



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 121 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Белов А.А., Вальяников О.В.,
Калиткин Н.Н.

Численное решение задач
Коши с сингулярностями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Белов А.А., Вальяников О.В., Калиткин Н.Н. Численное решение задач Коши с сингулярностями // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 121. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2019-121](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-121)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-121>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША

А. А. Белов, О. В. Вальяников, Н. Н. Калиткин

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОШИ
С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

Москва, 2019

А. А. Белов, О. В. Вальяников, Н. Н. Калиткин. Численное решение задач Коши с сингулярностями

Для численного расчета задачи Коши со множественными сингулярностями решения рассмотрено два подхода. Во-первых, найдены те схемы, которые позволяют вести сквозной расчет решения за полюс. Такими схемами оказались чисто неявные схемы. Однако этот способ обеспечивает лишь точность первого порядка. Во-вторых, предложен метод инверсной функции. В случае полюсов первого порядка он позволяет продолжать решение за полюса, определяя само решение и положение полюсов с хорошей точностью. При этом можно использовать традиционные явные и неявные схемы, например, явные схемы Рунге-Кутты. Дан пример численного расчета задачи со многими полюсами. Предложенный метод полезен для написания программ вычисления специальных функций.

Ключевые слова: задача Коши, сингулярности, продолжение за полюс

A. A. Belov, O. V. Valianikov, N. N. Kalitkin. Numerical solution of the Cauchy problem with singularities

For numerical solution of the Cauchy problem with multiple singularities, we consider two distinct approaches. Firstly, we provide schemes permitting direct computation through the singularity. These schemes are implicit ones. However, this approach provides only the first order of accuracy. Secondly, we propose the reciprocal function method. For the first order poles, this method allows to continue the solution through the pole providing calculation of the solution itself and the pole position with good accuracy. One can imply traditional explicit and implicit schemes, e.g., the Runge-Kutta methods. We provide an example of calculation of a problem with multiple poles. The proposed method is useful for numerical calculation of special functions.

Keywords: the Cauchy problem, singularities, continuation through pole

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00175

1 Проблема

Существует немало задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых имеют полюсы. Подавляющее большинство таких задач являются нелинейными. Многие из этих задач формулируются для дифференциального уравнения второго порядка, в котором коэффициент перед старшей производной обращается в нуль в некоторых точках. Такие задачи имеют два линейно независимых решения, из которых одно имеет нули, а другое – полюсы. Примерами являются задачи для цилиндрических функций, классических ортогональных полиномов и др. Много подобных задач возникает в квантовой механике. Другими примерами функций с полюсами являются гамма-функция, эллиптические интегралы и др. Такие решения имеют, как правило, не единственную особую точку, а последовательность полюсов.

Такие задачи, за редкими исключениями, не решаются в элементарных функциях. Для их решения приходится применять численные методы. Общеупотребительные численные методы решения (например, методы Рунге-Кутты) хорошо позволяют считать гладкие участки решения и широко используются для составления таблиц специальных функций [1] и стандартных программ прямого расчета [2]. Однако в окрестностях особых точек погрешность этих методов сильно возрастает. Непосредственно продолжить решение за полюс практически невозможно. Для этого приходится разрабатывать процедуру, рассчитанную на конкретную задачу. Если требуется пройти не один полюс, а несколько, то точность нахождения каждого последующего полюса значительно ухудшается.

Первые успешные работы по обнаружению единственной сингулярности и установлению ее типа были сделаны в [3], [4] в традиционных переменных. Однако этот алгоритм был сложен и требовал высокой квалификации вычислителя. Выбор длины дуги интегральной кривой в качестве аргумента позволил разработать гораздо более точную диагностику единственной сингулярности [5], [6]. Однако задача продолжения решения за сингулярность оставалась нерешенной.

Ниже предложены два подхода к решению этой проблемы. Один подход заключается в выявлении тех схем, расчет по которым сначала идет по левой ветви до сингулярности, а потом за один шаг перескакивает в окрестность правой ветви и далее приближается к ней. Подавляющее большинство явных и явно-неявных схем оказались недостаточно надежными. Удовлетворительными оказались чисто неявные обратные схемы Рунге-Кутты разных порядков точности и единственная явно-неявная схема – одностадийная схема Розенброка точности с коэффициентом 1. Однако все эти схемы позволяют найти положение полюса и решение за сингулярностью лишь с точностью $O(\tau)$.

Лучшую точность дал второй подход. Он заключается во введении так называемой инверсной функции (Reciprocal function method или RF-метод). Он позволяет найти положение полюса, вычислить решение в малой его окрестности и продолжить решение за полюс. Он пригоден для задач со множественными полюсами. Метод допускает использование практически любых явных и неявных схем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Он удобен для реализации в стандартных программах. Для полюсов порядка выше первого этот метод позволяет определить положение полюса и его порядок. Однако продолжение решения за полюс сопряжено со значительными потерями точности.

2 Единственный полюс

Тест. Рассмотрим подробно этот случай на примере следующей тестовой задачи.

