ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 120 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Орбитальная устойчивость периодического решения системы Гамильтона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Орбитальная устойчивость периодического решения системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 120. 16 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2019-120
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-120

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Брюно

Орбитальная устойчивость периодического решения системы Гамильтона

Москва — 2019

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно
Орбитальная устойчивость периодического решения системы Гамильтона. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2019.

В окрестности периодического решения автономной системы Гамильтона вводятся локальные канонические координаты. Затем делается формальное каноническое преобразование этих координат, приводящее гамильтониан в комплексную нормальную форму. Затем уточняются свойства нормальной формы в вещественном случае и по коэффициентам начальных членов нормальной формы формулируется условие, достаточное для формальной орбитальной устойчивости исходного периодического решения. Даётся соответствующее доказательство. На контрпримерах показывается, что сформулированные ранее А.П. Маркеевым условия такой устойчивости ошибочны. Поэтому результаты их применения А.П. Маркеевым и Б.С. Бардиным в задачах механики следует пересмотреть.

Ключевые слова: система Гамильтона, периодическое решение, нормальная форма, орбитальная устойчивость, ошибки.

Alexander Dmitrievich Bruno
Orbital stability of the periodic solution of a Hamiltonian system.

In a vicinity of a periodic solution of an autonomous Hamiltonian system we introduce local canonical coordinates. Then we make a formal canonical transformation of the coordinates, reducing the Hamiltonian function to the complex normal form. Next we make more precision properties of the normal form in real case and, using coefficients of the beginning terms of the normal form, we give conditions, which are sufficient for the formal orbital stability of the initial periodic solution. We give also the corresponding proof. By means of counterexamples we show that the A.P. Markeev's conditions of the stability are wrong. So results of their applications in mechanical problems by A.P. Markeev and B.S. Bardin should be revised.

Key words: Hamiltonian system, periodic solution, normal form, orbital stability, mistakes.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18–01–00422a.

e-mail: abruno@keldysh.ru

1. Введение

Пусть вещественная система Гамильтона с $n+1$ степенью свободы имеет вещественное T-периодическое решение $\mathcal{M}$ и функция Гамильтона аналитична в окрестности решения $\mathcal{M}$. Согласно разделу 2.A главы II книги [Брюно, 1990], вблизи решения $\mathcal{M}$ можно ввести такие вещественные локальные канонически сопряжённые координаты $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ψ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, ρ, что решение $\mathcal{M}$ задаётся уравнениями

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \rho = 0, \quad \psi = \psi_0 + \frac{2\pi}{T}t \tag{1.1}$$

и гамильтониан имеет вид

$$\gamma = \Sigma \gamma_{\mathbf{pq}l}(\psi) \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} \rho^l, \tag{1.2}$$

где целочисленные $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \geqslant 0$, целое $l \geqslant 0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} = \xi_1^{p_1} \cdots \xi_n^{p_n}$, вещественные аналитические функции $\gamma_{\mathbf{pq}l}(\psi)$ имеют по ψ период 2π и разлагаются в ряды Фурье. При этом

$$\gamma_{\mathbf{00}0}(\psi) = \gamma_{\mathbf{0e}_j0}(\psi) = \gamma_{\mathbf{e}_j\mathbf{0}0}(\psi) = 0, j = 1, \ldots, n, \quad \gamma_{\mathbf{0e}_j1} = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.3}$$

Определение 1. Периодическое решение (1.1) гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, & \dot{\eta}_j &= -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}, & \dot{\rho} &= -\frac{\partial \gamma}{\partial \psi} \end{aligned} \tag{1.4}$$

орбитально формально устойчиво, если существует такой степенной вещественный ряд по $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, ρ

$$F = \sum F_{\mathbf{pq}l}(\psi) \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} \rho^l \stackrel{\text{def}}{=} F^{(s)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi, \rho) + F^{(s+1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi, \rho) + \ldots$$

с почти-периодическими по ψ коэффициентами $F_{\mathbf{pq}l}(\psi)$, где $F^{(k)}$ — однородные многочлены по $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\sqrt{\rho}$ степени k, который может расходиться, но является формальным положительно определённым интегралом системы (1.4). Другими словами, все коэффициенты степенного ряда

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j} - \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} - \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \gamma}{\partial \psi}$$

должны обращаться в ноль и $F^{(s)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi, \rho) \geqslant 0$, причём $F^{(s)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi, \rho) = 0$ только при $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, $\rho = 0$.

