



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сурначёв М.Д.

О неравенстве Харнака для
 $p(x)$ -лапласиана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сурначёв М.Д. О неравенстве Харнака для $p(x)$ -лапласиана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 69. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2018-69](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-69)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-69>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

М. Д. Сурначёв

О неравенстве Харнака для $p(x)$ -лапласиана

Москва — 2018

Сурначёв М. Д.

О неравенстве Харнака для $p(x)$ -лапласиана

В работе доказывается неравенство Харнака для неотрицательных решений эллиптического $p(x)$ -лапласиана и находятся достаточные условия на модуль непрерывности показателя p в точке, гарантирующие непрерывность решения в этой точке.

Ключевые слова: $p(x)$ -лапласиан, переменный показатель, неравенство Харнака, непрерывность решения

Mikhail Dmitriyevich Surnachev

On Harnack's inequality for $p(x)$ -Laplacian

In this note we prove a Harnack inequality for nonnegative solutions to elliptic $p(x)$ -Laplacian and find conditions on the modulus of continuity of the exponent p at a given point which guarantee the continuity of solutions at this point.

Key words: $p(x)$ -Laplacian, variable exponent, Harnack inequality, continuity of solutions

Оглавление

Введение	3
Супремум оценки решения	9
Оценки модуля непрерывности решения	12
Неравенство Харнака слабого типа	19
Некоторые уточнения	28
Дополнение	29
Список литературы	30

Введение

Настоящая заметка посвящена изучению локальной регулярности решений уравнения эллиптического $p(x)$ -лапласиана

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0, \quad x \in D. \quad (1)$$

Здесь D — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. На показатель p наложены условия

$$1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty, \quad \text{для п.в. } x \in \Omega. \quad (2)$$

Такого рода уравнения и связанные с ними вопросы теории функций стали активно изучаться начиная с работ В.В. Жикова 1980-х годов [1], [2]. Исследования Жикова были мотивированы вопросами усреднения в механике композитных материалов. Далее уравнения с переменным показателем нелинейности получили приложения в моделировании электрореологических и термореологических жидкостей (см. [3], [4], [5]). С современной стадией развития теории уравнений и пространств с переменным показателем читатель может познакомиться по монографиям [6], [7], [8], а также по замечательной обзорной статье В.В. Жикова [9] и его книге [10].

Для определения понятия решения уравнения (1) введем класс функций

$$W(D) = \left\{ u \in W^{1,1}(D) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D) \right\},$$

где $W^{1,1}(D)$ — соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Будем говорить, что последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \rightarrow u$ в $L^1(D)$ и выполняется

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)} dx = 0. \quad (3)$$

По теореме Шеффе или Рисса, последняя сходимость эквивалентна сходимости ∇u_j к ∇u почти всюду в D вместе со сходимостью энергий

$$\int_D |\nabla u_j|^{p(x)} dx \rightarrow \int_D |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

Скажем, что $u \in W(D)$ принадлежит классу $W_0(D)$, если существует последовательность функций $u_j \in W(D)$ с компактным носителем в D , такая, что выполнено (3). Будем говорить, что последовательность $u_j \in W_0(D)$ сходится в $W_0(D)$ к функции $u \in W_0(D)$, если выполнено (3).

Определим также классы функций $H(D)$ и $H_0(D)$, являющиеся пополнениями в $W(D)$ и $W_0(D)$ гладких в D функций относительно введенных сходимостей:

$$\begin{aligned} H(D) &= \{u \in W(D) : \exists u_j \in C^\infty(D) \cap W(D), u_j \rightarrow u \text{ в } W(D)\}, \\ H_0(D) &= \{u \in W(D) : \exists u_j \in C_0^\infty(D), u_j \rightarrow u \text{ в } W_0(D)\}. \end{aligned}$$

В случае постоянного показателя p хорошо известно, что пространства $H(D)$ и $W(D)$ совпадают, то есть любая функция из $W^{1,p}(D)$ приближается по норме этого пространства бесконечно гладкими функциями. Из результатов работы В.В. Жикова [2] следует, что одного только предположения (2) недостаточно для плотности гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. Плотность гладких функций в данных классах обеспечивается выполнением условия

$$|p(x) - p(y)| \leq L \left(\ln \frac{1}{|x - y|} \right)^{-1} \quad \text{при } x, y \in D, |x - y| < 1/2, \quad (4)$$

найденного В.В. Жиковым [11]. В этом случае приближение функций гладкими осуществляется стандартными сглаживающими операторами (свёртка с гладким ядром осреднения).

Позже В.В. Жиковым [12] было найдено более точное условие плотности гладких функций в соболевском пространстве с переменным показателем. Пусть показатель p обладает модулем непрерывности ω , то есть

$$|p(x) - p(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x, y \in D, \quad |x - y| < 1/2,$$

где ω — непрерывная неубывающая функция на $[0, 1/2]$, $\omega(0) = 0$. Если

$$\int_0^{1/2} t^{-1 + \frac{n\omega(t)}{\alpha}} dt = \infty,$$

то $H = W$. Например, последнему условию удовлетворяет модуль непрерывности

$$\omega(t) = L \frac{\ln \ln(1/t)}{\ln(1/t)}, \quad 0 < L < \frac{n}{\alpha}. \quad (5)$$

В последнем случае В.В. Жиков и С.Е. Пастухова [13] установили свойство повышенной суммируемости градиента решения в классах Орлича.

В контексте настоящей работы совпадения H и W не предполагается, то есть гладкие функции могут быть не плотны в соболевском пространстве. В этом случае решение может определяться различным образом. Мы будем иметь дело с так называемыми H -решениями и W -решениями.

Скажем, что $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$) есть H -решение (W -решение) уравнения (1), если интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad (6)$$

выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(D)$ (соответственно $\psi \in W_0(D)$). Функция $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$) называется H -суперрешением (W -суперрешением) уравнения (1), если для всех неотрицательных пробных функций $\psi \in H_0(D)$ ($\psi \in W_0(D)$) выполняется

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \geq 0. \quad (7)$$

Если коразмерность H в W больше единицы, то могут определяться и другие типы решений, соответствующие промежуточным между H и W пространствам.

Решение уравнения (1) может быть построено, например, путём минимизации функционала

$$F[u] = \int_D \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} \, dx$$

по функциям $u \in W(D)$, таким, что $u - f \in W_0(D)$ для заданной $f \in W(D)$ — это даст W -решение задачи Дирихле с граничной функцией f , или по функциям $u \in H(D)$, таким, что $u - f \in H_0(D)$ для заданной $f \in H(D)$ — это даст H -решения задачи Дирихле с граничной функцией f (см. [10], [16], [17]).

Изучение локальных свойств решений уравнений типа (1) было начато Ю.А. Алхутовым в [14]. В этой работе при выполнении условия Жикова (4) была доказана гёльдеровская непрерывность решений и получен вариант неравенства Харнака. Для неотрицательных ограниченных решений (1) в шаре $B_{4R}^{x_0}$ выполняется

$$\sup_{B_R^{x_0}} u \leq C(n, \alpha, \beta, L, M) \left(\inf_{B_R^{x_0}} u + R \right), \quad M = \sup_D u.$$

Этот результат был усилен в [15], где гёльдеровская непрерывность решения в точке x_0 была получена при выполнении условия на модуль непрерывности показателя лишь в этой точке:

$$|p(x) - p(x_0)| \leq \frac{L}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}}, \quad x \in D, \quad |x - x_0| \leq 1/e. \quad (8)$$

В работе [16] при выполнении логарифмического условия (4) был доказан критерий Винера регулярности граничной точки. Недавно [17] было получено обобщение этого результата на случай, когда p удовлетворяет условию (8) для $x_0 \in \partial D$. Главным результатом [18] было доказательство гёльдеровской непрерывности решений $p(x)$ -лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$, имеющим разрыв при переходе гиперплоскости, при выполнении условия типа (8) с обеих сторон от поверхности разрыва. В [19] при этом же условии был доказан вариант неравенства Харнака.

В работе [20] была установлена непрерывность решения в точке $x_0 \in D$ при условии, более слабом, чем логарифмическое:

$$|p(x) - p(x_0)| \leq L \frac{\ln \ln \ln |x - x_0|^{-1}}{\ln |x - x_0|^{-1}}, \quad x \in D, \quad |x - x_0| \leq 1/27, \quad (9)$$

где $L < L_0(n, \alpha)$. При этом модуль непрерывности решения уже может иметь не степенной характер, а логарифмический.