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad f(u) = u^2, \quad u(0) = u^0. \quad (1)$$

Для нее нетрудно построить точное решение

$$u = \frac{u^0}{1 - tu^0}. \quad (2)$$

Эта задача имеет единственный полюс первого порядка при $t = t_0 = 1/u^0$. Положим для определенности $u^0 = 1$. Это решение показано на рис. 1 штриховой линией. Оно состоит из двух ветвей гиперболы при $t < t_0$ и при $t > t_0$, разделенных вертикальной асимптотой.

Мы провели расчет задачи (1) по явно-неявной одностадийной схеме Розенброка [7] с коэффициентом 1 (в литературе ее часто называют чисто неявной). Проводилось сравнение двух аргументов: традиционного t и длины дуги l [8].

Аргумент t . Численные решения задачи (1) в аргументе t на наборе последовательно сгущающихся сеток приведены на рис. 2. Шаг каждой из сеток выбирается постоянным, но при переходе от одной сетки к другой его величина уменьшается вдвое.

Видно, что слева от сингулярности численные решения стремятся к точному при шаге $\tau \rightarrow 0$. Вблизи сингулярности наблюдается перескок решения с одной ветви гиперболы на другую. После этого решение идет по другой ветви гиперболы, то есть продолжается за полюс. На различных сетках моменты перескока не одинаковы. Поэтому на первых шагах после перескока решения на всех сетках заметно отличаются от точного. При дальнейшем увеличении t снова просматривается сходимость разностных решений к точному. Таким образом, сходимость имеет место всюду, но в

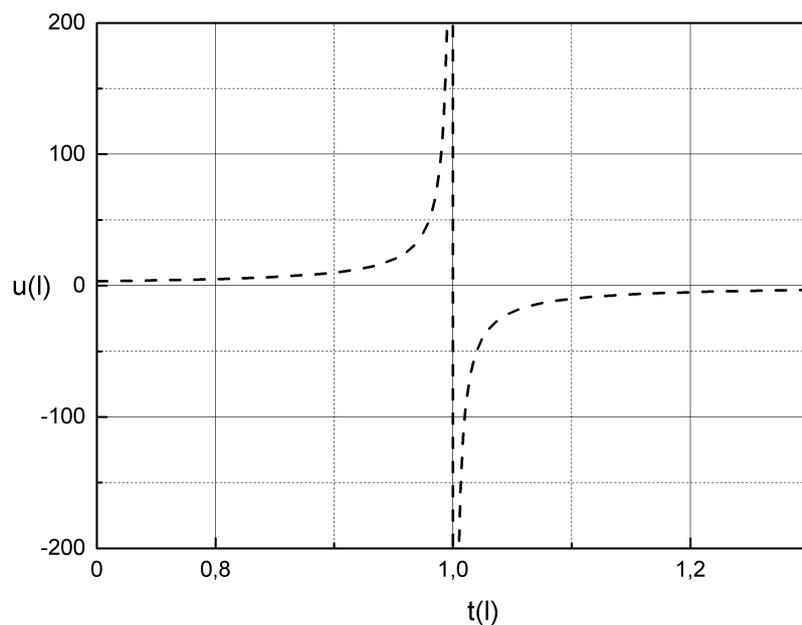


Рис. 1: Точное решение задачи (1).

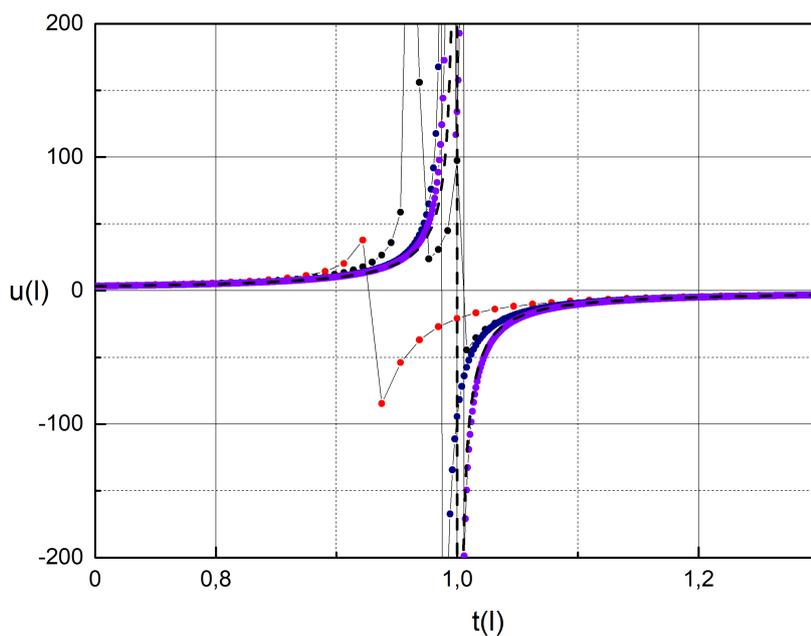


Рис. 2: Решения (1) в аргументе t . Штриховая линия – точное решение, точки – численные решения на сгущающихся сетках.