Напомним, что функция $f(\psi)$ — периодическая, если имеет одну частоту, условно (или квази) периодическая, если имеет конечное количество частот, и почти периодическая, если имеет счётное множество частот. В нашем случае будут квазипериодические функции.

В настоящее время нет ни определения ни доказанных достаточных условий орбитальной формальной устойчивости периодического решения. При $n = 1$ и $n = 2$ Маркеев [2002; 2006] использовал для этого без доказательств достаточные условия формальной устойчивости неподвижной точки в системе с $n + 1$ степенью свободы. Для периодического решения они являются ошибочными (что показано ниже в примерах 1 и 2) и совпадают с условиями устойчивости на изоэнергетическом уровне $\gamma = 0$. Поэтому изоэнергетической устойчивости недостаточно для устойчивости в полном пространстве. По этому вопросу у меня произошёл спор с Б.С. Бардиным на съезде механиков в Уфе. Ибо устойчивость в своём докладе [Бардин, 2019] он доказывал через устойчивость на изоэнергетическом уровне, ссылаясь на А.П. Маркеева.

План препринта

В этом разделе уже введены локальные координаты вблизи периодического решения системы Гамильтона. В разделе 2 делается комплексное формальное преобразование этих координат, приводящее гамильтониан к комплексной нормальной форме. В разделе 3 подробно описываются свойства коэффициентов комплексной нормальной формы вещественной исходной системы и доказывается теорема 4 о формальной орбитальной устойчивости. В разделе 4 рассматриваются условия устойчивости на нулевом изоэнергетическом уровне, которые ввёл А.П. Маркеев [2002; 2006] и использовал Б.С. Бардин [2019]. В разделе 5 на двух примерах показывается, что этой устойчивости недостаточно для устойчивости в полном пространстве.

2. Нормальная форма

Положим

$$\tilde{\gamma} = \frac{T\gamma}{2\pi}, \quad \tilde{t} = \frac{2\pi t}{T}. \tag{2.1}$$

Тогда получим 2π-периодическое исходное решение (1.1). В дальнейшем тильды опустим и будем рассматривать решение (1.1) с периодом 2π, т. е. $\gamma = \rho + \dots$

При $\rho = 0$ квадратичная по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ часть $\gamma^{(2)}$ гамильтониана (1.2) определяет 2π-периодическую, линейную по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ систему при $\psi = t$

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma^{(2)}}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma^{(2)}}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Пусть $\nu_1, \dots, \nu_{2n}$ — собственные числа матрицы монодромии, т. е. матрицы подстановки фундаментальной матрицы решений системы (2.2) за период 2π.

Пусть все $|\nu_j| = 1$ и $\nu_j \neq -1$. Положим

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \ln \nu_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad j = 1,\ldots,2n.$$

При правильной нумерации

$$\alpha_{j+n} = -\alpha_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Условие $\mathbf{A_k}$. Для всех целочисленных $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ с $|p_1| + \ldots + |p_n| \leqslant k$ скалярные произведения $\langle \mathbf{p},\boldsymbol{\alpha} \rangle$ не являются целыми числами.

Теорема 1 ([Брюно, 1990; 2019])**.** *Пусть выполнено условие* $\mathbf{A}_2$*. Тогда существует комплексная формальная обратимая периодическая по* ψ *и* φ *каноническая замена координат*

$$\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho \longleftrightarrow \mathbf{x},\varphi,\mathbf{y},r, \tag{2.3}$$

которая приводит гамильтониан (1.2)*,* (1.3)*,* (2.1) *к нормальной форме*

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y},\varphi,r) = r + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j y_j + \sum g_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} r^l \exp(\mathrm{i}m\varphi), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$*,* $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$*, целочисленные* $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$*, целые* $l \geqslant 0$ *и* m*, во второй сумме имеются только резонансные члены, для которых*

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q},\boldsymbol{\alpha} \rangle + m = 0, \tag{2.5}$$

и порядок по $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \sqrt{r}$ *выше двух.*

Теорема 2 ([Брюно, 2019])**.** *Каноническое преобразование*

$$x_j = u_j \exp(-\mathrm{i}\alpha_j\varphi), \quad y_j = v_j \exp(\mathrm{i}\alpha_j\varphi), \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.6}$$

приводит нормальную форму гамильтониана (2.4) *к постоянному степенному ряду*

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},r) = r + \sum g_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} r^l, \tag{2.7}$$

соответствующему второй сумме в (2.4)*.*

Заметим, что возвращение от переменных $\mathbf{u},\mathbf{v}$ к исходным переменным даётся формальными степенными рядами по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\rho$ с квазипериодическими по ψ коэффициентами.

