ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 54 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.

Применение методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений класса Фукса для исследования свойств решений уравнений Клейна–Гордона в ОТО

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Применение методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений класса Фукса для исследования свойств решений уравнений Клейна–Гордона в ОТО // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 54. 18 с. doi:10.20948/prepr-2018-54
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-54

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛАССА ФУКСА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА–ГОРДОНА В ОТО

Москва — 2018

Фимин Н.Н., Чечёткин В. М.

Применение методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений класса Фукса для исследования свойств решений уравнений Клейна–Гордона в ОТО

Рассмотрены свойства решений уравнений Клейна–Гордона для различных метрик общей теории относительности. Показано, что наличие особых точек метрики приводит к качественной перестройке решений данного уравнения, причем десингуляризация решений выбором новой метрики требует априорных допущений, которые могут приводить к формально математически верным, однако обладающим парадоксальным физическим смыслом, результатам.

Ключевые слова: уравнение Хейна, гипергеометрическое уравнение, особая точка, горизонт событий, волновой пакет, квазиклассическое приближение

Fimin Nikolay Nikolaevich, Chechetkin Valery Mikhailovich

The application of methods of the theory of ordinary differential equations Fuchs class to study the properties of solutions of the Klein–Gordon equations in General Relativistic Theory

The properties of solutions of the Klein–Gordon equations for various metrics of the general theory of relativity are considered. It is shown that the presence of singular points of the metric leads to qualitative rearrangement solutions of this equation, and the desingularization of solutions by a choice of a new metric requires a priori assumptions that can lead to a formally mathematically correct, but paradoxical physical meaning, results.

Key words: Heun's equation, hypergeometric equation, critical point, event horizon, wave packet, semiclassical approximation

Оглавление

1. Введение

Среди задач, связанных с эволюцией динамических систем в общей теории относительности (ОТО), весьма значимую роль имеет вопрос о взаимодействии точечной частицы с гравитационным полем "черной дыры". Он рассматривался с различных позиций и в различных приближениях в достаточно большом числе работ (см., например, [1]–[5] и литературу, указанную там). В этих работах дана исчерпывающая классификация траекторий частицы, рассмотрена ее динамика для черных дыр, метрика в окрестностях которых описывается решениями Шварцшильда (угловой момент $\mathbf{J} = 0$, заряд $Q = 0$), Рейсснера–Нордстрема ($\mathbf{J} \neq 0$, $Q = 0$), общим решением Керра–Ньюмана ($\mathbf{J} \neq 0$, $Q \neq 0$). Описание взаимодействия "нелокальной" (т.е. отличающейся от точечной, имеющей нетривиальную внутреннюю структуру) частицы либо некогерентного волнового пакета с гравитационным полем черной дыры является существенно более сложной задачей. Интерес к постановке задачи в данном аспекте обусловлен, в частности, возможностью так называемого "отбора энергии" (обобщенного отражения) и зондирования глубинной окрестности "горизонта Коши" черной дыры. В первоначальном варианте [6]–[7] механизм отбора представлялся связанным с распадом частицы, влетевшей в эргосферу вращающейся черной дыры, на две частицы, одна из которых поглощается, а другая улетает на бесконечность, унося с собой часть вращательной энергии и момента черной дыры. В работе [8] рассматривался отбор энергии с помощью классических мультипольных (например, электромагнитных) волн. Более детально этот эффект (увеличение амплитуды падающей волны) при отражении от вращающейся черной дыры, гравитационное поле которой описывается метрикой Керра, был исследован в [9]–[10]. Согласно полученным в этих работах выводам, при взаимодействии мультипольной волны с полем метрики Керра увеличение амплитуды возможно при выполнении критерия $\omega < n\Omega$, где ω — частота волны, n — ее орбитальный момент, Ω — угловая скорость вращения черной дыры. Дальнейшие исследования в данном направлении [11]–[15] позволили уточнить многие аспекты "отражения от горизонта" (см., например, [16]), такие, как зависимость коэффициентов отражения и прохождения электромагнитных волн от температуры Хокинга черной дыры [5] и энергии, которой они обладают. В частности, например, весьма детально исследованы решения уравнения Дирака в окрестности черной дыры для различных метрик [17]–[20].

Тем не менее, по мнению авторов, вопрос, связанный с постановкой задачи о прохождении нелокальным пакетом скалярного поля особенностей метрики пространства–времени и возможности однозначной разрешимости описывающего динамику данного пакета уравнения Клейна–Гордона (КГ), был до настоящего времени в публикациях освещен явно недостаточно.

Введение в рассмотрение системы координат типа Крускала–Шекереса (или сходных с ней систем Эддингтона–Финкельштейна, Новикова и пр.) [3], предназначенной для "унифицированного" описания геометрических свойств пространственно–временного многообразия, дает определенные, внешне достаточно обоснованные, основания для заключения о формальном виде особенности на горизонте событий. В действительности же подобные замены координат приводят к необходимости исследования решений новых уравнений динамики в метрике с принципиально иными свойствами, чем у "первичной" при неявном предположении, что элиминация сингулярных точек метрики не изменяет глобальных свойств эволюции динамической системы. А это в действительности отнюдь не очевидный факт — в частности, речь идет о наличии необходимости изменения глобальной топологии пространства–времени и/или необходимости введения априорных допущений (физически малоообоснованных) о сшивке в особых точках решений уравнений динамики, вводящей искусственную когерентность в эволюционирующую систему.

