



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 83 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Зверяев Е.М.**

Метод Сен-Венана—Пикара  
—Банаха интегрирования  
уравнений в частных  
производных с малым  
параметром

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана—Пикара—Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 83. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2018-83](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-83)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-83>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Е.М. Зверьев**

**Метод Сен-Венана—Пикара—Банаха  
интегрирования уравнений в частных производных  
с малым параметром**

**Москва — 2018**

**Зверьяев Е.М**

**Метод Сен-Венана—Пикара—Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром**

Классическому полуобратному методу Сен-Венана построения решения дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром придается итерационная трактовка. Для интегрирования системы уравнений первого порядка используется оператор Пикара, позволяющий получить непрерывные интегралы уравнений первого порядка по поперечной координате узкой длинной полосы. Выполнение граничных условий на длинных краях дает уравнения для медленно и быстро меняющихся компонент решения. Интегралы сингулярно возмущенных уравнений для быстро меняющихся величин используются для построения непрерывных решений по продольной координате по Фридрихсу. Решения сингулярно возмущенных уравнений описывают концентрацию напряжений обобщенными функциями.

*Ключевые слова:* полоса, полуобратный метод Сен-Венана, оператор Пикара, непрерывность, сингулярно возмущенные уравнения

**Evgeniy Mikhailovich Zverayev**

**The Saint-Venant—Picard—Banach method of integrating equations in partial derivatives with a small parameter**

An iterative interpretation to the classical semi-inverse Saint-Venant method for constructing the solution of partial differential equations with a small parameter is given. The Picard operator uses for integrating the system of equations of the first order that enables us to obtain continuous integrals of first-order equations along the transverse coordinate of a narrow long strip. Verification of the boundary conditions on long edges yields equations for the slowly and rapidly changing components of the solution. The integrals of singularly perturbed equations for rapidly varying quantities are used to construct continuous solutions along the longitudinal coordinate according to Friedrichs. The solutions of the singularly perturbed equations describe the stress concentration with distributions functions.

*Key words:* strip, semi-inverse Saint-Venant method, Picard operator, continuity, singularly perturbed equations

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00064.

## 1. Введение

Постепенное развитие взглядов на принципы, лежащие в основе механики деформируемого тела, рост той ветви математического анализа, которая применяется при вычислениях и накопление практических правил, получаемых путем истолкования математических результатов, приводит к тому, что принципы заменяются другими, более общими, число их уменьшается и данная область приводится во все более тесную связь с другими отделами физики, причем одни и те же физические принципы служат в последнем счете основой их всех.

В теории упругости, несмотря на то, что иногда приходится встречаться с ошибками в математической теории, состоящими главным образом в принятии неясных или скомпрометированных гипотез, в злоупотреблении приближенными методами, поспешных обобщениях и неправильном понимании физических принципов, имеет место непрерывный прогресс во всех отношениях [1]. Большинство дифференциальных уравнений механики обладает решениями, в которых наблюдаются разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания. Большой интерес представляет изучение таких свойств этих уравнений. Понижение порядка дифференциального уравнения в сочетании с потерей граничного условия, является характерной чертой асимптотических явлений, в которых наблюдаются разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания [2]. Цель асимптотического анализа задачи заключается в описании решения граничной задачи внутри переходного слоя. Потребность в таких уточненных теориях связана с несколькими причинами. Во-первых, уточнение классической теории требуется для более полного понимания самой классической теории. Существует мнение, что настоящее понимание теории возникает после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории тонкостенных систем позволяют лучшим образом охарактеризовать погрешность классических теорий. Построение уточненных теорий является более сложной задачей, чем построение классических моделей. Классическая теория учитывает "грубые" эффекты или медленно меняющиеся напряженные состояния, и, для того чтобы разобраться в них, зачастую достаточно интуиции. В уточненных теориях включаются в рассмотрение малые эффекты, и построение теорий, последовательных в смысле учёта всех малых одного порядка, крайне трудно сделать, руководствуясь только интуицией и не располагая регулярными методами [3].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого впечатления лежит различие в методах построения определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось в некоторой степени на основе математической теории упругости, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений без использования уравнений теории упругости. Однако, если все эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек строить на одной математической

основе с помощью метода простых итераций, являющегося методом построения решения, удовлетворяющим принципу сжатых отображений, различие исчезает [4].

Истоки метода простых итераций в теории упругости просматриваются в полуобратном методе Сен-Венана. «Сен-Венану принадлежит заслуга приведения проблемы кручения и изгиба балок в связь с общей теорией. Он учитывал трудность нахождения общих решений и настоятельную необходимость получения в практических целях какой-либо теории, которая могла бы служить для определения деформаций в сооружениях; ему было вполне ясно также, что только в очень редких случаях можно знать точное распределение нагрузки, приложенной к части какой-либо конструкции; это привело его к размышлениям о методах, применявшихся к решению частных задач до того, как были получены общие уравнения. Таким образом, он пришел к изобретению полуобратного метода. Многие из обычных допущений и выводов оказываются верными в большинстве случаев. Следовательно, сохраняя некоторые из этих допущений и выводов, можно упростить уравнения и получить их решения. Правда, пользуясь этими решениями, мы не можем удовлетворить любым наперед заданным граничным условиям; однако граничные условия практически наиболее важного типа могут быть удовлетворены» [1].

Если метод Сен-Венана трактовать, придавая «обычным допущениям и выводам» роль величин начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, можно по этим остальным вычислить поправку к величинам начального приближения и по тому, является ли эта поправка существенной или малой, сделать вывод о применимости предположений. Малость поправки говорит о том, что начальные величины выбраны удачно и данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс нуждается в обосновании своей сходимости. Поскольку Сен-Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба стержня, нетрудно оценить сходимость вычислений к некоторому решению с помощью асимптотических рассуждений, используя наличие малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Таким образом приходим к принципу сжатых отображений, теореме Банаха о неподвижной точке и методу простых итераций. Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений, можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений.

