



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Зверяев Е.М., Коваленко М.Д.,
Меньшова И.В., Кержаев А.П.**

О свойствах точных
решений краевых задач
теории упругости в
полуполосе и их
приложение к теории
остаточных напряжений в
горных породах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О свойствах точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе и их приложение к теории остаточных напряжений в горных породах / Е.М.Зверяев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 56. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2018-56](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-56)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-56>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Е.М. Зверяев, М.Д. Коваленко, И.В. Меньшова, А.П. Кержаев

**О свойствах точных решений краевых задач
теории упругости в полуполосе и их приложении
к теории остаточных напряжений в горных породах**

Москва — 2018

Зверяев Е.М., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П.

О свойствах точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе и их приложении к теории остаточных напряжений в горных породах

Построено решение первой основной нечетно-симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе со свободными длинными сторонами. Решение представляется в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых находятся в явном виде при помощи функций, биортогональных к функциям Папковича–Фадля. Полученное решение описывает остаточные напряжения в бесконечной полосе с нулевыми граничными условиями на ее сторонах и перемещения, возникающие при сбросе остаточных напряжений, вследствие образования разрыва горных пород.

Ключевые слова: полуполоса, функции Папковича–Фадля, точные решения, остаточные напряжения, горные породы

Evgeniy Mikhailovich Zverayev, Mikhail Denisovich Kovalenko, Irina Vladimirovna Menshova, Alexander Petrovich Kerzhaev

On theory of elasticity boundary value problems properties of exact solutions in a half-strip and their application to theory of residual stresses in rocks

A solution of the first basic odd-symmetric boundary value problem in the theory of elasticity in a half-strip with free longitudinal sides is constructed. It is represented as series in Papkovich–Fadle eigenfunctions whose coefficients are found in an explicit form by using the biorthogonal to the Papkovich–Fadle eigenfunctions. The solution describes the residual stresses in an infinite strip with zero boundary conditions on its sides and the displacements arising when residual stresses are released, as a result of the formation of a rock rupture.

Key words: half-strip, Papkovich–Fadle eigenfunctions, exact solutions, residual stresses, rocks

1. Введение

В статье в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля (ПФ) строится точное решение краевой задачи теории упругости о нечетно-симметричной деформации полуполосы $\{P^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$ со свободными длинными сторонами. Функции ПФ точно удовлетворяют нулевым граничным условиям на длинных сторонах полуполосы. Выполнив граничные условия на ее торце, приходим к проблеме разложения двух заданных граничных функций в ряды по двум системам функций ПФ. Наиболее полные обзоры по бигармонической проблеме, примером которой является рассматриваемая в этой работе задача, можно найти в [1-5]. Существует огромное число всевозможных приближенных и численных методов решения краевых задач теории упругости в полуполосе (прямоугольнике). Большинство из них, так или иначе, сводят краевую задачу к решению бесконечных систем алгебраических уравнений, в том числе и те, в которых используются функции ПФ. Точные решения, построенные в работе, принципиально отличаются от приближенных. Однако «нестандартные» свойства, присущие полученным точным решениям, в той или иной форме, неизбежно должны проявляться в приближенных и численных решениях, в частности как различного рода трудности, связанные с решением бесконечных систем, зависимость решения от способа приближенного удовлетворения граничных условий на торце полуполосы от параметров сетки (в численных методах) и т. д. [6].

Функции ПФ комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке – торце полуполосы. Поэтому найти неизвестные коэффициенты разложений по ним, основываясь на классических представлениях теории базиса функций, невозможно. Их можно рассматривать как пример представляющих систем экспонент с комплексными показателями [7, 8] и с вырожденной в отрезок областью аналитичности. Основываясь на преобразовании Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа [9], к функциям ПФ удастся построить соответствующие биортогональные функции и затем найти простые, явные выражения для коэффициентов искомого разложения.

Вначале изучаются так называемые, разложения Лагранжа – разложения одной функции в ряд по какой-либо одной системе функций ПФ. При решении краевых задач разложения Лагранжа играют такую же роль, какую тригонометрические ряды Фурье играют в известных периодических решениях Файлона–Рибьера. Свойства сходимости разложений Лагранжа и тригонометрических рядов весьма близки (в статье [10] на конкретном примере проиллюстрирована их равносходимость). Это объясняется тем, что комплексные собственные числа λ_k ; ($k = 1, 2, \dots$), отвечающие тем или иным однородным граничным условиям на длинных сторонах полуполосы, всегда будут нулями целых функций экспоненциального типа. С ростом номера корня они все плотнее «прижимаются» к вещественной оси [11]. Однако, в отличие от тригонометрических рядов, раз-

ложения Лагранжа неединственны, что неизбежно проявляется в решении краевых задач. Это типичное свойство систем экспонент с комплексными показателями связано с тем, что биортогональные функции определены не на отрезке (торце полуполосы), а на бесконечной спирали, лежащей на римановой поверхности логарифма [9]. Из-за этого первоначально заданные на отрезке раскладываемые функции приходится каким-либо образом продолжать на бесконечную прямую. От способа продолжения будут зависеть коэффициенты разложений в ряд Лагранжа.

Вторая часть работы посвящена краевой задаче. В краевых задачах (в отличие от разложений Лагранжа) граничные функции нужно продолжать не только вдоль торца полуполосы, но и вдоль ее длинных сторон на всю прямую. Это связано, в частности, с необходимостью придать классическому принципу «условного снесения граничных условий на недеформированную поверхность» математически строгий характер¹ [12]. Угловые точки приобретают свойства, типичные для всех остальных точек полуполосы. Это не просто геометрические объекты, а бесконечно малые элементы, где значения граничных функций должны быть известны вместе со всеми их производными². Для объяснения физической сущности полученных решений задача рассматривается в двух постановках: а) на торце полуполосы заданы напряжения; б) торец полуполосы рассматривается как линия разрыва продольных или поперечных перемещений в бесконечной полосе.

2. Биортогональные функции и разложения Лагранжа

Решение нечетно-симметричной краевой задачи для полуполосы Π^+ со свободными длинными сторонами $y = \pm 1$ ищется в виде следующих разложений в ряды по функциям ПФ, в которых C_n ($n = 1, \dots, 4$) и a_k, \bar{a}_k ($k = 1, 2, \dots$) – неизвестные коэффициенты разложений ($\text{Re} \lambda_k < 0$)

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= (C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2)y - C_4[(2 + \nu)y^3 - 3\nu y] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\
 V(x, y) &= -(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3) +
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

¹ Впервые математически строгое обоснование этому принципу дал Д.И. Шерман [13]. Оно воспроизводится также в книге Н.И. Мухелишвили [14]. Его суть состоит в том, что решение первой основной краевой задачи теории упругости для плоской области, ограниченной гладким контуром, эквивалентно решению задачи для бесконечной плоскости, в которой вдоль контура задан некоторый разрыв перемещений. Тем самым решение продолжается в бесконечную плоскость. В этой статье решение для полуполосы также продолжается в бесконечную плоскость, но принципиально иначе, чем в [13].

² С продолжением решения за пределы области связан, в частности, пересмотр Е.И. Шемякиным [15] доказательства теоремы единственности для конечных областей с угловыми точками границы, где автор показывает, что для единственности решения таких задач в угловых точках должны задаваться дополнительно некоторые условия.

$$\begin{aligned}
& + (C_3 + 3C_4x) \left[(2 + \nu) - \nu y^2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \chi(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
\sigma_x(x, y) &= 4(1 + \nu)(C_3 + 3C_4x)y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k s_x(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k s_y(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= 6(1 + \nu)(1 - y^2)C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k t_{xy}(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}.
\end{aligned}$$

Здесь введены такие обозначения: $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – перемещения вдоль осей x и y соответственно, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Слагаемым, стоящим вне сумм, отвечает элементарное решение теории изгиба балки, причем, постоянным C_1 и C_2 соответствуют перемещения пластины как абсолютно жесткого тела.