Основной целью настоящей заметки является уточнение результатов [20] и получение неравенства Харнака при условии (9). Схема построения работы следующая. Вначале мы получаем оценки максимума модуля решения. Затем будут даны оценки модуля непрерывности решения. В этих разделах мы следуем [20]. В заключительном разделе доказано неравенство Харнака слабого типа для неотрицательных суперрешений. Совмещая его с оценкой максимума решения, получаем неравенство Харнака для решений (1).

Отметим, что классический способ доказательства неравенства Харнака, восходящий к J. Moser [23] и изложенный для уравнения типа p -лапласиана с постоянным показателем p в [21], [22], использует принадлежность логарифма решения пространству ВМО (функции с ограниченным средним колебанием). При выполнении глобального условия (4) такой метод также работает (см. [14]), однако для более слабого условия (8), а тем более, (9), становится неприменим. Мы используем модификацию метода N. Trudinger [24], разработанного изначально для анализа решений неравномерно эллиптических уравнений. Этот метод использует лишь информацию в окрестности данной точки.

Далее через $B_R^{x_0}$ будем обозначать (открытый) шар радиуса R с центром в точке x_0 . Через C обозначаем константы, встречающиеся по ходу доказательства. Значение C может меняться даже в пределах одной строки. Выражение $C = C(\dots)$ означает, что C зависит лишь от величин, указанных в скобках. Для измеримого множества E и $f \in L^1(E)$ обозначаем $\int_E f dx = |E|^{-1} \int_E f dx$.

Будем считать, что модуль непрерывности показателя в точке x_0 имеет вид

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_r^{x_0}} p \leq \omega(|x - x_0|), \quad \omega(r) = \frac{\ln \theta(r)}{\ln r^{-1}}.$$

В этих обозначениях

$$r^{-\omega(r)} = \exp\left(-\ln r \frac{\ln \theta(r)}{-\ln r}\right) = \theta(r). \quad (10)$$

Без ограничения общности считаем, что $\theta(r) \geq 1$. Обозначаем $\kappa = n/(n-1)$.

Под решением (1) мы будем понимать H -решение или W -решение. В дальнейшем будем писать просто решение. То же относится и к суперрешениям.

Сформулируем достаточные условия непрерывности решений (1) в точке x_0 . Следующая теорема является небольшим уточнением результатов [20].

Теорема 1. Пусть u — решение (1) в D , $\sup_D |u| \leq M$. Найдётся такая константа $C = C(n, \alpha, \beta, M)$, что если ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \exp\left(-C\theta(e^{-j})^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \quad (11)$$

расходится, то функция u непрерывна в точке x_0 , причём если $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, $R_0 \leq 1$, то

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_{e^{-k}R_0}^{x_0}} u \leq (2M + 1) \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1} \exp\left(-C\theta(e^{-j})^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\right). \quad (12)$$

Если θ монотонно не возрастает ($\theta(t) \leq \theta(\tau)$ если $t \geq \tau$), то расходимость ряда (11) следует из расходимости интеграла

$$\int_0^1 \exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \frac{dr}{r}, \quad C = C(n, \alpha, \beta, M). \quad (13)$$

При этом, если $B_{R_0}^{x_0} \subset D$, $R_0 \leq 1$, $R \leq e^{-1}R_0$, то

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leq (2M + 1) \exp\left(-\int_{eR}^{R_0} \exp\left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \frac{dr}{r}\right). \quad (14)$$

Под непрерывностью понимается непрерывность с точностью до изменения функции на множестве нулевой меры (оценки (12) и (14) для существенной осцилляции).

Некоторый недостаток условия расходимости ряда (11) или интеграла (13) состоит в том, что в условии присутствует константа, зависящая от максимума модуля решения. Из доказательств видно, что эту зависимость можно оценить как $C \leq C(n, \alpha, \beta)(M+1)^{\gamma(n, \alpha, \beta)}$, при возрастании M константа может расти со степенной скоростью, если $M \leq 1$, то зависимостью от M можно пренебречь.

Сформулируем простое следствие теоремы 1, в котором мы избавляемся от зависимости константы C от M в условии (13). Будем использовать обозначения теоремы 1.

Следствие. Пусть $\theta(r) = o(H(r))$ при $r \rightarrow 0$, H монотонно не возрастает и

$$\int_0 \exp\left(-H(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \frac{dr}{r} = +\infty.$$

Тогда u непрерывно в точке x_0 , и для достаточно малых R_0 справедливо

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leq (2M + 1) \cdot \exp\left(-\int_{eR}^{R_0} \exp\left(-H(r)^{(n+\alpha)/\alpha}\right) \frac{dr}{r}\right).$$

Приведём явное условие на θ , которое гарантирует расходимость ряда (11). Это фактически условие работы [20] (см. (9)).

Теорема 2. Пусть u — ограниченное решение (1) в $B_{R_0}^{x_0}$, $R_0 \leq 1/30$. Если $\theta(R) \leq L(\ln \ln R^{-1})^l$, $l < \alpha/(n + \alpha)$, то функция u непрерывна в точке x_0 , причём для $R \leq R_0$ выполняется

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leq C(n, \alpha, \beta, M, L, R_0, \gamma) \left(\ln \frac{1}{R}\right)^{-\gamma} \quad (15)$$

для всех $\gamma > 0$.

Так как нас интересует поведение в окрестности точки x_0 , то величину α можно брать сколь угодно близкой к $p(x_0)$, следовательно, вторая часть утверждения теоремы выполняется для $l < p(x_0)/(n + p(x_0))$.

В следующей теореме мы получаем обобщение неравенства Харнака слабого типа для суперрешений.

Теорема 3. Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение (1) в $B = B_{4R}^{x_0}$, $M = \sup_B u$, $s = \operatorname{ess\,inf}_B p$. Тогда для любого $0 < q < n(s - 1)/(n - s)$ справедливо

$$\left(\int_{B_{2R}^{x_0}} (u + R)^q dx\right)^{1/q} \leq \exp\left(C(n, \alpha, \beta, M, q)\theta(4R)^{2(n+s)/s}\right) \operatorname{ess\,inf}_{B_R^{x_0}}(u + R). \quad (16)$$

Основным результатом работы является аналог неравенства Харнака.

Теорема 4. Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение (1) в $B_{4R}^{x_0}$, $M = \sup_B u$, $s = \operatorname{ess\,inf}_B p$. Тогда

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} u \leq \exp\left(C(n, \alpha, \beta, M)\theta(4R)^{3(n+s)/(s-1)}\right) \operatorname{ess\,inf}_{B_R^{x_0}}(u + R). \quad (17)$$

Сформулируем лемму, доказательство которой здесь приводить не будем, см. [16] (или [17]).

Утверждение 5. Пусть $u \in W(D)$ ($u \in H(D)$), $m \leq u \leq M$, а f — липшицева на $[m, M]$ функция. Тогда $f(u) \in W(D)$ ($f(u) \in H(D)$). Если $\xi \in C_0^\infty(D)$, то $u\xi \in W_0(D)$ ($u\xi \in H_0(D)$).

Нам понадобится следующее простое хорошо известное утверждение.

Утверждение 6. Пусть ограниченная последовательность Y_j удовлетворяет $Y_j \leq Cb^j Y_{j+1}^r$, $0 < r < 1$. Тогда $Y_0 \leq (2C)^{1/(1-r)} b^{r/(1-r)^2}$.

Приведём его доказательство. По неравенству Юнга,

$$Y_j \leq \varepsilon Y_{j+1} + \varepsilon^{r/(r-1)} b^{j/(1-r)} C^{1/(1-r)}.$$

Итерируя это неравенство, имеем

$$Y_0 \leq \varepsilon^k Y_k + C^{1/(1-r)} \varepsilon^{r/(r-1)} \sum_{j=0}^{k-1} (\varepsilon b^{1/(1-r)})^j.$$

Полагая $\varepsilon = b^{1/(r-1)}/2$ и устремляя k к бесконечности, получим требуемое утверждение.

Супремум оценки решения

Вообще говоря, для переменного показателя $p(x)$ ограниченность решения не гарантирована. Решения будут локально ограниченными, если, например, отношение между максимальным и минимальным значением показателя не превосходит $n/(n-1)$. Мы работаем по умолчанию с ограниченными решениями. В этом разделе считаем решение u неотрицательным. Будем использовать стандартную схему итерации Мозера.