Ниже в п. **2** рассматриваются некоторые аспекты задачи о поведении решения уравнения КГ в 2–мерном $(z,\ t)$ случае, основываясь на методе, развитом в работах [21],[23]. Несмотря на довольно специфические предположения относительно свойств рассмотренной там модели, последняя имеет определенную ценность как с методологической точки зрения (общефизической), так и в плане возможности рассмотрения частных случаев применяемого математического аппарата. В п. **3** проводится анализ трехмерного случая уравнения КГ, приводящегося к вырожденному уравнению Хейна, в п. **4** трехмерный случай уравнения КГ рассматривается с позиций квазиклассического приближения. П. 5 представляет собой заключение. В Приложении приведены основные свойства вырожденных функций Хейна и их решений.

2. Двумерная дилатонная модель

Рассмотрим 2–мерную дилатонную модель гравитации ($2D\ DGM$), являющуюся редуцированным следствием многомерной стандартной модели ОТО Эйнштейна [21]. Интервал в этой модели имеет вид:

$$ds^2 = f(dt^2 - dz^2), \qquad f = (1 - (t^2 - z^2)/R^2)^{-1},$$

где $z = R$ — аналог горизонта событий. Заметим, что особенность метрики здесь $t = \pm(z^2 - R^2)^{1/2}$, покрытие плоскости $z,\ t$ других особых точек и кривых не имеет, то есть введенная система координат является аналогом крускаловской.

Уравнение Клейна–Гордона для массового скалярного поля $\phi(z,t)$ принимает вид:

$$(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial z^2 + m^2 f)\phi(z,t) = 0, \tag{1}$$

где m — массовый параметр.

Вводя новые координаты ρ, η для I–го квадранта R $(R{=}\{\theta|\theta \ \in]-\pi/4;\pi/4[\})$ плоскости z, t по формулам : $t = \rho\ sh(\eta), z = \rho\ ch(\eta)$, преобразуем уравнение (1) к виду:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}) + m^2 f\phi = 0. \tag{2}$$

Производя разделение переменных $\phi(\rho,\eta) = \rho^{i\omega}\chi(\zeta)e^{-i\omega\eta}$, где $\zeta = -\rho^2/R^2$, получаем для $\chi(\zeta)$ уравнение гипергеометрического типа:

$$\frac{d^2\chi}{d\zeta^2} + \frac{(1+i\omega)}{\zeta}\frac{d\chi}{d\zeta} + \frac{m^2R^2}{4(1-\zeta)\zeta}\chi = 0. \tag{3}$$

Нас интересует поведение решения в окрестности особой точки $\zeta = 0$ (отвечающей горизонту событий в рассматриваемой модели). Используя известное представление решения гипергеометрического уравнения вблизи регулярной особенности [22], получаем следующий вид общего решения уравнения (2) при $\zeta \to 0,\ \zeta < 0$:

$$\phi(\rho,\eta) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \psi_\omega^R(\rho)\exp(-i\omega\eta).$$

Здесь гармоники ψ_ω^R имеют различный вид в зависимости от того, равно ли ω нулю или нет. Если $\omega = 0$, то

$$\psi_0^R(\rho) = C_1^0 F(mR/2, -mR/2, 1; -\rho^2/R^2) +$$

$$+ C_2^0 F(mR/2, -mR/2, 1; -\rho^2/R^2)\ln\,(-\rho^2/R^2) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(mR/2)_n(-mR/2)_n}{(n!)^2}(-\rho^2/R^2)^n[\Psi(mR/2+n) -$$

$$-\Psi(mR/2) + \Psi(-mR/2+n) - \Psi(-mR/2) - 2\Psi(n+1) + 2\Psi(1)].$$

Продолжение моды под горизонт очевидно. Если $\omega \neq 0$, то тогда имеем:

$$\psi_\omega^R(\rho) = C_1^\omega \rho^{i\omega}F(\alpha,\beta,\gamma;-\rho^2/R^2) + C_2^\omega\rho^{-i\omega}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;-\rho^2/R^2),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(i\omega + \sqrt{m^2R^2-\omega^2}), \quad \beta = \frac{1}{2}(i\omega - \sqrt{m^2R^2-\omega^2}), \quad \gamma = 1 + i\omega.$$

Поскольку в данном случае справедливо соотношение $\gamma-(\alpha+\beta)=1\in\mathbf{Z}$, то аналитическое продолжение решения уравнения (3) "под горизонт событий" (т.е. в область $\zeta\in]0;1[$) принимает вид:

$$\chi^F=\chi^F_{(1)}+\chi^F_{(2)},$$

$$\chi^F_{(1)}(\zeta)=\tilde{C}^\omega_1(\frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}-$$

$$-(1-\zeta)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}{n!(1+n)!}[k_n-\ln(1-\zeta)](1-\zeta)^n),$$

$$\chi^F_{(2)}=\tilde{C}^\omega_2\frac{\Gamma(1)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\zeta^{(1-\alpha-\beta)}-$$

$$-\tilde{C}^\omega_2\zeta^{(1-\alpha-\beta)}(1-\zeta)\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_n(1-\beta)_n}{n!(n+1)!}[k'_n-\ln(1-\zeta)](1-\zeta)^n,$$

$$k_n=\Psi(n+1)+\Psi(n+2)-\Psi(\alpha+n+2)-\Psi(\beta+n+1),$$

$$k'_n=\Psi(n+1)+\Psi(n+2)-\Psi(1+n-\beta)-\Psi(1+n-\alpha),$$

$$|arg(1-\zeta)|<\pi,\quad \zeta\in]0;1[,$$

где: $(z+1)_n=\Gamma(z+n)/\Gamma(z)$ — символ Похгаммера, $\Psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная Γ–функции.