Следствие 1. *Если выполнено условие* $\mathbf{A}_k$*, то существует замена вида* (2.3)*, которая вместе с заменой* (2.6)*, приводит исходный гамильтониан* γ *к виду*

$$h_k = r + f_k(\boldsymbol{\rho},r) + \tilde{f}^{(k+1)}(\mathbf{u},\mathbf{v},r), \tag{2.8}$$

где $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1,\ldots,\rho_n)$*,* $\rho_j = u_j v_j = x_j y_j$*,* $j = 1,\ldots,n$*,* f_k *содержит члены порядка от* $3/2$ *до* $k/2$ *по* $\boldsymbol{\rho},r$*, а* $,\tilde{f}^{(k+1)}$ *— порядка большего* $k/2$ *по* $\boldsymbol{\rho},r$*.*

В частности, если выполнено условие $\mathbf{A}_4$*, то в гамильтониане* (2.8)

$$f_4 = \sum \beta_{jk}\rho_j\rho_k + r\left\langle \boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\rho}\right\rangle + \varepsilon r^2, \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_n) = \mathrm{const} \in \mathbb{C}^n$*,* $\varepsilon = \mathrm{const}$*.*

3. Вещественный случай

Если исходный гамильтониан γ вещественный при вещественных переменных $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\psi,\rho$, то в теореме 1 переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — комплексные, а переменные ψ,ρ и φ,r — вещественные. Если выполнено условие $\mathbf{A}_2$, то согласно гл. I книги Брюно [1990] комплексные переменные $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ связаны с вещественными $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ формулами

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\mathrm{i}X_j - Y_j\right), \quad y_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\mathrm{i}X_j + Y_j\right), \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3.1}$$

Комплексно-сопряжённые переменные $\overline{x}_j,\overline{y}_j$ связаны соотношениями

$$\overline{x}_j = -\mathrm{i}y_j, \quad \overline{y}_j = -\mathrm{i}x_j, \quad j = 1,\ldots,n, \quad \overline{\varphi} = \varphi, \quad \overline{r} = r. \tag{3.2}$$

При комплексном сопряжении гамильтониан (2.4) сохраняется:

$$\overline{g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\varphi,r) = g(\mathbf{x},\mathbf{y},\varphi,r).$$

Действительно, $\overline{\mathrm{i}\alpha_j x_j y_j} = \bar{\mathrm{i}}\alpha_j\overline{x}_j\overline{y}_j = \mathrm{i}\alpha_j x_j y_j$.

Пусть

$$\varkappa = g_{\mathbf{pq}lm}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}r^l\exp(\mathrm{i}m\varphi) + g_{\mathbf{qp}l(-m)}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}\mathbf{y}^{\mathbf{p}}r^l\exp(-\mathrm{i}m\varphi),$$

тогда согласно (3.2)

$$\begin{aligned}\overline{\varkappa} = \overline{g}_{\mathbf{pq}lm}\overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}}\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{q}}r^l\exp\left(\overline{\mathrm{i}\alpha_j x_j y_j}\right) + \overline{g}_{\mathbf{qp}l(-m)}\overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{q}}\overline{\mathbf{y}}^{\mathbf{p}}r^l\exp\left(\overline{-\mathrm{i}m\varphi}\right) =\\ = \overline{g}_{\mathbf{pq}lm}\mathbf{y}^{\mathbf{p}}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}(-\mathrm{i})^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}r^l\exp(-\mathrm{i}m\varphi) + \overline{g}_{\mathbf{qp}l(-m)}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}(-\mathrm{i})^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}r^l\exp(\mathrm{i}m\varphi),\end{aligned}$$

где $|\mathbf{p}+\mathbf{q}| = p_1 + \cdots + p_n + q_1 + \cdots + q_n$. Если

$$\overline{g}_{\mathbf{pq}lm}(-\mathrm{i})^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} = g_{\mathbf{qp}l(-m)}, \tag{3.3}$$

то для сопряжений получаем

$$g_{\mathbf{pq}lm}(\mathrm{i})^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} = \overline{g}_{\mathbf{qp}l(-m)},$$

т. е.

$$\overline{g}_{\mathbf{qp}l(-m)}(-\mathrm{i})^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} = g_{\mathbf{pq}lm},$$

следовательно, $\varkappa = \overline{\varkappa}$ и соотношения вещественности гамильтониана суть равенства (3.3) для коэффициентов.