Зафиксируем шар $B = B_{4R}^{x_0}$. Пусть $\eta \in C_0^\infty(B)$. Обозначим

$$M = \operatorname{ess\,sup}_B u, \quad s = \operatorname{ess\,inf}_B p.$$

Начнём с энергетической оценки для степеней решения.

Утверждение 7. Для всех $\gamma \geq 1$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} R^s \int_B |\nabla u|^s (u + R)^{\gamma-1} \eta^\beta dx &\leq \\ &\leq C(\alpha, \beta) \theta(4R) (M + 1)^\beta \int_B (u + R)^{\gamma+s-1} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Возьмём в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = (u + R)^\gamma \eta^\beta, \quad \gamma \geq 1.$$

Получим

$$\gamma \int_B |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{\gamma-1} \eta^\beta dx = -\beta \int_B (u + R)^\gamma \eta^{\beta-1} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \eta dx.$$

Разделив это равенство на γ и используя неравенство Юнга для оценки правой части, приходим к

$$\int_B |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq C(\alpha, \beta) \int_B (u + R)^{\gamma-1+p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} dx. \quad (19)$$

Используя простые оценки $|\nabla u|^s \leq |\nabla u|^{p(x)} + 1$, $(u + R)^{p(x)-s} \leq (M + 1)^\beta$, и $(u + R)^{-s} \leq R^{-s}$, из неравенства (19) получим

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u|^s (u + R)^{\gamma-1} \eta^\beta dx &\leq R^{-s} \int_B (u + R)^{\gamma-1+s} \eta^\beta dx + \\ &+ C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \int_B (u + R)^{\gamma-1+s} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Умножая (20) на R^s и используя (10), имеем

$$\begin{aligned} R^s \int_B |\nabla u|^s (u + R)^{\gamma-1} \eta^\beta dx &\leq \int_B (u + R)^{\gamma-1+s} \eta^\beta dx + \\ &+ C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \theta(4R) \int_B (u + R)^{\gamma-1+s} (R|\nabla \eta|)^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} dx. \end{aligned}$$

Оценивая по неравенству Юнга

$$(R|\nabla \eta|)^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} \leq \eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta, \quad (21)$$

получаем (18). Утверждение 7 доказано \square

Получим теперь оценку решения мозеровского типа.

Утверждение 8. Для неотрицательного решения (1) в шаре $B_{2R}^{x_0}$ и любого $0 < q \leq s$ выполняется

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} (u + R) \leq C(n, \alpha, \beta, M)^{s/q} \theta(4R)^{n/q} \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} (u + R)^q dx \right)^{1/q}. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $1/2 < \sigma < t \leq 2$, $R_j = R(s + 2^{-j}(t - s))$, $\kappa = n/(n - 1)$, последовательность γ_j задана соотношениями $\gamma_0 = 1$, $\gamma_{j+1} + s - 1 = (\gamma_j + s - 1)\kappa$. То есть $\gamma_j + s - 1 = \kappa^j s$. Пусть функции $\eta_j \in C_0^\infty(B_{R_j}^{x_0})$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\eta_j = 1$ на $B_{R_{j+1}}^{x_0}$, $|\nabla \eta_j| \leq 2^{1+j} R^{-1}(t - \sigma)^{-1}$. Из оценки (18) получаем тогда

$$\begin{aligned} & R^s \int_{B_{R_j}^{x_0}} |\nabla((u + R)^{(\gamma_j + s - 1)/s} \eta_j^{\beta/s})|^s dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \theta(4R) (M + 1)^\beta 2^{\beta j} (t - \sigma)^{-\beta} (\gamma_j + s - 1)^s \int_{B_{R_j}^{x_0}} (u + R)^{\gamma_j + s - 1} dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Применяя неравенство Соболева, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R_{j+1}}^{x_0}} (u + R)^{\gamma_{j+1} + s - 1} dx \leq 4^n \int_{B_{R_j}^{x_0}} (u + R)^{\gamma_{j+1} + s - 1} \eta_j^{\beta \kappa} dx \leq \\ & \leq \left(C(n, \alpha, \beta, M) 2^{\beta j} (t - \sigma)^{-\beta} \theta(4R) (\gamma_j + s - 1)^s \int_{B_{R_j}^{x_0}} (u + R)^{\gamma_j + s - 1} dx \right)^\kappa. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначая

$$Y_j = \left(\int_{B_{R_j}^{x_0}} (u + R)^{\gamma_j + s - 1} dx \right)^{1/(\gamma_j + s - 1)}, \quad (25)$$

запишем неравенство (24) как

$$Y_{j+1} \leq (C 2^{\beta j} \theta(4R) (\gamma_j + s - 1)^s (t - \sigma)^{-\beta})^{1/(\gamma_j + s - 1)} Y_j, \quad C = C(n, \alpha, \beta, M).$$

Итерируя это неравенство, придём к оценке

$$Y_k \leq \prod_{j=0}^{k-1} (C \theta(4R) (t - \sigma)^{-\beta})^{\kappa^{-j}/s} 2^{\beta j \kappa^{-j}/s} (s \kappa^j)^{\kappa^{-j}} Y_0.$$

Отсюда легко получаем ($\sum_{j=0}^{\infty} \kappa^{-j} = n$, $\sum_{j=0}^{\infty} j \kappa^{-j} = n(n - 1)$)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} Y_k \leq C(n, \alpha, \beta, M) (t - \sigma)^{-n\beta/s} \theta(4R)^{n/s} Y_0.$$

Так как $\text{ess sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} Y_k$, то

$$\text{ess sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R) \leq C \theta(4R)^{n/s} (t - \sigma)^{-n\beta/s} \left(\int_{B_{tR}^{x_0}} (u + R)^s dx \right)^{1/s}. \quad (26)$$

Обозначим

$$\tilde{R}_j = R(2 - 2^{-j}), \quad M_j = \sup_{B_{\tilde{R}_j}^{x_0}}(u + R).$$

Из (26) для $q < s$ имеем

$$M_j \leq C\theta(4R)^{n/s}2^{nj\beta/s}M_{j+1}^{(s-q)/s}I^{q/s}, \quad I = \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} (u + R)^q dx \right)^{1/q}.$$

Пользуясь утверждением 6, где $r = (s - q)/s$, получаем

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}}(u + R) = M_0 \leq C(n, \alpha, \beta, M)^{s/q}\theta(4R)^{n/q}I.$$

Чтобы получить оценку (22) для $q \geq s$, надо взять $\gamma_0 = q + 1 - s$. Утверждение 8 доказано. \square

Несложно показать, что в оценке (22) вместо u можно брать положительную и отрицательные части решения $u_+ = \max\{u, 0\}$, $u_- = \max\{-u, 0\}$, или модуль решения $|u|$.

Оценки модуля непрерывности решения

В этом разделе мы получим оценку на скорость убывания осцилляции решения при переходе от шара к концентрическому с ним шару меньшего радиуса. Пусть u — ограниченное решение (1) в шаре $B_{eR}^{x_0}$. Пусть

$$M_{eR} = \operatorname{ess\,sup}_{B_{eR}^{x_0}} u, \quad m_{eR} = \operatorname{ess\,inf}_{B_{eR}^{x_0}} u, \quad M = \operatorname{ess\,sup}_D u,$$

где e — основание натурального логарифма. Введём функцию

$$v = \ln \frac{M_{eR} - m_{eR} + 2R}{M_{eR} - u + R}. \quad (27)$$

Также обозначим

$$\mu(r) = \operatorname{ess\,osc}_{B_r^{x_0}} u = M_r - m_r, \quad s = \operatorname{ess\,inf}_{B_{eR}^{x_0}} p.$$

Получим супремум оценку для функции v мозеровского типа.

