ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Троицкая А.В., Сазонов В.В.

Периодические решения дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Троицкая А.В., Сазонов В.В. Периодические решения дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 71. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-71
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-71

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

А.В. Троицкая, В.В. Сазонов

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

Москва – 2018

Троицкая А.В., Сазонов В.В.

Периодические решения дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее большой параметр. Такое уравнение можно интерпретировать как уравнение вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы в случае, когда собственная частота системы намного больше внешней частоты. Приводится новый способ доказательства существования периодического решения этого уравнения, близкого периодическому решению соответствующего вырожденного уравнения. Первоначальное доказательство, полученное ранее одним из авторов статьи, сводилось к решению системы интегральных уравнений, построенной с использованием функции Грина периодической краевой задачи для линеаризованного и преобразованного исходного уравнения. Такой способ доказательства был предложен Лихтенштейном и является альтернативой способу Пуанкаре, основанному на применении теоремы о неявной функции. В случае сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений способ Лихтенштейна – более экономный. Тем не менее, интересно посмотреть, как можно применить способ Пуанкаре в сингулярно возмущенной задаче. Приводимое ниже доказательство получено способом Пуанкаре.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка, большой параметр, периодическое решение, метод Пуанкаре, метод Лихтенштейна

Troitskaya A.V., Sazonov V.V

Periodic solutions of a second order differential equation with a large parameter

We consider a second-order differential equation containing a large parameter. Such an equation can be interpreted as the equation of forced oscillations of a mechanical system with one degree of freedom in the case when the natural frequency of the system is much greater than the external frequency. We present a new way of proving the existence of a periodic solution of this equation close to the periodic solution of the corresponding degenerate equation. The original proof, obtained earlier by one of the authors of the paper, was reduced to solving a system of integral equations constructed using the Green's function of a periodic boundary-value problem for the linearized and transformed initial equation. This method of proof was proposed by Lichtenstein and is an alternative to the Poincaré method, based on the implicit function theorem. In the case of singularly perturbed differential equations, the Liechtenstein method seems to be more economical. Nevertheless, it is interesting to see how the Poincare method can be applied in a singularly perturbed problem. The proof given below is obtained by the Poincaré method.

Key words: second-order differential equation, large parameter, periodic solution, Poincaré method, Lichtenstein's method

1. Постановка задачи. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \mu^2 F(t,x) = f(t,x,\dot{x}), \qquad (1.1)$$

где μ – положительный параметр, $F(t,x)$ и $f(t,x,y)$ – периодические функции t с периодом $T>0$. Пусть уравнение $F(t,x)=0$ имеет T-периодический корень $x=\varphi(t)$. Будем искать T-периодические решения уравнения (1.1), определенные при достаточно большом μ и близкие решению $x=\varphi(t)$. Полагаем, что функции $F(t,x)$, $f(t,x,y)$ и $\varphi(t)$ трижды непрерывно дифференцируемы при $0 \le t \le T$ и достаточно малых $|x-\varphi(t)|$, $|y-\dot{\varphi}(t)|$ и

$$p(t) = \frac{\partial F[t,\varphi(t)]}{\partial x} > 0 \qquad (0 \le t \le T).$$

Положим

$$a = \frac{1}{4b}\int_0^T \frac{\partial f[t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t)]}{\partial y}dt, \quad b = \frac{1}{2}\int_0^T \sqrt{p(t)}\,dt, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 ab}.$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ рассмотрим множество

$$I(\varepsilon) = \{\mu : \mu > 0, \operatorname{sh}^2 ab + \sin^2 \mu b \ge \varepsilon^2\}.$$

Это множество не пусто. При $a \ne 0$ и $0 < \varepsilon < |\operatorname{sh} ab|$ оно совпадает с интервалом $(0,+\infty)$, при $a=0$

$$I(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi(n-1)+\arcsin\varepsilon}{b}, \frac{\pi n - \arcsin\varepsilon}{b}\right].$$

Теорема [1]. Для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu \ge M$, $\mu \in I(\varepsilon)$ уравнение (1.1) имеет единственное T-периодическое решение $x_*(t,\mu)$, удовлетворяющее неравенствам

$$|x_*(t,\mu) - \varphi(t)| \le \frac{C_1}{\mu^2}, \quad |\dot{x}_*(t,\mu) - \dot{\varphi}(t)| \le \frac{C_2}{\mu} \quad (0 \le t \le T). \qquad (1.2)$$

В [1] доказательство теоремы сводилось к доказательству существования системы интегральных уравнений, построенной с использованием функции Грина периодической краевой задачи для линейного уравнения, получающегося преобразованием уравнения (1.1) и его линеаризацией в окрестности корня $x=\varphi(t)$. Такой способ доказательства существования периодических решений был предложен Лихтенштейном [2]. Его можно рассматривать как альтернативу способу Пуанкаре [3], основанному на применении теоремы о неявной функции. В регулярно возмущенных задачах способ Лихтенштейна выглядит более громоздким, и его применение обычно требует достаточно аккуратного проведения всех этапов доказательства. В способе Пуанкаре основное внимание уделяется проверке отличия от нуля некоторого якобиана, обоснованность рассмотрения которого – доказательство продолжаемости решения возмущенной системы на период – обычно детально не рассматривается. В случае сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, в частности в случае уравнений с большим параметром, вопрос о продолжении решений заметно усложняется. В этой ситуации способ Лихтенштейна становится более экономным. Тем не менее, интересно посмотреть, как можно применить способ Пуанкаре в сингулярно возмущенной задаче. Ниже приводится доказательство сформулированной теоремы способом Пуанкаре.