Итак, в F–квадранте плоскости $z,\ t$ (область F=$\{\theta|\theta\in]\pi/4;3\pi/4[\}$):

$$\psi^F_\mu(\rho)=\rho^{i\mu}\chi^F(\zeta). \tag{5}$$

При этом, следует заметить, что существует возможность “резонанса”: при $-mR/2=-1,-2,...$ Γ–функция имеет полюса, и решение будет обращаться в бесконечность.

Вопрос об интерпретации поведения на горизонте событий “стационарной моды” $\psi_0(\rho)$, претерпевающей там разрыв 2–ого рода, можно рассматривать с различных позиций; наиболее правомерным представляется квалифицировать данную моду как фон с нулевой энергией. Соответственно, при $\rho=R$ имеем неопределенность амплитудной шкалы, отвечающую квантовомеханическому соотношению неопределенностей (вблизи особой точки $\zeta=0$ уравнения (3) пакет сохраняет лишь свойство локальной интегрируемости).

На горизонте событий происходит перестройка структуры решения уравнения (2): в R–области моды его решения суть суммы двух частных решений, отвечающих ФСР гипергеометрического уравнения (для $\omega = 0$ — включающих логарифмический член при $\zeta \to 0$), в F–области ("под горизонтом") моды представляют собой сумму доминантных к сингулярности частных решений (3), включающих логарифмические члены.

Если рассмотреть безмассовый пакет, то моды решения уравнения вблизи горизонта событий вырождаются в решения обычного волнового уравнения, каждое из которых представляет собой сумму двух функций, зависящих только от своего аргумента: $\psi_\omega(\rho)\exp(-i\omega\eta) = C_1^\omega(-\varsigma_1)^{i\omega} + C_2^\omega(\varsigma_2)^{-i\omega}$, $\varsigma_1 = t + z$, $\varsigma_2 = t - z$. Из-за своей структуры и фактической прозрачности границ (это видно из общего вида решений гипергеометрического уравнения при $\omega \neq 0$) $t = \pm z$ квадрантов $]-\pi/4;\pi/4[\bigcup]\pi/4;3\pi/4[\bigcup]3\pi/4;5\pi/4[\bigcup]5\pi/4;7\pi/4[$ (т.е. $I,\ II,\ III,\ IV$) при наличии рассеяния в каждом квадранте мода, распространяющаяся в квадранте R к горизонту, может обойти т.0 на $z,\ t$–плоскости и вернуться вновь в квадрант R. Ниже в п. **3** будет дано возможное пояснение данному факту, вытекающему из общей структуры решения (2).

Поэтому при $\zeta = 0$ ($z = t$) необходимо поставить определенные граничные условия, превращая задачу об эволюции волнового пакета в граничную (соответственно — корректифицируя задачу Штурма–Лиувилля для уравнения (4)); вообще говоря, здесь можно рассмотреть также задачу Гурса.

Рассматриваемая задача имеет много общего с задачей о прохождении потенциального барьера частицей в квантовой механике. Следует заметить, что стандартные в этом случае условия сшивки функции–решения уравнения типа Шрёдингера с эффективным потенциалом

$$V_{ef} = m^2\exp(2s/R)/(1+\exp(2sR)),$$

имеющего следующий вид:

$$-\frac{d^2}{ds^2}\psi_\omega + (\varepsilon - V_{ef})\psi_\omega = 0, \quad s = R\ln(\rho/R),$$

будут представлять собой требования $\psi_\omega(s) \in C^1([-s_0;s_0])$, $s_0 \in \mathbf{R}^1$ (принадлежность к классу непрерывных вместе с производных функций в окрестности горизонта событий — границе эффективного барьера); они являются одним из вариантов постановки граничного условия, с физической точки зрения, интуитивно приемлемым (хотя, впрочем, не единственно возможным).

Отметим, что наличие суммы по модам ω приводит к тому, что рассмотрение пересечения горизонта двухточечным комплексом, принадлежащим сложному пакету ($\omega > 0$), объясняет деформацию (дисперсию) последнего.

Данный эффект требует для своего определения при численном моделировании прохождения–отражения пакета от “псевдопотенциального барьера” метрики специальных допущений, связанных с необходимостью учета трансформации решения в R–области (I квадрант) в F–область (II квадрант), поскольку изменение его структуры скрадывается наложением (своеобразной интерференцией) множества мод при формировании общего решения задачи (2) с разделяющимися переменными. Тем не менее, качественное выявление этого эффекта достаточно просто.