некоторой окрестности сингулярности она является медленной. Хотя порядок сходимости формально равен $O(\tau)$, но значения коэффициента при $t \rightarrow t_0$ неограниченно растут.

Аргумент l . Теперь рассмотрим численные решения задачи (1) в аргументе l на нескольких сгущающихся сетках. Они приведены на рис. 3. Шаг

по длине дуги на каждой сетке постоянен, но при переходе к следующей сетке уменьшается вдвое.

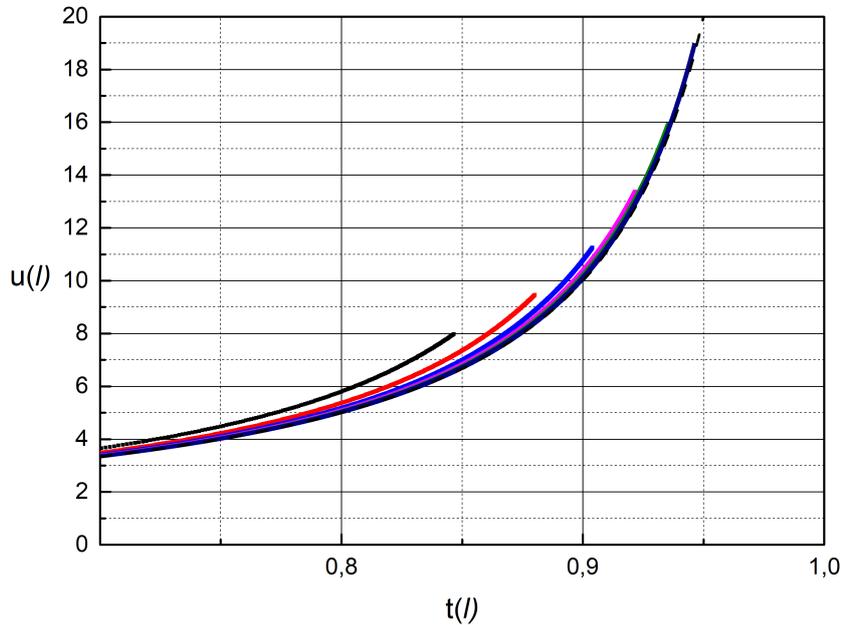


Рис. 3: Решение задачи (1) в аргументе l . Обозначения аналогичны рис. 2.

При расчете в аргументе l решение всегда остается на первой ветви гиперболы и в принципе не может «перепрыгнуть» на вторую, так как точная сингулярность соответствует значению аргумента $l = \infty$. Формально численное решение может оказаться правее t_0 , поскольку временная компонента вычисляется с некоторой погрешностью. Максимальная расчетная длина дуги всегда конечна, поэтому численное решение никогда не достигнет сингулярности. Тем самым, внутри расчетного интервала точное решение является гладким, и численное сходится к нему в соответствии с теорией схемы Розенброка. Это хорошо видно на рис. 3.

Контроль точности. Для контроля сходимости решений в аргументах «время» и «длина дуги» применяются стандартные оценки погрешности по методу Ричардсона. Для ричардсоновской погрешности используем разностный аналог нормы L_2

$$D = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2}, \quad d_n = \frac{u_{rN} - u_N}{2^p - 1} \quad (3)$$

Здесь N – число узлов более грубой сетки, r – кратность сгущения сетки, p – порядок точности используемой схемы. В нашем случае $r = 2$, так как шаг уменьшается вдвое от сетки к сетке; порядок точности схемы Розенброка $p = 1$.

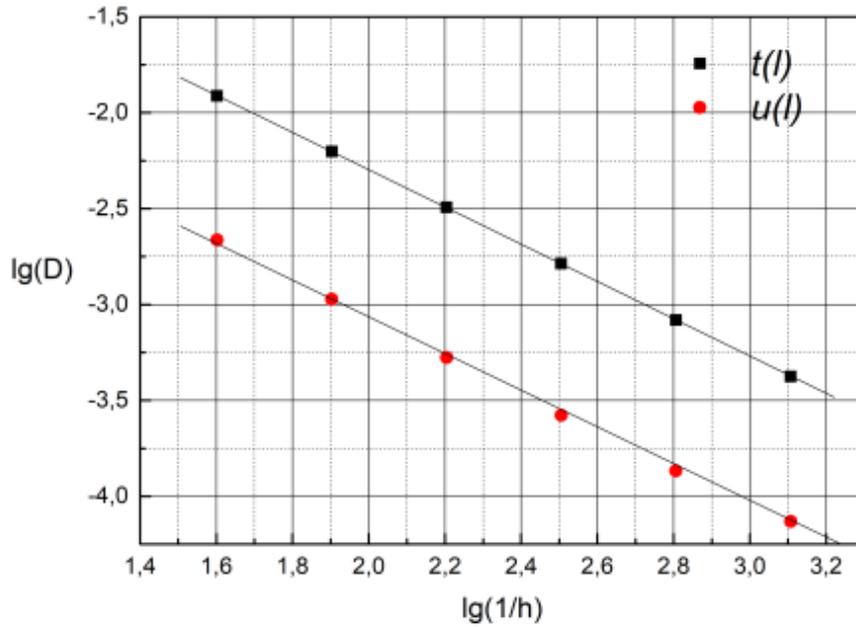


Рис. 4: Погрешность решения задачи (1) в аргументе l .