2. Вспомогательные преобразования и оценки. В уравнении (1.1) сделаем замену переменных [1] $t \mapsto \tau$, $x \mapsto z$:

$$\tau = \int_0^t \sqrt{p(s)}\,ds, \quad z = [x-\varphi(t)]\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t c(s)\,ds - at\right),$$

$$c(t) = \frac{\dot p(t)}{2p^{3/2}(t)} - \frac{1}{p^{1/2}(t)}\cdot\frac{\partial f[t,\varphi(t),\dot\varphi(t)]}{\partial y}.$$

Такая замена представляет собой модифицированную подстановку Лиувилля. В новых переменных уравнение (1.1) можно записать в виде

$$z'' - 2az' + (a^2+\mu^2)z = f_1(\tau,z,z') + \mu^2 F_1(\tau,z). \tag{2.1}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по τ, функции $f_1(\tau,z,u)$ и $F_1(\tau,z)$ периодически зависят от τ с периодом $2b$ и удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial f_1(\tau,0,0)}{\partial u} = F_1(\tau,0) = \frac{\partial F_1(\tau,0)}{\partial z} = 0 \quad (0 \le \tau \le 2b). \tag{2.2}$$

Сделанная замена переменных сводит отыскание T-периодических решений уравнения (1.1), близких $\varphi(t)$, к отысканию $2b$-периодических решений уравнения (2.1), близких к нулю.

В силу условий гладкости, наложенных на функции F, f и φ, функции F_1 и f_1 непрерывно дифференцируемы по τ и трижды непрерывно дифференцируемы по z, u. Отсюда и из (2.2) следует существование таких положительных чисел h_1, h_2, M_1, M_2 и M_3, что для всех τ, z, $\bar z$, u, $\bar u$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le \tau \le 2b$, $|z| \le h_1$, $|\bar z| \le h_1$, $|u| \le h_2$, $|\bar u| \le h_2$, справедливы оценки

$$|f_1(\tau,z,u) - f_1(\tau,\bar z,\bar u)| \le M_1 |z-\bar z| + M_2 |u-\bar u| (|z|+|\bar z|+|u|+|\bar u|),$$

$$|F_1(\tau,z) - F_1(\tau,\bar z)| \le M_3 |z-\bar z| (|z|+|\bar z|). \tag{2.3}$$

Обозначим $f_1^\circ(\tau) = f_1(\tau,0,0)$, $M_4 = M_1 + M_2 h_2$. При $\bar z = \bar u = 0$ имеем

$$|f_1(\tau,z,u) - f_1^\circ(\tau)| \le M_4 |z| + M_2 u^2, \quad |F_1(\tau,z)| \le M_3 z^2. \tag{2.4}$$

Решение начальной задачи $z(0) = \alpha$, $z'(0) = \beta$ для линейного уравнения

$$z'' - 2az' + (a^2 + \mu^2) z = h(\tau), \tag{2.5}$$

где $h(\tau)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, представим в виде

$$z(\tau) = \Phi_1(\tau)\alpha + \Phi_2(\tau)\beta + \int_0^\tau \Phi_2(\tau - s) h(s)\, ds, \tag{2.6}$$

$$\Phi_1(\tau) = e^{a\tau}\left(\cos\mu\tau - \frac{a}{\mu}\sin\mu\tau\right), \quad \Phi_2(\tau) = \frac{\sin\mu\tau}{\mu} e^{a\tau}.$$

Производная этого решения выражается формулой

$$z'(\tau) = \Phi_1'(\tau)\alpha + \Phi_2'(\tau)\beta + \int_0^\tau \Phi_2'(\tau - s) h(s)\, ds. \tag{2.7}$$

Нормой функции $h(\tau)$, непрерывной на отрезке $0 \le \tau \le 2b$, будем называть число $\nu(h) = \max\limits_{0\le\tau\le 2b} |h(\tau)|$. Для решения (2.6) при $\alpha = \beta = 0$ и его производной при $\mu \ge 1$ имеют место оценки

$$\nu(z) \le \mu^{-1} N_1 \nu(h), \quad \nu(z') \le N_1 \nu(h), \tag{2.8}$$

в которых положительная константа N_1 не зависит от μ. Если функция $h(\tau)$ в (2.5) дважды непрерывно дифференцируема, то, сделав в рассматриваемой начальной задаче замену переменной $z = y + \mu^{-2} h(\tau)$ и применив к преобразованной задаче формулы (2.6), (2.7), получим для z и z' выражения, содержащие кроме h еще h' и h''. Из этих выражений следует существование такой не зависящей от μ константы N_2, что при $\mu \ge 1$ справедливы оценки

$$\nu(z) \le N_2 R, \quad \nu(z') \le \mu N_2 R, \tag{2.9}$$

$$R = |\alpha| + \mu^{-1}|\beta| + \mu^{-2}\nu(h) + \mu^{-3}[\nu(h') + \nu(h'')].$$