3. Уравнение Клейна–Гордона (УКГ) для метрики Шварцшильда

Аналогично можно рассмотреть задачу о динамике нелокального пакета в поле метрики Шварцшильда (в сферически–симметричном случае). Метрика Шварцшильда — единственное сферически–симметричное решение уравнений Эйнштейна в вакууме: $R_{\mu\nu} = 0$. Интервал в этом случае имеет вид:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + dr^2/(1 - 2M/r) + r^2 d\Omega^2,$$

где: $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2$; r, ϑ, φ — сферические координаты; $R = 2GM$ — радиус Шварцшильда, M — масса черной дыры, G — гравитационная постоянная (далее $G = 1$).

Уравнение Клейна–Гордона для скалярного поля $\phi(\vec{r}, t)$ в данной метрике имеет вид:

$$-\frac{1}{r^2 - 2Mr}[r^2\frac{\partial}{\partial t}]^2\phi + \frac{\partial}{\partial r}([r^2 - 2Mr]\frac{\partial}{\partial r}\phi) +$$
$$+ cosec\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}(sin\,\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}) + [cosec\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}]^2\phi = m^2 r^2\phi, \tag{6}$$

где m — полевой параметр ("масса"). В рассматриваемом (3+1)–мерном случае уравнение (2) допускает разделение переменных $\phi(r, t, \vartheta, \varphi) = R(r)S(\vartheta)e^{i(\bar{m}\varphi - \omega t)}$, приводящее для радиальных и угловых частей $R(r)$ к двум следующим уравнениям [23]:

$$cosec\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}[sin\,\vartheta\frac{\partial S(\vartheta)}{\partial\vartheta}] + [\lambda - \bar{m}^2 cosec^2\vartheta]S(\vartheta) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}[(r^2 - 2Mr)\partial R(r)\partial r] + [\frac{K^2(r)}{r^2 - 2Mr} - m^2 r^2 - \lambda]R(r) = 0, \tag{8}$$

где λ — постоянная разделения, $K(r) = \omega r^2$. Общее решение $S^{\ell}_{\bar{m},0}(\vartheta)$ уравнения для угловой части (7) есть сфероидальная угловая функция со спиновым весом $s = 0$ [13]. Замена независимой ($r \to x$) и зависимой переменных ($R(r) \to G(x)$) в уравнении (8) :

$$r = 2M(1 - x), \qquad R(r) = (r/M - 2)^{2i\omega M}\exp(iM\sqrt{\omega^2 - m^2}(r/R - 1))G(x)$$

приводит его к следующему виду:

$$G''(x) + A(x)G'(x) + B(x)G(x) = 0 \tag{9}$$

$$A(x) = (\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{x} + \frac{\alpha_4}{x-1}), \quad B(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2 x - h}{x(x-1)},$$

$$\alpha_1 = \frac{-1(1+2i\omega M) + i(2\omega^2 M - m^2 M)}{\sqrt{\omega^2 - m^2}},$$

$$\alpha_2 = 4iM\sqrt{\omega^2 - m^2}, \quad \alpha_3 = 1 + 4i\omega M, \quad \alpha_4 = 1,$$

$$h = \lambda - 2iM\sqrt{\omega^2 - m^2} - 2i\omega M + 8\omega M^2\sqrt{\omega^2 - m^2} - 4M(2\omega^2 M - m^2 M).$$

Решения данного уравнения — вырожденные функции Хейна [22,24]; точки $x = 0$ ($r = 2M$) и $x = 1$ ($r = 0$) являются регулярными особыми точками уравнения (9). Следуя рассмотренной выше методике и работам [25]–[26], определим решение $\phi(\vec{r}, t)$ уравнения (6) в окрестности горизонта событий (при $r > 2M$, $|x| < 1$):

$$\phi(r, \vartheta, \varphi, t) = (C_1 y_1^{1,1;2}(\alpha_1; \alpha_3, \alpha_4; -\alpha_2; -h; x = 0, x) + C_2 x^{1-\alpha_3} \times$$

$$\times y_1^{1,1;2}(\alpha_1 + 1 - \alpha_3; 2 - \alpha_3; \alpha_4; -\alpha_2; -h + (\alpha_1 + 1 - \alpha_3)(1 - \alpha_3); x = 0; x) \times$$

$$\times (r/M - 2)^{2i\omega M} \exp[iM\sqrt{\omega^2 - m^2}] \cdot S^{\ell}_{\bar{m},0}(\vartheta). \tag{10}$$

Здесь $y_1^{1,1;2}$ — вырожденная функция Хейна в окрестности $x = 0$, то есть стандартное частное решение в данной окрестности; второе слагаемое представляет собой второе частное решение. Продолжение “под горизонт” приводит нас к необходимости построения решения, подобного (10), в окрестности второй регулярной особой точки $x = 1$. Анализ обобщенной схемы Римана при преобразовании Мёбиуса [27], переводящем точку $x = 0$ в точку $x_1 = 1 - x$, дает здесь два линейно независимых решения вырожденного уравнения Хейна:

$$y_1^{1,1,2}(-\alpha_1; \alpha_4, \alpha_3; \alpha_2, h - \alpha_1\alpha_2; x = 1, x),$$

$$(1 - x)^{1-\alpha_4} y_2^{1,1,2}(-\alpha_1 + 1 - \alpha_4; 2 - \alpha_4, \alpha_3; \alpha_2; h - \alpha_1\alpha_2; x = 1, x).$$

Они должны являться образующими модами решения уравнения Клейна–Гордона для метрики Шварцшильда. Так как $\alpha_4 \equiv 1$, то это не выполняется. Следовательно, как и в случае, рассмотренном ранее, прохождение волнового пакета через горизонт событий приводит к перестройке решения. А именно, второе частное решение (также содержащее логарифмический член) в рассматриваемой области можно найти, используя, например, метод Пеано–Беккера [28].