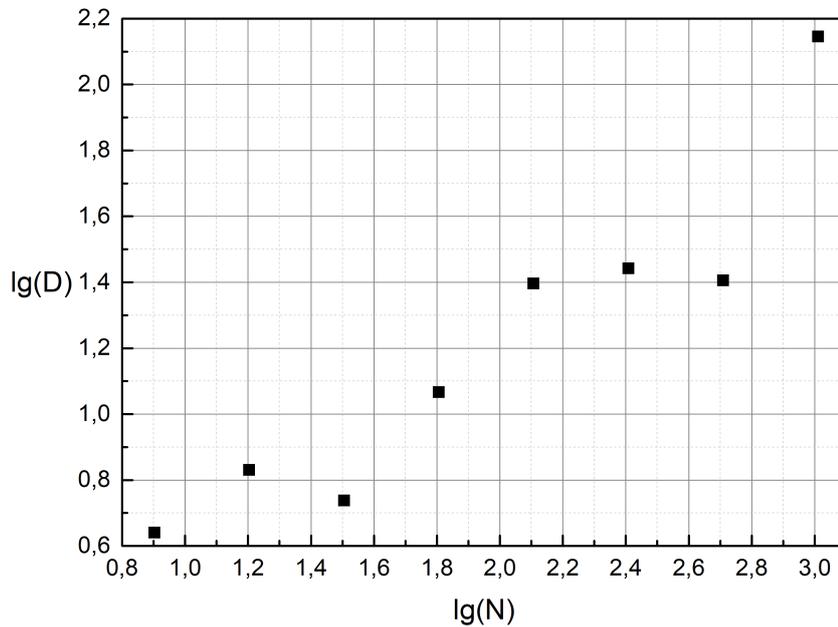


Рис. 5: Погрешность решения задачи (1) в аргументе t .

На рис. 4 и рис. 5 представлены кривые сходимости $u(l)$, $t(l)$ и $u(t)$ соответственно. Графики даны в двойном логарифмическом масштабе, так что степенному характеру зависимости погрешности от числа шагов сетки соответствует прямая линия. Наклон этой прямой равен порядку точности разностной схемы. Видно подтверждение сходимости решений в случае

расчета в аргументе l и отсутствие сходимости в случае расчета в аргументе t .

3 Сквозной расчет

Выше мы видели, что чисто неявная одностадийная схема Розенброка позволяет проводить сквозной расчет через сингулярность, то есть непосредственно вычислять решение не только до сингулярности, но и после нее. Однако не каждая схема позволяет это сделать. Сравним некоторые схемы.

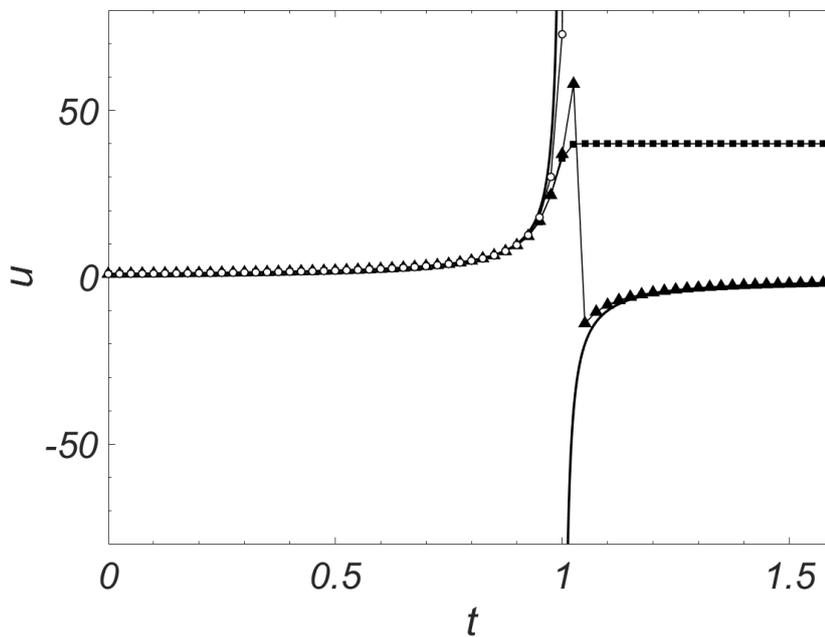


Рис. 6: Решения (1) в аргументе t по различным схемам: \circ – ERK2, \blacksquare – CROS, \blacktriangle – BORK2.