Отображение  $y = Ay$  метрического пространства  $M$  в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число  $\varepsilon < 1$ , что для любых двух точек  $x, y \in M$  выполняется неравенство  $\rho(Ax, Ay) \leq \varepsilon \rho(x, y)$ . Точка  $y$  назы-

вается неподвижной точкой отображения, если  $y = Ay$ . Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения  $y = Ay$ . Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения  $y_{(0)}$ . Если оператор  $A$  является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению  $y$  независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения  $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)} \dots$  находятся с помощью формулы  $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$ .

Используемый в настоящей работе метод простых итераций близок к методу, встречающемуся в литературе под названием метода последовательных приближений Пикара для решения дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , разрешенного относительно производной [5]. Это дифференциальное уравнение с условием  $y(t_0) = y_0$  равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y(t))] dt + y_0. \quad (1.1)$$

Для него на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме:

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y_{(n)}(t))] dt + y_0.$$

Метод позволяет построить последовательность функций  $y_{(n)}(t)$ , сходящихся к решению уравнения, и эти функции получаются гладкими.

Ниже метод простых итераций применяется для построения уравнений деформирования тонкой полосы из общих уравнений теории упругости, содержащих в себе малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость метода.

## 2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса

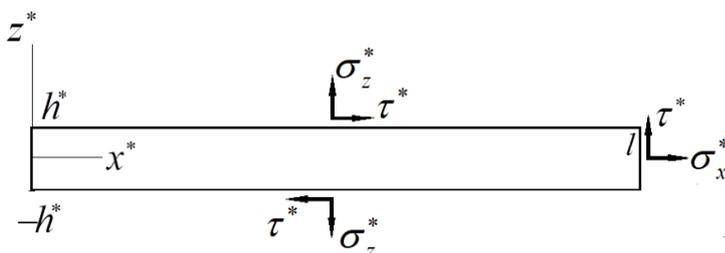


Рис. 1

Длинную прямоугольную полосу отнесем к прямоугольной системе координат  $x^*, z^*$ , так что  $0 \leq x^* \leq l$ ,  $-h \leq z^* \leq h$  (Рис.1). Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Уравнения плоской задачи

теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в следующем виде:

– уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0,$$

– соотношения упругости:

$$\sigma_x^* = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z), \quad \tau^* = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma, \quad \sigma_z^* = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x),$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Введем безразмерные координаты  $x = x^* / l$ ,  $z = z^* / h$ , безразмерные перемещения  $u = u^* / h$ ,  $w = w^* / h$  вдоль осей  $x^*, z^*$  соответственно и безразмерные напряжения  $\sigma_x = \sigma_x^* / E$ ,  $\sigma_z = \sigma_z^* / E$ ,  $\tau = \tau^* / E$  (размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечаются звездочкой). Безразмерные уравнения в этих переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z), & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma, & \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Преобразуем их так, чтобы, выбрав в качестве величин начального приближения некоторые  $\varepsilon_{z(0)}$  и  $\gamma_{(0)}$ , можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z, & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma, & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}, & \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_x &= \varepsilon_x + \nu\sigma_z, & \varepsilon_z &= (1-\nu^2)\sigma_z - \nu\varepsilon_x, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z, & \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, & \gamma &= 2(1+\nu)\tau \end{aligned}$$

методом последовательных приближений по мере увеличения номера ( $n$ ) в соответствии со следующей схемой

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{(n)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(n)}, & \frac{\partial u_{(n)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + \gamma_{(n)}, & \tau_{(n)} &= \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma_{(n)}, \\ \frac{\partial \sigma_{z(n)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n)}}{\partial x}, & \varepsilon_{x(n)} &= \varepsilon \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x}, & \sigma_{x(n)} &= \varepsilon_{x(n)} + \nu\sigma_{z(n)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{z(n+1)} = (1 - \nu^2) \sigma_{z(n)} - \nu \varepsilon_{x(n)}, \quad \frac{\partial w_{(n+1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n+1)},$$

$$\frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(n)}}{\partial x}, \quad \gamma_{(n+1)} = 2(1 + \nu) \tau_{(n+1)}.$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения. Нас будут интересовать уравнения нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения  $\varepsilon_{z(0)} = 0$  и  $\gamma_{(0)} = \gamma_0(x)$ . Такой выбор величин начального приближения имеет ясный геометрический смысл, выведенные соотношения согласуются с известной теорией пластин Кирхгоффа и уточнениями Тимошенко—Рейсснера. В силу независимости величин начального приближения от  $z$  все неизвестные вычисляются в результате квадратур по  $z$

$$w_{(0)} = w_0, \quad \gamma_{(0)} = \gamma_0, \quad u_{(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dz + \int \gamma_0 dz + u_0(x),$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2(1 + \nu)} \gamma_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \int \frac{\partial \tau_0}{\partial x} dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \tau_{(1)} = \tau_0 - \varepsilon \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz, \quad \gamma_{(1)} = 2(1 + \nu) \tau_{(1)},$$

$$\varepsilon_{z(0)} = (1 - \nu^2) \sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)}, \quad w_{(1)} = w_0 + \int \varepsilon_{z(0)} dz.$$

В уравнениях используется последовательно оператор Пикара (1.1). Нижним индексом 0 обозначены произволы интегрирования. Заданные величины начального приближения  $w_0$  и  $\gamma_0$  записаны также в первом приближении.