Утверждение 9. Для функции v , определённой в (27), справедлива оценка

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leq C(n, \alpha, \beta, M)\theta(eR)^{n/s} \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v^s dx \right)^{1/s}. \quad (28)$$

Доказательство. Выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = v^\gamma (M_{eR} - u + R)^{1-s} \eta^\beta, \quad \gamma \geq 1, \quad \eta \in C_0^\infty(B_{eR}^{x_0}), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} & \gamma \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{-s} v^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq \beta \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} (M_{eR} - u + R)^{1-s} v^\gamma \eta^{\beta-1} |\nabla \eta| dx. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, и $\nabla v = (M_{eR} - u + R)^{-1} \nabla u$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} v^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)} v^{\gamma+s-1} (v(M_{eR} - u + R))^{p(x)-s} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Оценим теперь выражение

$$w = v(M_{eR} - u + R) = (M_{eR} - u + R) \ln \frac{M_{eR} - m_{eR} + 2R}{M_{eR} - u + R}.$$

Путём подсчёта производной нетрудно установить, что

$$w \leq \xi(eR) = \max \left(\frac{\mu(eR) + 2R}{e}, R \ln \frac{\mu(eR) + 2R}{R} \right) \leq \max((e-2)^{-1} \mu(eR), R).$$

Кроме того, по неравенству Юнга,

$$|\nabla v|^s \leq |\nabla v|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} + (M_{eR} - u + R)^{-s}. \quad (29)$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} & \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^s v^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{-s} v^{\gamma-1} \eta^\beta dx + \\ & + C(\alpha, \beta) (M+1)^\beta \int_{B_{eR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)} v^{\gamma+s-1} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Отсюда легко получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{eR}^{x_0}} \left| \nabla \left(v^{(\gamma+s-1)/s} \eta^{\beta/s} \right) \right|^s dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta, M) (\gamma + s - 1)^s \int_{B_{eR}^{x_0}} v^{\gamma+s-1} (\eta^{\beta-s} |\nabla \eta|^s + \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} + w^{-s} \eta^\beta) dx. \end{aligned}$$

Если $\mu(eR) + 2R > eR$, оценим

$$\min w \geq \min \left(R \ln \frac{\mu(eR) + 2R}{R}, (\mu(eR) + R) \ln \frac{\mu(eR) + 2R}{\mu(eR) + R} \right) \geq R \ln 2.$$

Здесь для оценки второго члена использовали формулу Тейлора и тот факт, что в этом случае $R/(\mu(eR) + R) \leq 1/(e - 1) < 1$. Если $\mu(eR) + 2R \leq eR$, оценим

$$\min w \geq (\mu(eR) + R) \ln \frac{\mu(eR) + 2R}{\mu(eR) + R} \geq R \ln \frac{e}{e - 1}.$$

Таким образом, в обоих случаях $\min(w/R)$ оценивается снизу абсолютной константой.

Используя (10) и (21), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & R^s \int_{B_{eR}^{x_0}} \left| \nabla \left(v^{(\gamma+s-1)/s} \eta^{\beta/s} \right) \right|^s dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta, M)(\gamma + s - 1)^s \theta(eR) \int_{B_{eR}^{x_0}} v^{\gamma+s-1} (\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta) dx. \end{aligned}$$

Это фактически та же оценка, что и (23), только для функции v вместо $u + R$, $t = 2$, $\sigma = 1$. Повторяя рассуждения, приведённые в доказательстве Утверждения 8, придём к оценке типа (26) для v :

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leq C\theta(eR)^{n/s} \left(\int_{B_{2R}^{x_0}} v^s dx \right)^{1/s}.$$

Это и есть искомая оценка (28). Утверждение 9 доказано. \square

Для того чтобы оценить интеграл в правой части (28), докажем следующее утверждение.

Утверждение 10. Для функции v , введённой (27), выполняется

$$R^s \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v|^s dx \leq C(\alpha, \beta, M)\theta(eR). \quad (30)$$

Доказательство. Возьмём в (6) пробную функцию $\psi = (M_{eR} - u + R)^{1-s} \eta^\beta$, $\eta \in C_0^\infty(B_{eR}^{x_0})$, $\eta = 1$ на $B_{2R}^{x_0}$, $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla\eta| \leq 4(e - 2)^{-1}R^{-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} & (s - 1) \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{-s} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq \beta \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} (M_{eR} - u + R)^{1-s} \eta^{\beta-1} |\nabla\eta| dx. \end{aligned}$$

Или же

$$\begin{aligned} & \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)-1} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-1} |\nabla \eta| dx. \end{aligned}$$

По неравенству Юнга,

$$\begin{aligned} & \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^{p(x)} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^\beta dx. \end{aligned}$$

Используя (29), получим отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{B_{eR}^{x_0}} |\nabla v|^s \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \int_{B_{eR}^{x_0}} (M_{eR} - u + R)^{-s} \eta^\beta. \end{aligned}$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n} , с помощью (10) и (21), приходим к (30). Утверждение 10 доказано. \square

Сформулируем оценку уменьшения осцилляции при переходе от большего шара к меньшему. Напомним, что $\mu(r)$ — существенная осцилляция решения на шаре $B_r^{x_0}$.

Утверждение 11. Для ограниченного решения u уравнения (1) в $B_{eR}^{x_0}$ выполняется

$$\mu(R) \leq \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) \mu(eR) + R,$$

где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$.

Доказательство. Предположим, что

$$|\{u < (M_{eR} + m_{eR})/2\} \cap B_{2R}^{x_0}| > \frac{1}{2} |B_{2R}^{x_0}|. \quad (31)$$

На множестве, где $u \leq (M_{eR} + m_{eR})/2$, выполняется $v \leq \ln 2$. Пользуясь неравенством Пуанкаре и оценкой (30), найдём тогда

$$\int_{B_{2R}^{x_0}} (v - \ln 2)_+^s dx \leq C(n, s) R^s \int_{B_{2R}^{x_0}} |\nabla v|^s dx \leq C(\alpha, \beta, n, M) \theta(eR).$$

Таким образом, в случае выполнения (31), пользуясь (28), имеем

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} v \leq C(n, \alpha, \beta, M)\theta(eR)^{(n+s)/s}.$$

По определению v (см. (27)), последнее даст

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} u \leq m_{eR} + \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) (M_{eR} - m_{eR}) + R.$$

Если не выполнено (31), то выполняется

$$|\{u \geq (M_{eR} + m_{eR})/2\} \cap B_{2R}^{x_0}| \leq \frac{1}{2}|B_{2R}^{x_0}|. \quad (32)$$

Тогда для функции $\tilde{u} = M_{eR} + m_{eR} - u$ имеет место

$$|\{\tilde{u} \leq (M_{eR} + m_{eR})/2\} \cap B_{2R}^{x_0}| > \frac{1}{2}|B_{2R}^{x_0}|.$$

Применяя рассуждения выше для \tilde{u} вместо u , получим

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_R^{x_0}} (M_{eR} + m_{eR} - u) \leq m_{eR} + \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) (M_{eR} - m_{eR}) + R,$$

откуда

$$\operatorname{ess\,inf}_{B_R^{x_0}} u \geq M_{eR} - \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) (M_{eR} - m_{eR}) - R.$$

В обоих случаях приходим к оценке

$$\mu(R) \leq \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) \mu(eR) + R. \quad (33)$$

Утверждение 11 доказано. \square

Доказательство теоремы 1. Можно считать, без ограничения общности, что в (33) константа $C \geq 2$. Тогда из (33) следует

$$\mu(R) + R \leq \left(1 - \exp\left(-C\theta(eR)^{(n+s)/s}\right)\right) (\mu(eR) + eR). \quad (34)$$

Возьмём теперь последовательность $R_j = e^{-j}R_0$. Итерация (34) даст

$$\mu(R_k) + R_k \leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \exp\left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha}\right)\right) (\mu(R_0) + R_0). \quad (35)$$

В силу вогнутости логарифма, $\ln(1 - x) \leq -x$, поэтому

$$\prod_{j=0}^k (1 - x_j) = \exp \left(\sum_{j=0}^k \ln(1 - x_j) \right) \leq \exp \left(- \sum_{j=0}^k x_j \right).$$

Таким образом,

$$\mu(R_k) + R_k \leq (\mu(R_0) + R_0) \exp \left(- \sum_{j=0}^{k-1} \exp \left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \right). \quad (36)$$

Следовательно, расходимость ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \exp \left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \quad (37)$$

влечёт стремление к нулю осцилляции решения по стягивающимся к x_0 шарам.