Собственные функции ПФ ξ , χ , s_x , s_y , t_{xy} и т.д. имеют вид

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y, \\
\chi(\lambda_k, y) &= - \left(\frac{1 - \nu}{2} \sin \lambda_k + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\
s_x(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k \{ (2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}, \\
s_y(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}, \\
t_{xy}(\lambda_k, y) &= (1 + \nu) \lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Числа $\left\{ \pm \lambda_k, \pm \overline{\lambda}_k \right\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ – множество всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \lambda - \sin \lambda \cos \lambda. \tag{2.3}$$

Пользуясь методами теории целых функций, для них можно установить асимптотическую формулу

$$\lambda_k \approx (k + 2)\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln[4(k + 2)\pi - 3\pi]. \tag{2.4}$$

Поскольку $t_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = s_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$, то граничные условия при $y = \pm 1$

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \tag{2.5}$$

выполняются автоматически.

Удовлетворяя с помощью выражений (2.1) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов из разложений по функциям ПФ. Например, в том случае, когда на торце полуполосы известны нормальное $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$ и касательное $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$ напряжения, получим

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= 4(1+\nu)yC_3 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y), \\ \tau(y) &= 6(1+\nu)(1-y^2)C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Коэффициенты C_3 и C_4 легко определяются, поэтому можно считать, что они известны. Коэффициенты a_k и сопряженные с ними коэффициенты $\overline{a_k}$ находятся из разложений (2.6) в явном виде с помощью функций, биортогональных к функциям ПФ.

Уравнения для определения биортогональных систем функций $\{U_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{V_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{X_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Y_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{T_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ имеют вид

$$\begin{aligned}a) \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & b) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ c) \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} & d) \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \\ e) \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \lambda_k \in \Lambda \quad (k \geq 1).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Аналогичные формулы приведены в статье [16] для четно-симметричной задачи. Правые части формул (2.7) выбираются по тем же соображениям, что и в теории рядов экспонент при построении биортогональных функций, например, [8, 11]. Через $\xi(\lambda, y)$, $\chi(\lambda, y)$ и т.д. обозначены порождающие функции [17], совпадающие с соответствующими функциями ПФ, когда параметр $\lambda \in \Lambda$. В уравнениях (2.7) они получаются из соответствующих формул (2.2) простой заменой λ_k на λ .

Интегралы (2.7) существуют, только если параметр λ является вещественным. В противном случае прямая интегрирования должна быть деформирована в контур T , лежащий в комплексной плоскости $z = x + iy$ и составленный из луча $-\infty < x \leq 0$ и отрезка $|y| \leq 1$ [9, 10, 16].

Принимая в (2.7) $\lambda = \lambda_m$, получим соотношения биортогональности для функций ПФ ($t \in T$) вида

$$\int_T \xi(\lambda_m, t) U_k(t) dt = \begin{cases} \lambda_k M_k & (\lambda_k = \lambda_m), \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases}\tag{2.8}$$

где

$$M_k = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = \frac{\sin^2 \lambda_k}{\lambda_k}.\tag{2.9}$$

Из формул (2.7) также следуют равенства:

$$\int_T \xi(\overline{\lambda_m}, t) \overline{U_k(t)} dt = \begin{cases} \overline{\lambda_k M_k} & (\lambda_k = \lambda_m) \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m) \end{cases}, \quad (2.10)$$

$$\int_T \xi(\lambda_m, t) \overline{U_k(t)} dt = \int_T \xi(\overline{\lambda_m}, t) U_k(t) dt = 0.$$

(k, m любые целые числа) и

$$\int_T \xi(\lambda_m, t) \overline{U_k(t)} dt = \int_T \xi(\overline{\lambda_m}, t) U_k(t) dt = 0. \quad (2.11)$$

Ниже приведены, вытекающие из соответствующих формул (2.7), аналогичные (2.8), соотношения биортогональности для других функций ПФ

$$\int_T \chi(\lambda_m, t) V_k(t) dt = \int_T s_x(\lambda_m, t) X_k(t) dt = \begin{cases} M_k & (\lambda_k = \lambda_m) \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m) \end{cases},$$

$$\int_T s_y(\lambda_m, t) Y_k(t) dt = \begin{cases} \lambda_k^2 M_k & (\lambda_k = \lambda_m) \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m) \end{cases}, \quad (2.12)$$

$$\int_T t_{xy}(\lambda_m, t) T_k(t) dt = \begin{cases} \lambda_k M_k & (\lambda_k = \lambda_m) \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m) \end{cases}.$$

Очевидно, что для них справедливы также и формулы типа (2.10), (2.11).

Как было показано в статье [10], преобразование Бореля любой биортогональной функции складывается из сумм целых и квазицелых функций экспоненциального типа, равного 1. Поэтому их обращения, т.е. функции $U_k(t)$, $V_k(t)$ и т. д., имеют следующую структуру: они состоят из финитных (равных нулю вне отрезка $|t| \leq 1$) и нефинитных частей³, определенных на бесконечной спирали, лежащей на римановой поверхности логарифма [10, 16]. При вычислении интегралов от произведений заданных на торце полуполосы раскладываемых функций на соответствующие биортогональные функции контур интегрирования T можно заменить бесконечной прямой [10, 16]. Так как биортогональные функции определены на бесконечной прямой, то раскладываемые функции необходимо каким-либо способом продолжать за пределы отрезка (торца полуполосы) на эту прямую. От того, как выполнены продолжения, будут зависеть коэффициенты разложений и, следовательно, решение краевой задачи. Ниже приведены формулы для финитных составляющих соответствующих биортогональных функций, как правило используемых при решении краевых задач

$$\begin{aligned} a) \quad u_k(y) &= \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k}, & b) \quad v_k(y) &= \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k}, \\ c) \quad x_k(y) &= \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^2} \left(\frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right), & d) \quad y_k(y) &= \frac{-1}{2(1+\nu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

³ Нефинитные части устроены достаточно просто. Примеры можно найти в статье [10].

$$e) t_k(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k} \frac{\cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k}; \quad (|y| \leq 1, k \geq 1).$$

Нефинитные части биортогональных функций ортогональны на бесконечной прямой к функциям $\cos m\pi y$ и $\sin m\pi y$ ($m=1,2,\dots$) [10]. Поэтому формулы (2.13) легко получить следующим образом [16]. Покажем, например, как найти функции $v_k(y)$ – финитные части функций $V_k(y)$. С этой целью примем во второй формуле (2.7) $\lambda = m\pi$; ($m=1,2,\dots$). Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(m\pi, y) V_k(y) dy = (-1)^{m+1} \frac{1+\nu}{2} m\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos m\pi y V_k(y) dy = \frac{m\pi}{m^2 \pi^2 - \lambda_k^2}. \quad (2.14)$$

Отсюда сразу вытекают свойство финитности функций $V_k(y)$ и вторая формула (2.13).

Функции $v_k(y)$, как следует из равенств (2.14), находятся с точностью до неопределяемой произвольной постоянной, ортогональной к функциям $\cos m\pi y$. Исключить ее из рассмотрения можно, если по системе функций $\{\chi(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ раскладывать только функции, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ к постоянной. Это относится ко всем четным функциям ПФ.

Функции $U_k(y)$, $V_k(y)$ обладают следующим свойством ортогональности, вытекающим из соответствующих формул (2.7) при $\lambda \rightarrow 0$

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} y U_k(y) dy = 0, \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} V_k(y) dy = 0. \quad (2.15)$$

Разложения Лагранжа по всем функциям ПФ в самом общем случае можно записать так

$$\begin{aligned} U(y) &= u_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\lambda_k M_k} \xi(\lambda_k, y) + \frac{\bar{u}_k}{\lambda_k M_k} \xi(\bar{\lambda}_k, y), \\ V(y) &= v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{M_k} \chi(\lambda_k, y) + \frac{\bar{v}_k}{M_k} \chi(\bar{\lambda}_k, y), \\ \sigma_x(y) &= x_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{M_k} s_x(\lambda_k, y) + \frac{\bar{x}_k}{M_k} s_x(\bar{\lambda}_k, y), \\ \sigma_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\lambda_k^2 M_k} s_y(\lambda_k, y) + \frac{\bar{y}_k}{\lambda_k^2 M_k} s_y(\bar{\lambda}_k, y), \\ \tau(y) &= t_0(1-y^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{\lambda_k M_k} t_{xy}(\lambda_k, y) + \frac{\bar{t}_k}{\lambda_k M_k} t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь u_0 , u_k , v_0 , v_k и т.д. – неизвестные коэффициенты разложений (коэффициенты Лагранжа). В знаменателях выражений (2.16) стоят нормирующие множители M_k , $\lambda_k M_k$, $\lambda_k^2 M_k$ – значения правых частей соответствующих выражений

(2.7), определенные при $\lambda = \lambda_k$ (формулы (2.8), (2.12)). Слагаемым, стоящим перед суммами, соответствуют, как можно заметить, элементарные решения.

