ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 109 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Москаленко А.В., Тетуев Р.К.,
Махортых С.А.

О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Москаленко А.В., Тетуев Р.К., Махортых С.А. О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 109. 44 с. doi:10.20948/prepr-2019-109
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-109

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. В. Москаленко, Р. К. Тетуев, С. А. Махортых

О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания

Москва — 2019

Москаленко А. В., Тетуев Р. К., Махортых С. А.

О состоянии исследований бифуркационных феноменов памяти и запаздывания

Бифуркационные феномены памяти и запаздывания тесно связаны с представлениями разных исследователей о «динамической бифуркации», «медленном времени», «быстро-медленных системах». В обзоре представлен анализ литературных источников по этим темам. Предложено авторское объяснение этим феноменам, согласно которому их следует относить к проявлениям структурной неустойчивости системы. Обзор рассчитан в первую очередь на специалистов в области математической биологии.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная динамика, теория бифуркаций, условие нормального переключения, бифуркационная память, запаздывание потери устойчивости, динамическая бифуркация, быстро-медленные системы

Moskalenko Andrey Vitalievich,
Tetuev Ruslan Kurmanbievich,
Makhortykh Sergey Aleksandrovich

On studies of bifurcation phenomena such as memory and delay

For various researchers, the bifurcation phenomena of memory and delay are associated with the ideas about “dynamic bifurcation”, “slow time”, and “fast-slow systems”. The review presents an analysis of literary sources on these topics. According to the author's explanation of these phenomena proposed here, they should be classified as the manifestations of the structural instability of the system. The review is primarily intended for specialists in the field of mathematical biology.

Key words: mathematical modeling, nonlinear dynamics, theory of bifurcations, condition of normal switching, bifurcation memory, stability loss delay, dynamical bifurcation, fast-slow systems

Перечень сокращений:

БП — бифуркационная память
БМС — быстро-медленные системы
ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения
СВС — сингулярно возмущённые системы

Введение

В начале **1970**-х годов, были обнаружены и описаны [1] некие особенные бифуркационные явления, которые позднее стали описываться под названиями «*запаздывание потери устойчивости*», «*решения-утки*» и «*бифуркационная память*». Сообщения о явлениях «*задержки и памяти*» в модифицированной модели Бохоффера—ван дер Поля, часто обозначаемой в литературе как «*модель ФитцХью—Нагумо*», были опубликованы в **1989** г. [2, 3] Т. Эрню и соавт., причём указывалось на сходство с явлениями «*затягивания потери устойчивости*», которые исследовал А. И. Нейштадт [4, 5, 6] примерно в то же время. Такие феномены описаны [7] в **1999** г. для возмущённого уравнения ван дер Поля. Исследования сингулярно возмущённых систем привели в конце 1970-х к выявлению «*решений-уток*» и развитию теории, получившей название «нестандартный анализ» [8, 9, 10, 11]. Для модели ФитцХью—Нагумо «*решения-утки*» и в более поздних работах [14] продолжают изучаться. На прямую связь между «*решениями-утками*» и «*задержкой потери устойчивости*» указывали Е. Ф. Мищенко и соавт. [15, Глава 4]. А. И. Нейштадт [6, с. 229], Е. А. Щепакина и соавт. [16]. М. И. Фейгин придерживался мнения [17, 18] о сходстве между описанным им вариантом «*бифуркационной памяти*» и исследованной А. И. Нейштадтом «*задержкой потери устойчивости*».

Указанные выше работы были посвящены исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений. Насколько нам известно, наблюдения явлений «*бифуркационной памяти*» в распределённых системах уравнений с частными производными ограничены лишь двумя случаями: в модели миокарда для 2D-задачи [19, 20, 21, 22] и в модели системы свёртывания крови [23, 24, 25] для 1D-задачи. Но в общем можно сказать, что изучение таких бифуркационных феноменов в уравнениях с частными производными находится ещё только в самом начале.

Авторы этого обзора поставили перед собой цель провести некоторое обобщение результатов предыдущих работ разных авторов.

1. История вопроса

1.1. История развития терминологии

Результаты, указывающие на то обстоятельство, что в некоторых бифуркационных ситуациях поведение динамической системы может существенно отличаться от того, какое предсказывается в рамках «классической» теории бифуркаций, публикуются уже более 30 лет. Феномены, которые в таких бифуркационных ситуациях привлекают внимание исследователей, называют в литературе [17, 26] «*необычными*», «*неожиданными*» или даже «*странными*» в том смысле, что они, казалось бы, противоречат общей теории бифуркаций, — и, таким образом, они побуждают исследователей разрабатывать некую новую специальную теорию бифуркаций. Некоторые авторы высказывают даже мнение о том, что эти бифуркационные явления противоречат классической теории бифуркаций. Так, о существовании двух различных теорий: классической теории бифуркаций и теории динамических бифуркаций — прямо пишет А. И. Нейштадт [27]. Аналогичное утверждение можно найти и в [28] (перевод на русский язык здесь и далее выполнен нами): «*Обнаружено, что колебания исчезают со значительной задержкой относительно времени прекращения колебаний, которое предсказывается классической теорией бифуркаций*».

Для обозначения таких «необычных» бифуркационных феноменов было предложено название «*эффекты памяти при бифуркации*» (ориг.: memory effects at the bifurcation) [2, 3], или, более кратко, «*бифуркационная память*» (ориг.: bifurcation memory) [17, 26].

В некоторых бифуркационных ситуациях подобные «эффекты памяти», наблюдаемые при бифуркации Хопфа, получили название:

- «*дефектная бифуркация*» (ориг.: imperfect bifurcation) [29];
- «*задержанная бифуркация*» (ориг.: delayed bifurcation) [30];
- «*задержка переходного процесса бифуркации Хопфа*» (ориг.: delaying the transition of Hopf bifurcation) [31];
- «*запаздывание потери устойчивости для динамических бифуркаций*» [32];
- «*упорство*» (англ. [33]: persistence of stability loss for dynamical bifurcations);
- «*задержка потери устойчивости при динамических бифуркациях*» (ориг.: stability loss delay for dynamical bifurcations) [27].

Во многих таких случаях для наблюдения «необычных» бифуркационных феноменов требовалось постепенное, т. е. выполненное с мелким шагом, изменение бифуркационного параметра, — что было отражено в научной литературе в виде следующих фигур речи:

- «*медленный проход через бифуркацию*» (ориг.: slow passage through bifurcation) [2, 3];
- «*медленный проход через сингулярность*» (ориг.: slow passage through criticality) [34];
- «*элегантный проход через бифуркацию*» (ориг.: graceful passage through bifurcation) [35];
- «*медленно изменяемый бифуркационный параметр*» (ориг.: slowly varying the bifurcation parameter) [29, 31];
- «*зависящий от времени параметр*» (ориг.: a time-dependent parameter) [36];
- «*бифуркация, возникающая в результате параметрического дрейфа*» (ориг.: bifurcation that arises from the parametric drift) [37];
- «*квазистатическое изменение параметра*» (англ. [28]: the quasistatic parameter variation);
- «*динамическая бифуркация*» [5, 6] (англ. [28, 38, 39]: dynamic bifurcation).

Некоторые авторы используют ещё более художественно-образные варианты обозначения таких «*необычных*» или «*неожиданных*» бифуркационных явлений — термины «*утки*» (ориг.: canard) [10, 11, 15, 40, 41] и «*чёрные лебеди*» (ориг.: black swans) [12, 13]. Уже из приведённых примеров можно сделать вывод, что терминологию, используемую для описания бифуркационных феноменов памяти и запаздывания, в настоящий момент всё ещё невозможно признать вполне устоявшейся.

Следует обратить внимание, что авторы этого обзора предпочитают в данном случае английскому термину *delay* сопоставлять русский вариант «*запаздывание*», хотя в работах иных русскоязычных авторов можно встретить выбор иных синонимов в качестве русскоязычного эквивалента: «*затягивание*» или «*задержка*». Выбор переводческого варианта, предпочитаемый авторами этого обзора, обусловлен тем обстоятельством, что слово «запаздывание» несёт наиболее нейтральное значение — феноменологическое, в то время как два остальных варианта подразумевают участие неких причинных факторов. Так, затягивание требует волевого участия, а значит, и субъекта действия (поэтому это слово употребляется в таких расхожих фигурах речи, как «затягивание сроков выполнения плана» или «затягивание решения вопроса»); задержка же подразумевает участие неких объективных факторов, выступивших в качестве причины запаздывания («задержка поезда из-за снегопада»).

Поскольку многие авторы, как уже показано выше, склонны обсуждаемые здесь бифуркационные феномены ассоциировать с понятием «память», мы далее, следуя работам Фейгина [17, 18, 26], всё множество подобных феноменов будем обозначать термином «бифуркационная память» (далее: БП), притом без кавычек. Такой выбор обусловлен также и удобством, связанным с краткостью этого термина в сравнении с синонимичными ему конструкциями.

1.2. История развития исследований

1.2.1. Теоретические исследования

Здесь мы постараемся представить в историческом порядке последовательность теоретических работ, посвящённых исследованию бифуркационных явлений памяти и задержки; так называемые вычислительные эксперименты и эксперименты *in silico* нами тоже отнесены к теоретическим исследованиям.

Кому принадлежит первенство в исследованиях бифуркационных феноменов памяти и запаздывания, с достаточной достоверностью восстановить трудно, поскольку все они разными коллективами проводились практически одновременно, как это мы сейчас покажем.

Как на наиболее раннюю публикацию со сведениями о таких «необычных» бифуркационных феноменах принято ссылаться на исследование, выполненное М. А. Шишковой по поручению А. С. Понтрягина и опубликованное в **1973** году [1]. В более точной формулировке указано [42], что Шишковой тогда было впервые проведено исследование сингулярно возмущённых уравнений для случая, «*когда нарушаются условия устойчивости на некотором отрезке, но выполняется предельный переход*»; здесь имеются в виду сформулированные в теореме А. Н. Тихонова [43, 44] о предельном переходе «*достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной задачи и решение невозмущенной системы асимптотически близки*».

Вместе с тем, в нескольких источниках (напр., [1, 15]) в качестве наиболее ранних результатов в исследовании таких «необычных» бифуркационных феноменов указаны работы Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко **1955**–**1957** годов. Любопытно отметить то обстоятельство, что каждый из этих авторов в своей отдельной публикации **1957** г. [45, 46] признал ошибку, допущенную ими ранее в совместной публикации **1955** г. [47].

Среди наиболее ранних зарубежных публикаций удаётся обнаружить статьи **1978–1984** годов (напр., [10, 11, 40]), в которых описано необычное поведение динамических систем вблизи особых точек и наблюдаемые притом так называемые «*решения-утки*». В **1984** году исследования французов с описанием решений-уток и с изложением ими развитого «нестандартного анализа» стали известны в Советском Союзе благодаря статье А. К. Звонкина и М. А. Шубина [9], а также благодаря выполненному ими переводу на русский язык статьи П. Картье [8] **1981** года. Предложенный А. Робинсоном в работе [48] «нестандартный анализ» Картье назвал [8] «*одним из шедевров математики 20-го столетия*». Картье указывает также, что основная часть работ была проведена в Страсбургском институте высших математических исследований; по их результатам было в **1981** году защищено там шесть диссертаций. В **1995** г. Е. Ф. Мищенко, ученик Л. С. Понтрягина, опубликовал вместе с соавторами монографию, в которой специальным образом были рассмотрены «*решения-утки*» в их связи с колебаниями в сингулярно возмущённых системах [15, Глава 4].

Тем не менее, по-видимому, всё же следует признать, что ещё в **1961** г. ФитцХью [49] описал явления, которые весьма похожи на «*решения-утки*»: некоторая часть фазовых траекторий движется вдоль сепаратрисы. Возможно, те результаты **1961** г. и следует считать наиболее ранними наблюдениями «*бифуркационной памяти*». ФитцХью их обозначает словами «*квазипороговые феномены*», подчёркивая тем самым то обстоятельство, что полученные в его имитационных экспериментах результаты существенно отличались от тех, которые обычно наблюдались в экспериментальных работах по физиологии возбудимых тканей и которые были обозначены физиологами как «*пороговый эффект*» или ответ по принципу «*всё или ничего*». ФитцХью высказал предположение [49], что такие «*квазипороговые явления*» были обусловлены несовершенством использованных им вычислительных машин. Отметим, что ФитцХью одну часть своих имитационных экспериментов выполнил на аналоговых вычислительных машинах, а другую — на цифровых.