Если θ монотонно не возрастает, то

$$\exp \left(-C\theta(R_j)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \geq \int_{R_{j+1}}^{R_j} \exp \left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \frac{dr}{r}.$$

Поэтому расходимость ряда (37) следует из расходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \frac{dr}{r}. \quad (38)$$

При этом из (36) получаем

$$\mu(R_j) \leq (\mu(R_0) + R_0) \exp \left(- \int_{R_j}^{R_0} \exp \left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \frac{dr}{r} \right).$$

Соответственно, для произвольного $R \leq e^{-1} R_0$ находим

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leq (\operatorname{ess\,osc}_{B_{R_0}^{x_0}} u + R_0) \exp \left(- \int_{eR}^{R_0} \exp \left(-C\theta(r)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \frac{dr}{r} \right).$$

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Будем пользоваться обозначениями доказательства теоремы 1. Пусть

$$\theta(R) = L(\ln \ln(1/R))^l, \quad R_0 = e^{-j_0}, \quad j_0 \geq 1, \quad R_k = e^{-k} R_0.$$

Из (36) следует

$$\mu(R_k) + R_k \leq (\mu(R_0) + R_0) \exp \left(- \sum_{j=j_0}^{j_0+k-1} \exp \left(-C(L \ln^l j)^{(n+\alpha)/\alpha} \right) \right). \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \exp \left(-C(L \ln^l j)^{(n+\alpha)/\alpha} \right)$$

расходится, если $l < \alpha/(n + \alpha)$. В этом случае члены ряда убывают медленнее, чем j^{-1} . Обозначим $\delta = l(n + \alpha)/\alpha < 1$. Пусть

$$e^{-j_0-k-1} < R \leq e^{-j_0-k} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{eR} < k + j_0 \leq \ln \frac{1}{R}.$$

Из (39) и монотонного роста $C(\ln^l j)^{(n+\alpha)/\alpha}$ находим

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leq (\mu(R_0) + R_0) \exp \left(- \int_{j_0}^{j_0+k} e^{-C \ln^\delta x} dx \right).$$

Интегрируя по частям, и используя монотонное убывание подынтегральной функции, оценим

$$\int_{j_0}^{j_0+k} e^{-C \ln^\delta x} dx \geq (k + j_0) e^{-C \ln^\delta (k+j_0)} - j_0 e^{-C \ln^\delta j_0}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ess\,osc}_{B_R^{x_0}} u \leq (\mu(R_0) + R_0) C(R_0) \exp \left(- \ln \frac{1}{eR} \exp \left(-C \ln^\delta \ln \frac{1}{eR} \right) \right). \quad (40)$$

Так как для любого $A > 0$ найдётся такая константа B , что

$$x e^{-C \ln^\delta x} \geq A \ln x - B, \quad x \geq 1,$$

из (40) следует (15). □

Замечание. В силу монотонности ω и оценки $\omega \leq \beta$ имеем

$$\theta(r) \leq \exp \left(\omega(r) \ln \frac{1}{r} \right) \leq \theta(R_j) e^\beta \quad \text{для } r \in [R_{j+1}, R_j].$$

Поэтому, из расходимости ряда (37) следует расходимость интеграла (38) с константой $C' = C \exp(-\beta(n + \alpha)/\alpha)$. Условие монотонного убывания θ в теореме 1 можно заменить на

$$\theta(R) \leq K \theta(r), \quad e^{-1} R \leq r \leq R.$$

Тогда константа C в (13), (14) будет зависеть ещё и от K .

Неравенство Харнака слабого типа

В этом разделе будет получено неравенство Харнака слабого типа для суперрешений (1), из которого мы выведем неравенство Харнака для решений. Обозначаем

$$s = \operatorname{ess\,inf}_{B_{4R}^{x_0}} p, \quad M = \operatorname{ess\,sup}_{B_{4R}^{x_0}} u.$$

Доказательство теоремы 3 состоит из двух лемм.

Утверждение 12. Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение (1) в $B_{4R}^{x_0}$, $1/4 \leq \sigma < t \leq 2$. Справедлива оценка

$$\operatorname{ess\,inf}_{B_{\sigma R}^{x_0}}(u + R) \geq \exp \left(-C(t - \sigma)^{-n\beta/s} \theta(4R)^{(n+s)/s} + \int_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u + R) dx \right), \quad (41)$$

где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$.

Доказательство. Положим

$$\ln k = \int_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u + R) dx. \quad (42)$$

В силу неравенства Йенсена имеем

$$k = \exp \int_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u + R) dx \leq \int_{B_{tR}^{x_0}} (u + R) dx \leq M + R.$$

Пусть

$$w = \left(\ln \frac{k}{u + R} \right)_+.$$

Выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = w^\gamma (u + R)^{1-s} \eta^\beta,$$

где $\gamma \geq 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leq \eta \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \gamma \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} w^{\gamma-1} \eta^\beta dx + \\ & + (s - 1) \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} w^\gamma \eta^\beta dx \leq \\ & \leq \beta \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} (u + R)^{1-s} w^\gamma \eta^{\beta-1} \nabla u \cdot \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Применяя к подинтегральному выражению в правой части этой оценки неравенство Юнга, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} w^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{tR}^{x_0}} \gamma^{-p(x)} (u + R)^{p(x)-s} w^{\gamma+p(x)-1} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^{p(x)} (u + R)^{p(x)-s} w^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{tR}^{x_0}} (u + R)^{p(x)-s} w^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} dx. \end{aligned} \tag{43}$$

По неравенству Юнга

$$|\nabla w|^s \leq |\nabla w|^{p(x)} (u + R)^{p(x)-s} + (u + R)^{-s}.$$

Далее,

$$(u + R)w = (u + R) \left(\ln \frac{k}{u + R} \right)_+ \leq \begin{cases} k/e, & \text{если } k/e > R, \\ R \ln \frac{k}{R} & \text{если } k/e \leq R. \end{cases}$$

В силу $k \leq M + R$ имеем

$$(u + R)w \leq \max(k/e, R) \leq M + 1.$$

Пользуясь этими оценками, из (43) получаем

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^s w^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq C(\alpha, \beta) (M+1)^\beta \int_{B_{tR}^{x_0}} (w^{\gamma+s-1} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} + w^{\gamma-1} R^{-s} \eta^\beta) dx.$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n} , пользуясь (10) и (21), имеем (аналог оценки (18))

$$\begin{aligned} & R^s \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla \max(w, 1)|^s \max(w, 1)^{\gamma-1} \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \theta(4R) \int_{B_{tR}^{x_0}} \max(w, 1)^{\gamma+s-1} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству утверждения 8 с помощью итерационной техники Мозера придём к соотношению (см. (26))

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}} w \leq C(n, p, M) (t - \sigma)^{-n\beta/s} \theta(4R)^{n/s} \left(1 + \int_{B_{tR}^{x_0}} w^s dx \right)^{1/s}. \quad (44)$$

Для оценки интеграла

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} w^s dx \leq \int_{B_{tR}^{x_0}} \left| \ln \frac{k}{u + R} \right|^s dx$$

выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = (u + R)^{1-s} \eta^\beta,$$

где $\eta \in C_0^\infty(B_{2tR}^{x_0})$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ в $B_{tR}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq 4(tR)^{-1}$. Получим

$$\int_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} \eta^\beta dx \leq \beta \int_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} (u + R)^{1-s} \eta^{\beta-1} |\nabla \eta| dx.$$

Отсюда по неравенству Юнга будем иметь

$$\int_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} \eta^\beta dx \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{2tR}^{x_0}} (u + R)^{p(x)-s} \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} dx.$$

Так как $|\nabla u|^s \leq |\nabla u|^{p(x)} + 1$, $(u + R)^{-s} \leq R^{-s}$, и $(u + R)^{p(x)-s} \leq (M + 1)^\beta$, то

$$\int_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^s (u + R)^{-s} \eta^\beta dx \leq C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \int_{B_{2tR}^{x_0}} (R^{-s} \eta^\beta + \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)}).$$

Домножая это неравенство на R^{s-n} , пользуясь неравенствами (10) и (21), найдём

$$R^s \int_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^s (u + R)^{-s} \eta^\beta dx \leq C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \theta(4R) \int_{B_{2tR}^{x_0}} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx.$$

В силу выбора η отсюда получаем

$$R^s \int_{B_{tR}^{x_0}} \left| \nabla \ln \frac{k}{u + R} \right|^s dx \leq C(n, \alpha, \beta) (M + 1)^\beta \theta(4R).$$

По определению постоянной k из (42),

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} \ln \frac{k}{u+R} dx = 0.$$

Поэтому по неравенству Пуанкаре заключаем, что

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} \left| \ln \frac{k}{u+R} \right|^s dx \leq C(n, s) R^s \int_{B_{tR}^{x_0}} \left| \nabla \ln \frac{k}{u+R} \right|^s dx \leq C(n, \alpha, \beta) (M+1)^\beta \theta(4R). \quad (45)$$

Из (44) и (45) вытекает

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\sigma R}^{x_0}} w \leq C(n, \alpha, \beta, M) (t - \sigma)^{-n\beta/s} \theta(4R)^{(n+s)/s}.$$

Вспоминая определение w , придём к оценке (41). Утверждение 12 доказано. \square

Перейдём ко второму утверждению.