В силу ортогональности (2.15), для определения неизвестных коэффициентов разложений u_0 и v_0 необходимо дополнительно построить биортогональные функции с нулевым индексом: функцию $U_0(y)$, ортогональную ко всем функциям $\xi(\lambda_k, y)$, и функцию $V_0(y)$, ортогональную к функциям $\chi(\lambda_k, y)$. Уравнения для их определения имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_0(y) dy = \frac{3L(\lambda)}{2\lambda}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda, y) V_0(y) dy = \frac{-3L(\lambda)}{2\lambda^2}. \quad (2.17)$$

Отсюда при $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$ вытекают следующие свойства ортогональности функций $U_0(y)$, $V_0(y)$

$$\int_T \xi(\lambda_k, y) U_0(y) dy = \int_T \chi(\lambda_k, y) V_0(y) dy = 0 \quad (k \geq 1). \quad (2.18)$$

Правые части равенств (2.17) выбираются так, что если в них перейти к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, то получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} y U_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} V_0(y) dy = 1. \quad (2.19)$$

Финитные части функций $U_0(y)$, $V_0(y)$ имеют соответственно вид

$$u_0(y) = \frac{3}{2(1+v)} y, \quad v_0(y) = \frac{3y^2}{4(1+v)}; \quad (|y| \leq 1). \quad (2.20)$$

Они находятся также, как и функции (2.13).

Приведем несколько примеров разложений Лагранжа (2.16). Как отмечалось выше, поскольку биортогональные функции определены на контуре T , который можно деформировать в бесконечную прямую, первоначально заданные на отрезке $|y| \leq 1$ раскладываемые функции, стоящие слева в формулах (2.16), должны как-то быть продолжены вне отрезка на всю прямую. От выбранного продолжения будут зависеть коэффициенты разложений Лагранжа. Однако в любом случае ряды Лагранжа всегда будут сходиться к раскладываемым функциям при $|y| < 1$, а при некоторых дополнительных условиях на раскладываемые функции они будут сходиться к ним на всем отрезке $[-1, 1]$ (это типичное свойство систем экспонент с комплексными показателями [8] было продемонстрировано в статье [10]).

Условимся продолжения раскладываемых функций, выполненные с помощью их представлений по системам функций $\{\cos m\pi y\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{\sin m\pi y\}_{m=1}^{\infty}$, называть периодическими.

Введем еще следующие определения: будем говорить, что четная функция $f(y)$ самоуравновешена по силе или просто самоуравновешена, а нечетная функция $g(y)$ самоуравновешена по моменту, если

$$\int_{-1}^1 f(y)dy = 0, \quad \int_{-1}^1 yg(y)dy = 0. \quad (2.21)$$

Разложения по $\xi(\lambda_k, y)$

а) Рассмотрим разложение порождающей функции $U(y) = \xi(\lambda, y)$ (λ – произвольный вещественный параметр)

$$\xi(\lambda, y) = u_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\lambda_k M_k} \xi(\lambda_k, y) + \frac{\overline{u_k}}{\overline{\lambda_k} M_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y); \quad (|y| < 1). \quad (2.22)$$

Продолжим ее, в соответствии с формулой (2.2), на всю вещественную ось и будем считать, следуя [10, 16], что равенство (2.22) выполняется на всей прямой (это допущение типично для представляющих систем функций, к которым относятся и функции ПФ [7]). Умножим его на биортогональную функцию $U_m(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ (справа интегрирование по бесконечной прямой нужно заменить интегрированием по контуру T). На основании соотношений биортогональности (2.8)–(2.11) и первого равенства (2.7) сразу получим

$$\frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_m^2} = u_m. \quad (2.23)$$

Учитывая соответствующие равенства (2.17)–(2.10), найдем

$$\frac{3L(\lambda)}{2\lambda} = u_0. \quad (2.24)$$

Искомое разложение Лагранжа имеет вид

$$\xi(\lambda, y) = \frac{3L(\lambda)}{2\lambda} y + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \right\}; \quad (|y| \leq 1). \quad (2.25)$$

б) Ту же функцию $\xi(\lambda, y)$ разложим в ряд Лагранжа, считая, что она продолжена вне отрезка $|y| \leq 1$ периодически. Тогда

$$u_k = \int_{-1}^1 \xi(\lambda, y) u_k(y) dy, \quad u_0 = \int_{-1}^1 \xi(\lambda, y) u_0(y) dy. \quad (2.26)$$

Подставляя числа (2.26) в формулу (2.22), получим другое разложение этой же функции (с другими коэффициентами Лагранжа). Соответствующий ряд будет сходиться к раскладываемой функции во всех точках отрезка $[-1, 1]$, кроме его концов.

Замечание 1. Пусть раскладываемая функция $U(y)$ периодически продолжается вне отрезка $[-1, 1]$. Тогда в ее разложении Лагранжа (2.26) не будет слагаемого, стоящего вне суммы, если $U(y)$ самоуравновешена по моменту, т.к. в этом случае

$$u_0 = \int_{-1}^1 U(y) u_0(y) dy = \int_{-1}^1 U(y) \frac{3y}{2(1+y)} dy = 0.$$

Разложения по $\chi(\lambda_k, y)$

а) Разложение порождающей функции $V(y) = \chi(\lambda, y)$ будет выглядеть так

$$\chi(\lambda, y) = \frac{-3L(\lambda)}{2\lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \right\}; \quad (|y| < 1). \quad (2.27)$$

Коэффициенты v_k и v_0 находятся по соответствующим формулам (2.7) и (2.17).

Для периодического продолжения раскладываемой функции получим

$$v_k = \int_{-1}^1 V(y) v_k(y) dy = \int_{-1}^1 V(y) \frac{1}{(1+v)} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} dy, \quad (2.28)$$

$$v_0 = \int_{-1}^1 V(y) v_0(y) dy = \int_{-1}^1 V(y) \frac{3y^2}{4(1+v)} dy.$$

В силу того, что функции $v_k(y)$ и $v_0(y)$ находятся с точностью до неопределяемых постоянных, раскладываемую функцию $V(y)$ нужно брать самоуравновешенной.

б) Рассмотрим разложение не самоуравновешенной функции y^2 . Заменим ее самоуравновешенной, положив $V(y) = y^2 - 1/3$. По формулам (2.28) найдем

$$v_k = 2 \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{(1+v)} \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} dy, \quad v_0 = 2 \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{3y^2}{4(1+v)} dy. \quad (2.29)$$

Возвращая $1/3$ вправо, получим разложение

$$y^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{15(1+v)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{M_k} \chi(\lambda_k, y) + \frac{\overline{v_k}}{M_k} \chi(\overline{\lambda_k}, y); \quad (|y| < 1).$$

Замечание 2. Пусть раскладываемая функция $V(y)$ периодически продолжается вне отрезка $[-1, 1]$. Для того чтобы в ее разложении Лагранжа не было слагаемого вне суммы, функция $V(y)$ должна удовлетворять двум условиям: а) она должна быть самоуравновешенной и б) она должна быть ортогональна к функции⁴ y^2 .

Разложения по функциям $s_x(\lambda_k, y)$. Рассмотрим разложение не самоуравновешенной по моменту функции y^3 . Продолжим ее периодически вне отрезка $[-1, 1]$. Перенесем слагаемое $x_0 y$ влево и определим коэффициент $x_0 = 3/5$ из условия самоуравновешенности по моменту функции $y^3 - x_0 y$. Найдем коэффициенты разложения полученной функции

⁴ В статьях [18, 19] обсуждался вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять заданные на торце полуполосы перемещения с тем, чтобы решение было затухающим на бесконечности. Простой ответ на него содержится в **Замечании 1** и **Замечании 2**. В статье [20] установлены условия затухания заданных на торце перемещений для полосы конечной длины.

$$x_k = 2 \int_0^1 y(y^2 - 3/5) \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\sin \lambda_k y}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k} dy. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (2.16), получим нужное разложение, отвечающее периодическому продолжению раскладываемой функции.