В **1985** г. [4] А. И. Нейштадт выполняет исследование «*при медленном прохождении*» пары собственных чисел через мнимую ось — по предложению

В. И. Арнольда и в продолжение работы, начатой в **1973** г. М. А. Шишковой. В **1987–1988** гг. им были опубликованы работы о «*затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях*» [5; 6], а в **1997** г. аналогичные явления обозначаются им как «*запаздывание потери устойчивости*». В **2009** г. А. И. Нейштадт обобщил [27] свои результаты в англоязычной статье, воспользовавшись фигурой речи «*задержка потери устойчивости*» (ориг.: stability loss delay); притом выделяет случай, обозначенный как «**тривиальный** пример запаздывания потери устойчивости» (ориг.: a trivial example of the stability loss delay), и случаи, обозначенные как **нетривиальные** (non-trivial).

Тогда же, в **1984–1989** годах, аналогичные исследования проводит Томас Эрню (Thomas Erneux) с коллегами [2, 3, 29, 31, 36], изначальный интерес которого к этой теме был стимулирован обнаруженным расхождением между экспериментальными результатами работы лазеров с насыщаемыми поглотителями и теоретическими результатами, которые были предсказаны с использованием математических моделей. В публикации **1989** г. [2] Эрню специальным образом выразил признание, что работа Нейштадта **1987** г. [33] ему известна. Обращает на себя внимание и весьма заметное сходство рисунков в статье Эрню **1989** г. [2] и в более поздних статьях Нейштадта **1997** г. [50] и **2009** г. [27], что может быть обусловлено не только схожестью исследуемых бифуркационных ситуаций, но и влиянием этих исследователей друг на друга.

Сообщение о существовании некой особой области в фазовом пространстве, в которой наблюдалась пониженная управляемость для судов, было опубликовано М. И. Фейгиным и соавт. в **1985** г. [51]. Позднее, в начале 21 века, Фейгин обозначил такую область необычных переходных процессов как «*фазовые пятна*» (ориг.: phase spots) [17], а сама «необычная» бифуркационная ситуация была им обозначена [17, 26] как «*бифуркационная память*».

Н. Берглунд (N. Berglund) в **2000** г. [39] делает некоторые обобщения на случай системы «*с двойным нулевым собственным значением, в которой эта задержка подавляется*».

Начиная с **2001 г.** [12, 13, 52, 53] российские исследователи описывают также разновидность решений, обозначенных как «чёрные лебеди» (англ.: black swans), под которыми понимают «*медленное инвариантное многообразие переменной устойчивости*».

К концу первого десятилетия 21 века появились публикации [19, 20, 25], в которых описаны феномены бифуркационной памяти для распределённых систем реакционно-диффузионного типа, т.е. в системах дифференциальных уравнений с частными производными. Особенностью таких систем является то обстоятельство, что для их исследования аналитические методы применимы лишь весьма ограниченно, и потому приходится проводить исследование таких систем при помощи численных методов.

Была высказана гипотеза [25], что феномены бифуркационной памяти следует рассматривать как прямое «*следствие теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений (на конечном промежутке* *времени) от входящих в них параметров*» — и потому следует ожидать, что подобные феномены будут обнаружены при самых различных бифуркациях, если подобрать соответствующие специальная условия. Как бы в подтверждение этого предположения совсем недавно вышли публикации, описывающие похожие феномены также и при седло-узловой бифуркации [28, 54], а в эксперименте продемонстрировано [55] исчезновение устойчивых колебаний через бифуркацию бесконечный период седлового узла (ориг.: saddle-node infinite period, SNIPER).

На основании приведённых выше литературных источников можно сделать заключение, что к настоящему времени сложилась традиция различать как минимум четыре таких «особых» бифуркационных ситуации:

1) специальный случай бифуркации Хопфа, для которого Нейштадтом аккуратно доказана теорема [2, 3, 5, 6, 27]; — обозначим его «нейштадтовским» запаздыванием потери устойчивости;
2) «уточное» запаздывание потери устойчивости [15, 16, 40], связанное с нарушением условия нормального переключения в сингулярно возмущённых системах (при этом колебательные «*релаксационные системы»* с нарушением условия нормального переключения рассматриваются несколько обособленно [15]; уместность и особенности современного употребления исторически сложившегося термина «*релаксационные системы»* недавно были обсуждены в [56]);
3) «фейгинская» бифуркационная память, связанная со слиянием двух предельных циклов, устойчивого и неустойчивого [17, 18, 26];
4) запаздывание при седло-узловой бифуркации (тангенциальной бифуркации предельных циклов) [28, 54, 55].

1.2.2. Экспериментальные исследования

С начала **1980-**х годов накоплен также ряд работ, подтверждающих, что БП представляет собой не только математический феномен, но и соответствует реальным процессам, наблюдаемым в натурных экспериментах:

- в оптике [30, 36, 29];
- в химических реакциях [31, 37, 55, 57];
- в управлении речными судами [51];
- в системе свёртывания крови [25].

Описанные в нелинейной оптике наблюдения связаны с исследованиями свойств оптоволоконных лазеров с насыщаемыми поглотителями (laser with saturable absorbers; LSA) [36], которые отличаются той особенностью, что нелинейные эффекты и дисперсия в них проявляются сильнее, чем в твердотельных лазерах.

Отметим также, что в химических средах результаты получены для знаменитой реакции Белоусова—Жаботинского [55].

2. Общие особенности режимов с бифуркационной памятью

Рассмотрим некоторые общие особенности, наличие которых в бифуркационных ситуациях, связанных с феноменами запаздывания и памяти, отмечают авторы практически каждой тематической публикации.

Во-первых, публикации по этой теме представляют, как правило, результаты исследования той или иной частной модели динамической системы; полной общей теории для таких «особых» бифуркационных ситуаций ещё не предложено. Некоторое исключение составляют уже указанные выше работы А. И. Нейштадта [5, 6, 27], в которых была доказана некая общность для аналитических динамических систем при динамической бифуркации Андронова—Хопфа. Основы общего рассмотрения таких «необычных» решений были заложены в работах А. Н. Тихонова [43, 44].

Во-вторых, для наблюдения этих бифуркационных феноменов часто требуется создание особых условий прохождения точки бифуркации — а именно, условий, обозначенных в научной литературе как «*динамическая бифуркация*» [5, 6, 15, 27].

В-третьих, «необычные» бифуркационные феномены памяти и задержки получены, как правило, в исследованиях так называемых «*сингулярно возмущённых*» систем [8, 15].

В-четвёртых, практически все результаты, описывающие бифуркационные феномены памяти и задержки, были получены при исследовании систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для распределённых систем результаты с такими бифуркационными феноменами получены лишь к концу 1-го десятилетия 21-го века в двух работах: 1) в модели Алиева—Панфилова [19, 20, 21, 22], одной из общепринятых моделей миокарда, и 2) в модели Зарницыной—Морозовой—Атауллаханова [23, 24, 25], одной из моделей системы свёртывания крови.

Под термином «бифукационная память» (БП) принято понимать необычный переходный процесс, иногда наблюдаемый в поведении системы, находящейся вблизи бифуркационной границы, а именно в области «бифуркационного пятна» (bifurcation spot) [58]. На то обстоятельство, что бифуркационную память следует рассматривать именно как разновидность переходного процесса, прямо указано в [26]. В других работах такой вывод следует из контекста, поскольку всегда описывается движение динамической системы на участке её перехода из некоторого нестационарного состояния — обусловленного или потерей устойчивости прежнего стационарного состояния, или же начальными условиями, — к стационарному состоянию того или иного типа или в бесконечность. Отмечено [17], что такие бифуркационные ситуации порождают «*бифуркационные дорожки*» (ориг.: bifurcation tracks) в пространстве состояний, которые изолируют области необычных переходных процессов

— «*фазовые пятна*» (ориг.: phase spots). Как описано в [25 с 102], понятие «*бифуркационная память*» используют «*для описания того, что в параметрическом пространстве при пересечении границы области существования определенного типа решений системы дифференциальных уравнений решения системы сохраняют сходство с уже не существующим типом решений до тех пор, пока значения изменяемого параметра несильно отличаются от граничного значения*» (точная цитата из русскоязычного варианта указанной публикации). Похожее описание содержится и в [26]: «*динамические особенности системы в ситуации опасной бифуркации не исчезают, а сохраняются в некотором интервале дальнейшего изменения параметра, ответственного за бифуркацию*». В работе [28] также было отмечено, что такая устойчивая «равновесная траектория» (ориг.: stable “equilibrium trajectory”) в фазовом пространстве продолжает существовать по крайней мере некоторое конечное время после прохождения через точку «статической» бифуркации. Можно подвести итог, что феномены БП — это некоторое **феноменологическое сходство** динамики системы после прохождения её управляющим параметром точки бифуркации с той динамикой системы, которая была характерна до прохождения точки бифуркации, причём такое сходство наблюдается лишь на некотором ограниченном участке переходного процесса по пути динамической системы к её новому стационарному режиму.

Прежде всего, следует обратить внимание, что все события, связанные с феноменами БП, происходят в фазовом пространстве системы. Напомним, что в классической теории колебаний [59 с. 38] этим термином принято обозначать «2*n*-*мерное пространство состояний* (*фаз*) *системы*» «*с n степенями свободы*», в котором состояние системы отображается «*заданием одной точки*»; такую точку называют «*изображающей*» или «*представляющей*». Количество степеней свободы системы *n* соответствует числу начальных условий в задаче Коши. «*Траектория такой* изображающей точки *называется* фазовой траекторией» [59 с. 38]. Поведение динамической системы принято описывать при помощи её фазового портрета, под которым разные авторы понимают: «*разбиение фазового пространства на траектории*» [60 с. 21], «*разбиение фазового пространства на области притяжения*» [26 с. 122], «*совокупность фазовых траекторий*» [БСЭ] и т.п. По-видимому, все эти несколько различающиеся определения восходят к классической статье **1938** г. «*К теории изменений качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории*» [61], а также к формулировке из классической книги теории колебаний [59 с. 40]: «*Фазовая плоскость, разбитая на траектории, даёт легко обозримый "портрет" динамической системы; она даёт возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях*». Обобщая, можно сказать, что фазовый портрет динамической системы — это **совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных условий**.

Если множество начальных условий, которые приводят к некоторому стационарному режиму, обозначить как область притяжения или бассейн притяжения этого стационарного режима, то фазовый портрет действительно возможно рассматривать так же, как и «*разбиение фазового пространства на области притяжения*».

Напомним также определения понятий «бифуркация» и «точка бифуркации». В представленном А. А. Андроновым варианте [62 с. 213], который, похоже, следует считать изначальным, «*под бифуркацией обычно понимают именно изменение топологической структуры*» «*динамической системы в рассматриваемой области при изменении самой системы (её правых частей)*». При этом чуть далее сказано [62 с. 217], что «*точками бифуркации являются негрубые системы и только они*». В одном из современных вариантов определение звучит так: «*Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется бифуркацией*» [60 с. 25, Определение 1.9].

Отметим здесь сразу, что изначальное классическое определение понятия «бифуркация» для динамических систем обладает несколькими очевидными неточностями. Во-первых, слово «*изменение*» несёт в себе два синонимичных значения: **изменение-процесс** и **изменение-результат**. Из этого исходного определения остаётся неясным, рассматривали ли его авторы бифуркацию как некий процесс или же как результат. Указанная двусмысленность впоследствии и привела к некоторой путанице в литературе между «классическим» и «динамическим» вариантами использования термина «бифуркация». Далее, неясным остаётся, изменение (бифуркация) чего именно подразумевается в исходном определении: системы уравнений или фазовых траекторий. Было бы несколько более понятным примерно следующее утверждение: **бифуркация динамической системы — это такие изменения в структуре динамической системы, которые приводят в соответствующим изменениям топологической структуры её фазового портрета**. Но даже в таком виде оно выглядит неудобным. Поэтому мы ниже предложим свой вариант определения.

Напомним также классическое определение [62 с. 219] для понятия «бифуркационное значение параметра». Прежде всего, полезно отметить, оно было определено лишь для «*систем, зависящих от параметра*», под которыми понимаются «*системы, получающиеся при различных значениях параметра*». Для случая систем с двумя переменными состояния они были описаны в следующем виде (для нескольких параметров см. [62 с. 216]):

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda). \qquad (\mathbf{A}_\lambda)$$

Для таких систем «значение λ_o *параметра* λ *является* бифуркационным*, если найдутся сколь угодно близкие к* λ_o *значения параметра* λ*, для которых топологическая структура динамической системы в рассматриваемой* *области отлична от топологической системы* ($\mathbf{A}_{\lambda_0}$)*; значение параметра, не являющееся бифуркационным, называют* обыкновенным» [62 с. 219]. Далее, для систем с несколькими параметрами принято говорить о бифуркационной точке [62 с. 219] как о сочетании значений координат параметрического пространства, координаты которой имеют бифуркационное значение. Таким образом, в соответствии с процитированными определениями, бифуркационная точка и точка бифуркации принадлежат к разным типам объектов.