Утверждение 13. Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение (1) в $B_{4R}^{x_0}$. Для любых $1/4 \leq \tau < t \leq 2$ и всех $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ выполняется

$$\left(\int_{B_{\tau R}^{x_0}} (u+R)^q dx \right)^{1/q} \leq \exp \left(C(t-\tau)^{-2n\beta/s} \theta(4R)^{(n+s)/s} + \int_{B_{tR}^{x_0}} \ln(u+R) dx \right) \quad (46)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \beta, M, q)$.

Доказательство. Положим

$$w = \left(\ln \frac{u+R}{k} \right)_+,$$

где величина k определена формулой (42), $R \leq k \leq M+R$. Выберем в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma (u+R)^{1-s} \eta^\beta,$$

где $\gamma \geq 0$, $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leq \eta \leq 1$, и $c_0 = 2/(s-1)$. Имеем

$$\begin{aligned} & (s-1) \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{-s} \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma \eta^\beta dx \leq \\ & \leq \gamma \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla(u+R)|^{p(x)} (u+R)^{-s} \chi_{\{w > c_0(\gamma+s)\}} \max(w, c_0(\gamma+s))^{\gamma-1} \eta^\beta dx + \\ & + \beta \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} (u+R)^{1-s} \max(w, c_0(\gamma+s))^\gamma \eta^{\beta-1} \nabla u \cdot \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Так как $\gamma / \max(w, c_0(\gamma + s)) \leq 1/c_0 = (s - 1)/2$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} \max(w, c_0(\gamma + s))^\gamma \eta^\beta dx \leq \\ & \leq \frac{2\beta}{s - 1} \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} (u + R)^{1-s} \max(w, c_0(\gamma + s))^\gamma \eta^{\beta-1} |\nabla \eta| dx. \end{aligned}$$

По неравенству Юнга, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{-s} \max(w, c_0(\gamma + s))^\gamma \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \int_{B_{tR}^{x_0}} (u + R)^{p(x)-s} \max(w, c_0(\gamma + s))^\gamma \eta^{\beta-p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $|\nabla u|^s \leq |\nabla u|^{p(x)} + 1$ и $(u + R)^{p(x)-s} \leq (M + 1)^\beta$, придём к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^s (u + R)^{-s} \max(w, c_0(\gamma + s))^\gamma \eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \int_{B_{tR}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma + s))^\gamma ((u + R)^{-s} \eta^\beta + |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)}) dx. \end{aligned}$$

Домножая это неравенство на R^{s-n} , используя (10) и (21), будем иметь

$$\begin{aligned} & R^s \int_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla (\max(w, c_0(\gamma + s))^{1+\gamma/s} \eta^{\beta/s})|^s dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) (M + 1)^\beta \theta(4R) \int_{B_{tR}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma + s))^{\gamma+s} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx. \end{aligned}$$

Напомним, что $\kappa = n/(n - 1)$. По неравенству Соболева,

$$\begin{aligned} & \int_{B_{tR}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma + s))^{(\gamma+s)\kappa} \eta^{\beta\kappa} dx \leq \\ & \leq \left(C(n, \alpha, \beta, M) \theta(4R) \int_{B_{tR}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma + s))^{\gamma+s} (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx \right)^\kappa. \end{aligned} \quad (47)$$

Определим срезающие функции $\eta = \eta_j$ следующим образом. Пусть $\tau < \sigma < t$, $r_j = \sigma + (t - \sigma)2^{-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\eta_j \in C_0^\infty(B_{r_j}^{x_0})$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\eta_j = 1$ в $B_{r_{j+1}}^{x_0}$, и $|\nabla \eta_j| \leq 2^{j+3}(t - \sigma)^{-1}$. Зададим последовательность γ_j соотношением $\gamma_{j+1} + s = (\gamma_j + s)\kappa$, $\gamma_0 = 0$. Тогда из (47), в котором $\gamma = \gamma_j$, $\eta = \eta_j$,

получим

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_{j+1}}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma_{j+1} + s))^{\gamma_{j+1}+s} dx &\leq \kappa^{\gamma_{j+1}+s} \int_{B_{r_{j+1}}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma_j + s))^{\gamma_{j+1}+s} dx \leq \\ &\leq C(n, \alpha, \beta, M) \kappa^{\gamma_{j+1}+s} (t - \sigma)^{-\beta\kappa} 2^{j\beta\kappa} \theta(4R)^\kappa \left(\int_{B_{r_j}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma_j + s))^{\gamma_j+s} dx \right)^\kappa. \end{aligned} \quad (48)$$

Из (45) имеем

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} w^{\gamma_0+s} dx \leq C(n, \alpha, \beta, M) \theta(4R).$$

Следовательно,

$$\int_{B_{tR}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma_0 + s))^{\gamma_0+s} dx \leq C(n, \alpha, \beta, M) \theta(4R). \quad (49)$$

Полагая

$$Y_j = \int_{B_{r_j}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma_j + s))^{\gamma_j+s} dx,$$

перепишем (48) и (49) в виде

$$Y_j \leq K_j Y_{j-1}^\kappa, \quad K_j = C^{\beta\kappa} \kappa^{\gamma_j+s} (t - \sigma)^{-\beta\kappa} 2^{j\beta\kappa} \theta(4R)^\kappa, \quad Y_0 \leq C \theta(4R).$$

Итерируя это неравенство, найдём

$$Y_j \leq \prod_{m=0}^{j-1} (K_{j-m})^{\kappa^m} (Y_0)^{\kappa^j}.$$

Поскольку $\gamma_j + s = \kappa^j s$, для $j \geq 1$ запишем

$$\prod_{m=0}^{j-1} (K_{j-m})^{\kappa^m} = (C(t - \sigma)^{-1})^{\beta\kappa(1+\kappa+\dots+\kappa^{j-1})} \kappa^{sj\kappa^j} 2^{\beta\kappa \sum_{m=0}^{j-1} (j-m)\kappa^m} \theta(4R)^{\sum_{m=1}^j \kappa^m + \kappa^j}.$$

Оценим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{j-1} (j - m) \kappa^m &= \kappa^j \sum_{l=1}^j l \kappa^{-l} \leq \kappa^j \sum_{l=0}^{\infty} l \kappa^{-l} = \kappa^j \kappa^{-1} (1 - \kappa^{-1})^{-2}, \\ \kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa^{j-1} + \kappa^j + \kappa^j &\leq (n + 1) \kappa^j. \end{aligned}$$

В итоге,

$$Y_j \leq (C(t - \sigma)^{-\beta n/s})^{\gamma_j+s} \kappa^{j(\gamma_j+s)} \theta(4R)^{(\gamma_j+s)(n+1)/s}.$$

Таким образом,

$$\left(\int_{B_{r_j}^{x_0}} \max(w, c_0(\gamma_j + s))^{\gamma_j + s} dx \right)^{1/(\gamma_j + s)} \leq C(t - \sigma)^{-\beta n/s} \kappa^j \theta(4R)^{(n+1)/s}. \quad (50)$$

Пусть r — целое число из отрезка $[\gamma_{k-1} + s, \gamma_k + s]$. Ясно, что $\kappa^k \leq \kappa r/s$. Пользуясь неравенством Гёльдера и оценкой Стирлинга ($r! \geq \sqrt{2\pi r}(r/e)^r$), найдём

$$\begin{aligned} \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} \frac{w^r}{r!} dx &\leq \frac{1}{r!} \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} w^{\gamma_k + s} dx \right)^{r/(\gamma_k + s)} \leq \\ &\leq C^r (t - \sigma)^{-\beta n r/s} \kappa^{kr} \theta(4R)^{(n+1)r/s} / r! \leq C^r (t - \sigma)^{-\beta n r/s} \theta(4R)^{(n+1)r/s}. \end{aligned} \quad (51)$$