Типичный расчет по явной схеме Рунге-Кутты второго порядка точности (ERK2) с аргументом t приведен на рис. 6. Решение быстро растет при подходе к полюсу вплоть до переполнения. При этом расчетное значение аргумента t может несколько превысить значение t_0 на величину порядка шага τ , но на самом деле расчет передает только левую ветвь решения. Перескок на вторую ветвь не происходит. Аналогичную картину дает расчет по схеме четвертого порядка (ERK4) и по другим явным схемам. Напомним, что расчет в аргументе l в принципе не дает перескока на вторую ветвь. Поэтому можно сказать, что явные схемы в принципе не дают автоматического продолжения решения за сингулярность.

Схемой особо высокой надежности считается явно-неявная одностадийная схема Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS). Эта схема

была подробно исследована в [3], [4]. Пример расчета по ней в аргументе t также показан на рис. 6. Видно, что численный расчет сначала хорошо передает левую ветвь решения. Когда расстояние до полюса становится порядка τ , численное решение формально проходит за полюс, но выходит не на вторую ветвь, а на горизонталь. В [3], [4] был предложен метод восстановления расчетного положения полюса по высоте этой горизонтали. Применение этого метода требует достаточно высокой квалификации вычислителя. Следовательно, схема CROS также не позволяет продолжать решение за сингулярность.

Таким образом, среди всех явных и явно-неявных схем только одностадийная схема Розенброка с коэффициентом 1 в аргументе t позволила продолжить решение за сингулярность.

Неявные схемы оказались гораздо более надежными. Были проведены расчеты по следующим неявным схемам: обратная схема Эйлера точности $O(\tau)$, оптимальные обратные схемы Рунге-Кутты с двумя и четырьмя стадиями точности $O(\tau^2)$ и $O(\tau^4)$ соответственно. Последние две схемы предложены в [9] – [11] и названы BORK2 и BORK4. Разумеется, в аргументе l они также не имеют продолжения за сингулярность. Но в аргументе t продолжение имеет место, и результаты таковы же, как для схемы Розенброка с коэффициентом 1. При этом расчетный момент перескока с одной ветви на другую зависит от величины τ и стремится к точной асимптоте с скоростью $O(\tau)$. На рис. 6 приведен пример расчета по схеме BORK2.

Таким образом, выявлен ряд схем, позволяющих достаточно надежно проводить сквозное решение задач с сингулярностями. Однако у всех этих схем есть существенный недостаток. Во-первых, даже в схемах высокого порядка точности положение сингулярности определяется лишь с точностью $O(\tau)$. Во-вторых, на первых шагах после перехода через сингулярность фактическая погрешность значительна. Если надо рассчитать прохождение через несколько особых точек, погрешность может многократно увеличиваться. Поэтому актуально построение методов высокой точности для сквозного расчета сингулярных решений. Такой метод предложен в следующем разделе.

4 Метод инверсной функции

4.1 Описание

Для простоты изложения рассмотрим задачу Коши для одного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0. \quad (4)$$

Предполагаем, что правая часть имеет столько непрерывных производных, сколько потребуется для численных схем интегрирования ОДУ. Пусть решение задачи (4) таково, что оно имеет произвольное число полюсов первого порядка в точках $t = T_k$. Положения этих полюсов нам априори неизвестны.

Трудности. Напомним типичные трудности, возникающие при численном решении таких задач. Возьмем любую явную схему. Для простоты шаг τ будем считать постоянным. Формально решение существует на каждом шаге $t_n = n\tau$. Однако при приближении к первому полюсу значения $u(t_n)$ будут стремительно нарастать и быстро выйдут за пределы представимых на компьютере чисел. Переход к переменному шагу τ_n , уменьшающемуся по мере увеличения функции, сохраняет эту качественную картину.

Если взять неявную схему, то описанная картина не меняется, но прибавляется еще одна трудность. Решение на новом шаге находится из нелинейного алгебраического уравнения. При конечном шаге τ_n у этого уравнения может не существовать вещественного решения. В обоих случаях трудно найти положение полюса и невозможно продолжить решение за него с помощью той же схемы.

RF-метод. Описанные трудности легко преодолевает метод инверсной функции. Рассмотрим инверсную функцию $v(t) = [u(t)]^{-1}$. Из (4) следует, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 f\left(\frac{1}{v}, t\right). \quad (5)$$

Все полюсы первого порядка функции $u(t)$ становятся простыми нулями функции $v(t)$, а нули функции $u(t)$ – полюсами функции $v(t)$. Это позволяет предложить следующий алгоритм.

Будем численно интегрировать уравнение (4), пока $|u_n|$ не начнет быстро увеличиваться. Практическим критерием этого может служить условие $|u_n| > A$, где A – некоторая константа. Когда это условие выполнилось, полагаем $v_n = [u_n]^{-1}$ и решаем задачу (5) с этим начальным условием. Очевидно, на ближайших шагах $|v_n|$ будет убывать, затем $v(t)$ пройдет через нуль, положение которого будет соответствовать полюсу функции $u(t)$. Далее $|v_n|$ будет нарастать. Когда выполнится условие $|v_n| > A^{-1}$, возвращаемся к расчету функции $u(t)$ по уравнению (4).

В окрестностях полюсов T_k функция $v(t)$ имеет столько непрерывных ограниченных производных, сколько их имеет $u(t)$ вне полюсов. Поэтому интегрирование $v(t)$ можно продолжать той же схемой.