Теория бифуркаций динамических систем разрабатывалась представителями научной школы А. А. Андронова; в её развитии активно участвовала Е. А. Леонтович [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68] в середине 20 века. Изначально её видели в качестве «*теории зависимости динамических систем от параметра*»; при этом было принято считать, что в её основе лежат «*классификация динамических систем по степеням негрубости и исследование свойств систем различных степеней негрубости*» и она «*позволяет разбираться в характере изменения топологической структуры разбиения на траектории при изменении параметра*» [66 с. 371]. Понятие «грубость системы» представляет собой одну из характеристик устойчивости системы и будет нами более детально рассмотрено ниже в соответствующем разделе.

Позже большой вклад в развитие теории бифуркация, в том виде, в котором она ныне существует, был внесён представителями научной школы В. И. Арнольда [69], в рамках которой, похоже, и сложилась фигура речи «*динамическая бифуркация*», тесно связанная с бифуркационными феноменами памяти и запаздывания. В частности, изучением «*динамических бифуркаций*» и с ними связанных феноменов «запаздывания», как уже было отмечено выше, по совету В. И. Арнольда занимался А. И. Нейштадт [5, 6, 27]. Отметим, что при «*динамической бифуркации*» не может быть какого-либо «*бифуркационного значения параметра*» в смысле классической теории, потому как по определению (см. выше) в случае «динамической бифуркации» рассматривается **одна** и та же система в её разных состояниях, а вовсе не **две** разные «*системы, получающиеся при различных значениях параметра*».

Для графического представления зависимости фазовых портретов системы от набора её параметров используются «*бифуркационные диаграммы*» и «*параметрические портреты*». Параметрический портрет динамической системы — это «*разбиение пространства параметров на области различного поведения, соответствующие топологически разным фазовым портретам*» [26]. В [60 с. 25] весьма похожее определение приведено для понятия «бифуркационная диаграмма»: «*Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения*». Сопоставляя эти определения, а также сложившуюся практику построения всевозможных «бифуркационных диаграмм», можно прийти к выводу, что «параметрические портреты» являются **разновидностью** «бифуркационных диаграмм». Пример параметрического портрета распределённой системы ФитцХью—Нагумо можно найти в классической работе Винфри [70]. Намного более сложный параметрический портрет представлен в [25] для математической модели системы свёртывания крови. В [29, 2] опубликованы примеры бифуркационных диаграмм рождения предельного цикла в точечной системе ФитцХью—Нагумо. В [71] можно увидеть пример более сложной бифуркационной диаграммы для модели автоколебательной биохимической реакции с депонируемым субстратом, с помощью которой продемонстрирована последовательность рождения седловых циклов и циклов удвоения периода.

Поскольку явления БП — это переходный процесс на пути к некоторому стационарному режиму, то представляется полезным напомнить и определение понятия «переходный процесс». Как нам удалось выяснить из доступной литературы (см. напр. [72, 73]), это понятие сформировалось в рамках **теории управления**; примечательно, что соответствующая статья отсутствует в математической энциклопедии [74]. В [72] переходный процесс определяют как «*процесс изменения во времени координат динамической системы, возникающий при переходе из одного установившегося режима работы в другой. В динамической системе переходный процесс возникает под влиянием возмущающих воздействий, изменяющих её состояние, структуру или параметры, а также вследствие ненулевых начальных условий*». Здесь можно обратить внимание, что, несмотря на некоторые неточности, в процитированном фрагменте указаны все основные причины возникновения переходного процесса, а именно: **1**) нестационарные **начальные условия**; **2**) изменение величины коэффициента системы дифференциальных уравнений, соответствующего какому-то **параметру** реальной системы; **3**) внесение изменений в **структуру** системы. В [26 с. 122] переходный процесс определяется аналогичным образом, а именно как участок фазовой траектории протяжённостью от некоторых начальных условий до стационарного режима.

Во всех известных нам вариантах БП наблюдается явление **запаздывания**, сущность которого состоит в том, что модуль фазовой скорости оказывается на некотором интервале фазовой траектории заметно меньше той величины, которую **ожидает** наблюдатель-исследователь. Этот признак мы и станем признавать существенным при решении вопроса, следует ли причислить наблюдаемый феномен к тому или иному варианту БП или нет. Напомним, что в контексте теории динамических систем фазовая скорость — это скорость изменения состояния системы в её пространстве фазовых состояний; она соответствует скорости движения изображающей точки в фазовом пространстве, и для вычисления величины модуля фазовой скорости используют «фазовый радиус-вектор» аналогично тому, как это делается в классической механике [59 с. 35–167].

Необходимо отметить, что в ряде работ оказывается невозможным понять, обозначает ли как «запаздывание» тот или иной исследователь **феномен**

уменьшения фазовой скорости в сравнении с ожидаемым исследователем её значением или же «запаздывание» связано исключительно с тем обстоятельством, что значение управляющего параметра, при котором изображающая точка удаляется от области расположения потерявшего устойчивость стационарного решения, отличается от того значения управляющего параметра, которое было обнаружено при исследовании «статической» бифуркации.

Разными исследователями были отмечены также следующие особенности переходного процесса, который ассоциируют с понятием «бифуркационная память». Во-первых, в [39] участки интегральных кривых, которые соответствуют переходным процессам БП, описывают как «*медленные фазовые траектории в неавтономной системе, которые возникают из "равновесных кривых", состоящих из состояний равновесия автономной системы с квазистатическим изменением управляющего параметра*». Здесь примечательно то, что исследователь чётко разделяет исходную базовую систему, особо отмечая то обстоятельство, что исходная система была автономной, — и систему изменённую, усложнённую, которая к тому же уже является неавтономной. Напомним, что автономными называют [59 с. 30] такие системы, «*которые описываются уравнениями, не содержащими явно времени*». Ниже мы более детально остановимся на том аспекте, что при помощи приёма, обозначаемого в литературе как введение в систему «*медленного времени*», фактически совершают подмену автономной системы на неавтономную, которую затем при помощи другого стандартного математического приёма (см. напр. [26]) снова сводят к автономной системе — но к иной, с увеличенным числом степеней свободы.

Аналогичное высказывание встречается и в [27], где обращают внимание, что «*параметр медленно изменяется во времени и проходит через своё значение, которое было бы бифуркационным в классической статической теории*» (ориг.: In the theory of dynamical bifurcations a parameter is changing slowly in time and passes through a value that **would be** bifurcational in the classical static theory). Здесь исследователи чётко указывают, что точка бифуркации существовала в **исходной** системе, а вовсе не в изменённой.

Иными словами, в качестве ещё одного существенного признака можно отметить то обстоятельство, что фактическое **уменьшение** фазовой скорости наблюдается в некоторой малой области фазового пространства, которая расположена в непосредственной близости от того множества точек фазового пространства, которое в случае «нединамической бифуркации» было окрестностью расположения особых точек при бифуркационном значении «управляющего» параметра. Такое поведение изображающей точки, наблюдаемое в ходе переходного процесса, у некоторых исследователей субъективно ассоциируется со способностями некой системы к **запоминанию** своих прежних состояний («*система "помнит" существенные особенности умерших стационарных состояний*» [26]), — этими интуитивными ассоциациями и был порождён соответствующий термин.

Поскольку нам представляется так, что наблюдаемые бифуркационные феномены «запаздывания» во всём их разнообразии обусловлены именно локальным снижением фазовой скорости на специфическом участке фазовой траектории, то, с целью обобщения накопленного опыта исследования, предлагаем следующее определение.

Определение 1. Динамика с явлениями бифуркационной памяти — это такой переходный процесс, при котором изменения во времени координат динамической системы происходят с приближением изображающей точки к той области фазового пространства, где прежде располагалось стационарное решение этой же самой динамической системы при близких значениях бифуркационного параметра или же где прежде располагалось стационарное решение сопряжённой с ней редуцированной (базовой, «статической», «вырожденной») системы. Особенность такой динамики выражается главным образом в двух феноменах, наблюдаемых на указанном участке переходного процесса: 1) в локальном уменьшении фазовой скорости и 2) в локальном сходстве фазовой траектории с той, которая характерна для уже не существующего стационарного решения.

Напомним, что те явления бифуркационной памяти, которые наблюдаются в сингулярно возмущённых уравнениях, можно рассматривать как характерные для случая, когда на некотором отрезке фазовой траектории нарушаются сформулированные в теореме А. Н. Тихонова о предельном переходе [43, 44] достаточные условия устойчивости близости решений возмущённой и невозмущённой систем, но предельный переход выполняется.

3. «Динамическая бифуркация»

3.1. Бифуркации в фазовом пространстве?

Первой особенностью является введение так называемого «*медленного времени*» и с ним связанное требование соблюдения условия, обозначенного как «динамическая бифуркация», т.е. тот самый «*элегантный проход через бифуркацию*», или «*квазистатическое изменение параметра управления*».

Берглунд [39] это обязательное условие «медленного прохождения через бифуркацию» описывает несколько более точно: «*динамические системы с медленно меняющимися параметрами, когда параметр перемещается через точку бифуркации статической системы*». Таким образом, снова обратим внимание на то обстоятельство, что в процитированном фрагменте чётко указано, что на самом деле речь идёт о двух существенно **разных системах**: о базовой «*статической системе*» и о сопряжённой с нею **иной, усложнённой,** системе, в которой на месте коэффициента, стоящего при некой переменной состояния базовой системы, появляется новая переменная состояния, — а значит, в общем случае, и две новые степени свободы. Дополнительным подтверждением верности этого утверждения является и выявленная зависимость кажущейся «задержки» от скорости изменения «управляющего параметра» (напр. в [2, 5]), — т.е. от первой производной той функции, которая описывает поведение этой новой переменной состояния усложнённой системы.

Иными словами, во всех рассматриваемых случаях так называемой «*динамической бифуркации*» события развиваются в фазовом пространстве исследуемой системы.

Однако ведь ни объект «точка бифуркации», ни объект «бифуркационная точка», строго говоря, не принадлежат фазовому пространству, согласно ранее процитированному классическому определению [62 с. 213].

Как уже было отмечено выше, путаница в терминологии возникла, по-видимому, из-за некритического обратного заимствования терминов из теории управления обратно в теорию динамических систем и в теорию бифуркаций. В фазовом пространстве существуют фазовые траектории; они могут иметь те или иные особенности: разрывы, изломы и т.д., — но никак не бифуркации в смысле **классической теории**.

В. И. Арнольд тоже указывал [69, с. 10] на столь существенные различия между понятиями «статической» бифуркации в рамках классической теории бифуркаций и «*динамической бифуркации*» в некотором ином понимании: «*В "быстро-медленные" системы теории релаксационных колебаний входит параметр медленности — характерная скорость изменения медленных переменных. При нулевом значении этого параметра быстро-медленная система превращается в семейство, изучаемое в теории бифуркаций; при ненулевом возникают специфические явления, иногда называемые "динамическими бифуркациями"*». К сожалению, более точного определения для каждого термина у В. И. Арнольда обнаружить не удалось.

3.2. Типы устойчивости системы

Напомним, что в теории управления под устойчивостью понимается способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние после окончания действия возмущающего или управляющего воздействия, нарушившего это равновесие. В более общем случае в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (и в таких её частных подразделах, как, например, теория колебаний) под устойчивостью понимается способность системы при внесении в неё **малых изменений** оставаться вблизи того же самого стационарного режима.

Обоснование общего подхода к исследованию устойчивости движения было изложено в **1892** г. А. М. Ляпуновым в работе «*Общая задача об устойчивости движения*». Во второй половине 20-го века были решены многие новые задачи об устойчивости систем.

Так, в классической теории колебаний [59 с. 18–19] сформировались представления, что «*процессы, отображаемые математической динамической моделью и соответствующие процессам, существующим в реальной наблюдаемой системе*» должны быть «*устойчивы как по отношению к малым* *изменениям координат и скоростей, так и по отношению к малым изменениям самой математической модели. Первое приводит к понятию устойчивости состояния равновесия модели и процессов в ней, второе — к понятию грубости динамических систем*». В одной из классических работ В. И. Арнольда и соавторов по теории бифуркаций сказано [69, с. 9], что «*уравнение, моделирующее физическую систему, оказывается структурно неустойчивым*», если «*поведение его решений может качественно измениться при сколь угодно малом изменении правой части*». На близость понятий «структурная устойчивость» и «грубость системы» указывает А. А. Давыдов [75]: «*Понятие грубости было введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 году* [76] *для векторных полей на диске. Затем оно было распространено на случай более общих динамических систем, определено для отображений и ряда других объектов (см., например,* [77]*), в том числе для динамических систем с управлением. Для динамических систем с управлением определение грубости аналогично классическому, только в качестве траекторий нужно рассматривать положительные и отрицательные орбиты точек. Анализ структурной устойчивости здесь в одномерном случае прост, как и в классической теории*».