При решении краевых задач с заданными разрывами перемещений или напряжений используются следующие функции, впервые введенные в статье [21], а затем использованные, например, в статье [16] для решения четносимметричных задач в полосе с разрывами перемещений⁵

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_k, y) &= \Phi^S(\lambda_k, y) + i\Phi^C(\lambda_k, y), \\ \Psi(\lambda_k, y) &= \Psi^S(\lambda_k, y) + i\Psi^C(\lambda_k, y), \\ F(\lambda_k, y) &= 2\Phi(\lambda_k, y) - \Psi(\lambda_k, y) = F^S(\lambda_k, y) + iF^C(\lambda_k, y), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^S(\lambda_k, y) &= -t_{xy}(\lambda_k, y), \quad \Phi^C(\lambda_k, y) = \frac{1}{2}[s_y(\lambda_k, y) - s_x(\lambda_k, y)], \\ \Psi^S(\lambda_k, y) &= (1+\nu) \frac{d\xi(\lambda_k, y)}{dy} - \frac{3+\nu}{2} t_{xy}(\lambda_k, y), \quad \Psi^C(\lambda_k, y) = s_y(\lambda_k, y), \\ F^S(\lambda_k, y) &= - \left[(1+\nu) \frac{d\xi(\lambda_k, y)}{dy} + \frac{1-\nu}{2} t_{xy}(\lambda_k, y) \right], \\ F^C(\lambda_k, y) &= -s_x(\lambda_k, y) \end{aligned} \quad (2.32)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \Phi^S(\lambda_k, y) &= -(1+\nu)\lambda_k \{(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y\}, \\ \Phi^C(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k \{(\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k) \sin \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y\}, \\ \Psi^S(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \cos \lambda_k y + y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \\ \Psi^C(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k^2 \{ \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}, \\ F^S(\lambda_k, y) &= -(1+\nu)\lambda_k \{ (2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \\ F^C(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k \{ (\lambda_k \cos \lambda_k - 2 \sin \lambda_k) \sin \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y \}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Между функциями $\Phi(\lambda_k, y)$ и $\Psi(\lambda_k, y)$ имеется связь

$$\frac{d\Psi(\lambda_k, y)}{dy} = i\lambda_k \Phi(\lambda_k, y). \quad (2.34)$$

Биортогональные к $\Phi(\lambda_k, y)$, $\Psi(\lambda_k, y)$ и $F(\lambda_k, y)$ функции находятся как решения уравнений

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, y) \Phi_k(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda, y) \Psi_k(y) dy = \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \quad (2.35)$$

⁵ Эти функции используются не только для решения задач с разрывами перемещений или напряжений, но и для решения неоднородных и смешанных краевых задач в полосе или в прямоугольнике.

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, y) F_k(y) dy = \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda - \lambda_k)}; \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

Полагая

$$\begin{aligned} \Phi_k(y) &= \Phi_k^S(y) - i\Phi_k^C(y), \quad \Psi_k(y) = \Psi_k^S(y) - i\Psi_k^C(y), \quad \dot{h}_1 = k_1 \omega_1, \\ F_k(y) &= F_k^S(y) - iF_k^C(y), \end{aligned} \quad (2.36)$$

вместо уравнений (2.35) получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} a) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^S(\lambda, y) \Phi_k^S(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & b) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^C(\lambda, y) \Phi_k^C(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ c) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^S(\lambda, y) \Psi_k^S(y) dy &= \frac{\lambda \lambda_k L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & d) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^C(\lambda, y) \Psi_k^C(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ e) \int_{-\infty}^{\infty} F^S(\lambda, y) F_k^S(y) dy &= \frac{\lambda_k L(\lambda)}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, & f) \int_{-\infty}^{\infty} F^C(\lambda, y) F_k^C(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ниже приведены формулы для финитных частей входящих сюда биортонормальных функций

$$\begin{aligned} a) \quad \varphi_k^S(y) = -t_k(y) &= \frac{-\cos \lambda_k y}{2(1+\nu)\lambda_k \sin \lambda_k}, \\ b) \quad \varphi_k^C(y) &= \frac{-1}{2(1+\nu)\lambda_k} \left(\frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right), \\ c) \quad \psi_k^S(y) &= \frac{-\cos \lambda_k y}{2(1+\nu) \sin \lambda_k}, \\ d) \quad \psi_k^C(y) = y_k(y) &= \frac{-\sin \lambda_k y}{2(1+\nu) \sin \lambda_k}, \\ e) \quad f_k^S(y) &= \frac{-1}{2(1+\nu)\lambda_k} \left\{ \frac{\cos \lambda_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} + \frac{y^2}{2} \right\}, \\ f) \quad f_k^C(y) = -x_k(y) &= \frac{-1}{2(1+\nu)\lambda_k^2} \left\{ \frac{\sin \lambda_k y}{\sin \lambda_k} - y \right\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

3. Решение краевых задач

3.1. Решение краевых задач в полуполосе

Будем считать, что в равенствах (2.6) функция $\sigma(y)$ самоуравновешена по моменту, а $\tau(y)$ – по силе. В этом случае $C_3 = C_4 = 0$. Перемещения полуполос, как абсолютно жестких, примем равными нулю: $C_1 = C_2 = 0$.

В разложениях типа (2.6), возникающих при решении краевых задач, в отличие от разложений Лагранжа (т.е. одной функции), нужно найти набор коэф-

коэффициентов $\{a_k, \overline{a_k}\}_{k=1}^{\infty}$, общий для разложений двух функций $\sigma(y)$ и $\tau(y)$, т.е. такой, что оба ряда (2.6) будут сходиться, каждый к своей функции. Существование такого набора коэффициентов вытекает из неединственности представления вещественного вектора как суммы двух комплексно-сопряженных векторов. Поясним подробнее. Пусть

$$\sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\sigma} s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k^{\sigma}} s_x(\overline{\lambda_k}, y), \quad (3.1)$$

$$\tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\tau} t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k^{\tau}} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) \quad (3.2)$$

– разложения Лагранжа. Тогда

$$a_k^{\sigma} = \frac{x_k}{M_k}, \quad a_k^{\tau} = \frac{t_k}{\lambda_k M_k}. \quad (3.3)$$

Добавим к каждому вектору $a_k^{\sigma} s_x(\lambda_k, y)$ некоторый чисто мнимый вектор, а к каждому вектору $\overline{a_k^{\sigma}} s_x(\overline{\lambda_k}, y)$ вектор, сопряженный к чисто мнимому. При этом сумма ряда (3.1), очевидно, не изменится. Это можно сделать бесконечным числом способов. Из всех возможных вариантов выберем те чисто мнимые векторы и, следовательно, такие (соответствующие им) коэффициенты a_k , при которых ряд (3.2) будет сходиться к функции $\tau(y)$. Эти коэффициенты определяются единственным образом из разложений типа (2.6) следующим образом (см. [10, 16]). Спроектируем равенства (2.6) на вещественные подпространства: первое на $X_m(y) + \overline{X_m}(y)$, а второе на $T_m(y) + \overline{T_m}(y)$ ($m=1, 2, \dots$). Для каждого номера $m \geq 1$, в соответствии с соотношениями биортогональности типа (2.8)–(2.11), получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} x_m + \overline{x_m} &= a_m M_m + \overline{a_m M_m}, \\ t_m + \overline{t_m} &= a_m \lambda_m M_m + \overline{a_m \lambda_m M_m}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решая ее, найдем

$$a_m = \frac{(t_m + \overline{t_m}) - (x_m + \overline{x_m}) \overline{\lambda_m}}{(\lambda_m - \overline{\lambda_m}) M_m}, \quad (3.5)$$

где

$$x_m = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y) X_m(y) dy, \quad t_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(y) T_m(y) dy, \quad M_m = \sin^2 \lambda_m / \lambda_m, \quad (3.6)$$

а $\sigma(y), \tau(y)$ – некоторые продолжения функций $\sigma(y), \tau(y)$, первоначально заданных на отрезке $[-1, 1]$, на всю вещественную ось (оставим для них прежние обозначения). В том случае, когда раскладываемые функции продолжаются периодически, получим

$$x_m = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_m(y) dy, \quad t_m = \int_{-1}^1 \tau(y) t_m(y) dy. \quad (3.7)$$

Подставляя числа (3.5) в формулы (2.1), получим решение задачи.