3. Система интегральных уравнений. Начальная задача $z(0) = \alpha$, $z'(0) = \beta$ для уравнения (2.1) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered} z(\tau) = \Phi_1(\tau)\alpha + \Phi_2(\tau)\beta + \int_0^\tau \Phi_2(\tau - s)\{f_1[s, z(s), u(s)] + \\ + \mu^2 F_1[s, z(s)]\}ds \equiv L_1(u, z), \\ u(\tau) = \Phi_1'(\tau)\alpha + \Phi_2'(\tau)\beta + \int_0^\tau \Phi_2'(\tau - s)\{f_1[s, z(s), u(s)] + \\ + \mu^2 F_1[s, z(s)]\}ds \equiv L_2(z, u). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $u = z'$, $0 \le \tau \le 2b$. Далее всюду полагаем $\mu \ge 1$. Систему (4.1) будем решать методом последовательных приближений. Построим последовательности функций $z_n(\tau)$, $u_n(\tau) \equiv z_n'(\tau)$ $(0 \le \tau \le 2b,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$, положив

$$z_0(\tau) \equiv u_0(\tau) \equiv 0, \quad z_{n+1} = L_1(z_n, u_n), \quad u_{n+1} = L_2(z_n, u_n). \tag{3.2}$$

Начальные условия α и β будем считать удовлетворяющими неравенствам

$$|\alpha| \le A\mu^{-2}, \quad |\beta| \le A\mu^{-1}, \tag{3.3}$$

где A – заданное положительное число. Докажем, что при достаточно большом μ последовательности z_n и u_n сходятся к решению системы (3.1). Сначала докажем, что

$$\nu(z_n) \le B\mu^{-2} \le h_1, \quad \nu(u_n) \le B\mu^{-1} \le h_2 \tag{3.4}$$

при некоторой не зависящей от μ постоянной $B > 0$.

Функции z_1 и u_1 играют важную роль в доказательстве. Они имеют вид

$$z_1(\tau) = \Phi_1(\tau)\alpha + \Phi_2(\tau)\beta + \int_0^\tau \Phi_2(\tau - s) f_1^\circ(s)\,ds,$$

$$u_1(\tau) = \Phi_1'(\tau)\alpha + \Phi_2'(\tau)\beta + \int_0^\tau \Phi_2'(\tau - s) f_1^\circ(s)\,ds.$$

Применяя к выписанным соотношениям первое неравенство (2.4) и оценки (2.9), получим

$$\nu(z_1) \le N_2 P, \quad \nu(u_1) \le \mu N_2 P, \quad P = |\alpha| + \mu^{-1}|\beta| + \mu^{-2}K,$$

$$K = \nu(f_1^\circ) + \nu[(f_1^\circ)'] + \nu[(f_1^\circ)''].$$

С учетом оценок (3.3) будем иметь

$$\nu(z_1) \le D\mu^{-2}, \quad \nu(u_1) \le D\mu^{-1}, \quad D = N_2(2A+K). \tag{3.5}$$

Соотношения (3.2) при $n \ge 1$ представим в виде

$$z_{n+1}(\tau) = z_1(\tau) + \int_0^\tau \Phi_2(\tau - s)\{f_1[s, z_n(s), u_n(s)] - f_1^\circ(s) + \mu^2 F_1[s, z(s)]\}ds,$$

$$u_{n+1}(\tau) = u_1(\tau) + \int_0^\tau \Phi_2'(\tau - s)\{f_1[s, z_n(s), u_n(s)] - f_1^\circ(s) + \mu^2 F_1[s, z(s)]\}ds.$$

Предположим, что $\nu(z_n) \le h_1$, $\nu(u_n) \le h_2$. Тогда в силу неравенств (2.4) и (2.8) получим

$$\nu(z_{n+1}) \le \nu(z_1) + \mu^{-1}P_1, \quad \nu(u_{n+1}) \le \nu(u_1) + P_1,$$

$$P_1 = N_1[M_4\nu(z_n) + M_2\nu^2(u_n) + \mu^2 M_3\nu^2(z_n)].$$

Возьмем $B > D$ и

$$\mu \ge \mu_1 = \max\left\{1, \sqrt{\frac{B}{h_1}}, \frac{B}{h_2}, \frac{\kappa}{B-D}\right\}, \quad \kappa = N_1 B[M_4 + B(M_2 + M_3)].$$

Тогда, если для некоторого n неравенства (3.4) выполнены, то с учетом (3.5) и последних неравенств будем иметь

$$\nu(z_{n+1}) \le \frac{D}{\mu^2} + \frac{\kappa}{\mu^3} \le \frac{B}{\mu^2} \le h_1, \quad \nu(u_{n+1}) \le \frac{D}{\mu} + \frac{\kappa}{\mu^2} \le \frac{B}{\mu} \le h_2.$$

Поскольку при $n = 1$ неравенства (3.4) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех n.