Заметим, что согласно (3.2)

$$\overline{\mathrm{i}\rho_j} = -\mathrm{i}\overline{x}_j\overline{y}_j = (-\mathrm{i})^3 x_j y_j = \mathrm{i}x_j y_j = \mathrm{i}\rho_j.$$

Поэтому в (2.9) все β_{jk} и ε — вещественные, а δ_j — чисто мнимые.

Теорема 3 ([Биркгоф, 1999]). *Если выполнено условие $\mathbf{A}_k$, то вещественный гамильтониан $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\psi,\rho)$ с вещественными переменными $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\psi,\rho$ посредством обратимой вещественной канонической замены координат*

$$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\psi,\rho \longleftrightarrow \mathbf{X},\mathbf{Y},\varphi,r$$

приводится к виду

$$g(\mathbf{X},\mathbf{Y},\varphi,r) = r - \frac{1}{2}\sum \alpha_j P_j + F_k(\mathbf{P},r) + \widetilde{F}^{(k+1)}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\varphi,r), \tag{3.4}$$

где

$$P_j = X_j^2 + Y_j^2, \quad j = 1,\ldots,n, \quad \mathbf{P} = (P_1,\ldots,P_n),$$

F_k содержит члены по $\mathbf{P},r$ порядков от $3/2$ до $k/2$, а $\widetilde{F}^{(k+1)}$ — порядков, больших $k/2$ по $\mathbf{P},r$.

Согласно (3.1)

$$\rho_j = x_j y_j = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X_j^2 + Y_j^2\right) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}P_j, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{3.5}$$

В частности, если выполнено условие $\mathbf{A}_4$, то

$$F_4(\mathbf{P},r) = \sum B_{jk}P_jP_k + r\left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{P}\right\rangle + \varepsilon r^2, \tag{3.6}$$

где B_{jk} и $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ — вещественные и, согласно (3.5) и (2.9),

$$\beta_{jk} = -4B_{jk}, \quad \boldsymbol{\delta} = 2\mathrm{i}\boldsymbol{\Delta}.$$

Следовательно, β_{jk} — вещественные, а δ_j — чисто мнимые.

Все целочисленные векторы $\mathbf{p}$, удовлетворяющие сравнению

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p} \rangle \equiv 0 \pmod 1,$$

образуют в $\mathbb{R}^n$ решётку L. Пусть N — её линейная оболочка, $\overline{Q} = \{\mathbf{p} \geqslant 0\}$ — неотрицательный ортант в $\mathbb{R}^n$ и $K = N \cap \overline{Q}$. Множество K связно.

Теорема 4. *Если при $\rho = 0$ исходная вещественная система с гамильтонианом $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi, \rho)$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}_4$ и в записи* (2.8)*,* (2.9)

$$\sum_{j,k=1}^{n} \beta_{jk} p_j p_k \neq 0 \text{ для всех } \mathbf{p} \in K, \quad \mathbf{p} \neq 0, \tag{3.7}$$

то периодическое решение (1.1) *орбитально формально устойчиво.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы в статье Брюно [1967].

Приведённая нормальная форма с гамильтонианом (2.7), (2.5) имеет три типа вещественных формальных интегралов:

1) $\langle \mathbf{p}, \mathrm{i}\boldsymbol{\rho} \rangle$, где вектор $\mathbf{p}$ ортогонален линейному подпространству N в $\mathbb{R}^n$;
2) $\sum g_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} r^l \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{h}_4$ из (2.7);
3) r.

В (2.8), (2.9) положим

$$\rho_j = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \omega_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

тогда

$$f_4 = -\frac{1}{4} \sum \beta_{jk} \omega_j \omega_k - r \langle \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \varepsilon r^2,$$

где все коэффициенты вещественны и $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \geqslant 0$. По условию (3.7) при $\boldsymbol{\omega} \in K$ сумма $\sum \beta_{jk} \omega_j \omega_k$ сохраняет знак и не обращается в ноль. Пусть для $\boldsymbol{\omega} \in K$

$$\mu_* = \min \frac{\sum \beta_{jk} \omega_j \omega_k}{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle},$$

$$\mu^* = \max \left| \frac{\langle \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\omega} \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}} \right|.$$

Поскольку r —интеграл, то в интеграле (2.8), (2.9) величину εr^2 можно заменить на Ar^2 с любой константой A и всё равно получится интеграл.