По построению оба ряда (3.1) и (3.2) есть сумма разложения Лагранжа и разложения чисто мнимого вектора. Убедимся в этом, в частности, подставив коэффициенты (3.5) в ряд (3.1) вместо коэффициентов a_k^σ . Вычтем из полученного ряда ряд (3.1) и рассмотрим произвольный член ряда с номером k . Проектируя полученное выражение на вещественное подпространство $X_m(y) + \overline{X}_m(y)$ ($m=1,2,\dots$), в силу соотношений биортогональности (2.12) получим

$$\frac{\operatorname{Re} t_k - \operatorname{Re} \lambda_k x_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} - \frac{\operatorname{Re} t_k - \operatorname{Re} \lambda_k x_k}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)} \equiv 0; \quad (k \geq 1), \quad (3.8)$$

что и доказывает требуемое.

Представления чисто мнимых векторов рядами функций ПФ были названы нуль-рядами (например, [10]). Нуль-ряды нужно выделять из полученных решений, приводя их тем самым к разложениям Лагранжа в каждом сечении полуполосы. Простая интуитивно понятная техника выделения нуль-рядов была предложена в статье [16]. Приведем окончательные формулы для перемещений и напряжений в полуполосе с выделенными нуль-рядами и с учетом элементарных решений.

Задача 1. Если на торце полуполосы заданы только нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные равны нулю, получим

$$\begin{aligned} V(x, y) &= -(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + \\ &+ C_3 [(2 + \nu) - \nu y^2] + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= 4(1 + \nu) C_3 y + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(-e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Задача 2. В том случае, когда на торце полуполосы заданы только касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, а нормальные равны нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} U(x, y) &= C_2 y + C_4 [3yx^2 + 3\nu y - (2 + \nu)y^3] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ t_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= 12(1 + \nu)C_4xy + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ t_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\} \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ t_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= 6C_4(1 + \nu)(1 - y^2) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ t_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}.\end{aligned}$$

В (3.9) нет формулы для перемещений $U(x, y)$, а в (3.10) – для $V(x, y)$. Мы приведем их ниже.

Числа x_k, t_k , входящие в формулы (3.9), (3.10), зависят от того, как заданные на торце полуполосы функции $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ продолжены вне отрезка $|y| \leq 1$ на всю вещественную ось. Выбирая тот или иной способ продолжения, получим разные числа x_k, t_k и, следовательно, разные решения краевой задачи в полуполосе. Разность любых двух решений с разными x_k, t_k приводит к нетривиальному решению с нулевыми граничными условиями, что является следствием неединственности разложений Лагранжа. Это типичное свойство систем экспонент с комплексными показателями [8]. Поэтому с формально-математических позиций решения рассматриваемых краевых задач в полуполосе неединственны.

Так как решения связаны с продолжениями заданных на торце полуполосы функций через концы отрезка на всю бесконечную прямую, то в них, тем самым, известны значения не только граничных функций, но и всех их производных. В этом смысле они не отличаются от точек гладкой части контура. Всегда можно выбрать такие продолжения, при которых, например, одно или оба перемещения, углы поворота угловых точек и т.д. будут равны нулю. Таким образом, разным продолжениям соответствуют физически разные задачи. Поэтому отвечающие разным продолжениям решения нельзя вычитать одно из другого (ниже мы еще вернемся к вопросу о продолжениях). Учитывая, что биортогональные функции единственны [10], заключаем, что решения рассматриваемых краевых задач в полуполосе единственны.

Следуя теореме об эквивалентности первой основной краевой задачи теории упругости задаче с разрывами перемещений [22, 23], рассмотрим следующие две задачи.

Задача 3 (Четно-симметричное продолжение в левую полуполосу). Пусть в бесконечной полосе $\{\Pi: |y| \leq 1, |x| < \infty\}$ задан разрыв продольных перемещений

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y). \quad (3.11)$$

Здесь через $U^\pm(0, y)$ обозначены равные $u(y)$ перемещения соответственно справа и слева на разрыве. Для простоты будем считать, что разрыв полностью рассекает полосу. Чтобы сформулировать краевую задачу для полосы Π с раз-

рывом (3.11), подобно статье [16], где была рассмотрена аналогичная четно-симметричная задача, воспользуемся порождающими функциями

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda, y) &= (1 + \nu)\lambda^2 (i \cos \lambda + y \sin \lambda) e^{i\lambda y} \\ \Psi(\lambda, y) &= (1 + \nu)\lambda [i(\lambda \cos \lambda + \sin \lambda) + \lambda y \sin \lambda] e^{i\lambda y}\end{aligned}$$

Будем считать, что на стыке полуполос

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k^+ \Phi(\lambda_k, y)) - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k^- \Phi(\mu_k, y)) &= \varphi_1(y) + i\varphi_2(y), \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k^+ \Psi(\lambda_k, y)) - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k^- \Psi(\mu_k, y)) &= \psi_1(y) + i\psi_2(y),\end{aligned}\tag{3.12}$$

где a_k^+ , a_k^- – неизвестные коэффициенты разложений соответственно в правой и левой полуполосах, $\mu_k = -\lambda_k$, а $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ – известные функции, которые находятся по заданным на разрезе скачкам перемещений или напряжений в соответствии с формулами (2.32). Обозначим

$$\omega_1 = \lambda_1, \omega_2 = \mu_1, \omega_3 = \lambda_2, \omega_4 = \mu_2, \dots, a_k^+ = A_k, a_k^- = -A_k\tag{3.13}$$

и перепишем равенства (3.12) так

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(A_k \Phi(\omega_k, y)) &= \varphi_1(y) + i\varphi_2(y), \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(A_k \Psi(\omega_k, y)) &= \psi_1(y) + i\psi_2(y).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Пользуясь соотношениями биортогональности, вытекающими из формул (2.37), для каждого номера $k \geq 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}A_k \omega_k N_k + \overline{A_k \omega_k N_k} &= \varphi_{1k}^* + \varphi_{2k}^*, \\ A_k \omega_k^2 N_k + \overline{A_k \omega_k^2 N_k} &= \psi_{1k}^* + \psi_{2k}^*.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Здесь $N_k = 2 \sin^2 \omega_k / \omega_k = 2M_k$, $\varphi_{nk}^* = \varphi_{nk} + \overline{\varphi_{nk}}$, $\psi_{nk}^* = \psi_{nk} + \overline{\psi_{nk}}$ ($n = 1, 2$),

$$\begin{aligned}\varphi_{1k} &= \int_{-1}^1 \varphi_1(y) \varphi_k^S(y) dy, \quad \varphi_{2k} = \int_{-1}^1 \varphi_2(y) \varphi_k^C(y) dy, \\ \psi_{1k} &= \int_{-1}^1 \psi_1(y) \psi_k^S(y) dy, \quad \psi_{2k} = \int_{-1}^1 \psi_2(y) \psi_k^C(y) dy.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Решая систему уравнений (3.15), найдем

$$A_k = \frac{\psi_{1k}^* + \psi_{2k}^* - \overline{\omega_k}(\varphi_{1k}^* + \varphi_{2k}^*)}{\omega_k(\omega_k - \overline{\omega_k})N_k}.\tag{3.17}$$

Если на разрезе задан только разрыв продольных перемещений (3.11), то $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \psi_2(y) = 0$ и, следовательно, $\varphi_{1k} = \varphi_{2k} = \psi_{2k} = 0$. Тогда $A_k = \psi_{1k}^* / (\omega_k - \overline{\omega_k})\omega_k N_k$ и в соответствии с обозначениями (3.11)

$$a_k^+ = \frac{\Psi_{1k}^*}{(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)\lambda_k 2M_k}. \quad (3.18)$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов (3.18) в формулы (2.1) и выделяя в них нуль-ряды, найдем (элементарные решения пока опущены)