Следовательно, выбрав $\delta_0 = (t - \sigma)^{\beta n/s} C \theta(4R)^{-(n+1)/s}$, где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$ достаточно мало, будем иметь

$$\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!} dx \leq 2^{-r}.$$

Для $1 \leq r \leq s$, по неравенству Гёльдера и (49),

$$\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!} dx \leq \frac{\delta_0^r}{r!} \left(\int_{B_{tR}^{x_0}} w^s dx \right)^{r/s} \leq \frac{(C\delta_0\theta(4R)^{1/s})^r}{r!},$$

где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$. В итоге, за счёт малости

$$\delta_0 = \tilde{\delta}_0(n, \alpha, \beta, M)(t - \sigma)^{\beta n/s} \theta(4R)^{-(n+1)/s}$$

получаем

$$\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} e^{\delta_0 w} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} \frac{(\delta_0 w)^k}{k!} dx \leq e + 1.$$

По определению w выполняется $(u + R)^{\delta_0} \leq \exp(\delta_0 w)$. Приходим к оценке

$$\left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{\delta_0} dx \right)^{1/\delta_0} \leq k(e + 1)^{1/\delta_0} \leq k \exp \left(C(t - \sigma)^{-n\beta/s} \theta(4R)^{(n+1)/s} \right). \quad (52)$$

Покажем теперь, что для любого $0 < q < n(s - 1)/(n - 1)$ выполняется оценка

$$\left(\int_{B_{\tau R}^{x_0}} (u + R)^q dx \right)^{1/q} \leq C(n, p, M, \tau, \sigma, q) \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{\delta_0} dx \right)^{1/\delta_0}.$$

Для этого, выбирая в интегральном тождестве (6) пробную функцию

$$\psi = (u + R)^{1-s+\gamma}\eta^\beta,$$

где $0 < \gamma < s - 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{\sigma R}^{x_0})$, придём к соотношению

$$\begin{aligned} & (s - 1 - \gamma) \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{\gamma-s}\eta^\beta dx \leq \\ & \leq \beta \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} (u + R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta-1} \nabla u \nabla \eta dx \leq \\ & \leq \beta \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} (u + R)^{1-s+\gamma}\eta^{\beta-1} |\nabla \eta| dx. \end{aligned}$$

По неравенству Юнга,

$$\begin{aligned} & \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u + R)^{\gamma-s}\eta^\beta dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta)(s - 1 - \gamma)^{-\beta} \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{p(x)-s+\gamma} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} dx, \end{aligned}$$

откуда, в силу $|\nabla u|^s \leq |\nabla u|^{p(x)} + 1$ и $(u + R)^{p(x)-s} \leq (M + 1)^\beta$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^s (u + R)^{\gamma-s}\eta^\beta dx \leq \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{\gamma-s}\eta^\beta dx + \\ & + C(\alpha, \beta)(s - 1 - \gamma)^{-\beta} (M + 1)^\beta \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^\gamma |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{\beta-p(x)} dx. \end{aligned}$$

Домножая последнее неравенство на R^{s-n} , применяя (10) и (21), находим

$$\begin{aligned} & R^s \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla((u + R)^{\gamma/s}\eta^{\beta/s})|^s dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta)(M + 1)^\beta (s - 1 - \gamma)^{-\beta} \theta(4R) \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^\gamma (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx. \end{aligned} \tag{53}$$

Применяя неравенство Соболева, из (53) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} ((u + R)^\gamma \eta^\beta)^\kappa dx \leq \\ & \leq C(n, \alpha, \beta, M)(s - 1 - \gamma)^{-\beta\kappa} \theta(4R)^\kappa \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^\gamma (\eta^\beta + (R|\nabla \eta|)^\beta) dx \right)^\kappa. \end{aligned} \tag{54}$$

Далее будем считать, что γ отделено от $s - 1$, так что множителем $(s - 1 - \gamma)^{-\beta\kappa}$ можно пренебречь. Таким образом, будем использовать неравенство (54) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} ((u + R)^\gamma \eta^\beta)^\kappa dx \right)^{1/(\kappa\gamma)} \leq \\ & \leq \left(C(n, \alpha, \beta, M)\theta(4R) \int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^\gamma (\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta) dx \right)^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (55)$$

Пусть j_0 — минимальное натуральное число, такое, что $q \leq \delta_0 \kappa^{j_0}$. Положим $\delta_1 = q\kappa^{-j_0}$ и $r_j = \sigma - (\sigma - \tau)(1 - 2^{-j})$, $j = 0, 1, \dots, j_0$. Пусть ещё $\eta_j \in C_0^\infty(B_{r_j}^{x_0})$, $\eta_j = 1$ на $B_{r_{j+1}}^{x_0}$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $|\nabla\eta_j| \leq 2^{j+2}/(\sigma - \tau)$. Последовательно записывая неравенство (55) для $\eta = \eta_j$, $\gamma = \gamma_j = \delta_1 \kappa^j$, $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{\tau R}^{x_0}} (u + R)^q dx \right)^{1/q} = \left(\int_{B_{r_{j_0}}^{x_0}} (u + R)^{\gamma_{j_0}} dx \right)^{1/\gamma_{j_0}} \leq \\ & \leq \prod_{j=0}^{j_0-1} (C\theta(4R)(\sigma - \tau)^{-\beta} 2^{\beta j})^{1/\gamma_j} \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{\delta_1} dx \right)^{1/\delta_1} \leq \\ & \leq (C(\sigma - \tau)^{-\beta} \theta(4R))^{n/\delta_1} \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{\delta_1} dx \right)^{1/\delta_1} \leq \\ & \leq (C(\sigma - \tau)^{-\beta} \theta(4R))^{2n/\delta_0} \left(\int_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u + R)^{\delta_0} dx \right)^{1/\delta_0}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы применили неравенство Гёльдера. Совмещая последнее неравенство с (52), где $\sigma = (t + \tau)/2$, придём к оценке

$$\left(\int_{B_{\tau R}^{x_0}} (u + R)^q dx \right)^{1/q} \leq k \exp \left(C(t - \tau)^{-\beta(n+s)/s} \theta(4R)^{(n+s)/s} \right),$$

что и составляет утверждение леммы в случае $q < n(s - 1)/(n - 1)$. Здесь мы использовали простое неравенство

$$\begin{aligned} & (C(t - \tau)^{-\beta} \theta(4R))^{2n/\delta_0} (e + 1)^{1/\delta_0} = \\ & = \exp \left((\ln C + \beta \ln(t - \tau)^{-1} + \ln \theta(4R)) C(t - \tau)^{-\beta n/s} \theta(4R)^{(n+1)/s} \right) \\ & \leq \exp \left(C(t - \sigma)^{-\beta(n+s)/s} \theta(4R)^{(n+s)/s} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что степень q можно взять любую, меньшую чем $n(s-1)/(n-s)$, если $s < n$, и любую положительную, если $s \geq n$. Также легко показать, что в (46) константа может быть взята не зависящей от q , если q отделено от $n(s-1)/(n-1)$. □

Доказательство теоремы 3. Совмещая оценки утверждения 12, где $\sigma = 1$, $t = 3$, и утверждения 13, в котором $\tau = 2$, $t = 3$, приходим к (16). Теорема 3 доказана. □

Доказательство теоремы 4. Совмещая оценки (16) и (22) для $q = s-1$, придём к (17). Здесь используется $n/(s-1) + 2(n+s)/s \leq 3(n+s)/(s-1)$ Теорема 4 доказана. □

Некоторые уточнения

Приведём уточнение наших оценок для случая, когда $p(x_0) < n$. Будем пользоваться неравенством Соболева в виде

$$\left(\int_{B_R^{x_0}} |f|^{ns/(n-s)} dx \right)^{(n-s)/ns} \leq \frac{(n-1)s}{n-s} \left(R^s \int_{B_R^{x_0}} |\nabla f|^s dx \right)^{1/s}, \quad f \in W_0^{1,s}(B_R^{x_0}). \quad (56)$$

Предположим, что функция $v \in W^{1,s}(B_{4R}^{x_0})$ для любой $\eta \in C_0^\infty(B_{4R}^{x_0})$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & R^s \int_{B_{4R}^{x_0}} |\nabla(v^{(\gamma+s-1)/s} \eta^{\beta/s})|^s dx \leq \\ & \leq C(\alpha, \beta) \theta(4R) (M+1)^\beta (\gamma+s-1)^s \int_{B_{4R}^{x_0}} v^{\gamma+s-1} (\eta^\beta + (R|\nabla\eta|)^\beta) dx. \end{aligned}$$