Вместе с тем, Леон Гласс и Майкл Мэки указывают на необходимость различать **два типа** «*структурной устойчивости*» [78 с. 37]: «*Любое значение параметра, при котором число и/или устойчивость стационарных состояний и циклов изменяется, называется бифуркационной точкой, а о системе говорят, что она претерпевает бифуркацию.* (…) *Другой тип устойчивости связан с устойчивостью основной структуры уравнений...* (…) *Если при сколь угодно малом возмущении системы уравнений её основные качественные свойства сохраняются неизменными (т.е. топология системы не изменяется), такие уравнения называются структурно устойчивыми*». Из приведённой цитаты совершенно чётко видно, что указанные авторы выделяют два типа «*структурной устойчивости*», причём один тип связан с бифуркацией системы при изменении значений параметров (коэффициентов) системы, а другой — с внесением некоторых иных изменений в уравнения, описывающие систему.

В исходных работах А.А. Андронова [59 с. 31–33] грубыми системами называют такие системы дифференциальных уравнений, при «*малом изменении вида*» которых они не меняются в «*своих существенных чертах*». И далее там поясняется, что **малое** изменение системы раздельно рассматривается двух типов: 1) такое, «*чтобы при этих изменениях не увеличивалось число степеней свободы или, иначе, порядок системы*» и 2) «*повышение порядка дифференциального уравнения, если только коэффициенты при появляющихся вновь более высоких производных достаточно малы*». Иными словами, вполне чётко указано, что под грубостью системы допускается понимать и её устойчивость после привнесения в неё таких малых изменений, при которых у системы изменяется **число степеней свободы**. Более точное формальное определение понятия «грубая система» было дано в [76].

Анализ литературы привёл нас к выводу, что для аккуратности следует чётко различать два типа «*структурной устойчивости*» («*грубости*») системы, в связи с чем предлагаем следующие два определения.

Определение 2. Бифуркационная устойчивость динамической системы — это свойство системы сохранять топологическую эквивалентность её фазовых портретов при изменении значений коэффициентов системы уравнений без появления в системе новых степеней свободы.

Определение 3. Сингулярная устойчивость динамической системы — это свойство системы сохранять топологическую эквивалентность её фазовых портретов при появлении в системе новых степеней свободы.

Тогда «структурной неустойчивостью» («нарушением условия структурной устойчивости») системы следует называть отсутствие у неё свойства структурной устойчивости, что наблюдается в виде нарушения топологической эквивалентности её фазовых портретов при изменении параметра без появления в системе новых степеней свободы или при появлении в системе новых степеней свободы соответственно.

Таким образом, в настоящее время фактически принято различать **три типа устойчивости** (неустойчивости) динамических систем:

1) устойчивость стационарного режима относительно малых изменений начальных условий (устойчивость по Ляпунову; а также её варианты);

2) устойчивость стационарных режимов на фазовом портрете системы относительно малых изменений значений коэффициентов (представляется оправданным её обозначать как «бифуркационная устойчивость»);

3) устойчивость стационарных режимов на фазовом портрете системы относительно изменения количества степеней свободы системы (представляется оправданным её обозначать как «сингулярная устойчивость»).

Этим трём типам устойчивости системы соответствуют три типа «малых изменений» системы: 1) изменение начальных условий; 2) изменение значений параметров системы (которым в уравнениях соответствуют коэффициенты) при сохранности количества степеней свободы системы; 3) изменение уровня сложности системы путём изменения количества её степеней свободы. А в кибернетике такому делению соответствуют представления о трёх видах воздействия на систему: 1) силовое воздействие; 2) управленческое воздействие 3) воздействие на уровень сложности системы.

3.3. Бифуркационная граница и точка бифуркации

По поводу определения понятия «бифуркационная устойчивость» разногласия в литературных источниках нам обнаружить не удалось. Несмотря на наличие несколько различий в формальных определениях, бифуркационная устойчивость сводится к условию топологической эквивалентности фазовых пространств данной системы при двух различных наборах её параметров, а возникновение бифуркации сводится к нарушению такого условия [60, 79].

Формированию понятия топологической эквивалентности предшествовало понятие ε -тождественности. Разбиение на фазовые траектории для двух систем в некоторой области фазового пространства считают ε -тождественным, «*если существует такое топологическое отображение этих областей друг на друга, при котором траектории этих двух систем отображаются друг в друга и соответствующие друг другу по этому отображению точки находятся на расстоянии, меньшем* ε » [68 с. 2123]. Сходные рассуждения можно найти и в классической книге по теории колебаний; напр. см. [59 с. 51].

В одном из вариантов более современного изложения [60 с. 25, Определение 1.8] две динамические системы считаются топологически эквивалентными, «*если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового характера, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой. Фазовые портреты топологически эквивалентных систем также называются топологически эквивалентными*».

С целью максимально полного отражения тех новых результатов исследования особенностей бифуркационных ситуаций, обсуждению которых посвящён этот обзор, нами предлагается ряд следующих определений:

Определение 4. Бифуркация (обычная) динамической системы — это явление нарушения бифуркационной устойчивости динамической системы, обусловленное тем необходимым и достаточным условием, что система обладает как минимум одной точкой бифуркации.

Термин «точка бифуркации» здесь понимается в том же смысле, что и у А.А. Андронова в [62].

Определение 5. Бифуркационная точка динамической системы — это точка параметрического пространства этой системы, которая принадлежит либо её бифуркационной границе, либо её бифуркационному пятну.

Определение 6. Бифуркационная граница динамической системы — это поверхность параметрического пространства этой системы, такая, что найдётся малая окрестность этой поверхности, в которой любым двум точкам по разные стороны от этой поверхности (сколь угодно близким к этой поверхности) соответствуют два топологически неэквивалентных фазовых портрета этой системы (в её фазовом пространстве).

Определение 7. Бифуркационное пятно динамической системы — это множество точек (область) параметрического пространства этой системы, составленное как пересечение двух и более областей существования стационарных режимов разного типа.

Очевидно, что бифуркационную границу можно рассматривать как предельный случай бифуркационного пятна. Очевидно также, что приведённое нами здесь определение понятия «бифуркационная точка» является более широким в сравнении с тем классическим, которое было сформулировано в научной школе А. А. Андронова ([62 с. 219], см. выше). «Классическая» бифуркационная точка не может быть полностью окружённой другими такими же «классическими» бифуркационными точками — и, таким образом, классическое определение применимо лишь для случая бифуркационной границы, однако для случая бифуркационного пятна, примеры систем с которым были обнаружены и описаны уже лишь в 21 веке, оказывается неприменимым.

Определение 8. Динамическая бифуркация динамической системы — это явление нарушения сингулярной устойчивости динамической системы, обусловленное тем необходимым и достаточным условием, что система обладает как минимум одним фазовым пятном, и притом коэффициент, который в **присоединённой** системе является параметром, зависит (в полной системе) от времени медленно в сравнении с другими переменными состояния (полной) системы.

Термин «присоединённая система» здесь понимается в том же смысле, что и у А. Н. Тихонова в [43].

Определение 9. Фазовое пятно динамической системы — это множество точек (область) фазового пространства динамической системы, которой присуще такое свойство, что на участке фазовых траекторий, проходящих через точки этой области, наблюдается динамика с явлениями бифуркационной памяти.

Выражение «*медленное прохождение точки бифуркации*» и ему подобные следует **признать неверными**, потому что в фазовом пространстве никакой «точки бифуркации» нет и быть не может, по определению. Таким образом, «динамическая бифуркация» на самом деле обычной бифуркацией в классическом смысле не является, а представляет собой набор вполне обычных фазовых траекторий. Однако существует обусловленный психологическими факторами соблазн движение изображающей точки по фазовой траектории у усложнённой (полной) системы воспринимать как вариант бифуркации у базовой (редуцированной, вырожденной) системы. Именно такой соблазн и привёл к проявлению в литературе рассуждений о «необычности» и об отклонении от классической теории бифуркаций — т.е. к появлению литературы о бифуркационных феноменах памяти и запаздывания.

Отметим, что ситуация, описанная Фейгиным в **2001** г. в примере 1, весьма похожа на ситуацию, описанную Андроновым в **1967** г. [62, с. 226]. В случае, описанном Фейгиным, система при бифуркационном значении параметра имеет устойчивый фокус. В случае, описанном Андроновым, система при определённом значении бифуркационного параметра, наоборот, «*имеет один полуустойчивый, а следовательно сложный, предельный цикл*» и неустойчивый фокус. Однако на самих бифуракционных феноменах памяти и задержки это не сказывается, поскольку они обусловлены близостью фазовых скоростей к нулевому значению (в фазовом пространстве), когда система находится вблизи бифуркационной точки (в параметрическом пространстве).

4. Сингулярно возмущённые системы

4.1. Формирование представлений о сингулярном возмущении

Поскольку БП наблюдают при исследовании динамических систем, представляется полезным напомнить несколько основных определений. В классических работах **1937–1966** гг. [61, 67, 76] научной школы А.А. Андронова исследуются системы следующего общего вида:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

где в общем случае $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, определённые в некоторой области G евклидовой плоскости; x и y — декартовы координаты. В [67] рассмотрен частный случай, когда на $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ наложены дополнительные условия, — эти функции должны быть аналитическими. Напомним, что смысл понятия «аналитическая функция» состоит в следующем (см напр. [59 с. 105]): «*будем называть функцию* $f(x)$ *аналитической в данной области значений* x, *если она голоморфна в каждой точке этой области, т. е. если в окрестности каждой точки она может быть разложена в степенной ряд с радиусом сходимости, отличным от нуля*». Приведены также и следующие определения [67 с. 19]:

1) автономные системы — это «*системы дифференциальных уравнений, правые части которых не содержат явно независимое переменное*»;

2) «*автономные системы дифференциальных уравнений называются также* динамическими системами», т.е. эти понятия считаются синонимами;

3) «*динамическая система* (**1**) *называется системой аналитического класса или* аналитической системой, *если функции* P *и* Q *являются аналитическими функциями в области* G».

Очевидно, что аналитические системы являются подклассом автономных систем. Выражение «*аналитическая система*» (англ.: analytic systems) используется в литературе нечасто, однако такое использование без пояснения смысла термина встретить оказывается возможным (напр. [5]). Отметим, что система (**1**) записана в нормальной форме Коши [80, с. 260–262].

В те же годы в работах А.А. Андронова и для исследования вопросов структурной устойчивости (грубости) динамических систем рассматривается «*изменённая система*» следующего с «*малыми изменениями*» вида [63, 64]:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y), \tag{1b}$$

того же класса, что и система (**1**).

Позже внесение таких «*малых изменений*» в исходную систему получило название «*возмущение системы*» (см. ниже).

В **1948** г. [43] А. Н. Тихонов формулирует и решает в общем виде задачу о системах с малым параметром (представляется очевидным, что техника записи уравнений с малым параметром использована как один из вариантов системы (**1b**), т.е. как вариант описания возмущения системы):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i, z), \qquad \mu \frac{dz}{dt} = F(t, x, z), \tag{2}$$

где $i = 1, \ldots, n-1$, $\mu > 0$. Отметим, что система (**2**) не является автономной, в отличие от системы (**1**), т.е. постановку задачи Тихоновым можно считать более общей. Смысл термина «малый параметр» пояснён ниже более детально.

Там же в [43] был аккуратно сформулирован Тихоновым комплекс проблем, которые возникают при изучении таких возмущённых систем с малым параметром (**2**). При $\mu = 0$ система принимает «*вырожденный вид*»:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i, z), \qquad F(t, x, z) = 0. \tag{2b}$$

При этом оказывается необходимым найти ответы как минимум на следующие два вопроса: 1) будет ли решение полной системы (**2**) вместе со всеми соответствующими производными стремиться в пределе при $\mu \to 0$ к решению вырожденного уравнения и 2) будет ли такой предел устойчив при малых изменениях начальных условий?

Отметим, что в те же годы середины 20 века также и А. Б. Васильева в ряде статей рассматривает проблемы дифференцирования систем, содержащих малый параметр (см. список литературы в [44]).

В работах **1955–1958** гг. [45, 46, 47, 81] Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко рассматриваются системы с «*малым параметром при старшей производной*» следующего вида:

$$\varepsilon \dot{u} = f(u, v), \qquad \dot{v} = g(u, v). \tag{3}$$

Отметим, что здесь система (**3**) с малым параметром является автономной, в отличие от системы (**2**), и записана в формате 4; другие форматы её записи подробно обсуждались недавно в [56]. Позднее за такими системами закрепилось название «быстро-медленные системы» (БМС).

В ходе выполнения указанных работ **1948–1958** гг. был выявлен ряд проблем, поиск решения которых привёл к тому, что на смену «гипотезе скачка» [59] постепенно пришла асимптотическая теория [81], с помощью которой стало возможно получать с некоторой допустимой точностью приблизительные аналитические решения для случаев, в которых нарушаются условия теоремы Тихонова, сформулированные в [43, 44].

Принято считать [82 с.208], что работы А. Н. Тихонова [43, 44] стали основополагающими для всего научного направления, получившего впоследствии название теории сингулярных возмущений.