Сначала в начальном приближении воспользуемся гипотезами недеформируемой нормали  $\varepsilon_{z(0)} = \gamma_{(0)} = 0$ . Условие  $\varepsilon_{z(0)} = 0$  равносильно заданию перемещения как  $w_{(0)} = w_0(x)$ . Назовем соответствующие вычисления  $w$ -процессом. Вычисленные неизвестные имеют следующий вид

$$w_{(0)} = w_0(x), \quad \gamma_{(0)} = 0, \quad u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z, \quad \sigma_{z(0)} = 0,$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z, \quad \sigma_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z, \quad \varepsilon_{z(0)} = \varepsilon^2 \nu w_0'' z, \quad (2.4)$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 \nu w_0'' \frac{z^2}{2}, \quad \tau_{(1)} = \varepsilon^3 w_0''' \frac{z^2}{2}, \quad \sigma_{z(1)} = -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{z^3}{6}.$$

Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ , в индексе нулем без скобок обозначены произвольные функции интегрирования, зависящие только от  $x$ .

Во втором случае при  $w_{(0)} = 0$ ,  $\gamma_{(0)} = \gamma_0(x)$  (его можно назвать  $\gamma$  или  $\tau$ -процессом, т.к. это практически одна и та же величина) вычисленные неизвестные записываются так:

$$w_{(0)} = w_0 = 0, \quad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x), \quad u_{(0)} = \gamma_0 z, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{(0)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_0, \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_0' z, \\
\varepsilon_{x(0)} &= \varepsilon \gamma_0' z, \quad \sigma_{x(0)} = \frac{2+\nu}{2(1+\nu)} \varepsilon \gamma_0' z, \\
\varepsilon_{z(0)} &= -\varepsilon \frac{1+\nu}{2} \gamma_0' z, \quad w_{(1)} = -\varepsilon \frac{1+\nu}{2} \gamma_0' \frac{z^2}{2}, \\
\tau_{(1)} &= -\frac{2+\nu}{2(1+\nu)} \varepsilon^2 \gamma_0'' \frac{z^2}{2}, \quad \sigma_{z(1)} = \frac{2+\nu}{2(1+\nu)} \varepsilon^3 \gamma_0''' \frac{z^3}{6}.
\end{aligned}$$

При  $w_{(0)} = \gamma_{(0)} = 0$  вычисляются неизвестные, названные величинами 0-процесса, зависящие от произволов интегрирования  $\sigma_{z0}, \tau_0, u_0$ . Получаем

$$\begin{aligned}
w_{(0)} &= 0, \quad \gamma_{(0)} = 0, \quad u_{(0)} = u_0, \quad \sigma_{z(0)} = \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_0', \\
\sigma_{x(0)} &= \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2) \sigma_{z0} - \varepsilon \nu u_0', \\
w_{(1)} &= (1-\nu^2) \sigma_{z0} z - \varepsilon \nu u_0' z, \quad \tau_{(1)} = -\varepsilon^2 u_0'' z - \varepsilon \nu \sigma_{z0}' z + \tau_0, \\
\sigma_{z(1)} &= \varepsilon^3 u_0''' \frac{z^2}{2} + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z0}'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Из вычислений видно, что выделение  $w, \gamma$  (или  $\tau$ ), 0-процессов носит искусственный характер для одной и той же последовательности вычислений одинаковых операторов. Полное решение представляется в виде суммы всех вычисленных величин, так как удовлетворение всех граничных условий величинами только одного процесса невозможно. Выполнение граничных условий величинами  $w$ -процесса на длинных сторонах приводит к уравнениям классических теорий изгиба, величинами  $w$ - и  $\tau$ -процессов – к уравнениям классической теории и уравнениям типа Тимошенко–Рейсснера, дополняющими классическую теорию так, чтобы можно было выполнить все граничные условия на торцевых поверхностях. Величины 0-процесса дают уравнения задачи растяжения–сжатия, т. к. задачи изгиба и растяжения в случае изотропного материала разделяются: основные неизвестные первой задачи  $w_0, \tau_0$  представляются в виде степенных рядов по четным степеням переменной  $z$ , а второй с неизвестными  $u_0, \sigma_{z0}$  – по нечетным. Теперь можно записать выражения для всех неизвестных задачи

$$\begin{aligned}
w &\approx w_0 + \left[ (1-\nu^2) \sigma_{z0} - \varepsilon \nu u_0' \right] z + \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1+\nu)^2 \tau_0' \right] \frac{z^2}{2}, \\
u &\approx u_0 + \left[ -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \tau_0 \right] z, \\
\varepsilon_x &\approx \varepsilon u_0' + \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (2+\nu) \tau_0' \right] z,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &\approx \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} + \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' \right] z, \\
\varepsilon_z &\approx (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \varepsilon \nu u_0' + \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1 + \nu)^2 \tau_0' \right] z, \\
\tau &\approx \tau_0 - \left( \varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2}, \\
\sigma_z &\approx \sigma_{z_0} - \varepsilon \tau_0' z + \left( \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' \right) \frac{z^2}{2} + \left[ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6}.
\end{aligned}$$

Величины  $\tau$  и  $\sigma_z$  записаны в первом приближении, остальные – в нулевом. С помощью  $\tau$  и  $\sigma_z$  будем выполнять граничные условия на длинных сторонах полосы.

### 3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах

На лицевых поверхностях полосы  $z^* = \pm h$  надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Примем их такими:

$$\sigma_z^* = Z_+, \quad \tau^* = X_+ \quad \text{при } z^* = h^*,$$

$$\sigma_z^* = Z_-, \quad \tau^* = X_- \quad \text{при } z^* = -h^*.$$

В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\sigma_z = Z_+, \quad \tau = X_+ \quad \text{при } z = 1,$$

$$\sigma_z = Z_-, \quad \tau = X_- \quad \text{при } z = -1.$$

(3.1)

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость  $E$ .