Здесь мы не будем приводить явный вид решения (9), в данном случае из-за его громоздкости (для него требуется построить систему рекуррентных соотношений на коэффициенты); ограничимся общими соображениями, следующими из теории метода Фробениуса [28]: если первое решение представимо в окрестности регулярной особой точки $x = x_0$ числовым рядом:

$$G_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k,$$

то, подставляя его в исходное уравнение (9), получаем так называемое "определяющее уравнение" (алгебраическое), принимающее в нашем случае вид: $r^2 + (\alpha_3 - 1)r = 0$ (для $x_0 = 0$). При этом показатель r_1 должен быть корнем данного уравнения. Отсюда следует, что при $\omega = 0$ происходит вырождение решения ($r_1 = r_2 = 0$), и второе линейно независимое решение $w_2(x)$ уравнения (9) надо искать по формуле Лиувилля–Остроградского:

$$G_2(x) = C_{12} G_1 \int \exp(-\int A(x')dx')dx'/G_1^2,$$

откуда:

$$G_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k + \gamma_{-1} G_1(x) \ln(x),$$

$$\gamma_{-1}: \quad \exp(-\int A(x')dx')/G_1^2 = \gamma_{-1}/x + \gamma_0 + \gamma_1 x + ...$$

Полностью аналогично рассматривается регулярная особая точка $x = 1$ (ей отвечает решение, пропорциональное $\ln|x-1|$). Таким образом, для моды с $\omega = 0$ на горизонте событий существует скачок 2-го рода; для мод с $\omega \neq 0$ решение $G \to -\infty$ при $x \to 1$.

Продолжение $\phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ из области $r > 2M$ в область $r < 2M$ не является явным гомотопическим отображением при переходе особой точки в отсутствие дополнительных априорных предположений на поведение пакета при $r = 2M$: преобразование $r - 2M \to (2M - r)\exp(-ik\pi), k \in \mathbf{Z}$ приводило бы к решению в виде степенного ряда (без логарифмических сомножителей), что неверно описывало бы прохождение пакета через особенность.

Можно предположить, что все рассмотренные свойства решений уравнения КГ в данном случае определяются только метрической особенностью $1/(r - 2M)$. Однако введение в рассмотрение системы координат, где особенность на горизонте событий элиминируется, например, координат Крускала–Шекереса $U,\ V$, связанных с координатами $r,\ t$ соотношениями:

$$(\frac{r}{2M} - 1)\exp(\frac{r}{2M}) = U^2 - V^2,$$

$$t = 4M\ arth(\text{ß}(V/U)),$$

где $\text{ß}(z) = z$ при $z \in]-\pi/4; \pi/4[\bigcup]3\pi/4; 5\pi/4[$, $\text{ß}(z) = 1/z$ при $z \in]\pi/4; 3\pi/4[\bigcup]5\pi/4; 7\pi/4[$ на плоскости $U,\ V$, приводит к картине, сходной с проанализированной в п.**2**.

Именно, рассмотрим безмассовое поле ($m = 0$). Путем введения так называемой "координаты Редже–Уилера" $r^* = \ln(U^2 - V^2)$ уравнение КГ $\Box\phi = 0$ для радиальной компоненты $R_\ell(r^*, t)$ ($\phi_{\ell m} = r^{-1}R_\ell(r^*, t)Y_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$(\partial^2/\partial r^{*2} - \partial^2/\partial t^2 - F_\ell(r^*))R_\ell = 0,$$

где эффективный потенциал $F_\ell(r^*) = (1 - 2M/r(r^*))(\ell(\ell+1)/(r(r^*))^2 + 2M/(r(r^*))^3)$. Так как метрика Шварцшильда не зависит от времени, для преобразования уравнения КГ и получения из него ОДУ целесообразно использовать преобразование Фурье (по переменной t):

$$\phi_\ell = \int A_\ell(k)R_{k,\ell}(r^*)e^{-ikt}dt,$$

откуда:

$$d^2R_{k,\ell}(r^*)/dr^{*2} = (-k^2 + F_\ell(r^*))R_{k,\ell},$$

где k определяет энергию моды, распределение пакета по энергии задается функцией $A_\ell(k)$. Если эта функция существенно отлична от нуля при таких ℓ и k, что $k \gg \ell(\ell+1)$, то потенциалом F_ℓ можно пренебречь, и уравнение Клейна–Гордона принимает вид волнового уравнения в свободном пространстве (в координатах $t,\ r^*$). Тогда в преобразованных (вращением) координатах Крускала $\Lambda_+ = U + V,\ \Lambda_- = U - V$ общее решение в I–ом квадранте плоскости Крускала–Шекереса примет вид:

$$\phi(\Lambda_+, \Lambda_-) = \phi_+(\Lambda_+) + \phi_-(\Lambda_-), \qquad k \gg \ell(\ell+1),$$

где $\phi_+,\ \phi_-$ — произвольные функции своих аргументов.