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \Psi_{1k} \frac{\chi(\lambda_k, y)}{2M_k} \frac{1}{\lambda_k \bar{\lambda}_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \Psi_{1k} \frac{s_x(\lambda_k, y)}{2M_k} \frac{1}{\lambda_k \bar{\lambda}_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \Psi_{1k} \frac{s_y(\lambda_k, y)}{2\lambda_k^2 M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \Psi_{1k} \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{2\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Чтобы получить формулу для продольных перемещений $U(x, y)$ с выделенным нуль-рядом, заметим, что

$$\frac{d\Psi_k^S(y)}{dy} = \frac{\lambda_k}{2} u_k(y). \quad (3.20)$$

Имея это в виду и полагая в (3.16)

$$\Psi_1(y) = -\frac{du(y)}{dy}, \quad (3.21)$$

найдем

$$\begin{aligned} \Psi_{1k} &= \int_{-1}^1 -2 \frac{du(y)}{dy} \Psi_k^S(y) dy = 2\lambda_k \int_{-1}^1 u(y) u_k(y) dy = 2\lambda_k u_k, \\ \Psi_{1k} &= \int_{-1}^1 -2 \frac{du(y)}{dy} \Psi_k^S(y) dy = 2\lambda_k \int_{-1}^1 u(y) u_k(y) dy = 2\lambda_k u_k. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.18) и переходя к формуле (2.1) для $U(x, y)$, после выделения нуль-ряда найдем выражение для $U(x, y)$. Добавим к нему формулы (3.1). Принимая во внимание связь (3.22) и учитывая перемещения полуполос, как недеформируемых, получим

$$\begin{aligned} U(x, y) &= C_2 y + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ u_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ V(x, y) &= -C_2 x + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ u_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ u_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ u_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \lambda_k \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ u_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}.$$

Сравнивая (3.23) с (3.9), заметим, что

$$u_k = -x_k \overline{\lambda_k}. \quad (3.24)$$

Следовательно, формулы (3.23) можно записать еще так

$$U(x, y) = C_2 y + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$V(x, y) = -C_2 x + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(-\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(-\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \quad (3.25)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \overline{\lambda_k}}{M_k \lambda_k^2} \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ x_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(-e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}.$$

Задача 4 (нечетно-симметричное продолжение в левую полуполосу). Пусть в полосе Π задан разрыв

$$V^+(0, y) - V^-(0, y) = 2v(y). \quad (3.26)$$

Через $V^\pm(0, y)$ обозначены перемещения соответственно справа и слева на разрыве. Воспользовавшись функциями $\Phi(\lambda_k, y)$, $F(\lambda_k, y)$, получим следующие аналоги формул (3.23) (подробные выкладки можно найти в статье [16])

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \lambda_k v_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$V(x, y) = C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ v_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \lambda_k v_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}, \quad (3.27)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \lambda_k v_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left\{ \lambda_k v_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}.$$

Сравнивая (3.27) с соответствующими формулами (3.10), заметим, что

$$v_k = t_k / \lambda_k. \quad (3.28)$$

Подставляя (3.28) в (3.27), получим аналоги формул (3.25).

3.2 Две модели остаточных напряжений

Моделью, поясняющей природу остаточных напряжений, обычно служит следующая [24]. Рассмотрим некоторый прямоугольник P . Разрежем его на бесконечно малые (элементарные) прямоугольники, которые заменим деформированными прямоугольниками с искривленными сторонами. Придадим деформированным прямоугольникам первоначальный вид, приложив к их границам соответствующие напряжения, а затем склеим их. В результате получим исходный прямоугольник P , в котором есть поле остаточных напряжений. Остаточные напряжения будут удовлетворять уравнениям равновесия, но условия совместности деформаций выполняться не будут, т.к. перемещения в каждой точке прямоугольника P (по построению) разрывны.

Известно, что однородная краевая задача с разрывами перемещений эквивалентна некоторой неоднородной задаче («теорема об эквивалентности силы – дислокации») [22]. Физическая интерпретация эквивалентности состоит в том, что помимо рассмотренной модели остаточных напряжений в прямоугольнике P , есть еще следующая. Приложим к каждому из деформированных прямоугольников массовые нагрузки так, что они опять станут элементарными прямоугольниками, а затем вновь склеим их и снимем нагрузку. В результате в прямоугольнике P возникнет такое же поле остаточных напряжений, что и в первом случае. Ниже для физической интерпретации приводимых решений достаточно только первой модели остаточных напряжений.

Особенностью решений (3.23) или (3.25) и (3.27), лежащей в основе возможности описания полученными точными решениями остаточных напряжений в бесконечной полосе со свободными сторонами, является то, что граничные условия $\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0$ в них выполняются строго на прямолинейных сторонах полуполосы $y = \pm 1$. Следовательно, до деформации длинные стороны полуполосы были не прямолинейными, но они становятся такими после приложения напряжений на торце полуполосы⁶.

Рассмотрим подробнее четно-симметричное продолжение решения в левую полуполосу. Следуя первой модели остаточных напряжений [24], будем считать, что не только длинные стороны правой полуполосы, но и ее торец до деформации не были прямолинейными. Наряду с правой, рассмотрим также левую полуполосу с не прямолинейными сторонами, являющуюся зеркальным отображением правой. В соответствии с первой моделью, стянем те участки

⁶ В известных точных решениях для областей с гладкой границей (например, для полуплоскости, круга и т.д.) граничные условия «условно сносятся на недеформированную поверхность» [13]. Это означает, что граница области, благодаря добавлению или удалению материала, не меняется в результате деформации.

контуров их торцов, где они не соприкасаются, до полного контакта, приложив нужные напряжения. Формы торцов и длинных сторон полуполос выбраны такими, что они станут прямолинейными после того, как нормальные напряжения на стыке полуполос достигнут заданной величины. В результате получим бесконечную полосу со свободными прямолинейными сторонами, в которой есть нетривиальное поле напряжений такое, что при $x = 0$ нормальные напряжения равны заданным, а касательные равны нулю. Соответствующие напряжения называются, согласно [24], остаточными. Тогда формулы для $U(x, y)$ и $V(x, y)$ описывают перемещения возникающие в правой полуполосе в результате сброса остаточных напряжений. Все сказанное относится и к нечетно-симметричному продолжению в левую полуполосу.

Решения в левую полуполосу можно продолжать и с другими граничными условиями на ее длинных сторонах, например в полуполосе с заземленными сторонами. В этом случае целую функцию $L(\lambda)$ нужно заменить бесконечным произведением, в котором числа μ_k ($\text{Re} \mu_k > 0$) (3.13) являются корнями характеристического уравнения, соответствующего полосе с заземленными сторонами. Бесконечное произведение будет сходящимся [11] и будет представлять собой целую функцию экспоненциального типа, равного 2. Поэтому можно построить функции, биортогональные к функциям $\Phi(\lambda_k, y)$, $\Psi(\lambda_k, y)$, $F(\lambda_k, y)$ и точно решить краевую задачу. Биортогональные функции в этом случае будут иметь степенную особенность, характерную для развернутого клина (полуплоскости), одна сторона которого заземлена, а к другой приложены напряжения. Поэтому решение рассматриваемой (смешанной) задачи в общем будет иметь соответствующую степенную особенность в напряжениях в точках $\{x = 0, y = \pm 1\}$. Но не всегда. В том случае, когда раскладываемые на стыке полуполос функции обращаются в ноль в окрестности этих точек, особенности, очевидно, не будет. В частности, если на стыке полуполос заданы разрывы продольных $u(y)$ или поперечных $v(y)$ перемещений, то, как следует из построенных выше решений, особенности не будет, если в вершинах разрывов $du/dy = dv/dy = 0$.