Докажем сходимость итераций (3.2). Рассмотрим последовательности $p_n = \nu(z_n - z_{n-1})$, $q_n = \nu(u_n - u_{n-1})$. Вследствие неравенств (2.3) и (2.8) имеем

$$p_{n+1} \le \mu^{-1}N_1 r_n, \quad q_{n+1} \le N_1 r_n, \quad r_n = G_n p_n + H_n q_n,$$

$$G_n = M_1 + \mu^2 M_3[\nu(z_n) + \nu(z_{n-1})], \quad H_n = M_2[\nu(z_n) + \nu(z_{n-1}) + \nu(u_n) + \nu(u_{n-1})].$$

Из оценок (3.4) следует $G_n \le M_1 + 2BM_3 \equiv Q_1$, $H_n \le 4BM_2\mu^{-1} \equiv Q_2\mu^{-1}$. Таким образом, $r_n \le Q_1 p_n + \mu^{-1}Q_2 q_n \equiv \rho_n$. Для положительной последовательности ρ_n имеют место неравенства

$$\rho_{n+1} = Q_1 p_{n+1} + \frac{Q_2}{\mu} q_{n+1} \le \frac{N_1(Q_1+Q_2)}{\mu} r_n \le \frac{N_1(Q_1+Q_2)}{\mu} \rho_n.$$

Возьмем $\mu \ge \mu_2 = \max[\mu_1, 2N_1(Q_1+Q_2)]$. Тогда $\rho_{n+1} \le \rho_n/2$. Используя эту оценку, можно доказать, что последовательности $z_n(\tau)$, $u_n(\tau)$ равномерно сходятся на отрезке $0 \le \tau \le 2b$ к непрерывным функциям $z_*(\tau)$, $u_*(\tau)$. По построению $z_*(0) = \alpha$, $u_*(0) = \beta$ и вследствие неравенств (3.4)

$$\nu(z_*) \le B\mu^{-2} \le h_1, \quad \nu(u_*) \le B\mu^{-1} \le h_2. \tag{3.6}$$

Переходя в соотношениях (3.2) к пределу при $n \to \infty$, находим, что $z_*(\tau)$, $u_*(\tau)$ – решение системы (3.1), функция $z_*(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема и $z_*'(\tau) = u_*(\tau)$. Отсюда следует, что $z_*(\tau)$ является искомым решением уравнения (2.1).

Докажем единственность найденного решения. Предположим, что система (3.1) имеет еще одно решение $z^\circ(\tau)$, $u^\circ(\tau)$, удовлетворяющее оценкам (3.6) при достаточно большом μ. Тогда с помощью описанных выше построений для величины $\rho = Q_1\nu(z_* - z^\circ) + \mu^{-1}Q_2\nu(u_* - u^\circ)$ можно получить неравенство $\rho \le \rho/2$. Отсюда $\rho = 0$, и рассматриваемые решения совпадают.

По построению найденное решение системы (3.1) зависит также от величин μ, α и β. Эта зависимость непрерывна на множестве, задаваемом неравенствами (3.3) и $\mu \ge \mu_2$. Вид зависимости решения от α и β можно уточнить. Докажем существование такого положительного числа E, что при достаточно большом μ выполняются неравенства

$$\nu[z_*(\tau,\bar\alpha,\bar\beta) - z_*(\tau,\alpha,\beta)] \le E\Delta, \quad \nu[u_*(\tau,\bar\alpha,\bar\beta) - u_*(\tau,\alpha,\beta)] \le \mu E\Delta, \tag{3.7}$$

где $\Delta = |\bar\alpha - \alpha| + \mu^{-1}|\bar\beta - \beta|$ и пары начальных условий (α,β), $(\bar\alpha,\bar\beta)$ удовлетворяют неравенствам (3.3). Последовательности функций (3.2) для этих пар обозначим соответственно z_n, u_n и $\bar z_n$, $\bar u_n$. Положим $\xi_n = \nu(\bar z_n - z_n)$,

$\eta_n = \nu(\bar{u}_n - u_n)$. По построению $\xi_1 \le E_1\boldsymbol{\Delta}$, $\eta_1 \le \mu E_1\boldsymbol{\Delta}$, $E_1 = 2e^{2|a|b}$, $\mu \ge \max(a, \mu_2)$.

Далее с небольшими изменениями повторяются только что проведенные оценки. Вследствие неравенств (2.3) и (2.8) имеем

$$\xi_{n+1} \le \xi_1 + \mu^{-1}N_1\zeta_n, \quad \eta_{n+1} \le \eta_1 + N_1\zeta_n, \quad \zeta_n = U_n\xi_n + V_n\xi_n,$$

$$U_n = M_1 + \mu^2 M_3[\nu(z_n) + \nu(\bar{z}_n)], \quad V_n = M_2[\nu(z_n) + \nu(\bar{z}_n) + \nu(u_n) + \nu(\bar{u}_n)].$$

Из оценок (3.4) следует $U_n \le M_1 + 2BM_3 \equiv Q_1$, $V_n \le 4BM_2\mu^{-1} \equiv Q_2\mu^{-1}$. Отсюда $\zeta_n \le Q_1\xi_n + \mu^{-1}Q_2\eta_n$. Возьмем число $E > E_1$ и

$$\mu \ge \mu_3 = \max\left(a, \mu_2, \frac{N_1E(Q_1+Q_2)}{E_1 - E}\right).$$

Тогда, если для некоторого n выполнены неравенства $\xi_n \le E\Delta$, $\eta_n \le \mu E\Delta$, то

$$\zeta_n \le (Q_1 + Q_2)E\Delta, \quad \xi_{n+1} \le [E_1 + \mu^{-1}N_1E(Q_1+Q_2)]\Delta \le E\Delta,$$

$$\eta_{n+1} \le [\mu E_1 + N_1E(Q_1+Q_2)]\Delta = \mu[E_1 + \mu^{-1}N_1E(Q_1+Q_2)]\Delta \le \mu E\Delta.$$