Поскольку $\Lambda_+^2 = \exp(r^* + t)$, то функция ϕ_+ описывает движение к центру. Формально она определена в квадранте I, но, поскольку она не зависит от переменной Λ_-, она должна быть той же самой и в области $\Lambda_- < 0$ (в квадранте II плоскости U, V).

Функция ϕ_-, описывающая движение от центра, имеет один и тот же вид в квадрантах I и IV ($]-\pi/4; \pi/4[\bigcup]5\pi/4; 7\pi/4[$). Для безмассового пакета, движущегося от центра, линия $V = -U$ между квадрантами I и IV прозрачна.

В квадранте II общее решение также описывает движение к особенности и от нее. В этот квадрант сигнал, движущийся к центру, приходит из квадранта I. Движущийся же от центра сигнал проходит свободно в квадрант III, а не в I. Аналогично сигнал, движущийся к особенности $r=0$ в квадранте III, свободно проходит в квадрант IV, а сигнал, движущийся от этой особенности, свободно проходит из IV в I.

Расширенная метрика Крускала формально решает проблему неполноты метрики Шварцшильда. При этом, однако, возникает трудность, связанная с нарушением принципа причинности. Дело в том, что при наличии материи в каждом квадранте сигнал претерпевает рассеяние, и амплитуда его отражения отлична от нуля. Последовательно отражаясь в каждом из квадрантов, сигнал, исходно распространявшийся в I в сторону уменьшения радиуса и увеличения времени, может снова возвратиться в исходный квадрант из абсолютного прошлого. Эту проблему можно решить, полагая точку $U=V=0$ существенно особой, а поверхность U, V многолистной римановой, однако тем самым постулируется доступность наблюдению в окрестности коллапсара возможных рассеянных сигналов с листов пространства–времени, отличающихся от исходного (представляется весьма интересным проанализировать имеющийся наблюдательный материал относительно кандидатов в черные дыры с этой точки зрения).

4. Квазиклассическое приближение для УКГ в метрике Шварцшильда

Существует возможность получить приближенное решение вырожденногоо уравнения Хейна, справедливое вплоть до малой окрестности горизонта событий (и точки сингулярности). Для этого можно использовать методику перехода к квазиклассическому приближению для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, изложенную в работе [29].

Для этого перепишем уравнение (9) в форме $(\mathcal{K}(x)G')'+\mathcal{HR}(x)G=0$, где

$$\mathcal{K}(x)=\exp[\alpha_2 x+\alpha_3\ln|x|+\alpha_4\ln|x-1|],$$

$$\mathcal{HR}=\exp[\alpha_2 x+\alpha_3+\alpha_4](\alpha_1\alpha_2 x-h),\quad \mathcal{H}\in\mathbf{R^1}.$$

Произведем замену переменных $G(x)=\varsigma(x)u(s)$, $s=s(x)$ (при этом $G'_x=\varsigma'_x u+\varsigma u'_s s'_x,...$). После подстановки в наше уравнение получим:

$$u''(x)+\mathcal{K}_1(s)u'+[\mathcal{HR}_1-\mathcal{R}_2]u=0, \tag{9$'$}$$

$$\mathcal{K}_1(s)=\frac{2\mathcal{K}s'(x)\varsigma'(x)+[\mathcal{K}(x)s'(x)]'\varsigma(x)}{\mathcal{K}(x)\varsigma(x)[s'(x)]^2},$$

$$\mathcal{H}\mathcal{R}_1 = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{K}(x)[s'(x)]^2}, \qquad \mathcal{R}_2 = \frac{[\mathcal{K}(x)\varsigma'(x)]'}{\mathcal{K}(x)[s'(x)]^2\varsigma(x)}.$$

Выберем функции $s(x)$ и $\varsigma(x)$ из условий $\mathcal{K}_1(s) = 0, \mathcal{R}_1(s) = 1$, что приводит исследуемое уравнение к виду

$$u''(s) + [\mathcal{H} - \mathcal{R}_2(s)]u = 0, \tag{9''}$$

$$\mathcal{R}_2(s) = \mathcal{R}_2^{(1)} + \mathcal{R}_2^{(2)},$$

$$\mathcal{R}_2^{(1)} = \frac{\mathcal{K}}{4\mathcal{R}}(\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}} + \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}})', \quad \mathcal{R}_2^{(2)} = \frac{\mathcal{K}}{4\mathcal{R}}(\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}} + \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}})(\frac{3}{4}\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}} - \frac{1}{4}\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}).$$

При $\mathcal{H} \to +\infty$ решения уравнения $(9'')$ будут в пределе совпадать с решениями уравнения $u'' + \mathcal{H}u = 0$, т.е. в старых переменных $G(x) \to (\mathcal{K}\mathcal{P})^{-1/2}(c_1 cos\ \ \xi(x) + c_2 sin\ \ \xi(x))$, $\mathcal{P}(x) = (\mathcal{H}\mathcal{R}(x)/\mathcal{K}(x))^{1/2}$, $\xi(x) = \int_{x_0}^{x}\mathcal{P}(x')dx'$. Замена решения уравнения $(9'')$ приближенным решением вышеприведенного типа составляет основу квазиклассического метода решения уравнения $(9')$.