Рассмотрим трёхчлен

$$-\frac{1}{4} \mu_* \lambda^2 - \mu^* \lambda r + Ar^2. \tag{3.8}$$

Его дискриминант $\mathcal{D} = \mu^{*2} + \mu_* A$. Если

$$\mu_* A < 0 \text{ и } |\mu_* A| > \mu^{*2}, \tag{3.9}$$

то трёхчлен (3.8) не имеет вещественных корней, кроме $\lambda = r = 0$.

Пусть $L_1, \ldots, L_m$ — базис ортогонального дополнения к линейному подпространству N в $\mathbb{R}^n$. Сумма

$$G = \sum_{j=1}^{m} \langle L_j, \boldsymbol{\omega} \rangle^4 + \left(\tilde{h}_4 - \varepsilon r^2 + A r^2\right)^2 = G^{(8)} + \cdots$$

является формальным интегралом как полином от формальных интегралов. Покажем, что при числе A со свойством (3.9) следует положительная определённость формы

$$G^{(8)} = \sum_{j=1}^{m} \langle L_j, \boldsymbol{\omega} \rangle^4 + \left(\tilde{h}_4 - \varepsilon r^2 + A r^2\right)^2.$$

Здесь в правой части равенства все слагаемые больше либо равны нулю, ибо $\omega_j \geqslant 0$ для действительных X_j, Y_j и

$$\sum_{j=1}^{m} \langle L_j, \boldsymbol{\omega} \rangle^4 = 0$$

только для $\boldsymbol{\omega} \in K$, но для таких $\boldsymbol{\omega}$ при $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ или $r \neq 0$ по доказанному

$$\left(\tilde{h}_4 - \varepsilon r^2 + A r^2\right)^2 > 0.$$

Итак, G — формальный положительно определённый интеграл исходной системы, если в нём $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varphi, r$ выразить через старые координаты $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi, \rho$. Согласно определению 1 в исходной системе решение (1.1) формально орбитально устойчиво. Доказательство окончено.

4. Изоэнергетическая редукция

Для системы с гамильтонианом (3.4), (3.6) и $k = 4$ сделаем изоэнергетическую редукцию на уровень $g = 0$, т. е. запишем гамильтониан на этом уровне. Согласно [Уиттекер, 1999] для этого уравнение $g = 0$, где g дано формулами (3.4), (3.6) и $k = 4$, надо разрешить относительно r:

$$r = \tilde{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varphi)$$

и в качестве независимой переменной взять φ. Тогда функция $\tilde{g}$ и будет гамильтонианом на уровне $g = 0$. Согласно (3.4), (3.6) для малых $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, r$ получим

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}\rangle - \sum B_{jk} P_j P_k - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}\rangle \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{P}\rangle - \frac{1}{4}\varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}\rangle^2 + \tilde{g}^{(5)} + \cdots$$

Обозначим

$$\sum C_{jk} P_j P_k = \sum B_{jk} P_j P_k + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}\rangle \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{P}\rangle + \frac{1}{4}\varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}\rangle^2 .$$

Согласно теореме из [Брюно, 1967] решение $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = 0$ формально устойчиво, если система уравнений

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}\rangle \equiv 0 \pmod 1, \quad \sum C_{jk} p_j p_k = 0 \tag{4.1}$$

не имеет решения $\mathbf{p} \geqslant 0$, $\mathbf{p} \neq 0$. Но это условие отличается от условия (3.7) теоремы 4, которое можно переписать так:

$$\sum B_{jk} p_j p_k \neq 0 \text{ для всех } \mathbf{p} \in K, \quad \mathbf{p} \neq 0, \tag{4.2}$$

ибо матрицы (B_{jk}) и (C_{jk}) различны. Поэтому, вообще говоря, из устойчивости на уровне $g = 0$ не следует орбитальная устойчивость во всём пространстве. Ниже рассмотрим эту ситуацию для $n = 1$ и $n = 2$.