Поскольку при $n=1$ неравенства $\xi_n \le E\boldsymbol{\Delta}$, $\eta_n \le \mu E\boldsymbol{\Delta}$ выполнены, отсюда следует их справедливость при всех n. Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенства (3.7). Эти неравенства сохранят свой вид, если E умножить на $\sqrt{2}$ и взять $\Delta = \sqrt{(\bar{\alpha} - \alpha)^2 + \mu^{-2}(\bar{\beta} - \beta)^2}$.

4. Применение теоремы о неявной функции. Отыскание периодических решений уравнения (2.1) сводится к решению системы уравнений

$$z_*(2b, \alpha, \beta, \mu) - \alpha = 0, \quad u_*(2b, \alpha, \beta, \mu) - \beta = 0.$$

Эту систему, используя (3.1), запишем в виде

$$[\Phi_1(2b) - 1]\alpha + \Phi_2(2b)\beta + \varphi_1(\mu) + \Psi_1(\alpha, \beta) = 0, \tag{4.1}$$

$$\Phi_1'(2b)\alpha + [\Phi_2'(2b) - 1]\beta + \varphi_2(\mu) + \Psi_2(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\varphi_1 = \int_0^{2b} \Phi_2(2b-s)\, f_1^\circ(s)\, ds, \quad \varphi_2 = \int_0^{2b} \Phi_2'(2b-s)\, f_1^\circ(s)\, ds,$$

$$\Psi_1(\alpha, \beta) = \int_0^{2b} \Phi_2(2b-s)\{ f_1[s, z_*(s), u_*(s)] - f_1^\circ(s) + \mu^2 F_1[s, z_*(s)]\} ds,$$

$$\Psi_2(\alpha,\beta)=\int_0^{2b}\Phi_2'(2b-s)\{f_1[s,z_*(s),u_*(s)]-f_1^\circ(s)+\mu^2F_1[s,z_*(s)]\}ds\,.$$

Здесь

$$|\varphi_1|\le\frac{N_2K}{\mu^2},\quad |\varphi_2|\le\frac{N_2K}{\mu} \tag{4.2}$$

и при выполнении неравенств (3.3)

$$|\Psi_1(\alpha,\beta)|\le\frac{\kappa}{\mu^3},\quad |\Psi_2(\alpha,\beta)|\le\frac{\kappa}{\mu^2}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим на плоскости (α,β) два векторных поля, которые обозначим P_1 и P_2. Компоненты поля P_1 – левые части системы (4.1), компоненты поля P_2

$$[\Phi_1(2b)-1]\alpha+\Phi_2(2b)\beta+\varphi_1(\mu),\quad \Phi_1'(2b)\alpha+[\Phi_2'(2b)-1]\beta+\varphi_2(\mu).$$

Норму $\|\cdot\|$ на плоскости (α,β) зададим формулой $\|(\alpha,\beta)\|^2=\alpha^2+\mu^{-2}\beta^2$. В этой плоскости рассмотрим эллипс

$$[\alpha-\xi_1(\mu)]^2+\mu^{-2}[\beta-\xi_2(\mu)]^2=R^2\mu^{-4}. \tag{4.4}$$

Здесь $(\xi_1(\mu),\xi_2(\mu))$ – решение линейной системы $P_2=0$ с определителем $\delta=4e^{2ab}(sh^2ab+\sin^2\mu b)$, число $R>0$ не зависит от μ. Пусть $\mu\in I(\varepsilon)$. Тогда $\delta\ge 4e^{2ab}\varepsilon^2$ и в силу оценок (4.2) при некотором не зависящем от μ числе $G>0$ справедливы неравенства

$$|\xi_1|\le\frac{G}{\mu^2},\quad |\xi_2|\le\frac{G}{\mu}.$$

В этих неравенствах число G можно взять не зависящим от числа A в (3.3), а это A можно выбирать произвольно. Примем $A>G,\ R<A-G$. Тогда кривая (4.4) будет лежать в области (3.3). Вследствие оценок (4.3) на этой кривой при достаточно большом $\mu\in I(\varepsilon)$

$$\|P_1-P_2\|=\sqrt{\Psi_1^2(\alpha,\beta)+\mu^{-2}\Psi_2^2(\alpha,\beta)}\le\sqrt{2}\kappa\mu^{-3}.$$

С другой стороны,

$$\|P_2\|\ge\Lambda R\mu^{-2},\quad \Lambda=\sqrt{\delta}+O(\mu^{-1}).$$

Таким образом, при достаточно большом $\mu\in I(\varepsilon)$ на кривой (4.4) выполнено неравенство $\|P_2\|>\|P_1-P_2\|$. По теореме Руше [4] поля P_1 и P_2 на этой кривой имеют одинаковое вращение. Поле P_2 имеет единственную особую точку (ξ_1,ξ_2) внутри кривой (4.4). Следовательно, его вращение не равно нулю. Отсюда следует, что P_1 внутри этой кривой также имеет особую точку. Она – искомое решение системы (4.1). Единственность решения отсюда не следует.