Положения полюсов. Пусть использована численная схема точности $O(h^p)$. Найдем интервал $[t_n, t_{n+1}]$, на концах которого значения v_n и v_{n+1} имеют разные знаки. На этом интервале лежит расчетное приближение

к полюсу T . В окрестности точки смены знака выберем p точек сетки t_j . Очевидно, для $p = 2$ это будут точки t_n и t_{n+1} , для $p = 4$ – точки t_{n-1} , t_n , t_{n+1} , t_{n+2} .

Рассмотрим значения v_j в выбранных узлах как аргумент, а соответствующие значения t_j – как функцию этого аргумента. Проведем ньютоновскую (или иную) интерполяцию по этим значениям v_j функции $t(v)$ и вычислим значение t_* при $v_* = 0$. Это и будет расчетное значение полюса.

Погрешность. Традиционное вычисление погрешности как традиционной нормы (C , L_2 или подобных им) от разности численного и точного решений неконструктивно на задачах с сингулярностями. Причина в том, что расчетное положение полюса заведомо отличается от точного, и поэтому погрешности вблизи полюса оказываются огромными.

В [12] было предложено использовать метрику Хаусдорфа для оценки близости решений, имеющих участки быстрого изменения. Опишем процедуру вычисления расстояния в такой метрике. Возьмем точное решение $u(t)$ на участке до первого полюса или на участке между двумя соседними полюсами. Возьмем сеточное решение u_n , относящееся к этому участку; оно состоит из точек с координатами (t_n, u_n) . При этом часть значений u_n вычисляется непосредственно решением уравнения (4), а лежащие вблизи полюсов значения восстанавливаются по расчетным величинам v_n . Опустим из каждой точки (t_n, u_n) перпендикуляр на кривую $u(t)$. Длина этого перпендикуляра d_n есть расстояние от точки до кривой. Беря $d = \max d_n$, получим метрику Хаусдорфа. Очевидно, она аналогична норме C . Однако на практике более выгодно построить аналог нормы L_2 . Для этого возьмем среднеквадратичную величину d_n в расчете на одну точку:

$$d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2}, \quad (6)$$

где N – полное число точек на выбранном участке. Далее будем пользоваться определением (6).

4.2 Пример расчета

Тест. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = 1 + (u - \pi/4)^2, \quad t > 0; \quad u(0) = \pi/4. \quad (7)$$

Приведем точное решение и его полюсы

$$u(t) = \pi/4 + \operatorname{tg} t, \quad T_k = \pi(k - 1/2). \quad (8)$$

Это решение дано на рис. 7. Приведем также уравнение для функции $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 - \left(1 - \frac{\pi}{4}v\right)^2. \quad (9)$$

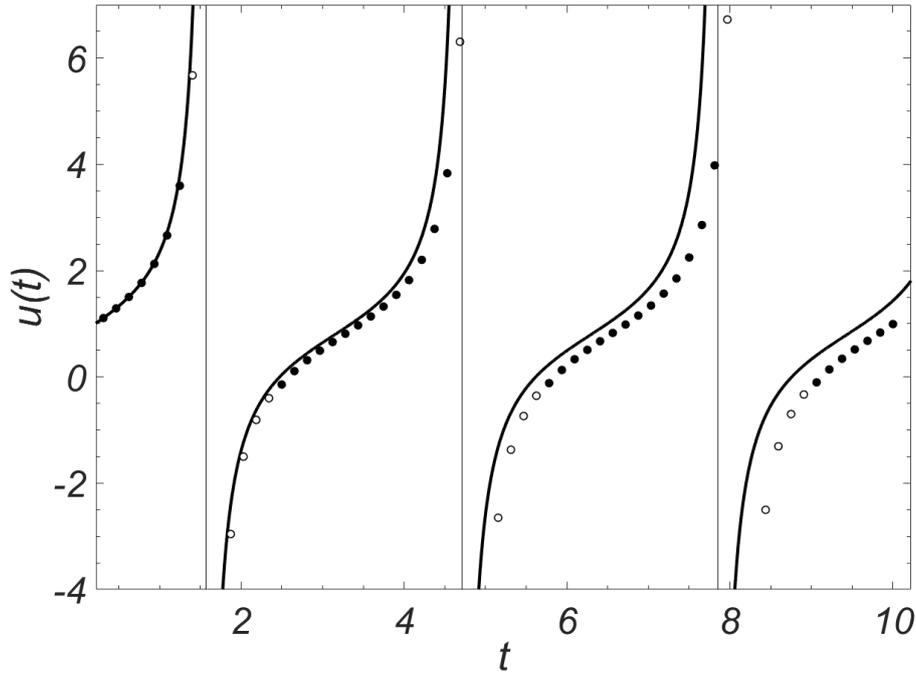


Рис. 7: Расчет теста (7) с шагом $\tau = 0.157$ по схеме ERK2. Точное решение – сплошная кривая. Точки – расчет по $u(t)$, кружки – по $v(t)$.