5. Примеры

5.1. Случай $n = 1$. Тогда

$$\mathbf{P} = P_1, \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (B_{jk}) = B_{11} = -\frac{1}{4}\beta_{11}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \Delta_1,$$
$$(C_{jk}) = C_{11} = B_{11} + \frac{1}{2}\alpha_1 \Delta_1 + \frac{1}{4}\varepsilon \alpha_1^2.$$

Условие $\mathbf{A}_4$ означает, что

$$\alpha_1 \neq 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}. \tag{5.1}$$

Условие (3.7) или (4.2) теоремы 4 означает, что

$$B_{11} \neq 0, \tag{5.2}$$

а условие (4.1) означает, что

$$C_{11} = B_{11} + \frac{1}{2}\alpha_1 \Delta_1 + \frac{1}{4}\varepsilon \alpha_1^2 \neq 0. \tag{5.3}$$

В статье Маркеева [2002] без доказательства утверждается, что условия (5.1), (5.3) достаточны для орбитальной устойчивости. Покажем, что это не так.

Пример 1. Рассмотрим гамильтониан

$$g = r + r^2 - \frac{1}{12}\left(X^2+Y^2\right)+f(X,Y,t),$$

где

$$f(X,Y,t) = -\frac{1}{384}\left[\left(-X^6+15X^4Y^2-15X^2Y^4+Y^6\right)\cos t + \right. \\ \left. + \left(6X^5Y-20X^3Y^3+6XY^5\right)\sin t\right]. \tag{5.4}$$

Покажем, что при $r=0$ соответствующая система имеет решение

$$X = \frac{2}{\sqrt[4]{-t}}\cos\frac{t}{6}, \quad Y = \frac{2}{\sqrt[4]{-t}}\sin\frac{t}{6}. \tag{5.5}$$

Здесь $\alpha = 1/6$ и условие (5.1) выполнено, $B_{11}=0$, $\Delta_1 = 0$, $\varepsilon = 1$, $C_{11} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{144} \neq 0$ и условие (5.2) не выполнено, а условие (5.3) выполнено. При $t\to-\infty$ решение (5.5) стремится к точке $X=Y=0$, т. е. она неутойчива.

Согласно разделу 1.Г гл. I книги [Брюно, 1990] перейдём к комплексным координатам x,y по формулам

$$X = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}(x+y), \quad Y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\mathrm{i}}}(-x+y). \tag{5.6}$$

Получим гамильтониан

$$g = \frac{\mathrm{i}}{6}xy + \frac{1}{96}x^6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \frac{1}{96}y^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}. \tag{5.7}$$

После замены

$$x = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/6}, \quad y = v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/6} \tag{5.8}$$

получаем

$$g = \frac{1}{96}\left(u^6 - v^6\right). \tag{5.9}$$

Соответствующая система есть

$$\dot u = -\frac{1}{16}v^5, \quad \dot v = -\frac{1}{16}u^5.$$

При
$$u = v \tag{5.10}$$
эти уравнения совпадают и система сводится к одному уравнению
$$\dot{u} = -\frac{1}{16}u^5,$$
которое имеет частное решение
$$u(t) = \frac{\sqrt{2\mathrm{i}}}{\sqrt[4]{-t}}.$$
Согласно (5.6), (5.8), (5.10) ему соответствует решение
$$X = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\frac{\sqrt{2\mathrm{i}}}{\sqrt[4]{-t}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/6} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/6}\right), \quad Y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\frac{\sqrt{2\mathrm{i}}}{\sqrt[4]{-t}}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/6} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/6}\right),$$
т. е. решение (5.5). Здесь (5.7) — это комплексная нормальная форма, а (5.9) — это приведённая нормальная форма.

5.2. Случай $n = 2$. Тогда
$$\mathbf{P} = (P_1,P_2), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2), \quad \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1), \quad (B_{jk}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1,\Delta_2), \quad (C_{jk}) = (B_{jk}) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_1\Delta_1 & \alpha_1\Delta_2 \\ \alpha_2\Delta_1 & \alpha_2\Delta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\varepsilon\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}.$$

В статье Маркеева [2006] без доказательства утверждается, что при условии $\mathbf{A}_4$ если форма
$$\chi = c_{11}p_1^2 + (c_{12} + c_{21})p_1p_2 + c_{22}p_2^2$$
знакоопределена при $p_1,p_2 \geqslant 0$, то имеется формальная устойчивость. Покажем, что это не так.