В **1973** г. [83] А. Б. Васильева публикует монографию с результатами асимптотических методов исследования БМС, и этой книге уже достаточно чётко проведено разделение на сингулярно возмущённые и регулярно возмущённые системы. Васильевой также было отмечено, что «*дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр при старшей производной*», стали привлекать внимание многих исследователей примерно с конца 1940-х годов [83 с. 5]; это обстоятельство мы выше попытались проиллюстрировать. Массовый интерес к таким уравнениям «*был вызван потребностями практики в связи с развитием таких областей, как теория автоматического регулирования, теория нелинейных колебаний, квантовая механика, газодинамика, кинетика и др.*».

В рамках «*развёрнутой постановки задачи о сингулярных возмущениях*» Васильевой рассматриваются системы самого общего вида [83 с. 6–9]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\mu), \quad x(t_0,\mu) = x^0, \qquad (\mathbf{4})$$

содержащие «малый параметр» $\mu > 0$ и начальное условие x^0. Отметим, что (**4**) от исследуемых А. А. Андроновым «*систем, зависящих от параметра*» (**А**$_\lambda$) отличается тем, что является неавтономной, а значит, и не является динамической системой в том смысле, какой в это понятие вкладывали в научной школе А. А. Андронова. Вместе с тем, утверждается (напр. [26]), что неавтономную систему всегда можно свести к **аналогичной** автономной системе при помощи стандартной математической техники. Считаем важным обратить внимание, что такая **аналогичная** автономная система не будет системой, эквивалентной исходной неавтономной системе, поскольку они будут различаться числом степеней свободы, а значит, и их фазовые пространства не будут в строгом смысле топологически эквивалентными.

При условии $\mu = 0$ система (**4**) в общем случае описывается уравнением более простым:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x},t,0), \quad \bar{x}(t_0,0) = \bar{x}^0. \qquad (\mathbf{4b})$$

Систему (**4**) по отношению к системе (**4b**) называют возмущённой, а за техникой внесения малых изменений в систему при помощи добавления новых членов уравнения с «малым параметром» при них закрепилось название возмущение системы (**4b**).

Васильевой отмечено, что за системами (**2b**) к **1970**-м годам уже закрепилось в литературе название «вырожденные системы» [83 с. 10].

Из класса систем (**4**) Васильева выделяет в отдельный подкласс системы вида (**2**) [83 с. 9 (1.4)] как особый случай «сингулярного возмущения». Сингулярно возмущённой системой (СВС) называют систему (**4**) по отношению к системе (**4b**) в том случае, если возмущение системы (**4b**) было произведено с увеличением порядка системы дифференциальных уравнений (а значит, и с увеличением числа степеней свободы соответствующей динамической системы). Более точно, «*если при наличии отличного от нуля возмущения тип системы меняется по сравнению с невозмущённой системой таким образом, что для определения решения возмущённой системы требуется большее число дополнительных условий, чем для определения решения невозмущённой системы, то возмущение будем называть сингулярным*» [83 с. 11].

Соответственно, регулярно возмущённые системы — это такие системы, при добавлении ненулевого возмущения в которые увеличения порядка системы дифференциальных уравнений (а значит и с увеличения числа степеней свободы соответствующей динамической системы) не происходит. Для регулярно возмущённых систем (**2**) уже в 1970-е годы считался классическим результат исследований, в которых было доказано, что решение системы (**2b**) служит асимптотической формулой для решения системы (**2**) с близкими начальными условиями, а именно, «*разность $x(t,\mu)-\bar{x}(t)$ является бесконечно малой при $\mu \to 0$ и стремится к нулю равномерно на некотором отрезке $t_0 \le t \le T$*» [83 с. 9].

Принципиальной особенностью СВС (**2**) является то, что в общем случае «*решение системы* (**2b**) *не может удовлетворить всем дополнительным условиям, которыми определяется решение исходной системы* (**2**)*, так как порядок* (**2b**) *ниже порядка исходной системы* (**2**). *Поэтому априори ясно, что в точках, где заданы дополнительные условия для* (**2**)*, решение* (**2b**) *может сильно отличаться от решения* (**2**)». Полагаем, что именно с этим случаем приходится сталкиваться, когда наблюдаются бифуркационные феномены запаздывания и памяти в сингулярно возмущённых системах.

Основным результатом [83 с. 17] было установление того факта, что «*поведение решения сингулярно возмущённой системы в пограничном слое описывается экспоненциально затухающими функциями для весьма широкого класса случаев*». Однако Васильева отметила [83 с. 21–22], что предложенный в её работе метод пограничных функций не подходит для описания явлений пограничного слоя в случае релаксационных колебаний, — в частности для случая, рассмотренного А. С. Понтрягиным в [45] и Е. Ф. Мищенко в [46].

Задача поиска асимптотических методов для релаксационных колебаний была решена Е. Ф. Мищенко с соавторами на двадцать лет позже.

Быстро-медленные системы с «*медленным временем*», как некая новая разновидность динамических систем, рассматриваются А. И. Нейштадтом в **1985–1987** гг. в [4, 5, 6], где они представлены в следующем виде:

$$\dot{u} = f(u,v,\varepsilon)\,,\ x \in R^n\,,$$
$$\dot{v} = \varepsilon\, g(u,v,\varepsilon)\,,\ y \in R^m\,, \qquad (5)$$

где правые части непрерывно дифференцируемы не менее двух раз по (x, y) и не менее одного раза по ε.

Отметим, что здесь система (**5**) с малым параметром записана в формате 0 [56]; при помощи стандартной техники её возможно преобразовать в формат 4 к виду (**3**), однако в общем случае БМС после такого преобразования останутся также и регулярно возмущённые члены. Отметим также, что в тех случаях, когда на систему (**5**) не накладывается требований, чтобы её параметр был «малым» и накладываются требования, чтобы она принадлежала к системам аналитического класса, она будет значительно совпадать с системой $\mathbf{A}_\lambda$ из классической работы А. А. Андронова ([62 с. 219], см. выше), отличаясь лишь дополнительным требованием к правой части второго уравнения.

Как видно из (**5**), в общем случае на БМС не накладываются такого специального требования, чтобы они непременно принадлежали к системам аналитического класса. Таким образом, хотя в литературе часто можно встретить использование термина «быстро-медленные системы» в качестве синонима к СВС (напр. [15, 40]), всё же следует отметить, что в общем случае далеко не каждая БМС является также и СВС. Отметим также, что, хотя термин «быстро-медленные системы» уместен для систем без колебаний, — таких, к примеру, какая рассмотрена в [29], — более часто это словосочетание используют для обозначения систем с колебаниями.

В **1995** г. [15] Е. Ф. Мищенко с соавторами публикуют монографию с результатами исследований БМС для случая колебаний, дополняя, таким образом, результаты, ранее полученные А. Б. Васильевой. В указанной монографии БМС с «*медленным временем*» не рассматриваются как некий отдельный случай; вместе с тем достаточно много внимания уделено системам с бифуркационными феноменами запаздывания, получившими ранее в литературе наименование «решения-утки». Обычное предположение теории сингулярных возмущений состоит в том, что основной функциональный определитель быстрой подсистемы отличен от нуля, однако во многих прикладных задачах это условие нарушается и возникают различные критические ситуации. Нарушение этого условия, в [15] обозначенное как «*нарушение условия нормального переключения*», может привести к возникновению траекторий-уток.

Одним из основных современных методов исследования СВС является метод интегральных многообразий Боголюбова—Митропольского. Под интегральным многообразием в таких случаях понимается гладкая инвариантная поверхность дифференциальной системы. Более детально эти вопросы рассмотрены, например, в [15, 52, 83, 84, 85].

4.2. Роль аналитичности системы и разрывные колебания

Выше уже было отмечено, что определение понятия «грубая система», приведённое в [76], справедливо тоже лишь для аналитических систем.

Как указывал Нейштадт ещё в **1985** г. в [4] относительно бифуркационных феноменов запаздывания потери устойчивости, «*при неаналитических правых частях описанное явление отсутствует*». Двумя годами позже в работе [5] приведён похожий вывод: «*В неаналитических системах подобное затягивание потери устойчивости, вообще говоря, отсутствует: срыв с неустойчивого равновесия (цикла) происходит вблизи бифуркационных значений медленных переменных*».

На это обстоятельство прямо указывал и А. Н. Тихонов [43] при исследовании системы (**2**), ссылаясь на известную теорему Пуанкаре «*об аналитической зависимости решения уравнения от параметра в случае, когда правая часть уравнения аналитически зависит от этого параметра*».

Пожалуй, наиболее чётко эту идею удалось выразить А. Б. Васильевой в **1967** г. [86]: «*Если правые части уравнений непрерывно зависят от параметров, то и решения уравнений, вообще говоря, являются непрерывными функциями параметров. Однако ряд задач приводит к системам уравнений, в которых зависимость от параметров является разрывной*».

Отсюда понятно, почему при некоторых разновидностях БП вводится дополнительное требование, что система должна быть аналитической: если в «*статичной системе*» зависимость контрольного параметра допускается произвольной, то при «*динамической бифуркации*» **неявным** образом исследователи накладывают жёсткое требование, чтобы зависимость контрольного параметра от времени имела вид аналитической функции, т.е. чтобы «*правая часть уравнения аналитически зависела от этого параметра*»; в простейшем и наиболее часто рассматриваемом случае такая зависимость описывается просто линейной функцией $\tau = \varepsilon t$ («*медленным временем*»).

В случаях БП в системах с так называемым «*медленным временем*» фазовые траектории оказываются достаточно гладкими (вследствие аналитичности рассматриваемых систем), а решения непрерывно аналитически зависят от параметра — и в этом смысле события, развивающиеся в ходе «*динамической бифуркации*» на участке фазовой траектории, проходящей вблизи точки бифуркации исходной «*статичной*» системы, весьма похожи на те, что Фейгиным были описаны [26] для простого случая «*статической*» бифуркации слияния двух предельных циклов.

Признаётся, что многие задачи теории колебаний приводят к системам дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными [5]. Очевидно, что БМС всегда можно считать колебательными в некотором смысле, поскольку в них **повторяется** смена быстрых и медленных движений (т. е. происходит колебание скорости процесса).

Вместе с тем, особый интерес в науке издавна представляли периодические негармонические колебания, которые ван дер Поль предложил называть релаксационными; более детально история вопроса была недавно рассмотрена в [56]. Как было в **1930** г. показано Хайкиным [87], в случае сингулярно возмущённых систем можно наблюдать два типа периодических решений: 1) релаксационные непрерывные колебания, которым «*соответствует определённый предельный цикл Пуанкаре*»; 2) релаксационные «*разрывные периодические решения, которым не соответствует какой-либо предельный цикл*». Иными словами, особенностью разрывных колебаний является то обстоятельство, что предельный цикл перестал существовать — однако вместо него возникает цикл разрывных колебаний, из-за чего колебания в системе продолжаются, но в математическом смысле из релаксационных непрерывных они превращаются в разрывные. См. также [59 гл. X]. Отметим, что в традиционно рассматриваемых в виде (**3**) СВС разрывные колебания возникают как предельный случай. Поэтому примечательно также, что в [87] была «*предложена схема, в которой переход от непрерывных колебаний к разрывным представляет собой не предельный, а промежуточный случай*». Схема эта была исследована теоретически и экспериментально.

Подводя итог написанному выше, можно утверждать следующее. В тех случаях, когда специальным образом накладывается требование непрерывной зависимости правых частей уравнений (**2**) или (**3**) от параметра, устраняется тем самым и бифуркация по данному параметру. В этом отношении интересно использование так называемого «медленного времени».

4.3. Учёт малых параметров и «медленное время»

Представляется полезным напомнить, что понятие «параметры системы» в научной школе А. А. Андронова (напр., [59 с. 19]) принято было относить к свойствам реальной системы, а в дифференциальных уравнениях параметрам соответствуют коэффициенты. С точки зрения физики, и коэффициент базовой системы, и зависящая от времени переменная состояния сопряжённой системы — это некий параметр реальной системы. Хотя, как можно увидеть уже даже в только что процитированной работе Л. С. Понтрягина [45], математики слово «параметр» традиционно использовали и в смысле «коэффициенты дифференциальных уравнений». И такая омонимия не могла не привести к путанице в научной литературе. После того как часть **теории колебаний** была позаимствована в качестве части **теории управления**, в последней также стал в ходу омоним «*параметр системы*», используемый как синоним слову «*коэффициенты*» из теории колебаний, — что повлекло формирование ещё большей путаницы в литературе второй половины прошлого века и начала нынешнего. Ведь хорошо известно [88, 89], что омонимия и амфиболия, представляющие собой разновидность ошибок формы рассуждения, являются частыми источниками логических ошибок.