Расчеты проводились с разными константами перехода A . Оказалось, что большое значение A приводит к худшей точности. Значение $A \geq 100$ давало плохие результаты. Для иллюстративных расчетов было выбрано $A = 5$. В общем случае A должно служить настроечным параметром программы.

Результаты. Для численной реализации были выбраны явные схемы Рунге-Кутты второго и четвертого порядков (ERK2 и ERK4) и явно- неявная одностадийная схема Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS) [7]. Мы пользовались их реализацией в пакете GEABORK [11]. Схемы ERK2 и CROS имеют аппроксимацию $O(\tau^2)$, а схема ERK4 – $O(\tau^4)$.

Все расчеты проводились до момента $t = 10$, что требовало прохождения трех полюсов. Опишем качественные и количественные результаты.

На рис. 7 показано численное решение по схеме ERK2 с шагом $\tau = 0.157$. Шаг демонстрационного расчета выбран так, чтобы он был а) несоизмерим с расстоянием между полюсами (тогда узел сетки заведомо не попадает в полюс) и б) достаточно велик, чтобы можно было видеть отличие численного решения от точного. Видно, что расчет хорошо проходит через полюсы. Ошибка накапливается с увеличением t_n , однако даже при таком крупном шаге можно успешно пройти довольно много полюсов.

На рис. 8 для всех схем показана зависимость погрешности в метрике Хаусдорфа от величины шага. Для схем ERK2 и CROS кривые практически совпадают. График дан в двойном логарифмическом масштабе. Линии графика прямые, начиная уже со второй сетки. Следовательно, зависи-

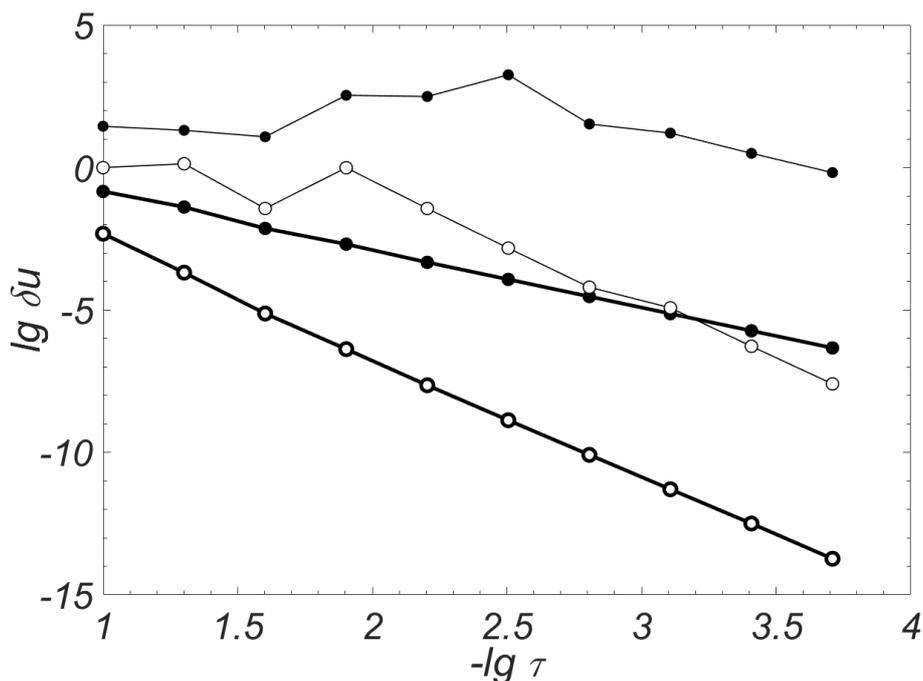


Рис. 8: Зависимость погрешности решения от шага, жирные линии – в метрике Хаусдорфа, тонкие – в норме L_2 . Точки – схемы ERK2 и CROS, кружки – схема ERK4.

мость погрешности от шага является степенной. Тангенсы угла наклона этих прямых равны -2 для схем ERK2 и CROS и -4 для ERK4. Таким образом, даже на задаче с полюсами эти схемы реализуют свой теоретический порядок точности. Это свидетельствует о высокой надежности метода инверсной функции.

Заметим, что для такого количественного определения точности необходим использованный здесь среднеквадратичный аналог метрики Хаусдорфа. Обычные нормы L_2 или C и даже традиционная метрика Хаусдорфа (являющаяся аналогом нормы C) не дают конструктивного ответа. Для иллюстрации на рис. 2 показаны также погрешности в норме L_2 . Сами эти погрешности намного больше погрешностей в метрике Хаусдорфа. Кривые в традиционных нормах имеют очень длинные нерегулярные участки: теоретическая сходимость начинается только при чрезмерно малом шаге.

На рис. 9 показана зависимость погрешности определения третьего полюса от шага для всех схем. График также дан в двойном логарифмическом масштабе. Картина полностью аналогична рис. 8: положение полюса вычисляется с точностью $O(\tau^p)$.