Пример 2. Рассмотрим гамильтониан
$$g = r + r^2 - \frac{1}{12}\left(X_1^2 + Y_1^2\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(X_2^2 + Y_2^2\right) + f(X_1,Y_1,t), \tag{5.11}$$
где $f(X,Y,t)$ определено в (5.4). Здесь
$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (B_{jk}) = 0, \quad \boldsymbol{\Delta} = 0, \quad \varepsilon = 1, \quad \chi = (\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2)^2.$$

Имеем $\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}\rangle = \dfrac{1}{6}p_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}p_2 \not\equiv 0 \pmod 1$, если целое $p_2 \neq 0$. Поэтому условие $\mathbf{A}_4$ совпадает с условием (5.1) и оно здесь выполнено. Целочисленные векторы $\mathbf{p} = (p_1,p_2)$, удовлетворяющие сравнению

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{P}\rangle = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}p_2 \equiv 0 \pmod 1,$$

суть $\mathbf{p} = (6q,0)$, $q \in \mathbb{Z}$. Их линейная оболочка — это прямая $p_2 = 0$. Её пересечение с квадрантом $\{p_1,p_2 \geqslant 0\}$ — это полупрямая $K = \{\mathbf{p} : p_1 \geqslant 0, p_2 = 0\}$. Поэтому для $\mathbf{p} \in K$ сумма

$$\sum B_{jk} p_j p_k = B_{11} p_1^2,$$

но в нашем случае $B_{11} = 0$, поэтому условие (3.7) здесь не выполнено. Однако здесь

$$\sum C_{jk} p_j p_k = \frac{1}{4}\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}\rangle^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}p_2\right)^2.$$

Эта форма при $\mathbf{p} \geqslant 0$ обращается в ноль только при $p_1 = p_2 = 0$, следовательно, условие Маркеева выполнено.

При $r = X_2 = Y_2 = 0$ гамильтониан (5.11) превращается в гамильтониан

$$g = -\frac{1}{12}\left(X_1^2 + Y_1^2\right) + f(X_1,Y_1,t).$$

Согласно примеру 1 соответствующая система имеет исходящее из нуля $X_1 = Y_1 = 0$ решение (5.5). Следовательно, точка $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = 0$ неустойчива.

Отметим, что в доказательствах устойчивости неподвижной точки в системе Гамильтона делали ошибки Ю. Мозер [1968] и В.И. Арнольд [1963]. В конце статьи Брюно [1972] приведена критика первого доказательства Moser [1968, Теорема 7], которую Мозер учёл и дал второе правильное доказательство в [Зигель, Мозер, 2001]. Критика единственного доказательства Арнольд [1963] дана Брюно [1986]. Но он её не учёл и своё доказательство не исправлял. Впрочем, он исправил формулировку в [Арнольд, 1968].

Замечание 1. Некоторые механики нигде не пишут определение полной нормальной формы в виде теоремы 1, ибо это комплексный объект, а они предпочитают работать с вещественными переменными. Поэтому они ограничиваются вещественными преобразованиями Биркгофа (см. теорему 3) и нормальной формой называют обрезанную мою вещественную нормальную форму [Арнольд, Козлов, Нейштадт, 2009, гл. 8, пп. 3.1, 4.2].

Замечание 2. В случае $n = 1$ из формальной устойчивости следует устойчивость по Ляпунову.

Список литературы

Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91—192.

Арнольд В. И. Письмо в редакцию // УМН. 1968. Т. 23, № 6. С. 216.

Арнольд В. И., *Козлов В. В.*, *Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Изд. 3-е. М.: Эдиториал УРСС, 2009. 416 с.

Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости периодических движений в динамике твёрдого тела // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механикии: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 35—37. DOI: `10.22226/2410-3535-2019-congress-v1`. URL: `http://ruscongrmech2019.bashedu.ru/ru/trudy-sezda`.

Биркгоф Д. Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.

Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 325—330.

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.

Брюно А. Д. Об устойчивости в системе Гамильтона // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 385—392.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.

Брюно А. Д. Нормализация периодической системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 64. С. 18. DOI: `10.20948/prepr-2019-64`. URL: `http://keldysh.ru/papers/2018/prep2019_64.pdf`.

Зигель К., *Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

Маркеев А. П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задачах об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ. 2002. Т. 66, № 6. С. 929—938.

Маркеев А. П. Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // МТТ. 2006. № 4. С. 63—85.

Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 588 с.

Moser J. Lectures on Hamiltonian systems. Vol. 81. Memoires Amer. Math. Soc., 1968. 87 p.

Оглавление