В самом широком смысле, если отталкиваться от энциклопедического определения [74]: «*Параметр — величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой*», — то действительно оказывается недопустимым переменные состояния системы рассматривать как разновидность её параметров, поскольку они не позволяют различать элементы множества всевозможных состояний системы. В то время как настоящие параметры динамической системы вполне однозначно позволяют различать отдельные интегральные кривые фазового пространства состояний системы.

В случае «*динамической бифуркации*» на переменную-«параметр» в усложнённой системе наложено дополнительное условие: она должна изменяться достаточно медленно по сравнению с другими, быстрыми, переменными этой системы — т.е. выступает в качестве «малого параметра».

Что следует понимать под термином «малый параметр» разъяснено, например, в работе Л.С.Понтрягина **1957** г. [45]: «*Говоря, что параметр ε мал, мы имеем в виду приближённое изучение системы уравнений* (**1**), *с отбрасыванием величин той или иной степени малости относительно* ε». И в этой классической интерпретации весьма важным нам представляется именно семантическая связь термина «малый параметр» с приёмами асимптотического приближения решения до величин соответствующей малости. К сожалению, в литературе можно обнаружить много примеров, когда авторы проявляют склонность акцент делать на различии в скоростях «быстрой» и «медленной» части системы, хотя это различие в скоростях является второстепенным признаком, отражающим скорее точку зрения физиков и инженеров, — в отличие от существенного признака, указанного с математической точки зрения Л.С. Понтрягиным.

Вместе с тем, как было выше продемонстрировано, фигура речи «*малый параметр*» изначально пришла из теории возмущений, где она использовалась не только для случаев сингулярно возмущённых систем, но и для случаев регулярно возмущённых систем (см. напр. [83, 90]). Довольно часто такое использование можно встретить в работах второй половины 20 века, хотя в 21 веке закрепилась традиция предпочтительного использования этой фигуры речи именно для случаев сингулярного возмущения, как требующего использования методов асимптотического приближения.

А. А. Андронов указывал [59 с. 31], что повышение порядка уравнения следует рассматривать как «*результат учёта каких-либо новых степеней свободы системы, учёта каких-то "паразитных" параметров её*». Как очевидно из приведенной цитаты, «паразитными» признавались лишь те параметры системы, которые способны изменять число степеней свободы системы. Возможно, следует признать, что в том и состоит их принципиальное отличие от управляющих параметров? По сути, определение А. А. Андронова для «*паразитных параметров*» совпадает с традицией употребления понятия «малый параметр» в случаях сингулярного возмущения.

Важность учёта малых параметров подчёркивал Эрню в 1986 г. [29], поскольку: «*эти несовершенства, соответствующие загрязнённости, шуму и прочим неоднородностям, всегда присутствуют в эксперименте и, как* *известно, привносят возмущение в состояние бифуркации*», когда величина управляющего параметра остаётся постоянной. Процитированный текст Эрню выглядит весьма близким пересказом текста Андронова...

А. Н. Тихонов важность концепции объяснял в **1978** г. следующими образом [82 с.207]: «*Во многих проблемах естествознания мы встречаемся с математическими задачами с малым параметром, где прямое применение электронно-вычислительных средств неэффективно, а наличие малого параметра позволяет, как правило, свести задачу к более простой. Здесь фундаментальное значение имеют асимптотические методы*».

В некоторых публикациях можно встретить одновременное использование в обоих типов «малых параметров» в одной модели. Например, в работе [71] была предложена следующая биофизическая модель биохимической реакции:

$$\begin{gathered} \dot{x} = v_1 - v - \beta_d v_d, \quad \varepsilon\,\dot{y} = v_2 + v, \quad \dot{z} = \mu_d \beta_d v_d \quad x, y, z, \beta_d > 0 \\ v = x - y/(0{,}01 + y + y^5),\ v_d = x/(0{,}1 + x) - 2{,}5z/(1+z),\ v_1 = 0,\ v_2 = 0{,}5 - 0{,}5y, \end{gathered} \tag{6}$$

где ε и μ_d малы. Очевидно, что в системе уравнений (**6**) следует ε считать «паразитным» параметром, поскольку его наличие приводит к сингулярному возмущению, а μ_d выступает в качестве такого «малого параметра», который приводит к регулярному возмущению системы.

В качестве более классического примера можно привести модель Бохоффера—ван дер Поля, которая в канонической форме должна быть записана как [56 с. 12]

$$\varepsilon\ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u - bv - a = 0\,. \tag{7}$$

Если в уравнении (**7**) в качестве малых рассматривать все параметры, то при $\varepsilon \to 0$ система претерпевает сингулярное возмущение с возникновением разрывных колебаний, в то время как при одновременно $a \to 0$ и $b \to 0$ модель Бохоффера—ван дер Поля вырождается до модели ван дер Поля через регулярное возмущение, т. е. с утратой части решений, но без утраты степеней свободы динамической системой.

Часто можно встретить в опубликованных работах, что «*динамическую бифуркацию*» создают при помощи введения так называемого «медленного времени». Формально этому соответствует добавление к исходной «статической» системе ещё одного дифференциального уравнения следующего вида [1, 27]: $\dot{\tau} = \varepsilon$, — или, что то же самое, в виде явной функциональной зависимости [5, 29]: $\tau = \varepsilon t$ (где полагается, что ε мало́, т.е. $0 < \varepsilon << 1$).

При использовании такой техники формирования динамической системы последовательно выполняется следующий ряд действий: в системе (**5**) параметр ε переобозначают как τ и делают зависимым от времени: $\tau = \tau(t)$, превращая тем самым автономную систему в неавтономную, — а затем в качестве конкретного вида функциональной зависимости выбирают $\tau(t) = \varepsilon t$. Полученная на этом этапе модификации новая система уравнений уже динамической системой не является, если строго придерживаться процитированных нами выше определений А.А. Андронова. Затем на следующем шаге модификации из неавтономной системы при помощи стандартной техники снова получают систему автономную, — а значит и динамическую. В полученных таким способом новой динамической системе с «медленным временем» уже само $\tau = \tau(t)$ выступает в качестве «малого параметра», и именно оно соответствует тому «малому параметру» в уравнениях (**5**), который в (**5**) обозначен как ε. При помощи очередной стандартной замены переменных эту новую динамическую систему из формата 0 легко можно переписать в формате 4, т. е. как (**3**), — чего обычно не проделывают, чтобы сохранить интригу математического фокуса с «*медленным временем*».

Таким образом, коэффициент, который в системах с так называемым «*медленным временем*» стоит непосредственно перед временем, как раз и является разновидностью малого паразитного параметра. Соответственно, в тех случаях, когда для таких систем нарушено условие грубости, как раз можно ожидать исчезновение точек бифуркации в тех местах фазового пространства, где они располагались при строгом равенстве паразитного параметра нулю или при его немалых значениях и при тех же значениях остальных параметров системы. Либо же, наоборот, при таких условиях возможно возникновение новых бифуркаций. Либо возможно просто смещение положения точки бифуркации.

В качестве классического примера БМС «*с медленным временем*» напомним систему, рассмотренную М. А. Шишковой [1]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \dot{u}_1 &= \left[v + \lambda\left[(u_1 - v)^2 + {u_2}^2\right]\right](u_1 - v) - u_2, \\
\varepsilon \dot{u}_2 &= (u_1 - v) + \left[v + \lambda\left[(u_1 - v)^2 + {u_2}^2\right]\right]u_2, \\
\dot{v} &= 1,
\end{aligned}
\qquad (\mathbf{8})
$$

где λ — постоянное число.

Пример из [29], переписанный нами в формат 4, выглядит аналогично:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \dot{u} &= k u^p + u v + \delta, \\
\dot{v} &= 1 .
\end{aligned}
\qquad (\mathbf{9})
$$

Если (**8**), (**9**) и иные примеры БМС «*с медленным временем*» сопоставить с общим видом СВС (**3**) и БМС (**5**), можно легко заметить, что так называемые БМС «*с медленным временем*» — это такие, в которых

$$
g(u,v) \equiv 1 . \qquad (\mathbf{10})
$$

Очевидно, что появление или отсутствие явлений «запаздывания потери устойчивости» определяется свойствами $f(u,v)$ в (**3**) или (**5**).

Теорема Тихонова [43, 44] нацелена на нахождение ответа на вопрос: *в том случае, если малый параметр стремится к нулю, будет ли решение полной системы стремиться к решению вырожденной* ***дифференциально-алгебраической*** *системы*. Таким образом, в случае БМС с «медленным временем», который является специальным частным случаем БМС, приходится искать ответ на более специальный вопрос: *в том случае, если малый параметр стремится к нулю, будет ли решение полной системы стремиться к решению вырожденной* ***алгебраической*** *системы*:

$$\begin{aligned} 0 &= f(u,v), \\ v &= t + C_0. \end{aligned} \qquad (\mathbf{11})$$

Для достижения такого результата требуется выполнение достаточных условий теоремы Тихонова о предельном переходе. В тех же случаях, когда нарушаются сформулированные в теореме А. Н. Тихонова о предельном переходе [43, 44] достаточные условия устойчивости близости решений возмущённой и невозмущённой систем, но предельный переход выполняется, в БМС «*с медленным временем*» можно наблюдать явления «*запаздывания потери устойчивости*».

Иными словами, вывод, представленный в работах некоторых исследователей, о том, что ими наблюдались явления задержки потери бифуркационной устойчивости системы, наверное, следует признать ошибочным, потому что на самом деле изменялась **структура** (сложность) системы, причём с нарушением условия грубости, — т. е. нарушенной оказывалась сингулярная устойчивость системы.

В смысле обсуждаемого здесь вопроса весьма ценным можно считать замечание, сделанное в **1983** г. Дж. Гукенхеймером и Ф. Холмсом [91 с. 9] в их классической книге, которую её авторы рассматривали как «*попытку расширения результатов работы* Андронова *и др.* **1966** *года на системы с размерностью на единицу больше*». Далее авторы поясняют: «*кажущееся невинным добавление (малой) периодической силы к нелинейному осциллятору с единственной степенью свободы*, *порождающее систему третьего порядка*:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= -g(u_1, u_2) + f(v), \\ \dot{v} &= 1, \end{aligned} \qquad (\mathbf{12})$$

может привести к бесконечному несчётному множеству новых явлений, в дополнение к неподвижным точкам и предельным циклам, знакомым из теории нелинейных колебаний на плоскости» (для большей наглядности мы переименовали переменные). Сходство между (**5**) при условии (**10**) и (**12**) заметить нетрудно.

4.5. Системы с частными производными

Для многих задач математической биологии сингулярную систему с пространственными частными производными (т. е. в среде с диффузией, или система реакционно-диффузионного типа) можно в общем виде представить как параболическую краевую задачу в следующем виде [15 с. 115] так, чтобы малый параметр ε стоял перед производными «быстрой» части системы:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + D_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v) + D_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $u \in R$, $v \in R^m$, $D_1 > 0$, собственные значения матрицы D_2 лежат справа от мнимой оси, n — направление внешней нормали к достаточно гладкой границе $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset R^N$, $N = m+1$. Отметим, что такой вариант записи был обозначен как формат 4 [56] по историческим причинам, и в советской и затем российской научной школе именно он является более привычным.

Хотя общая техника аналитического исследования таких систем была предложена [15, 83], её использование на практике оказывается весьма трудоёмким. Поэтому основным методом исследования сингулярно возмущённых систем с частными производными следует признавать, наверное, всё ещё вычислительный эксперимент, поскольку «*анализ здесь достаточно сложен*» [15 с. 131]. Проблема вызвана тем обстоятельством, что математические модели «*настолько сложны, что единственный способ определения динамических свойств модели — это использование численного интегрирования*» [78, с. 74].

Вместе с тем, в рамках метода вычислительного эксперимента далеко не всегда удаётся найти ответы на важные теоретические и практические вопросы. В качестве иллюстрации этого утверждения можно рассматривать приведённые здесь примеры, когда вычислительный эксперимент позволил лишь обнаружить особенности поведения системы, однако поиск причин требует привлечения иных подходов к исследованию динамических систем. Да и верный выбор методов численного интегрирования требует понимания уровня сложности исследуемой системы, её особенностей.

Из-за указанных технических сложностей удаётся найти лишь небольшое число исследований систем класса (**13**) с описанием бифуркационных феноменов памяти и запаздывания. Как уже было отмечено выше, наблюдения явлений бифуркационной памяти в распределённых системах, похоже, ограничены лишь двумя исследованиями: в модели миокарда [19, 20, 21, 22] для 2D-задачи и в модели системы свёртывания крови [24, 25] для 1D-задачи. Отметим, что перечисленные здесь сингулярно возмущённые системы с частными производными не являются системами с «медленным временем» в выявленном выше смысле. Изучение СВС с частными производными и с «медленным временем» представляет собой отдельную интересную задачу.