4.3 Обобщения

Системы уравнений. Полюсы отдельных компонент решения могут не совпадать. Метод инверсной функции естественно обобщается на этот случай. Нужно для каждой компоненты $u^k(t)$ вектора $\mathbf{u}(t)$ вводить свою ин-

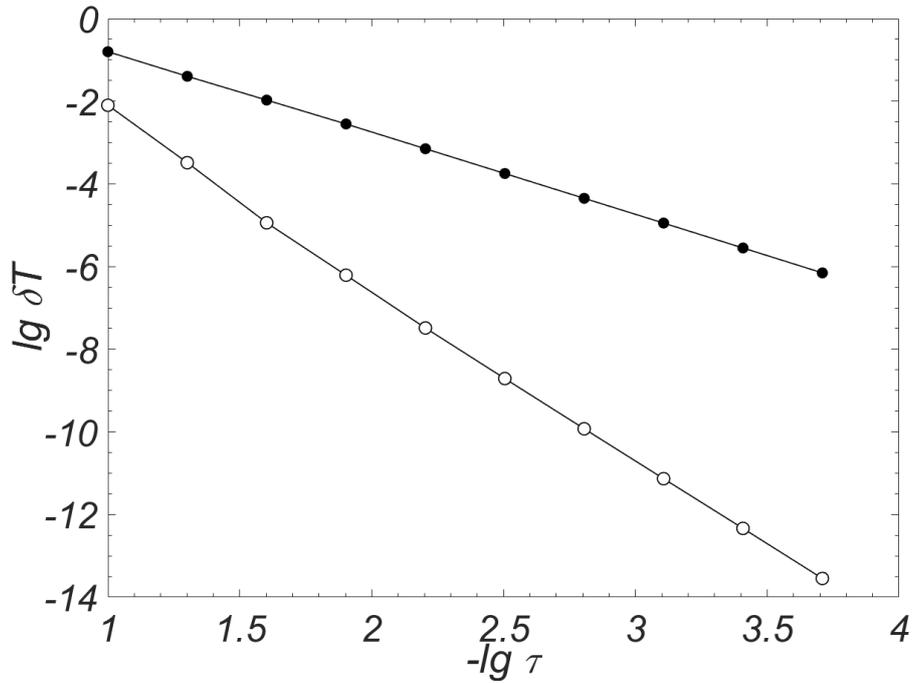


Рис. 9: Зависимость погрешности положения третьего полюса от шага. Точки – схемы ERK2 и CROS, кружки – схема ERK4.

версную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$. Настраиваемый параметр A^k целесообразно выбирать отдельно для каждой компоненты.

Длина дуги. Для задач с сингулярностями более высокую надежность можно получить, если выбрать в качестве аргумента длину дуги интегральной кривой [8]. Для функций $u(t)$ и $v(t)$ интегральные кривые различны, соответственно, длина дуги для них тоже различается. Поэтому началом отсчета длины дуги каждый раз следует считать точку перехода.

Выбор шага. Использование длины дуги позволяет применить автоматический выбор шага по кривизне интегральной кривой, который предложен в [13], и его наиболее удачный вариант описан в [12]. Это может существенно уменьшить число шагов, требуемое для достижения заданной точности.

Кратные полюсы. Для полюса первого порядка задача Коши является фактически корректно поставленной. Для полюсов высокого порядка это не всегда выполняется. Поэтому нужно тщательно проверять корректность постановки задачи. Если задача поставлена корректно, то метод обратной функции позволяет продолжать решение за полюс, хотя и со значительной потерей точности. Для некорректно поставленной задачи продолжение за полюс невозможно, но можно хорошо определить положение первого полюса и его порядок.

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00175.

Список литературы

1. Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы. Графики. Таблицы. М.: Наука, 1964.
2. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <https://dlmf.nist.gov>
3. Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток // ДАН. 404:3 (2005), 295–299.
4. Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // ЖВ-МиМФ. 45:10 (2005), 1837–1847.
5. Белов А. А. Численное обнаружение и исследование сингулярностей решения дифференциальных уравнений // ДАН. 468:1 (2016), 21–25.
6. Белов А. А. Численная диагностика разрушения решений дифференциальных уравнений // ЖВМиМФ. 57:1 (2017), 91–102.
7. Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer J. 5:4 (1963), 329–330.
8. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
9. Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Обратные Ls-устойчивые схемы Рунге-Кутты // ДАН. 442:2 (2012), 175–180.
10. Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Вычисления с использованием обратных схем Рунге-Кутты // Матем. моделирование. 25:10 (2013), 79–96.
11. Пошивайло И. П. Жесткие и плохо обусловленные нелинейные модели и методы их расчета. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 05.13.18. Москва, 2015.
12. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Экономичные методы численного интегрирования задачи Коши для жестких систем ОДУ // Дифф. уравнения. 55:7 (2019), 907–918.
13. Белов А. А., Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П. Геометрически-адаптивные сетки для жестких задач Коши // ДАН. 466:3 (2016), 276–281.

Содержание

1	Проблема	3
2	Единственный полюс	4
3	Сквозной расчет	8
4	Метод инверсной функции	9
4.1	Описание	9
4.2	Пример расчета	11
4.3	Обобщения	13