Особенность в решение можно внести и при продолжении граничных функций вдоль торца на бесконечную прямую. Так как в этом случае биортогональные функции не имеют особенности, то она должна содержаться в выбранном продолжении. Например, в качестве продолжений можно выбрать нормальные и касательные напряжения, возникающие в заделке в соответствующей задаче для развернутого клина. При этом в решении задачи для полуполосы с заданными на ее торце напряжениями появится эта же особенность, а перемещения в угловых точках полуполосы будут равны нулю.

В формулах (3.25) по сравнению с общими формулами (2.1), постоянная $C_3 = 0$, т.к. нормальные напряжения на стыке полуполос самоуравновешены по моменту. Постоянная $C_4 = 0$, поскольку, ввиду симметрии задачи, касательные

напряжения здесь равны нулю. Неизвестную постоянную C_1 следует принять равной нулю, т.к. остаточные напряжения в бесконечной полосе создаются только за счет поворота точек криволинейных торцов соединяемых полуполос относительно начала координат. Постоянной C_2 соответствует поворот полуполос, как абсолютно жестких. Как было показано выше, если функция $u(y)$ самоуравновешена по моменту, то $C_2 = 0$. В противном случае в результате разделения полосы ее фрагменты повернутся относительно начала координат в противоположных направлениях на угол $\alpha = \arctg C_2$, где C_2 находится из условия

$$\int_{-1}^1 [u(y) - C_2] y dy = 0. \quad (3.29)$$

В решении (3.27), отвечающем нечетно-симметричному продолжению, постоянная C_1 соответствует возникающим в результате разрыва взаимно противоположным перемещениям полуполос вдоль оси y как абсолютно жестких. Она определяется из условия

$$C_1 = 2 \int_0^1 v(y) \frac{3y^2}{4(1+v)} dy. \quad (3.30)$$

Постоянная $C_4 = 0$, в силу самоуравновешенности касательных напряжений. В том случае, когда функция $u(y)$ не самоуравновешена по моменту, разрыв будет сопровождаться поворотами полуполос относительно начала координат, как абсолютно жестких. Угол поворота определяется по формуле: $\alpha = \arctg C_2$. Только на этот раз обе полуполосы поворачиваются в одном направлении.

4. Обсуждение результатов

1. В статье рассмотрена нечетно-симметричная краевая задача для полуполосы со свободными длинными сторонами в следующих постановках:

- а) на торце полуполосы заданы напряжения;
- б) торец полуполосы рассматривается как линия разрыва продольных или поперечных перемещений в бесконечной полосе.

2. Показано, что с формально-математических позиций решение краевой задачи в полуполосе неединственно в том смысле, что разность двух любых решений приводит к нетривиальному решению с нулевыми граничными условиями. Неединственность, понимаемая в указанном выше смысле, обусловлена, в частности, необходимостью продолжения заданных на торце полуполосы граничных функций с отрезка (торца полуполосы) на всю вещественную ось. Математически она является следствием неединственности разложений Лагранжа. Однако каждому продолжению отвечает только одно решение краевой

задачи, физически эквивалентное выбранному продолжению. Поэтому, с точки зрения механики, решения краевых задач в полуполосе единственны.

Остаточные напряжения могут быть не только в областях с угловыми точками границы, но и в областях с гладкой границей. В книге [12] рассмотрен пример кольца, из которого двумя смежными поперечными сечениями вырезается небольшой участок, а затем концы кольца соединяются. При этом в кольце возникают остаточные напряжения. Задача рассматривается с позиций сопротивления материалов. Рассмотрим ее как задачу теории упругости и будем считать, что радиус кольца стремится к бесконечности. Тогда получим бесконечную полосу с остаточными напряжениями. Таким образом, остаточные напряжения могут быть и в упругих областях с гладкой границей, но создаются они путем склеивания областей, имеющих угловые точки границы.

3. Из необходимости продолжения граничных функций как вдоль торца, так и вдоль горизонтальных сторон полуполосы следует, что в точных решениях краевых задач, полученных в работе, угловые точки полуполосы нужно рассматривать не как геометрические объекты, а как бесконечно малые элементы, подобные другим точкам области.

4. Рассмотрим решение (3.25) для бесконечной полосы с остаточными напряжениями. Разрежем полосу по оси y и заменим действие левой полуполосы на правую приложенными к ее торцу нормальными напряжениями $\sigma(y)$. Обратим внимание на то, что стороны полуполосы прямолинейны и граничные условия выполняются строго на прямолинейных сторонах полуполосы.

Рассмотрим также краевую задачу для полуполосы со свободными длинными сторонами в традиционной формулировке, когда стороны полуполосы прямолинейны до деформации и искривляются только после приложения нагрузки (фактически они остаются прямолинейными за счет добавления недостающего или удаления лишнего материала [13, 14]). В качестве такой полуполосы выберем рассмотренную выше полуполосу с остаточными напряжениями. Зададим на ее торце напряжения $\sigma_x(0, y) = -\sigma(y)$. Так как при этом нормальные напряжения на торце станут равными нулю, следовательно обратятся в нуль напряжения во всей полуполосе, т.е. остаточные напряжения сбрасываются, и при этом возникают перемещения (3.25). Таким образом, если в краевой задаче для полуполосы, рассматриваемой в классической постановке, задать на торце нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = -\sigma(y)$, то в ней возникнут напряжения, равные по величине и обратные по знаку остаточным. Но перемещения будут того же знака, т.к. они совпадают с перемещениями, возникающими при сбросе остаточных напряжений. Следовательно, формулами (3.25) дается также решение для полуполосы с заданными на ее торце нормальными напряжениями $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$ в обычной (традиционной) постановке. Только перемещения нужно брать с обратным знаком.

5. Важной особенностью решений, описывающих остаточные напряжения, является то, что граничные условия в них ставятся строго на прямолинейных границах полуполосы. Следуя статье [13, 14] на примере четно-симметричной задачи для правой полуполосы со свободными длинными сторонами и заданными на ее торце нормальными напряжениями, напомним, как ставятся граничные условия в классическом случае. Бесконечную плоскость разделим на

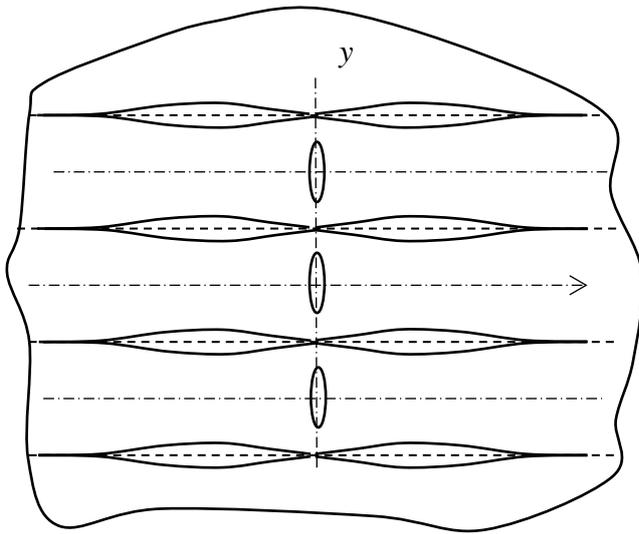


Рис. 1. К классическому пониманию задания граничных условий

одинаковые, горизонтальные полосы. Вдоль границ полос проведем разрезы и сделаем в них одинаковые вкладки, симметричные относительно их осей и симметрично расположенные относительно вертикальной оси y (Рис.1). Сделаем также вкладки вдоль вертикальной оси, полагая, что все они одинаковы и симметричны относительно горизонтальных осей полос и относительно оси y . Формы горизонтальных и вертикальных вкладок подобраны таким образом, что когда на оси

y нормальные напряжения $\sigma_x(0, y)$ в пределах каждой полосы равны заданным (касательные напряжения здесь равны нулю из условий симметрии), на осях горизонтальных вкладок касательные и нормальные напряжения будут равны нулю. Вкладки выполняются из того же материала, что и плоскость и неразрывно скрепляются с полосами. Создание вкладки подразумевает добавление недостающего материала или удаление лишнего (во избежание напользания сторон). Благодаря этому, в плоскости, замощенной бесконечными полосами, разрывов перемещений не будет и, следовательно, будут выполняться условия совместности деформаций. Однако граничные условия на этот раз ставятся не на строго прямолинейных сторонах полуполос, а на осях вкладок, совпадающих с прямолинейными границами полуполос. Такое понимание задания граничных условий впервые было дано в статье [13]. Фактически оно является математически строгой формулировкой классического понимания: «граничные условия условно сносятся на недеформированные границы».