Первая статья о бифуркационной памяти в математической модели Алиева—Панфилова вышла в **2007** г. [19], когда было обнаружено, что автоволновой вихрь способен в однородной изотропной среде спонтанно из режима меандра переходить в режим кругового вращения; явлению этому было дано название «*автоволновой серпантин*» (англ.: autowave lacet). Естественным образом возник первым делом вопрос: не всякий ли раз происходит такая же остановка дрейфа вихря при автоволновом меандре, если наблюдение проводить достаточно длительное время?

Модель Алиева—Панфилова в **1996** г. предложена в следующем виде [92]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - ku(u-a)(u-1) - uv\,,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon(u,v)(-u - ku(u-a-1)), \qquad \varepsilon(u,v) = \varepsilon_0 + \frac{\mu_1 v}{u+\mu_2}\,, \qquad (\mathbf{14})$$

где u — безразмерная функция, аналогичная трансмембранному потенциалу в биологической возбудимой ткани, и v — безразмерная функция, аналогичная медленному току восстановления. Как указывают авторы модели, она имеет ряд существенных отличий от модели ФитцХью—Нагумо, что позволяет с её помощью более точно описывать свойства сердечной ткани.

Напомним, вид модели ФитцХью—Нагумо, предложенный в [70], соответствует формату 1; и её легко можно переписать в виде (**13**), т.е. в формате 4, учитывая, что:

$$f(u,v) = u - u^3/3 - v$$
$$g(u,v) = u + a - bv\,. \qquad (\mathbf{15a})$$

Отметим, что с моделью Бохоффера—ван дер Поля, которую сам Р. ФитцХью представил в **1961** г. [49], (**15a**) совпадает с точностью до знаков:

$$f(u,v) = u - u^3/3 + v$$
$$g(u,v) = -u + a + bv\,. \qquad (\mathbf{15b})$$

В формат 4 модель Алиева—Панфилова записать оказывается затруднительно, поскольку (**14**) лишь внешне похожа на сингулярно возмущённую систему в формате 0, т. е. на (**3**); в этом легко можно убедиться после раскрытия скобок в (**14**).

При помощи методов численного анализа удалось доказать [19, 20], что ранее известный автоволновой меандр и вновь обнаруженный автоволновой серпантин — это два различных автоволновых режима, а именно: 1) при меандре в результате начального переходного процесса скорость дрейфа быстро возрастает от нуля и выходит на некоторое стационарное значение;

2) при серпантине после аналогичного начального переходного процесса наблюдается затем двухфазовое спонтанное снижение скорости дрейфа: медленное и едва заметное на 1-й, медленной, фазе торможения дрейфа, — и затем быстрое снижение до нуля на 2-й фазе торможения дрейфа, т. е., по сути, наблюдается три различных переходных процесса.

Вместе с тем, многие вопросы всё ещё остаются невыясненным. Отсутствует понимание, какие именно особенности бифуркационной ситуации вызывают автоволновой серпантин; и наши предварительные исследования позволили пока лишь выдвинуть гипотезу, что автоволновой серпантин, хотя он и наблюдается вблизи бифуркацией Хопфа [93], тем не менее, скорее всего, не соответствует случаю «нейштадтовской» задержки потери устойчивости. Отсутствуют сведения об автоволновом серпантине даже в наиболее современных исследованиях [94] реакции Белоусова—Жаботинского; этот режим обнаружен ещё не был даже в её математических моделях. Отсутствует также чёткое понимание роли бифуркационных феноменов памяти и запаздывания в сердечной деятельности, хотя ранее была высказана гипотеза о существовании особого класса «*серпантинных аритмий*» [21, 22].

Существует принципиально важный и всё ещё не решённый вопрос в том, являются ли феномены БП в модели Алиева—Панфилова свойственными всем системам реакционно-диффузионного типа (**13**) или же это специфика самой модели Алиева—Панфилова, которая обладает существенной нелинейностью. Наши вычислительные эксперименты к успеху в поисках автоволнового серпантина в модели ФитцХью—Нагумо нас не привели. Связан ли неуспех с тем обстоятельством, что в модели ФитцХью—Нагумо выполняется условие грубости системы, а в модели Алиева—Панфилова оно нарушено, — выяснить это едва ли возможно при помощи методов прикладной математики, и потому требуется проведение аккуратного аналитического исследования. Вопрос имеет фундаментально значение для математики, а также может иметь и прикладное значение. Таким образом, очевидно, что теоретические исследования в этом направлении должны быть продолжены.

Другим интересным исследованием является математическая модель системы свёртывания крови, разработанная в конце 20 века коллективом авторов [24], которая в упрощённом виде была представлена так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= D\Delta u_1 + K_1 u_1 u_2 (1-u_1)\frac{(1+K_2 u_1)}{1+K_3 u_3} - u_1,\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= D\Delta u_2 + u_1 - K_4 u_2,\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} &= D\Delta u_3 - K_5 u_1^{\,2} - K_6 u_3,
\end{aligned} \qquad (\mathbf{16})$$

где переменные состояния соответствуют концентрациям основных факторов свёртывания, а именно u_1 — IIa (сумма двух форм тромбина); u_2 — XIa (фактор

Розенталя, плазменный предшественник тромбопластина); u_3 — активированный протеин С; а каждый из коэффициентов $K_1 - K_6$ представляет собой арифметическую комбинацию соответствующих констант скоростей химических реакций, составляющих каскад свёртывания крови. Следует отметить, что в (**16**) медленная переменная специальным образом не выделена, хотя по её свойствам это, несомненно, БМС.

В личном общении с авторами модели удалось выяснить, что изначально существенный вклад в разработку и изучение свойств этой модели внесли трое исследователей, и потому коллектив авторов модели предпочитает обозначать её как модель Зарницыной—Морозовой—Атауллаханова, «модель ЗМА». В более поздних её версиях (например, [95, 96]), которые продолжают развиваться под руководством Ф. И. Атауллаханова, количество уравнений уже превысило два десятка. Особенности бифуркационной памяти в модели ЗМА остаются невыясненными: в опубликованных работах лишь высказаны самые общие предположения об этом [25].

Важной особенностью модели ЗМА в сравнении с моделями ФитцХью—Нагумо и Алиева—Панфилова является то, что она состоит из трёх ДУ, — а как отмечается, например, в [91 с.20–21], теорема о существовании и единственности решений для нелинейных систем с числом уравнений больше двух обычно носит лишь локальный характер, т.е. глобальное исследование таких систем представляет принципиально более сложную задачу даже для случая нераспределённой (точечной) системы.

Выводы

Выше были рассмотрены, как нам представляется, основные публикации по тематике, связанной с бифуркационными феноменами памяти и запаздывания; в других известных нам работах так или иначе повторяются представленные здесь результаты.

Анализ литературы подводит к выводу, что терминологию, используемую для описания бифуркационных феноменов памяти и запаздывания, на настоящий момент всё ещё невозможно признать вполне устоявшейся. Более того, в научной литературе, посвящённой изучению бифуркационных явления памяти и запаздывания, сложилась некоторая неразбериха и путаница, обусловленная отсутствием аккуратных определений для некоторых базовых терминов, — к примеру, для термина «динамическая бифуркация». В этом обзоре такие недостающие определения предложены.

БП следует рассматривать в некотором смысле как феномен скорее **психологический**, а не математический. Его суть состоит в том, что в некоторых случаях исследователи проявляют интуитивную склонность ожидать, что поведение сопряжённых полной системы и редуцированной (например, вырожденной) системы окажется одинаковым, основывая эти свои ожидания на сходстве формальной записи уравнений этих систем.

Ранее [58] уже было обращено внимание на обстоятельство, что основные результаты в исследованиях БП были получены при рассмотрении технических систем: проблем обеспечения безопасности на транспорте [51, 17, 18], лазеров [2, 3], и т.п., — причём было показано, что техническое средство, оказавшись в зоне БП, теряет управляемость. С другой стороны, для биологической системы (а именно, для системы свёртывания крови) обнаружено [25], что её пребывание как раз в области БП и соответствует нормальному поведению этой системы, а любое отклонение этой системы от области БП приводит к гибели биологического организма в целом. Обобщая эти результаты, можно отметить принципиальное различие в роли БП для технических систем и для систем биологических, однако остаётся открытым вопрос о том, насколько далеко возможно распространить такие выводы. В отношении систем технических ситуация представляется более ясной, поскольку эти системы вполне намеренно создаются людьми именно таким образом, чтобы они в своём рабочем режиме находились вдали от бифуркационных границ. Однако насколько характерным является для систем биологических их пребывание внутри бифуркационного пятна, — ответ на этот вопрос требует проведения широкомасштабных исследований. В качестве отдельной гипотезы можно высказать предположение, что жизнь в самой своей сути как раз и является не более чем типичной задержкой потери устойчивости.

И, конечно же, остаётся необъятное множество иных интересных систем с частными производными, в которых феномены бифуркационной памяти способны озадачивать исследователей.

Список литературы

1. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // ДАН СССР. **1973**. Т. 209. № 3. С. 576–579. URL: http://mi.mathnet.ru/dan37550

2. Baer S. M., Erneux T. and Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: Delay, memory effects and resonance // SIAM J. Appl. Math., **1989**. V. 49. № 1. P. 55–71. URL: http://www.jstor.org/stable/2102057

3. Mandel P., Erneux T. The slow passage through a steady bifurcation: delay and memory effects // J. Statist. Phys. **1987**. V. 48. P. 1059–1070.

4. Нейштадт А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи матем. наук. **1985**. Т.40. № 5. С. 190–191.

5. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференциальные уравнения. **1987**. Т. 23. № 12. С. 2060–2067. URL: http://mi.mathnet.ru/de6438

6. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференциальные уравнения. **1988**. Т. 24. № 2. С. 226–233. URL: http://mi.mathnet.ru/de6386

7. Fruchard A. and Schäfke R. Exceptional Complex Solutions of the Forced van der Pol Equation. // Funkcialaj Ekvacioj. **1999**. V. 42. P. 201–223. URL: fe.math.kobe-u.ac.jp/FE/FullPapers/vol42/fe42-2-3.pdf

8. Картье П. Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // УМН, **1984**. Т. 39. № 2(236). С. 57–76. URL: http://mi.mathnet.ru/umn2267

9. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН, **1984**. Т. 39. № 2(236) . С. 77–127. URL: http://www.mathnet.ru/rm2266

10. Diener F. Les equations $\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}^{[s]}+x=a$ // Collect. Math. **1978**. V. 29. № 3. P. 217–247.

11. Benoît E., Callot J. L., Diener F., Diener M. Chasse au canard // Collect. Math. **1981**. V. 31. № 1–3. P. 37–119.

12. Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Application. **2003**. V. 4. P. 45–50. DOI: 10.1016/S1468-1218(02)00012-3

13. Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models // Singular perturbation and hysteresis. / Eds. Mortell M. P., O'Malley R. E., Pokrovskii Al., Sobolev V. SIAM, **2005**. 360 c. ISBN 9780898715972

14. Ginoux J.-M. & Llibre J. Canards Existence in FitzHugh-Nagumo and Hodgkin-Huxley Neuronal Models // Mathematical Problems in Engineering. V. **2015**. Article ID 342010. 17 pages. DOI: 10.1155/2015/342010

15. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущённых системах. М.: Физматлит, **1995**. 336 с. ISBN 5-02-015129-7.

16. Голодова Е. С., Щепакина Е. А. Оценка затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах с траекториями-утками // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. **2013**. №. 3. С. 12–24.

17. Feigin, M. & Kagan, M. Emergencies as a manifestation of effect of bifurcation memory in controlled unstable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. **2004**. V. 14. № 7. P. 2439–2447. DOI: 10.1142/S0218127404010746.

18. Фейгин М. И. О двукратных проявлениях эффекта бифуркационной памяти в динамических системах // Вестник научно-технического развития. **2008**. Т. 3. № 7. С. 21–25. URL: http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=133

19. Елькин Ю. Е., Москаленко А. В., Стармер Ч. Ф. Спонтанная остановка дрейфа спиральной волны в однородной возбудимой среде // Математическая биология и биоинформатика. **2007**. Т. 2. № 1. С. 73–81.

20. Moskalenko A.V., Elkin Yu. E. The lacet: a new type of the spiral wave behavior // Chaos, Solitons and Fractals. **2009**. V. 40. № 1. P. 426–431. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.07.081.

21. Елькин Ю. Е., Москаленко А. В. Глава «Базовые механизмы аритмий сердца» (с. 45–74) В кн.: Клиническая аритмология. Под ред. проф. А. В. Ардашева. М.: ИД Медпрактика-М, **2009**, 1200 с. ISBN 978-5-98803-198-7

22. Moskalenko A. Tachycardia as “Shadow Play” // Tachycardia / Ed. Takumi Yamada. Croatia: InTech, 2012. P. 97–122. DOI: 10.5772/25411

23. Zarnitsina, V.I., Pokhilko, A.V., Ataullakhanov F.I. A mathematical model for the spatio-temporal dynamics of intrinsic pathway of blood coagulation. I. The model description // Thrombosis research. **1996**. V. 84. № 4. P. 225–236.