Чтобы доказать единственность, воспользуемся стандартным приемом. Пусть существует два решения системы (4.1): (α,β) и $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ в области (3.3). Этим решениям отвечают соответственно решения $z(\tau),u(\tau)$ и $\overline{z}(\tau),\overline{u}(\tau)$ системы (3.1). В силу (4.1) имеем

$$[\Phi_1(2b)-1](\overline{\alpha}-\alpha)+\Phi_2(2b)(\overline{\beta}-\beta)=\Psi_1(\alpha,\beta)-\Psi_1(\overline{\alpha},\overline{\beta}), \tag{4.5}$$

$$\Phi_1'(2b)(\overline{\alpha}-\alpha)+[\Phi_2'(2b)-1](\overline{\beta}-\beta)=\Psi_2(\alpha,\beta)-\Psi_2(\overline{\alpha},\overline{\beta}).$$

Норма вектора в левой части этих соотношений оценивается снизу выражением $\Lambda\,\|(\overline{\alpha}-\alpha,\overline{\beta}-\beta)\|$. Норму вектора в правой части оценим сверху. Положим $\xi=\nu(\overline{z}-z)$, $\eta=\nu(\overline{u}-u)$. В п. 3 доказано существование такого числа E, что $\xi\le E\,\|(\overline{\alpha}-\alpha,\overline{\beta}-\beta)\|$, $\eta\le\mu E\,\|(\overline{\alpha}-\alpha,\overline{\beta}-\beta)\|$ при $\mu\ge\mu_3$. Из соотношения

$$\Psi_1(\overline{\alpha},\overline{\beta})-\Psi_1(\alpha,\beta)=\int_0^{2b}\Phi_2(2b-s)\{f_1[s,\overline{z}(s),\overline{u}(s)]-$$
$$-f_1[s,z(s),u(s)]+\mu^2F_1[s,\overline{z}(s)]-\mu^2F_1[s,z(s)]\}ds$$

с учетом неравенств (2.3) и (2.8) имеем (ср. оценки в конце п. 3)

$$|\Psi_1(\overline{\alpha},\overline{\beta})-\Psi_1(\alpha,\beta)|\le\frac{N_1}{\mu}\left(Q_1\xi+\frac{Q_2\eta}{\mu}\right)\le\frac{Q_3}{\mu}\,\|(\overline{\alpha}-\alpha,\overline{\beta}-\beta)\|.$$

Здесь $Q_1=M_1+2BM_3$, $Q_2=4BM_2$, $Q_3=N_1E(Q_1+Q_2)$. Аналогично

$$|\Psi_2(\overline{\alpha},\overline{\beta})-\Psi_2(\alpha,\beta)|\le N_1\left(Q_1\xi+\frac{Q_2\eta}{\mu}\right)\le Q_3\,\|(\overline{\alpha}-\alpha,\overline{\beta}-\beta)\|.$$

Следовательно, норма вектора в правой части соотношений (4.5) оценивается сверху выражением $2Q_3\mu^{-1}\,\|(\overline{\alpha}-\alpha,\overline{\beta}-\beta)\|$. Полученные оценки норм векторов в левой и правой частях (4.5) при достаточно большом $\mu\in I(\varepsilon)$ могут одновременно выполняться только при $\overline{\alpha}=\alpha$, $\overline{\beta}=\beta$.

5. Вынужденные колебания математического маятника. Индивидуальные свойства уравнения (1.1) позволяют иногда упростить исследование его периодических решений. В качестве примера рассмотрим колебания математического маятника с большой собственной частотой под действием периодической силы. Уравнение движения маятника запишем в виде

$$\ddot{x} + \mu^2 \sin x = \sin t. \tag{5.1}$$

Здесь μ – положительный параметр, $\mu >> 1$. Уравнение (5.1) инвариантно относительно преобразований $t \to -t$, $x \to -x$ и $t \to t+\pi$, $x \to -x$, поэтому можно искать его нечетные π-антипериодические решения. Такие решения определяются краевыми условиями

$$x(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{5.2}$$

Следуя изложенной выше схеме, для уравнения (5.1) поставим начальную задачу

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = a \tag{5.3}$$

и построим ее решения на отрезке $0 \le t \le \pi/2$. Построение сводится к решению интегрального уравнения

$$x(t) = x_1(t) + \mu \int_0^t \sin \mu(t-s) F[x(s)]\, ds \equiv L_1(x), \tag{5.4}$$

$$x_1(t) = \left(a - \frac{1}{\mu^2 - 1}\right) \frac{\sin \mu t}{\mu} + \frac{\sin t}{\mu^2 - 1}, \quad F(x) = x - \sin x.$$

Здесь функция $x_1(t)$ – решение уравнения $\ddot{x} + \mu^2 x = \sin t$ с начальными условиями (5.3).