Определим последовательность R_j и срезающие функции η_j так же, как и при доказательстве утверждения 8. Пусть $\varkappa = n/(n-s)$. Положим $\gamma_0 = 1$ и определим последовательность γ_j соотношением $\gamma_{j+1} + s - 1 = \varkappa(\gamma_j + s - 1)$. Пользуясь неравенством Соболева (56), получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{R_{j+1}}^{x_0}} v^{\gamma_{j+1}+s-1} dx \right)^{1/\varkappa s} \leq \\ & \leq (n-s)^{-1} \left(C(n, \alpha, \beta, M) 2^{\beta j} (t-\sigma)^{-\beta} \theta(4R) (\gamma_j + s - 1)^s \int_{B_{R_j}^{x_0}} (u+R)^{\gamma_j+s-1} dx \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Возводя последнее неравенство в степень $s/(\gamma_j + s - 1)$ и используя обозначение (25), придём к оценке

$$Y_{j+1} \leq \left(C 2^{\beta j/s} \theta(4R)^{1/s} (\gamma_j + s - 1) (n - s)^{-1} (t - \sigma)^{-\beta/s} \right)^{\varkappa^{-j}} Y_j, \quad (57)$$

где $C = C(n, \alpha, \beta, M)$. Используем соотношения

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \varkappa^{-j} = \varkappa^{-1} (1 - \varkappa^{-1})^{-2} = (n - s) n s^{-2}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \varkappa^{-j} = (1 - \varkappa^{-1})^{-1} = n s^{-1}.$$

Итерируя (57), и используя $x^{-x} \leq e^{1/e}$, находим

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} Y_k \leq C(n, \alpha, \beta, M) (n - s)^{-n/s} (t - \sigma)^{-n\beta/s^2} \theta(4R)^{n/s^2} Y_0.$$

Таким образом, если $p(x_0) < n$, в оценке (22) можно заменить $\theta(4R)^{n/q}$ на $\theta(4R)^{n/sq}$. В оценке (28) можно заменить $\theta(4R)^{n/s}$ на $\theta(4R)^{n/s^2}$. В формулировке утверждения 11 можно заменить $\theta(4R)^{(n+s)/s}$ на $\theta(4R)^{(n+s^2)/s^2}$. В формулировке теоремы 2 можно брать $l < \alpha^2/(n + \alpha^2)$, так как интересует поведение решения в окрестности точки, фактически допустимы $l < p(x_0)^2/(n + p(x_0)^2)$.

Аналогично, в неравенстве (41) утверждения 12 можно заменить $\theta(4R)^{(n+s)/s}$ на $\theta(4R)^{(n+s^2)/s^2}$. В оценке (50) получим $\theta(4R)^{(n+s)/s^2}$. В итоге, в неравенстве (46) утверждения 13 получим $\theta(4R)^{(n+s^2)/s^2}$ (можно брать $\theta(4R)^{(n+s+\varepsilon)/s^2}$ для любого $\varepsilon > 0$).

В формулировке теоремы 4 получим $\theta(4R)^{(2n+s^2)/s(s-1)}$ вместо $\theta(4R)^{3(n+s)/(s-1)}$.

Дополнение

Приведём доказательство того факта, что из сходимости почти всюду функций (или вектор-функций) $f_j \rightarrow f$ и сходимости “энергий”

$$\int_D |f_j|^{p(x)} dx \rightarrow \int_D |f|^{p(x)} dx \quad (58)$$

следует сходимость f_j к f в $L^{p(x)}(D)$, то есть

$$\int_D |f_j - f|^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Воспользуемся теоремой Шеффе — если последовательность неотрицательных функций f_j сходится к f почти всюду в D и $\int_D f_j dx \rightarrow \int_D f dx$, то $f_j \rightarrow f$ в $L^1(D)$.

По теореме Шеффе, из (58) следует сходимость $|f_j|^{p(x)} \rightarrow |f|^{p(x)}$ в $L^1(D)$. Таким образом, последовательность f_j является равномерно интегрируемой. Так как

$$|f_j - f|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1}(|f_j|^{p(x)} + |f|^{p(x)}) \leq 2^\beta(|f_j|^{p(x)} + |f|^{p(x)}),$$

последовательность $|f_j - f|^{p(x)}$ также равномерно интегрируема и сходится к нулю почти всюду в D . Отсюда по теореме Лебега получаем сходимость $|f_j - f|^{p(x)}$ к нулю в $L^1(D)$.

Можно дать и иное доказательство. Определим $\tilde{f}_j = \min(1, |f|/|f_j|)f_j$ если $f_j \neq 0$, $\tilde{f}_j = 0$ если $f_j = 0$. Функции \tilde{f}_j сходятся почти всюду к f , при этом $|\tilde{f}_j| \leq |f|$. По теореме Лебега, $|\tilde{f}_j - f|^{p(x)} \rightarrow 0$ в $L^1(D)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_D |f_j - \tilde{f}_j|^{p(x)} dx &= \int_{\{|f_j| > |f|\}} (|f_j| - |f|)^{p(x)} dx \leq \int_{\{|f_j| > |f|\}} (|f_j|^{p(x)} - |f|^{p(x)}) dx = \\ &= \int_D (|f_j|^{p(x)} - |f|^{p(x)}) dx + \int_{\{|f_j| \leq |f|\}} (|f|^{p(x)} - |f_j|^{p(x)}) dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $j \rightarrow \infty$ в силу (58) и теоремы Лебега, применённой к последнему интегралу. По неравенству треугольника ($|a + b|^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q)$ для $q \geq 1$),

$$\int_D |f_j - f|^{p(x)} dx \leq 2^{\beta-1} \int_D (|f_j - \tilde{f}_j|^{p(x)} + |\tilde{f}_j - f|^{p(x)}) dx \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$.

В обратную сторону, если $|f_j - f|^{p(x)} \rightarrow 0$ в $L^1(D)$, то сходимость $|f_j|^{p(x)} \rightarrow |f|^{p(x)}$ в $L^1(D)$ следует из оценки

$$\begin{aligned} \int_D \left| |f_j|^{p(x)} - |f|^{p(x)} \right| dx &\leq \beta \int_D \left| |f_j| - |f| \right| \max(|f_j|, |f|)^{p(x)-1} dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_D |f_j - f|^{p(x)} dx + C(\alpha, \beta) \varepsilon^{1/(1-\alpha)} \int_D (|f_j|^{p(x)} + |f|^{p(x)}) dx, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Список литературы

1. Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, № 5. С. 961–995.
2. Жиков В. В. Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 4. С. 675–711.

3. Růžička M. *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*. Lect. Notes Math. 1748, Berlin-Heidelberg: Springer, 2000.
4. Жиков В. В. Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 1. С. 107–114.
5. Жиков В. В. Разрешимость трёхмерной задачи о термисторе // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 101–114.
6. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Lect. Notes Math. 2017. Berlin: Springer, 2011.
7. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. *Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis*. Basel: Birkhäuser–Springer, 2013.
8. Kokilashvili V., Meshkii A., Rafeiro H., Samko S. *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces*. Vol. 1: Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces. Vol. 2: Variable Exponent Hölder, Morrey–Campanato and Grand Spaces. Operator Theory: Advances and Applications 248, 249. Basel: Birkhäuser–Springer, 2016.
9. Zhikov V. On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. 2011. V. 173, No. 5. P. 463–570.
10. Жиков В. В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2017.
11. Zhikov V. V. On Lavrentiev’s Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3, No. 2. P. 249–269.
12. Жиков В. В. О плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 310. С. 67–81.
13. Жиков В. В., Пастухова С. Е. О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 19–52.
14. Алхутов Ю. А. Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1651–1660.
15. Крашенинникова О. В. О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 204–211.

16. Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. В. Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 6. С. 3–60.
17. Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. Регулярность граничной точки для $p(x)$ -лапласиана // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. (в печати)
18. Алхутов Ю. А. О гёльдеровой непрерывности $p(x)$ -гармонических функций // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 3–28.
19. Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д. О неравенстве Харнака для $p(x)$ -лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$ // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2018. (принято в печать)
20. Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. В. О непрерывности решений эллиптических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 7–15.
21. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247–302 .
22. Trudinger N. S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721–747.
23. Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 577–591.
24. Trudinger N. S. On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1971. V. 42. P. 50–62 .