Условия будем выполнять величинами нулевого и первого приближения, считая, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины, т.е.  $\tau \approx \tau_{(0)} + \tau_{(1)}$ ,  $\sigma_z \approx \sigma_{z(0)} + \sigma_{z(1)}$ . На основании выражений (2.4)–(2.6) запишем выражения для напряжений, на которые накладываются условия на длинных сторонах

$$\tau = \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} - \left( \varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \tau_0,$$

$$\sigma_z = \left[ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6} + \left( \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' \right) \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}.$$

Выполнив условия (3.1), получим уравнения относительно неизвестных  $w_0, \tau_0$ , определяющих задачу изгиба

$$\varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' - 6\varepsilon \tau_0' = 3(Z_+ - Z_-),$$

(3.2)

и относительно  $u_0, \sigma_{z_0}$ , определяющих задачу растяжения—сжатия

$$-\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' = \frac{1}{2}(X_+ - X_-),$$

$$\varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

(3.3)

Рассмотрим уравнения системы (3.2). Будем считать, что частные решения  $w_0^{(p)}$ ,  $\tau_0^{(p)}$  найдены и общие решения  $w_0^{(g)}$ ,  $\tau_0^{(g)}$  являются функциями нулевой изменчивости по координате  $x$ . Это означает, что их асимптотический порядок при дифференцировании не меняется

$$w_0^{s(g)'} \sim \varepsilon^0 w_0^{s(g)}, \quad \tau_0^{s(g)'} \sim \varepsilon^0 \tau_0^{s(g)}. \quad (3.4)$$

Однородные уравнения (3.2) в медленных неизвестных записываются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s''''} - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{s''} + 2\tau_0^s &= 0, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{s''''} - 6\varepsilon \tau_0^{s'} &= 0. \end{aligned}$$

В первом уравнении член  $(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{s''}$  имеет порядок  $\varepsilon^2$  по сравнению с третьим и может быть отброшен. То же самое справедливо относительно второго уравнения. Соответственно, можно написать

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s''''} + 2\tau_0^s &= 0, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} - 6\varepsilon \tau_0^{s'} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Исключив  $\tau_0^{s'}$  из второго уравнения с помощью первого, получим

$$\frac{2}{3} \varepsilon^4 w_0^{s''''} = 0 \quad (3.6)$$

— классическое уравнение изгиба балки. Таким образом, можно считать доказанным, что решение  $w_0^{s(g)}$  имеет нулевую и только нулевую изменчивость, при которой асимптотический порядок дифференцируемых функций меняется в  $\varepsilon^0$  раз. В соответствии с этим верхний индекс  $s$  можно отбросить.

Вычитая из уравнений (3.2) попарно уравнения (3.5) с учетом предположения, что  $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ , где верхний индекс  $q$  указывает на большую изменчивость отмеченной им величины, дифференцирование которой равносильно увеличению дифференцируемой величины в  $\varepsilon^{-1}$  раз в асимптотическом смысле, получим сингулярно возмущенные уравнения

$$\begin{aligned} -(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q &= 0, \\ (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

решения которых зависят от аргумента  $\xi = x/\varepsilon$ . Их решения можно использовать для выполнения потерянных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся решениях.

В случае медленно меняющихся нагрузок система уравнений (3.2) сводится к одному

$$\frac{2}{3} \varepsilon^4 w_0^{s''''} = Z_+^s - Z_-^s + \varepsilon (X_+^{s'} + X_-^{s'}),$$

пригодному для определения частного и общего решений.

#### 4. Выполнение граничных условий на коротких сторонах

В инженерной практике существует зависящее от вида конструкции многообразие способов закрепления концов балок. В сопротивлении материалов и строительной механике они формулируются как жесткое защемление, свободное опирание, свободный конец. В рассматриваемой здесь уточненной теории вследствие появления нетрадиционных неизвестных  $w_0, u_0, \sigma_{z0}, \tau_0$  необходимо для них сформулировать условия на коротких сторонах.

##### 4.1. Пример 1

Рассмотрим полосу, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $Z_+ = p, X_+ = X_- = Z_- = 0, p = const$ . Пусть на концах полосы  $x = 0; 1$  перемещения  $w = u = 0$ , что соответствует в классической теории случаю жесткого защемления.

Разрешающие уравнения (2.8) и (3.3) приводятся к виду

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0'''' = p, \quad (4.1)$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z0}' = 0, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon^3 u_0'''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z0}'' + 2\sigma_{z0} = p.$$

Условия на концах на основании формул (2.7)

$$\left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' \right] \frac{z^2}{2} + \left[ (1 - \nu^2) \sigma_{z0} - \varepsilon \nu u_0' \right] z + w_0 = 0,$$

$$\left[ -\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \right] z + u_0 = 0$$

сводятся к тому, что при  $x = 0; 1$  коэффициенты при каждой степени  $z$  должны обращаться в ноль

$$w_0 = 0, \quad (4.3)$$

$$(1 - \nu^2) \sigma_{z0} - \varepsilon \nu u_0' = 0, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0'' - (1 + \nu)^2 \varepsilon \tau_0' = 0, \quad (4.5)$$

$$u_0 = 0, \quad (4.6)$$

$$-\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 = 0. \quad (4.7)$$

**Замечание 1** относительно условия (4.6). Из первого уравнения системы (4.2) в предположении малой изменчивости функций вытекает оценка  $\varepsilon u_0 \sim \nu \sigma_{z0}$ . С учетом этой оценки во втором уравнении первый и второй члены являются величинами  $O(\varepsilon^2)$  по сравнению с третьим и могут быть отброшены. Имеем  $\sigma_{z0} = p/2$ . Подставив эту величину в первое уравнение (4.2), получим для определения  $u_0$  уравнение  $\varepsilon^2 u_0'' = 0$ , которое вместе с условиями (4.6) дает  $u_0(x) = 0$ . □