При замене точного решения приближенным, по существу, важно лишь выполнение неравенства $L \ll \mathcal{H}^{1/2}$ $(L = \int_{x_0}^{x}|\mathcal{R}_2(s)|ds)$ для $(9'')$. Поэтому приближенным решением можно пользоваться не только в тех случаях, когда велико $\mathcal{H}$, но и при $\mathcal{H} \sim 1$, если $L \ll 1$.

Это имеет место, когда производные функций $\mathcal{K},\ \mathcal{R}$ малы, то есть при медленном изменении коэффициентов уравнения $(9')$. В правую часть $(9')$ входят логарифмические производные функций $\mathcal{K},\ \mathcal{R}$, а также производные от соответствующих логарифмических призводных. При плавном изменении коэффициентов уравнения $(9')$ производными от логарифмических производных функций $\mathcal{K}$, можно пренебречь, и считать, что более существенным в правой части $(9'')$ будет второе слагаемое, для которого должно выполняться

$$|\mathcal{R}_2^{(2)}| \ll 1. \tag{11}$$

Следует отметить, что, если рассматривать $(9'')$ как уравнение типа Шредингера $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \mathcal{P}^2\Psi = 0$, где $\mathcal{P}$ имеет смысл импульса, то условие (11) совпадает с обычно используемым в квантовой механике условием применимости квазиклассического приближения $|\mathcal{P}'/\mathcal{P}^2| \ll 1$, если в $\mathcal{R}_2^{(2)}$ положить $\mathcal{K}(x) = 1,\ \mathcal{R}(x) = \mathcal{P}^2$.

В нашем случае в окрестности т. $x = 0$ имеем представление:

$$\mathcal{K}(x) = x^{\tau_1}\mathcal{K}_0(x), \quad \mathcal{R}(x) = x^{\tau_2}\mathcal{R}_0(x),$$

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 0, \qquad \mathcal{K}_0,\ \mathcal{R}_0 \in C^2(]-\varpi;\varpi[),\ \varpi \in \mathbf{R}^1.$$

Для того, чтобы $s(0) < \infty$, необходимо $\tau_2 - \tau_1 > -2$. Данное условие в нашем случае выполняется. Для дальнейшего исследования требуется предположение о знакопостоянности $\mathcal{K}_0,\ \mathcal{R}_0$ в некотором интервале вблизи особой точки $x = 0$ — следует отдельно рассматривать, в частности, случаи a) $\mathcal{K}_0 > 0,\ \mathcal{R}_0 > 0$ и b) $\mathcal{K}_0 > 0,\ \mathcal{R}_0 < 0$. Для первого случая, если $x \approx 0$, то

$$s(x) \approx (\mathcal{R}_0(x)/\mathcal{K}_0(x))^{1/2} \frac{(x-a)^{(\tau_2-\tau_1+2)/2}}{(\tau_2-\tau_1+2)/2},$$

$$\mathcal{R}_2(s) = \frac{\iota^2 - 1/4}{s^2} + s^{2/(\tau_2-\tau_1+2)-2} f(s),$$

где функция $f(x)$ непрерывна при $0 \leq s < s(\varpi)$. Выделим особенность при $s \to 0$, тогда уравнение $(9')$ примет вид

$$u'' + (\mathcal{H} - (\iota^2 - 1/4)/s^2)u = s^{2/(\tau_2-\tau_1+2)-2} f(s)u.$$

Решение последнего уравнения выражается через функции Бесселя и Вебера (поскольку у нас $\iota = 0$), и, таким образом, решение (9) в старых переменных может быть представлено как

$$G(x) = (\xi(x)/(\mathcal{K}(x)\mathcal{P}(x)))^{1/2}(c_1 J_0[\xi(x)] + c_2 Y_0[\xi(x)]),$$

$$\mathcal{P}(x) = (\mathcal{H}\mathcal{R}(x)/\mathcal{K}(x))^{1/2},$$

$$\xi(x) = \int_0^x \mathcal{P}(x')dx'. \qquad (12)$$

Для случая b) (то есть $\mathcal{K}_0 > 0,\ \mathcal{R}_0 < 0$) представление (12) следует заменить на

$$G(x) = (\xi(x)/(\mathcal{K}(x)\mathcal{P}(x)))^{1/2}(c_3 I_0[\xi(x)] + c_4 K_0[\xi(x)]),$$

$$\mathcal{P}(x) = (\mathcal{H}|\mathcal{R}(x)/\mathcal{K}(x)|)^{1/2},$$

где $K_0(\xi),\ I_0(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

Отметим важный факт, связанный со знакопеременностью $\mathcal{K}_0,\ \mathcal{R}_0$: данное свойство, как видно из явного представления рассматриваемых коэффициентов, существенно зависит от параметров $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ (см. их явный вид в (9)). Различные комбинации величин $\omega,\ m,\ M$ (причем ω пробегает всю числовую ось) приводят к неупорядоченной последовательности базисных мод решения Клейна–Гордона $\phi(r,t,\vartheta,\varphi)$ вблизи особой точки $x = 0$ (горизонта событий).