Таким образом, условия совместности деформаций в классической постановке краевых задач теории упругости выполняются только потому, что стороны области (в данном случае – стороны полуполосы) прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными и после. Перемещения границ области в классических решениях, в отличие от решений, рассмотренных в этой работе,

описывают не истинную деформацию ее сторон после приложения нагрузки, а формы вкладок. В статье [16] дано сравнение двух решений краевой задачи для бесконечной полосы с поперечным разрезом, на котором задан разрыв продольных перемещений: а) решения в классической постановке, когда стороны полосы, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными (благодаря созданию вкладок) и после деформации; б) решения, описывающего истинную деформацию прямолинейных сторон полосы в результате образования поперечного разрыва и сброса остаточных напряжений.

6. Обычно отбрасываемые при решении краевых задач теории упругости для полуполосы постоянные C_1 и C_2 , отвечающие их перемещениям, как абсолютно жестких, приобретают вполне определенный смысл в задаче о сбросе имеющихся в бесконечной полосе остаточных напряжений в результате ее разрыва по вертикальной оси симметрии. Теперь они описывают возникающие при этом перемещения и вращения относительно начала координат правой и левой полуполос, как недеформируемых. Если продольные $u(y)$ и поперечные $v(y)$

перемещения точек торцов полуполос удовлетворяют условиям: $\int_{-1}^1 u(y) y dy = 0$

и $\int_{-1}^1 v(y) dy = 0$, $\int_{-1}^1 v(y) y^2 dy = 0$, перемещений полуполос, как абсолютно жестких, не будет.

7. Укажем, вытекающие из полученных результатов несколько признаков, свидетельствующих о наличии остаточных напряжений в какой-либо конечной плоской области: 1) знакопеременность напряжений, являющаяся следствием их самоуравновешенности; 2) фрагменты области, образовавшиеся вследствие ее разделения и сброса остаточных напряжений, перемещаются и поворачиваются, как абсолютно жесткие; 3) их невозможно сложить вновь по поверхностям разрыва без зазоров.

5. Заключение

В статье предложено решение бигармонической проблемы теории упругости в полуполосе. Оно строится в виде рядов по собственным функциям ПФ. Коэффициенты разложений определяются по простым формулам с помощью функций, биортогональных к собственным функциям ПФ. Ряды сходятся с той же скоростью, что и тригонометрические ряды Фурье [10]. Поэтому решения получаются надежными, и их легко использовать. Приведенные в статье формулы описывают остаточные напряжения в бесконечной полосе. Воспользовавшись [16], не трудно получить решение для прямоугольника с остаточными напряжениями.

Остаточные напряжения играют огромную роль в механике горных пород. Пример сильного влияния остаточных напряжений на анизотропию свойств горных пород можно найти в [25]. Два абсолютно одинаковых блока горной

породы, выпиленные из горного массива в непосредственной близости (т.е. имеющие одинаковые физико-механические характеристики), могут разрушаться при одной и той же нагрузке совершенно по-разному. Теоретических методов описания, объяснения и учета подобных явлений в практической деятельности не существует. На основе многолетних полевых и лабораторных исследований автор [26] приходит к выводу о том, что горные удары и землетрясения (рассматриваемые как горные удары больших масштабов) обусловлены, скорее всего, сбросом остаточных напряжений. С остаточными напряжениями, по-видимому, связано явление зональной дезинтеграции, которому до сих пор не найдено удовлетворительного объяснения.

Нельзя сказать, что модели остаточных напряжений не предлагались вовсе. Примеры определенным образом подобранных ненулевых решений уравнений равновесия теории упругости с нулевыми граничными условиями были построены в статьях [27, 28]. Различные физические модели остаточных напряжений были рассмотрены в книге [29]. Однако строгой теории остаточных напряжений, насколько известно авторам, пока нет.

Библиографический список

1. Meleshko, V.V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // *Appl. Mech. Rev.* 2003, v. 56 (1), p. 33-85.
2. Meleshko, V.V. Bending of an elastic rectangular clamped plate: Exact versus «engineering» solutions // *J. Elast.* 1997, v.48, p. 1–51.
3. Meleshko, V.V. Thermal Stresses in an Elastic Rectangle // *J. Elasti.* 2011, 105, p. 61-92.
4. Grinchenko V.T. The biharmonic problem and progress in the development of analytical methods for the solution of boundary-value problems // *Journal of Engineering Math.* 2003, v.46, p. 281-297.
5. Sadd M.H. *Elasticity. Theory, Applications and Numerics* // 2005, Elsevier Inc. USA, 461 p.
6. Menshova I.V., Kovalenko M.D. The Exact and Approximate Solytion of Some Boundary Value Problems in Domains with Angular Points of the Boundary // *J. of Applied Math. And Phys.* 2017, v. 5, p. 39-44.
7. Коробейник Ю.Ф. Представляющие системы // *Изв. АН СССР. Сер. математич.* 1978, Т. 42, № 2, С. 325-355.
8. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976, 536 с.
9. Kerzhaev, A.P., Kovalenko, M.D., Menshova, I.V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // *Complex Anal. Oper. Theor.* 2018, v. 12 (3), p. 571–587
10. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории // *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2011, №5, С. 78-98.
11. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ, 1956, 632 с.

12. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975, 576 с.
13. Шерман Д.И. Об одной задаче теории упругости // Доклады АН СССР, 1940, Т. 27, № 9, С. 907-913.
14. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М - Л.: Изд. АН СССР, 1949, 635 с.
15. Шемякин Е.И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // Доклады РАН, 1996, Т.347, №3. С. 342-345.
16. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела, 2013, №5, С. 136-158.
17. Ибрагимов И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения // М.: Наука, 1971, 518 с.
18. Гусейн-Заде М.И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ, 1985, Т.29. Вып.4, С. 452-759.
19. Гусейн-Заде М.И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ, 1985, Т.29, Вып. 2, С. 393-399.
20. Зверьяев Е.М. Пример обобщения принципа Сен-Венана // Известия РАН. Механика твердого тела, 1993, С. 166-171.
21. Коваленко М.Д., Шибырин С.В. Стык двух полуполос // Известия РАН. Механика твердого тела, 1997, № 1, С. 56-63.
22. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Изд. «Мир», 1985, 265 с.
23. Слепьян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990, 296 с.
24. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости М.: Наука, 1969, 336 с.
25. Айтматов И.Т., Тажибаев К.Т., Казакбаева Г.О. Исследование остаточных напряжений в горных породах на основе поляризационно-оптического метода моделирования // Вестник КРСУ. Геомеханика, 2006, Т. 6, № 7, С. 13-18.
26. Тажибаев К.Т. Напряжения, процессы деформации и динамического разрушения горных пород. Бишкек. Алтын Принт, 2016 (в двух томах).
27. Гузев М.А., Ушаков А.А. Об одном классе ненулевых решений однородных уравнений равновесия механики деформируемого твердого тела // Фундаментальные и прикладные вопросы механики. Научная конференция, посвященная 70-летию со дня рождения акад. В.П. Мясникова. Владивосток, 2006, Доклад. С. 43-44.
28. Макаров В.В. Деформационные предвестники геодинамических явлений в массивах горных пород // Вестник дальневосточного государственного технического университета, 2009, №1(1), С. 38-47.
29. Мороз А.И. Самонапряженное состояние горных пород. М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2004, 288 с.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Биортогональные функции и разложения Лагранжа.....	4
3. Решение краевых задач.....	13
3.1. Решение краевых задач в полуполосе.....	13
3.2. Две модели остаточных напряжений.....	19
4. Обсуждение результатов.....	22
5. Заключение.....	25
Библиографический список.....	26

Авторы:

Зверяев Евгений Михайлович, zveriaev@gmail.com

Коваленко Михаил Денисович, kov08@inbox.ru

Меньшова Ирина Владимировна, menshovairina@yandex.ru

Кержаев Александр Петрович, alex_kerg@mail.ru