**Замечание 2** относительно условия (4.7). Из уравнений (3.2) следует оценка  $(\tau_0^s, \tau_0^q) \sim \varepsilon^3 w_0$ . Следовательно, в условиях (4.7) второй член может быть отброшен по сравнению с первым и они принимают вид  $w_0' = 0$ , совпадающий с известным из классической теории изгиба балок. Решение уравнения (4.1) при этих и условиях (4.3) на концах дается формулой  $w_0 = \varepsilon^{-4} \frac{P}{16} x^2 (x-1)^2$ . □

**Замечание 3** относительно условия (4.4). Условие (4.4) с учетом того, что функция  $u_0(x) = 0$  и  $\sigma_{z_0} = p/2$ , сводится к требованию к внешней нагрузке на концах  $p = 0$ . Поскольку в рассматриваемом случае она приложена по верхнему краю, то отсюда вытекает условие обращения нагрузки в ноль в верхних угловых точках. □

Объясним причину появления условия (4.5). За счет продольного напряжения и коэффициента Пуассона поперечный размер полосы изменился на величину  $\varepsilon^2 \nu w_0''$ . Это перемещение должно быть устранено с помощью быстро меняющегося решения уравнения (3.7)

$$\varepsilon \tau_0' = \begin{cases} C_1 \exp(-kx/\varepsilon) \\ C_2 \exp(k(1-x)/\varepsilon) \end{cases}; \quad k^2 = 6/(2+\nu).$$

Первое решение пригодно для использования на конце  $x = 0$ , второе – на конце  $x = 1$ .

Рассмотрим конец  $x = 0$ . Определенная из условия (4.5) постоянная будет  $C_1 = \varepsilon^{-2} \frac{\nu P}{8(1+\nu)^2}$ . С учетом вычисленных величин выражение для  $w$  из (2.7)

сводится к формуле

$$w = \varepsilon^{-4} \frac{P}{16} x^2 (x-1)^2 + \varepsilon^{-2} \frac{\nu P}{8} \left\{ 1 - \exp(-kx/\varepsilon) - \exp[-k(1-x)/\varepsilon] \right\} \frac{z^2}{2}. \quad (4.8)$$

Второй член в фигурных скобках является величиной  $O(\varepsilon^2)$  по сравнению с первой и может быть отброшен. В то же время в выражении для напряжения  $\sigma_x$  из (2.7)

$$\sigma_x = \varepsilon^{-2} \frac{P}{8} (6x^2 - 6x + 1) z + \varepsilon^{-2} \frac{\nu(2+\nu)P}{8(1+\nu)^2} \left\{ \exp(-kx/\varepsilon) + \exp[-k(1-x)/\varepsilon] \right\} z + \nu \frac{P}{2}$$

член в фигурных скобках указывает на концентрацию напряжений в углах полосы. Эти напряжения соизмеримы с напряжениями, определяемыми по классической теории.

## 4.2. Пример 2

Рассмотрим полосу, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $Z_+ = p$ ,  $X_+ = X_- = Z_- = 0$ ,  $p = const$ , (Рис. 2). Напряженно-деформированное

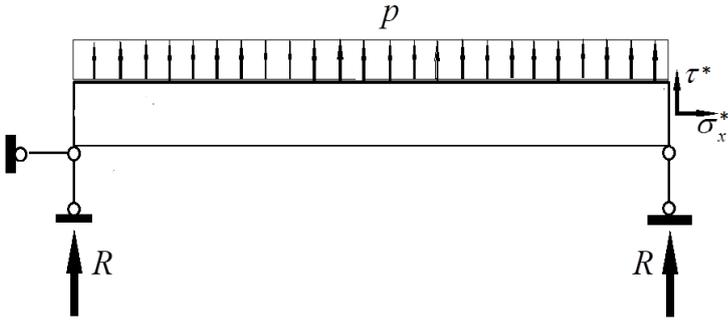


Рис. 2

состояние в нулевом приближении описывается уравнениями (4.1), (4.2) и (3.7). Концы полосы, если ее рассматривать как балку, будем считать свободно опертыми. Это в терминах сопротивления материалов означает, что на концах должны обращаться в ноль прогиб (вертикальные перемещения) нейтральной оси и изгибающий

момент. В представлениях теории упругости, нулю должны быть равны перемещения  $w$  в нижних углах на опорах и напряжения  $\sigma_x$ . Кроме того, на коротких сторонах должны отсутствовать касательные напряжения  $\tau$ . Условия на концах, записанные на основании формул (2.7)

$$\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} + \left[ -\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' \right] z = 0,$$

$$\tau_0 - \left( \varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \left[ \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2} = 0,$$

сводятся к равенству нулю всех коэффициентов при каждой степени  $z$ :

$$\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} = 0, \quad (4.8)$$

$$-\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' = 0, \quad (4.9)$$

$$\tau_0 = 0, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' = 0, \quad (4.11)$$

$$\varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' = 0. \quad (4.12)$$

Вертикальное перемещение из формул (2.7) в нижних углах при  $z = -1$  и  $x = 0; 1$  запишется так:

$$w_0 - \left[ (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \varepsilon \nu u_0' \right] + \frac{1}{2} \left[ \varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1 + \nu)^2 \tau_0' \right] = 0.$$

