V., Shcheritsa O. V., Mazhorova O. S. Thermal convection in a cylinder and the problem of planform selection in an internally heated fluid layer // *Physical Review E.* 2016. Vol. 94.

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	3
3. Известные результаты	4
4. Метод последовательных приближений для $\chi(T)$	5
4.1. Самосопряженность линейного оператора при $\chi(T)$	7
4.2. Подкритическая конвекция	8
5. Двойственная природа температуропроводности, зависящей от температуры	9
6. Физическая интерпретация	9
7. Заключение	12
Список литературы	14