Уравнение (5.4) будем решать методом последовательных приближений. Построим последовательность функций $x_n(t)$ $(0 \le t \le \pi/2,\ n = 1, 2, \dots)$, положив

$$x_{n+1} = L_1(x_n). \tag{5.5}$$

Начальное условие a ниже будем считать удовлетворяющим неравенству

$$|a| \le A\mu^{-1}, \tag{5.6}$$

где A – любое положительное число. Докажем, что при достаточно большом μ последовательность x_n сходится к решению уравнения (5.4). Доказательство использует следующие неравенства для функции $F(x)$ при $|x| \le 1$, $|y| \le 1$:

$$|F(x)| < \frac{|x|^3}{6}, \quad |F(y) - F(x)| < |y - x| \frac{x^2 + y^2}{2}. \tag{5.7}$$

Сначала докажем, что

$$\nu(x_n) \le B\mu^{-2} \le 1 \qquad (5.8)$$

при некоторой не зависящей от μ постоянной $B > 0$. Здесь и ниже $\nu(\cdot)$ – норма пространства непрерывных функций на отрезке $0 \le t \le \pi/2$. При $\mu \ge \sqrt{2}$ имеем

$$\nu(x_1) \le \frac{|a|}{\mu} + \frac{4}{\mu^2} \le \frac{A+4}{\mu^2}.$$

Предположим еще, что $\nu(x_n) \le 1$. Тогда, оценивая правую часть соотношения (5.5) с учетом первого неравенства (5.7), поучим

$$\nu(x_{n+1}) \le \frac{A+4}{\mu^2} + \frac{\pi\mu}{12}\nu^3(x_n).$$

Возьмем $B > A+4$ и

$$\mu \ge \mu_1 = \max\left\{\sqrt{2},\, B,\, \sqrt[3]{\frac{\pi B^3}{12(B-A-4)}}\right\}.$$

Тогда, если для некоторого n неравенства (5.8) выполнены, то с учетом последних неравенств будем иметь

$$\nu(x_{n+1}) \le \frac{A+4}{\mu^2} + \frac{\pi B^3}{12\mu^5} \le \frac{1}{\mu^2}\left(A+4+\frac{\pi B^3}{12\mu^3}\right) \le \frac{B}{\mu^2} \le 1.$$

Так как при $n=1$ неравенства (5.8) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех n.

Докажем сходимость последовательных приближений (5.5). Вследствие второго неравенства (5.7) при $\mu \ge \mu_1$ имеем

$$\nu(x_{n+1} - x_n) \le \frac{\pi\mu}{4}[\nu^2(x_n) + \nu^2(x_{n-1})]\nu(x_n - x_{n-1}) \le \frac{\pi B^2}{2\mu^3}\nu(x_n - x_{n-1}).$$

Если взять $\mu \ge \mu_2 = \max(\sqrt[3]{\pi B^2}, \mu_1)$, то получим $\nu(x_{n+1} - x_n) \le \nu(x_n - x_{n-1})/2$. Отсюда следует, что последовательность x_n равномерно сходится на отрезке $0 \le t \le \pi/2$ к некоторой непрерывной функции $x_*(t)$. Переходя в соотношении (5.5) к пределу при $n \to \infty$, получаем $x_* = L_1(x_*)$, т.е. $x_*(t)$ – решение уравнения (5.4). В силу (5.8)

$$\nu(x_*) \le B\mu^{-2} \le 1. \qquad (5.9)$$

Точно так же, как в п. 4, можно установить, что решение $x_*(t)$ единственно.

По построению найденное решение уравнения (5.4) зависит также от величин μ и a. Эта зависимость непрерывна на множестве, задаваемом неравенствами (5.6) и $\mu \geq \mu_2$. Вид зависимости решения от a можно уточнить. Докажем существование такого положительного числа C, что при достаточно большом μ выполняется неравенство

$$\nu[x_*(t,\bar{a}) - x_*(t,a)] \leq \frac{C}{\mu} |\bar{a} - a|. \tag{5.10}$$

Имеем $\nu[x_1(t,\bar{a}) - x_1(t,a)] = \mu^{-1} |\bar{a} - a|$. В силу второго неравенства (5.7)

$$\nu[x_{n+1}(t,\bar{a}) - x_{n+1}(t,a)] \leq \frac{|\bar{a} - a|}{\mu} +$$

$$+ \frac{\mu\pi}{4} \{\nu^2[x_n(t,\bar{a})] + \nu^2[x_n(t,a)]\} \nu[x_n(t,\bar{a}) - x_n(t,a)] \leq$$

$$\leq \frac{|\bar{a} - a|}{\mu} + \frac{\pi B^2}{2\mu^3} \nu[x_n(t,\bar{a}) - x_n(t,a)].$$

Возьмем

$$C > 1, \quad \mu \geq \mu_3 = \max\left(\mu_2, \sqrt{\frac{\pi B^2 C}{2(C-1)}}\right).$$

Тогда, если для некоторого n неравенство $\nu[x_n(t,\bar{a}) - x_n(t,a)] \leq C |\bar{a} - a|$ выполнено, то

$$\nu[x_{n+1}(t,\bar{a}) - x_{n+1}(t,a)] \leq \frac{|\bar{a} - a|}{\mu} + \frac{\pi B^2}{2\mu^3} \nu[x_n(t,\bar{a}) - x_n(t,a)] \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{\pi B^2 C}{2\mu^3}\right) \frac{|\bar{a} - a|}{\mu} \leq \frac{C}{\mu} |\bar{a} - a|.$$

Отсюда следует их справедливость при всех n. Переходя в последней цепочке неравенств к пределу при $n \to \infty$, получаем (5.10).