Во второй квадратной скобке в силу малой изменчивости первый член  $O(\varepsilon^2)$  по сравнению с  $w_0$  и может быть отброшен. Из уравнений (4.2) имеем  $\sigma_{z_0} = p/2$  и  $u_0 \sim \varepsilon^{-1} p$ . На основании этого можно отбросить величину в первой квадратной скобке в формуле для  $w$  по сравнению с первым членом  $w_0$ , который относительно величины  $p$  оценивается как  $O(\varepsilon^{-4})$ . Величина  $\tau_0' = \tau_0^{s'} \sim \varepsilon^3 w_0$  также может быть отброшена. Теперь условия в нижних угловых точках равносильны условию

$$w_0 = 0 \text{ при } x = 0; 1. \quad (4.13)$$

В Примере 1 также был получен подобный результат о пренебрежимо малом

влиянии поправочных членов, соответствующих поперечной деформации полосы на перемещение ее оси (см. формулу (4.8)).

Условие (4.9) также сводится к выражению  $w_0'' = 0$  при  $x = 0; 1$ , позволяющему вместе с условием (4.13) выделить задачу нахождения решения уравнения (4.1), которое запишется так:

$$w_0 = \varepsilon^{-4} \frac{p}{16} (x^4 - 2x^3 + x).$$

Условия (4.12) и (4.10) в силу первых уравнений из (3.5) и (3.7) совпадают и сводятся к одному  $\tau_0^s + \tau_0^q = 0$ . Удовлетворив ему при  $x = 0; 1$ , запишем с учетом первого уравнения из системы (4.2) выражение для касательного напряжения

$$\tau = \varepsilon^{-1} \frac{3}{8} p \left\{ (-2x + 1) + \exp(-\kappa x / \varepsilon) + \exp[-\kappa(1-x) / \varepsilon] \right\} (1 - z^2),$$

удовлетворяющего условию обращения в ноль на торцевых сторонах, и поперечного нормального напряжения

$$\sigma_z = p \left[ \frac{3}{4} \left( z - \frac{z^3}{3} \right) + \frac{1}{2} \right] - pg \left[ \frac{3}{4} \left( z - \frac{z^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \right],$$

где  $g = \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon} x\right) + \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp\left[-\frac{\kappa}{\varepsilon} (1-x)\right]$ ,  $\kappa^2 = \frac{2}{2-\nu}$ .

На нижней стороне полосы при  $z = -1$  первый член в квадратных скобках обращается в ноль, а на верхней стороне при  $z = 1$  получается  $\sigma_z = p$ . В нижней угловой точке  $z = -1$  и  $x = 0$  напряжение  $\sigma_z = \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon} x\right)$ , в точке  $z = -1$ ,

$x = 1$  будет  $\sigma_z = \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp\left[-\frac{\kappa}{\varepsilon} (1-x)\right]$ . Заметим, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon} x\right) \right] = \infty$ , тогда

как  $\int_0^c \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon} x\right) dx = 1$ , где  $0 < c < 1$  выбирается на таком расстоянии от точки

$x = 0$ , чтобы можно было считать величину экспоненты пренебрежимо малой. Таким образом, в нижних углах полосы возникают локальные напряжения, заданные в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\delta$ -функциями Дирака.

## 5. Представление решения в виде асимптотического степенного ряда

При решении задач с малым параметром используется метод многих масштабов [6, 7]. Искомые неизвестные представляется в виде суммы медленно и быстро меняющихся компонент в форме разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$  (или по малым значениям координаты  $z$ , если исходные уравнения не приведены к безразмерному виду [7]). Неизвестные представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
w &= \varepsilon^a \left( w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^b \left( w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \right)^{(\xi)}, \\
u &= \varepsilon^c \left( u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^d \left( u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \right)^{(\xi)}, \\
\varepsilon_x &= \varepsilon^e \left( \varepsilon_{x0} + \varepsilon \varepsilon_{x1} + \varepsilon^2 \varepsilon_{x2} + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^f \left( \varepsilon_{x0} + \varepsilon \varepsilon_{x1} + \varepsilon^2 \varepsilon_{x2} + \dots \right)^{(\xi)}, \\
\varepsilon_z &= \varepsilon^g \left( \varepsilon_{z0} + \varepsilon \varepsilon_{z1} + \varepsilon^2 \varepsilon_{z2} + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^h \left( \varepsilon_{z0} + \varepsilon \varepsilon_{z1} + \varepsilon^2 \varepsilon_{z2} + \dots \right)^{(\xi)}, \\
\sigma_x &= \varepsilon^i \left( \sigma_{x0} + \varepsilon \sigma_{x1} + \varepsilon^2 \sigma_{x2} + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^j \left( \sigma_{x0} + \varepsilon \sigma_{x1} + \varepsilon^2 \sigma_{x2} + \dots \right)^{(\xi)}, \\
\tau &= \varepsilon^k \left( \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^l \left( \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 + \dots \right)^{(\xi)}, \\
\sigma_z &= \varepsilon^m \left( \sigma_{z0} + \varepsilon \sigma_{z1} + \varepsilon^2 \sigma_{z2} + \dots \right)^{(x)} + \varepsilon^n \left( \sigma_{z0} + \varepsilon \sigma_{z1} + \varepsilon^2 \sigma_{z2} + \dots \right)^{(\xi)}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь в первых парах скобок, отмеченных верхним индексом  $(x)$ , расположены медленно меняющимися функции от  $z$  и  $x$ , а во второй паре скобок, отмеченных верхним индексом  $(\xi)$ , – зависящие от аргументов  $z$  и  $\xi = x/\varepsilon$  функции. Причем последние являются медленно меняющимися функциями координаты  $z$  и быстро меняющимися от координаты  $x$  (естественно, медленно меняющимися от координаты  $\xi = x/\varepsilon$ ).