24. Zarnitsina V. I., Ataullakhanova F. I., Lobanov A. I., Morozova O. L. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation // Chaos. **2001**. V. 11. № 1. P. 57–70. DOI: 10.1063/1.1345728

25. Атауллаханов Ф. И., Лобанова Е. С., Морозова О. Л., Шноль Э. Э., Ермакова Е. А., Бутылин А. А., Заикин А. Н. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизации в модели свертывания крови // УФН. **2007**. Т. 177. № 1. С. 87–104. DOI: 10.3367/UFNr.0177.200701d.0087.

26. Фейгин М. И. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы // Соросовский образовательный журнал. **2001**. Т. 7. № 3. С. 121–127.

27. Neishtadt A. On stability loss delay for dynamical bifurcations // Discrete and continuous dynamical systems, Series S. **2009**. V. 2. № 4. P. 897–909.

28. Kirillov S. Yu., Nekorkin V. I. Dynamic Saddle-Node Bifurcation of the Limit Cycles in the Model of Neuronal Excitability // Radiophysics and Quantum Electronics. **2015**. V. 57. № 11. P. 837–847. DOI: 10.1007/s11141-015-9568-3

29. Erneux T. and Mandel P. Imperfect bifurcation with a slowly-varying control parameter // SIAM Journal on Applied Mathematics. **1986**. V. 46. № 11. P. 1–15.

30. Scharpf W., Squicciarini M., Bromley D., Green C., Tredicce J. R., and Narducci L. M. Experimental observation of a delayed bifurcation at the threshold of an argon laser // Opt. Comm. **1987**. V. 63. P. 344–348.

31. Erneux T. and Reiss E. L. Delaying the transition of Hopf bifurcation by slowly varying the bifurcation parameter, in Spatial Inhomogeneities and Transient Behavior in Chemical Kinetics, Manchester University Press, **1988**.

32. Нейштадт А. И., Сидоренко В. В. Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера // Прикладная математика и механика. **1997**. Т. 61. № 1. С. 18–29.

33. Neishtadt A.I. Persistence of stability loss for dynamical bifurcations I & II Differential Equations. **1987**. V. 23. P. 1385–1391 & **1988**. V. 24. P. 171–196.

34. Kapila, A. K. Arrhenius systems: dynamics of jump due to slow passage through criticality // SIAM J. Appl. Math. **1981**. V. 41. P. 29–42.

35. Cornel Sultan, Tamas Kalmar-Nagy. Graceful Passage through Hopf Bifurcation // IFAC Proceedings. **2011**. V. 44. № 1. P. 10899–10903.

36. Mandel P. and Erneux T. Laser-Lorenz equations with a time-dependent parameter // Phys. Rev. Lett. **1984**. V. 53. P. 1818–1820. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1818

37. Strizhak P. and Menzinger M. Slow passage through a supercritical Hopf bifurcation: Time-delayed response in the Belousov-Zhabotinsky reaction in a batch reactor // The Journal of Chemical Physics. **1996**. V. 105. № 24. P. 10905–10910. DOI: 10.1063/1.472860.

38. Benoit E., ed., Dynamic Bifurcations, Proc. (Luminy, 1990) Lecture Notes in Mathematics V. 1493, Springer. **1991**.

39. Berglund N. Dynamic bifurcations: Hysteresis, Scaling laws and feedback control // Progress of Theoretical Physics Supplement **2000**. V. 139. P. 325–336. DOI: 10.1143/PTPS.139.325

40. Diener M. The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate // The Mathematical Intelligencer. **1984**. V. 6. P. 38–48.

41. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Решение сингулярно возмущённых краевых задач методом «охоты на уток» // Сборник статей. К 90-летию со дня рождения акад. Л. С. Понтрягина, Тр. МИАН, 224 с. М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика». **1999**. С. 187–207.

42. Турсунов Д.А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. **2018**. № 54. DOI: 10.17223/19988621/54/4

43. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. **1948**. Т. 22. № 2. С. 193–204. URL: http://mi.mathnet.ru/msb6075

44. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Математический сборник. **1952**. Т. 31. № 3. С. 575–586. URL: http://mi.mathnet.ru/msb5548

45. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Известия АН СССР, сер. матем. **1957**. Т. 21. № 5. С. 605–626. URL: http://mi.mathnet.ru/izv4041

46. Мищенко Е.Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Известия АН СССР, сер. матем. **1957**. Т. 21. № 5. С. 627–654. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/im4042

47. Мищенко Е.Ф. и Понтрягин Л.С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР. **1955**. Т. 102. № 5. С. 889–891.

48. Robinson A. Nonstandard Analysis. Amsterdam: North Holland, **1966**.

49. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. **1961**. V. 1. P. 445–466.

50. Neishtadt A.I. and Sidorenko V.V. Stability loss delay in Ziegler system // J. Appl. Maths Mechs. **1997**. V. 61. № 1. P. 15–25. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00003-8

51. Фейгин М. И, Чиркова М. М. О существовании области пониженной управляемости для судов, неустойчивых на прямом курсе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. **1985**. № 2. С. 73–78.

52. Shchepakina E., Sobolev V. Integral manifolds, canards and black swans // Nonlinear Analysis. **2001**. V. 44. № 7. P. 897–908. DOI: 10.1016/S0362-546X(99)00312-0

53. Shchepakina E. Black swans and canards in two predator – one prey model // Math. Model. Nat. Phenom. **2019**. V.14 № 4. Article Number 408. DOI: 10.1051/mmnp/2019024

54. Jeremiah H. Li, Felix X.-F. Ye, Hong Qian, and Sui Huang, Time Dependent Saddle Node Bifurcation: Breaking Time and the Point of No Return in a Non-Autonomous Model of Critical Transitions // Physica D: Nonlinear Phenomena **2017**. V. 395. P. 7–14. DOI: 10.1016/j.physd.2019.02.005

55. Kalishyn Y.Y., Rachwalska M., Khavrus V.O., Strizhak P.E. The effect of oxygen on time-dependent bifurcations in the Belousov-Zhabotinsky oscillating chemical reaction in a batch // Phys. Chem. Chem. Phys. **2005**. V. 7. № 8. P. 1680–1686. DOI: 10.1039/B416006A

56. Москаленко А. В., Тетуев Р. К., Махортых С. А. К вопросу о современном состоянии теории колебаний // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, **2019**, № 44, Москва, 32 с. DOI: 10.20948/prepr-2019-44.

57. Li Xiang-Hong and Bi Qin-Sheng. Single-Hopf Bursting in Periodic Perturbed Belousov-Zhabotinsky Reaction with Two Time Scales // Chinese Physics Letters. **2013**. V. 30. № 1. P. 010503. DOI: 10.1088/0256-307X/30/1/010503
58. Москаленко А. В. О текущем состоянии исследований бифуркационной памяти в математической физике биологических объектов. Математическая биология и биоинформатика: VI Международная конференция, г.Пущино, 16–21 октября 2016 г.: Доклады / Под ред. В. Д. Лахно. — М: МАКС Пресс, **2016**. — 186 с. С. 32–33. ISBN 978-5-317-05377-2
59. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний / 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, **1981**. 918 с.
60. Братусь А., Новожилов А., Платонов А. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит. **2010**. 400 с. ISBN 978-5-9221-1192-8
61. Андронов А.А., Леонтович Е.А. К теории изменений качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории // ДАН СССР. **1938**. Т. 21. № 9. С. 247252.
62. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, **1967**. 488 с.
63. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Матем. сб. **1956**. Т. 40(82). № 2. С. 179–224. URL: http://mi.mathnet.ru/msb5165
64. Андронов А.А., Леонтович Е.А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Матем. сб. **1959**. Т. 48(90). № 3. С. 335–376. URL: http://mi.mathnet.ru/msb4902
65. Леонтович Е.А., Белюстина Л.Н. Теория бифуркаций динамических систем второго порядка и ее применение к исследованию нелинейных задач теории» колебаний // Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. **1963**. Т. II, Киев: изд. АН УССР. С. 7–28.
66. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Матем. сб. **1965**. Т. 68(110). № 3. С. 328–372. URL: http://mi.mathnet.ru/msb4317
67. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, **1966**. 568 с.
68. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Достаточные условия для «негрубости первой степени» динамической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. **1970**. Т. 6. № 12. С. 2121–2134. URL: http://mi.mathnet.ru/de1154

69. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций, Динамические системы – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 5, М.: ВИНИТИ. **1986**, 5–218.

70. Winfree A. Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media // Chaos. **1991**. V. 1. № 3. P. 303–334. [DOI: 10.1063/1.165844](DOI: 10.1063/1.165844)

71. Тараненко А.М. О последовательности предельных циклов в модели автоколебательной биохимической реакции с депонируемым субстратом // Биофизика. **1981**. Т. 26. № 3. С. 527–528.

72. Энциклопедия кибернетики. Том 2. Киев: Глав. ред. УСЭ. **1974**. 624 с.

73. Основы автоматического регулирования и управления / под ред. Пономарева В. М. и Литвинова А. П. М., «Высшая школа», **1974**. 439 с.

74. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Прохоров Ю. В. М.: Сов. энциклопедия, **1988**. 847 с.

75. Давыдов А.А. Структурная устойчивость управляемых систем // Конференция «Оптимальное управление и приложения», посвященная 105-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина, **2013**. Москва, МИАН. [URL: http://www.mathnet.ru/present7496](http://www.mathnet.ru/present7496)

76. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. **1937**. Т. 14. № 5. С. 247–250.

77. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, **1978**.

78. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни: Пер. с англ. М.: Мир, **1991**. 248 с. ISBN 5-03-001834-4 (англ: Princeton University Press **1988**.

79. Щуров И. Структурная устойчивость и бифуркации // Обыкновенные дифференциальные уравнения: Интерактивный учебник. [URL: http://math-info.hse.ru/odebook/chapter/label/chap:13:bifurc/](http://math-info.hse.ru/odebook/chapter/label/chap:13:bifurc/)

80. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, **1961**. 436 с.

81. Мищенко Е.Ф. Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка // Матем. сб. **1958**. Т. 44(86). № 4. С. 457–480. [URL: http://mi.mathnet.ru/msb4953](http://mi.mathnet.ru/msb4953)

82. Васильева А.Б., Винокуров В.А., Ломов С.А., Митропольский Ю.А. Математическая школа «Метод малого параметра и его применение» // УМН. **1978**. Т. 33. № 3(201). С. 207–213. [URL: http://mi.mathnet.ru/umn3453](http://mi.mathnet.ru/umn3453)

83. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённых уравнений. М.: Наука, **1973**. 272 с.

84. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, **1973**. 512 с.

85. Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, **2010**. 320 с. ISBN 978-5-9221-1269-7

86. Васильева А.Б., Волосов В.М. О работах А. Н. Тихонова и его учеников по обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр // УМН. **1967**. Т. 22. № 2(134). С. 149–168.
[URL: http://mi.mathnet.ru/umn5747](http://mi.mathnet.ru/umn5747)

87. Хайкин С. Э. Непрерывные и «разрывные» колебания // Журнал прикл. физики. **1930**. Т. VII. № 6. С. 21–43.

88. Уёмов А.И. Логические ошибки. Как они мешают правильно мыслить. М., **1958**.

89. Философская Энциклопедия. В 5-х т. / под ред. Ф.В. Константинова. М.: Советская энциклопедия. **1960**–**1970**.

90. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, **1958**. 408 с.

91. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, **2002**. 560 стр. ISBN 5-93972-200-8

92. Aliev R., Panfilov A. A simple two-variable model of cardiac excitation // Chaos, Solitons & Fractals. **1996**. V. 7. № 3. P. 293–301.
DOI: 10.1016/0960-0779(95)00089-5

93. Biktashev V.N., Holden A.V., Nikolaev E.V. Spiral wave meander and symmetry of the plane // Int. J. Bifurc. Chaos. **1996**. V. 6. № 12A. P. 2433–40.
DOI: 10.1142/S0218127496001582

94. Ванаг В.К. Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах. М.: Институт компьютерных исследований, 2008. 300 с.

95. Атауллаханов Ф.И., Зарницына В.И., Кондратович А.Ю., Лобанова Е.С., Сарбаш В.И. Особый класс автоволн — автоволны с остановкой — определяет пространственную динамику свертывания крови // УФН, **2002**. Т. 172. Р. 671–690. DOI: 10.3367/UFNr.0172.200206c.0671

96. Panteleev M.A., Ananyeva N.M., Ataullakhanov F.I., Saenko E.L. Mathematical models of blood coagulation and platelet adhesion: clinical applications // Curr Pharm Des **2007**. V. 13. № 14. P. 1457–1467.
DOI: 10.2174/138161207780765936

Оглавление