Отыскание решения краевой задачи (5.2) сводится к решению уравнения $\dot{x}_*(\pi/2) = 0$. Производная решения $x_*(t)$ имеет вид

$$\dot{x}_*(t) = \left(a - \frac{1}{\mu^2 - 1}\right) \cos \mu t + \frac{\cos t}{\mu^2 - 1} + \mu^2 \int_0^t \cos \mu(t-s) F[x_*(s)]\, ds, \tag{5.11}$$

и уравнение $\dot{x}_*(\pi/2) = 0$ представим в виде

$$a = \frac{1}{\mu^2 - 1} + \Psi(a,\mu), \quad \Psi(a,\mu) = -\frac{\mu^2}{\cos(\mu\pi/2)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos\mu\left(\frac{\pi}{2} - s\right) F[x_*(s)]ds.$$

Выписанное уравнение будем решать методом простой итерации. Найдем условие сходимости этого процесса.

Возьмем произвольное число $\varepsilon \in (0,1)$. Введем множество

$$I'(\varepsilon) = \left\{\mu : \mu > 0, \left|\cos\frac{\mu\pi}{2}\right| > \varepsilon\right\}.$$

При $\mu \geq \mu_3$, $\mu \in I'(\varepsilon)$ и выполнении неравенства (5.6) имеют место оценки

$$|\Psi(a,\mu)| \leq \frac{\mu^2\pi}{12\varepsilon} \nu^3(x_*) \leq \frac{\pi B^3}{12\varepsilon\mu^4},$$

$$|\Psi(\bar{a},\mu) - \Psi(a,\mu)| \leq \frac{\pi\mu^2\nu^2(x_*)}{\varepsilon} \nu[x_*(t,\bar{a}) - x_*(t,a)] \leq \frac{\pi B^2 C}{\varepsilon\mu^3} |\bar{a} - a|.$$

Они устанавливаются с помощью неравенств (5.7), (5.9) и (5.10). Для итераций

$$a_1 = \frac{1}{\mu^2 - 1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{\mu^2 - 1} + \Psi(a_n, \mu) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

справедлива оценка

$$|a_n| \leq \frac{1}{\mu^2 - 1} + \frac{\pi B^3}{12\varepsilon\mu^4} \leq \frac{1}{\mu^2}\left(2 + \frac{\pi B^3}{12\varepsilon\mu^2}\right).$$

Потребуем выполнения условия $A > 2$ (раньше от этого числа требовалась положительность) и неравенств

$$\mu \in I'(\varepsilon), \ \mu \geq \mu_4 = \max\left(\mu_3, \sqrt[3]{\frac{\pi B^2 C}{2\varepsilon}}, \sqrt{\frac{\pi B^3}{12\varepsilon(A-2)}}\right).$$

Тогда $|a_n| \leq A\mu^{-1}$, а неравенство $|\Psi(\bar{a},\mu) - \Psi(a,\mu)| \leq |\bar{a} - a|/2$ выполнено для любых a, $\bar{a}$, удовлетворяющих условию (5.6). Отсюда следует сходимость к итераций к пределу $a_*(\mu)$. На множестве

$$I_1(\varepsilon) = \{(a,\mu) : \mu \geq \mu_4, \mu \in I'(\varepsilon), |a| \leq A\mu^{-1}\}$$

этот предел единствен. Имеет место оценка

$$\left|a_*(\mu) - \frac{1}{\mu^2 - 1}\right| \leq \frac{\pi B^3}{12\varepsilon\mu^4}.$$

Функция $\hat{x}(t,a,\mu) = x_*[t, a_*(\mu), \mu]$ является искомым решением краевой задачи (5.2). Она определена при $(a,\mu) \in I_1(\varepsilon)$ и $\nu(\hat{x}) \le B\mu^{-2}$. Найдем оценку производной этой функции по времени. Применяя формулу (5.11), получаем

$$\nu\left(\frac{d\hat{x}}{dt}\right) \le \frac{1}{\mu^2}\left(2 + \frac{\pi B^3}{6\varepsilon\mu^2}\right).$$

Найденную функцию можно продолжить на всю действительную ось как π-антипериодическое решение уравнения (5.2). Методом Лихтенштейна этот результат был получен в [5]. Там он сформулирован так:

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда при* $\mu \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\pi}{\varepsilon}}$, $\mu \in I'(\varepsilon)$ *краевая задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение* $\hat{x}(t,\mu)$, *удовлетворяющее условиям*

$$|\hat{x}(t,\mu)| \le \frac{3}{\mu^2}, \quad \left|\frac{d\hat{x}(t,\mu)}{dt}\right| \le \frac{1}{\mu^2}\left(2 + \frac{27\pi}{8\varepsilon\mu^2}\right) \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Вид зависимости периодического решения от большого параметра в обоих доказательствах одинаков.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00143).

Литература

1. Сазонов В.В. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // ПММ. 1983. Т. 47. № 5. С. 707-719.
2. Lichtenstein L. Zur Maxwellschen Theorie der Saturn Ringe // Math. Zeitschr. // 1923. B. 17. S. 61-110.
3. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики т. 1. Избранные труды, т. 1. М.: Наука, 1971.
4. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963.
5. Сазонов В.В. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 143.