Разложение числовых функций по малому параметру совпадает с представлением чисел в позиционной системе счисления, в которой число состоит из мантиссы и порядка. Для того чтобы подставить разложения в уравнения (2.1), надо определить четырнадцать показателей порядка от  $a$  до  $m$ , указывающих соотношения между неизвестными. Такой вопрос не возникает в примерах для одного дифференциального уравнения, разобранных в различных руководствах, например [6], по применению асимптотических методов в силу того, что решение дифференциального уравнения определяется с точностью до некоторого постоянного произвольного множителя. Это свойство позволяет уменьшить в обсуждаемой задаче число требуемых априорно показателей до двенадцати.

В монографии [7] предлагается подбирать показатели исходя из условий непротиворечивости. Под ними понимаются:

– полученные после подстановки выражений (5.1) в систему (2.1) уравнения должны образовывать некоторую рекуррентную последовательность, позволяющую определить все неизвестные для каждого номера приближения;

– ни одно из неизвестных не должно быть нулем.

Покажем, как, имея формулы (2.7), можно определить показатели для медленно меняющихся компонент разложений (5.1). Примем функцию  $w_0 \sim \varepsilon^0$  за единицу измерения асимптотических величин искомым неизвестных. Из уравнений (3.5) следует оценка  $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^s$ . Обратим внимание на то, что из уравнений (3.3) при отсутствии продольной нагрузки получается, что  $\sigma_{z0} \sim \varepsilon u_0$  и  $\sigma_{z0} \sim Z$ , где под  $Z$  понимается характерная величина поперечной нагрузки. При этом из второго уравнения (3.2) следует оценка  $Z \sim \varepsilon^4 w_0$ . Считая, что

асимптотические оценки величин с индексом 0 сохраняются и для величин без него, т.е. для безразмерных перемещений, деформаций и напряжений, заключаем, что в (5.1) показатели для медленно меняющихся компонент будут такими:

$$a = 0, c = 1, e = g = i = 2, k = 3, m = 4 \quad (5.2)$$

и определяются граничными условиями на длинных сторонах. Показатели для быстроменяющихся величин, как это следует из Примеров 1 и 2, определяются граничными условиями на коротких сторонах, подтверждая тем самым известный принцип Сен-Венана [1, 8]. Если дифференцирование медленно меняющихся величин в уравнениях (2.1) по  $x$  не меняет их асимптотический порядок, то последующее умножение на величину  $\varepsilon$  изменяет порядок члена на единицу. Применение оператора  $\varepsilon \partial / \partial x$  к быстро меняющимся величинам, зависящим от  $\xi = x / \varepsilon$ , не меняет их порядок. Следовательно, в представлениях (5.1) показатели подчиняются условию  $d = d = f = h = j = l = n$ . Все искомые неизвестные быстро меняющегося состояния определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} &= 0, \\ \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma, & \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi}, & \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

в которых малый параметр отсутствует и, соответственно, нет возможности при решении итерационным способом контролировать по нему сходимость. Все неизвестные в системе соизмеримы между собой, и единственное ее отличие от исходной системы (2.1) заключается в том, что разыскивается решение большой изменчивости. Это решение, несмотря на формальную запись (5.1) в виде асимптотического степенного ряда по  $\varepsilon$ , не зависит от  $\varepsilon$  и не представляется асимптотическим рядом. Решение, как это следует из примеров п. 4, описывается сингулярно возмущенными уравнениями (3.7) и представляется обобщенными функциями. Интенсивность решения определяется асимптотическим порядком устранимого ими разрыва медленно меняющейся функции.

Подставим асимптотические разложения для медленно меняющегося решения с показателями (5.2)

$$\begin{aligned} w &= \sum_{s=0} \varepsilon^s w_{(s)}, & u &= \varepsilon \sum_{s=0} \varepsilon^s u_{(s)}, & \varepsilon_x &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon^s \varepsilon_{x(s)}, & \varepsilon_z &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon^s \varepsilon_{z(s)}, \\ \sigma_x &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon^s \sigma_{x(s)}, & \tau &= \varepsilon^3 \sum_{s=0} \varepsilon^s \tau_{(s)}, & \sigma_z &= \varepsilon^4 \sum_{s=0} \varepsilon^s \sigma_{z(s)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

в уравнения (2.1)

$$\varepsilon^4 \sum_{s=0} \frac{\partial \sigma_{z(s)}}{\partial z} + \varepsilon^4 \sum_{s=0} \frac{\partial \tau_{(s)}}{\partial \xi} = 0, \quad \varepsilon^3 \sum_{s=0} \frac{\partial \tau_{(s)}}{\partial z} + \varepsilon^3 \sum_{s=0} \frac{\partial \sigma_{x(s)}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \sum_{s=0} \frac{\partial u_{(s)}}{\partial z} &= -\varepsilon \sum_{s=0} \frac{\partial w_{(s)}}{\partial x} + \varepsilon^3 \sum_{s=0} 2(1+\nu)\tau_{(s)}, \\ \varepsilon^2 \sum_{s=0} \sigma_{x(s)} &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon_{x(s)} + \varepsilon^4 \nu \sum_{s=0} \sigma_{z(s)}, & \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon_{x(s)} &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \frac{\partial u_{(s)}}{\partial x}, \\ \varepsilon^2 \sum_{s=0} \sigma_{x(s)} &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon_{x(s)} + \varepsilon^4 \nu \sum_{s=0} \sigma_{z(s)}, \\ \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon_{z(s)} &= \varepsilon^4 (1-\nu^2) \sum_{s=0} \sigma_{z(s)} - \varepsilon^2 \nu \sum_{s=0} \varepsilon_{x(s)}, & \sum_{s=0} \frac{\partial w_{(s)}}{\partial z} &= \varepsilon^2 \sum_{s=0} \varepsilon_{z(s)}.\end{aligned}$$

Приравнивая в обеих частях равенств члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим семь уравнений для определения медленно меняющихся величин рекуррентным образом в порядке возрастания  $s$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{(s)}}{\partial z} &= -\frac{\partial w_{(s)}}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{(s-1)}, & \frac{\partial \sigma_{z(s)}}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau_{(s)}}{\partial x}, & \varepsilon_{x(s)} &= \frac{\partial u_{(s)}}{\partial x}, \\ \sigma_{x(s)} &= \varepsilon_{x(s)} + \nu \sigma_{z(s-1)}, & \varepsilon_{z(s)} &= (1-\nu^2)\sigma_{z(s-1)} - \nu \varepsilon_{x(s)}, \\ \frac{\partial w_{(s)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(s-1)}, & \frac{\partial \tau_{(s)}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_{x(s)}}{\partial x}.\end{aligned}$$

При  $s=0$  получим уравнения для определения величин нулевого приближения

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_{(0)}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} &= -\frac{\partial w_{(0)}}{\partial x}, & \varepsilon_{x(0)} &= \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x}, & \sigma_{x(0)} &= \varepsilon_{x(0)}, \\ \varepsilon_{z(0)} &= -\nu \varepsilon_{x(0)}, & \frac{\partial \tau_{(0)}}{\partial z} &= -\frac{\partial \sigma_{x(0)}}{\partial x}, & \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau_{(0)}}{\partial x},\end{aligned}$$

в которых члены с индексом  $-1$  следует считать равными нулю. Решения уравнений имеют вид

$$\begin{aligned}w_{(0)} &= w_0(x), & u_{(0)} &= -\varepsilon w_0' z + u_0(x), \\ \varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 w_0'' z + u_0', & \sigma_{x(0)} &= -\varepsilon^2 w_0'' z + u_0', \\ \varepsilon_{z(0)} &= -\nu \left( -\varepsilon^2 w_0'' z + u_0' \right), & \tau_{(0)} &= \varepsilon^3 w_0''' \frac{z^2}{2} - u_0'' z + \tau_0, \\ \sigma_{z(0)} &= -\varepsilon^4 w_0''' \frac{z^3}{6} + u_0'' \frac{z^2}{2} - \tau_0 z + \sigma_{z0}(x).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Здесь, как и выше, нижним индексом 0 без скобок отмечены произволы интегрирования. Эти выражения совпадают с полученными ранее (2.4) и (2.6) в результате применения  $w$ - и  $0$ -процессов метода простых итераций. При выполнении граничных условий на длинных сторонах получим также разрешающие уравнения классической теории. Если теперь добавить решения уравнений для быстроменяющихся компонент, то совпадение с методом простых итераций будет полным.

## 6. Заключение

Теорема Банаха о неподвижной точке объединяет все итерационные методы в рамках принципа сжатых отображений. Предложенный Сен-Венаном метод решения уравнений теории упругости легко продолжается до итерационного метода простых итераций. Для этого надо преобразовать весьма сложный и громоздкий оператор исходных уравнений так, чтобы он позволял вычислять неизвестные последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в последующее уравнение как известные, при этом умноженные на малый параметр. Такая последовательность обеспечивается операторами Пикара и выбором величин начального приближения не зависящими от поперечной координаты. В теории тонкостенных систем они называются гипотезами Кирхгоффа или гипотезами недеформируемой нормали. В течение одной итерации четыре раза вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты, являющиеся коэффициентами полинома по степеням поперечной координаты. В случае изотропного материала уравнения, описывающие изгиб и растяжения—сжатия, разделяются. (Для случая произвольного слоистого материала разделение не происходит [9, 10].)

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако это дифференцирование имеет символический характер, т.к. при выполнении граничных условий на длинных сторонах эти производные приравниваются к нагрузке и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре оператора Пикара относительно поперечной координаты и три – относительно продольной. Близость полученного решения оценивается порядком первого отброшенного члена по  $\varepsilon$  для медленно меняющихся величин и оценкой, данной в [11], для быстро меняющихся. Можно показать, что последняя оценка может быть улучшена.

Метод асимптотических рядов по параметру или по малой поперечной координате (путем представления величин только мантиссой), как было отмечено в [12], обладает «внутренним дефектом». Как видим, он заключается в пренебрежении порядком при представлении разложений искомым числовым функциям. В то же время определение порядков требует применения метода простых итераций, который позволяет получать сингулярно возмущенные уравнения для устранения разрывов при выполнении граничных условий на длинных сторонах.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00064.

## Библиографический список

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. Friedrichs K. O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc. Volume 61. No. 6. 1955. 485–504.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
5. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1984. 584 с.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. = Nayfen A. Introduction to perturbation techniques. New-York Chichester Brisbane Toronto, 1981.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. Зверяев Е.М. Пример обобщения принципа Сен-Венана // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 2. С. 166–171.
9. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. С. 1-27. <http://www.mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf>
10. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 95. 29 с. URL: [http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014\\_95.pdf](http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf)
11. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
12. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек // ПММ. 1939. Т.2. Вып.4. С. 427–438.

## Оглавление

1	Введение.....	3
2	Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса.....	5
3	Выполнение граничных условий на длинных сторонах.....	9
4	Выполнение граничных условий на коротких сторонах.....	11
4.1	Пример 1.....	11
4.2	Пример 2.....	12
5	Представление решения в виде степенного асимптотического ряда.....	14
6	Заключение.....	18
	Библиографический список.....	19