Кроме того, поскольку функции Вебера $Y_0(\xi)$ и Макдональда $K_0(\xi)$ в нуле принимают бесконечные значения, непосредственная сшивка решений без принятия условия $c_2 = c_4 = 0$ невозможна.

5. Заключение

Можно заключить, что вопрос о взаимодействии нелокального волнового пакета с полями даже простейших метрик (в частности, 2–мерной DGM и Шварцшильдовской) приводит к выводу о необходимости исследования поведения динамической системы в пространстве–времени, чьи характеристики обладают ясным физическим смыслом. Переход к "десингуляризованной" системе координат принципиально изменяет свойства решения и приводит к выводам, для интерпретации которых требуется нарушать принцип Оккама.

Возникновение необходимости введения в рассмотрение многолистных поверхностей для интерпретации решений уравнения Клейна–Гордона даже в простейшем линейном случае, без учета эффектов согласования его решения с изменяющейся (флуктуирующей, нестационарной) метрикой, говорит о целесообразности глубокого исследования топологических свойств его решения.

Следует отметить, что существенная зависимость вида решений уравнений с особенностями, получаемых для радиальных частей уравнений Клейна–Гордона, от вида последних, требует для физического истолкования верификации с использованием аппарата квантово–статистических кинетических уравнений для соответствующей метрики.

Приложение. Свойства вырожденного уравнения Хейна и его решений

Стандартная самосопряженная форма вырожденного уравнения Хейна (ВУХ):

$$\frac{d}{dz}\big((z^2-1)\frac{du(z)}{dz}\big)+\big(-p^2(z^2-1)+2p\beta z-\lambda-\frac{m^2+s^2+2msz}{z^2-1}\big)u(z)=0. \quad (13)$$

Ее можно привести к (несимметричной) канонической форме ВУХ:

$$w''(z)+\big(4p+\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\big)w'(z)+\frac{4p\alpha z-\sigma}{z^2-z}w(z)=0, \quad (14)$$

производя последовательные замены переменных

$$u(z)=(z-1)^{(m+s)/2}(z+1)^{(m-s)/2}\exp(-pz)u_*(z), \quad w(z)=u_*(1-2z),$$

и принимая

$$\gamma = m + s + 1, \quad \delta = m + 1 - s, \quad \alpha = m - \beta + 1,$$

$$\sigma = \lambda - 2p(\beta - m - s - 1) - m(m+1).$$

У последнего уравнения есть два независимых решения, которые мы будем обозначать $y_{1,2}^{1,1;2}(p, \alpha, \gamma, \delta, \sigma; z)$, причем одно из них (решение Фробениуса) определяется условием $y_1^{1,1;2}(p, \alpha, \gamma, \delta, \sigma; 0) = 1$, а второе нормируется при $z = -\infty$ условием

$$\lim_{z \to -\infty} z^{\alpha} y_2^{1,1;2}(p, \alpha, \gamma, \delta, \sigma; z) = 1.$$

Существует возможность получить и другие решения, помимо этих двух — для этого необходимо использовать преобразования независимой и зависимой переменных, которые сохраняют каноническую форму ВУХ. Первой трансформацией будет взаимная перестановка регулярных особых точек $z = 0$ и $z = 1$: $z \to 1 - z$. Она дает пару следующих независимых решений ВУХ:

$$y_1^{1,1;2}(-p, \alpha, \delta, \gamma, \sigma + 4p\alpha; 1 - z), \quad y_2^{1,1;2}(-p, \alpha, \delta, \gamma, \sigma + 4p\alpha; 1 - z).$$

Второй трансформацией будет замена в т. $z = 0$ (13) следующего вида: $u(z) \to v(z)$, $v(z) = u(z) z^{\gamma - 1}$, что дает следующую пару независимых решений ВУХ:

$$z^{1-\gamma} y_1^{1,1;2}(p, \alpha + \gamma - 1, 2 - \gamma, \delta, \sigma + (\delta - 4p)(\gamma - 1); z),$$

$$z^{1-\gamma} y_1^{1,1;2}(p, \alpha + \gamma - 1, 2 - \gamma, \delta, \sigma + (\delta - 4p)(\gamma - 1); z)$$

Соответствующая трансформация в особой точке $z = 1$ приводит к решениям

$$(z-1)^{1-\delta} y_1^{1,1;2}(p, \alpha + \delta - 1, \gamma, 2 - \delta, \sigma - \gamma + \gamma\delta; z),$$

$$(z-1)^{1-\delta} y_2^{1,1;2}(p, \alpha + \delta - 1, \gamma, 2 - \delta, \sigma - \gamma + \gamma\delta; z).$$

Еще одна трансформация имеет вид: $u \to v(z)$, $v(z) = \exp(4pz) u(z)$. Ей соответствуют решения ВУХ

$$\exp(-4pz) y_1^{1,1;2}(-p, -\gamma - \delta + \alpha, \gamma, \delta, \sigma - 4p\gamma; z),$$

$$\exp(-4pz) y_2^{1,1;2}(-p, -\gamma - \delta + \alpha, \gamma, \delta, \sigma - 4p\gamma; z).$$

Комбинируя решения от различных преобразований, получаем 32 решения ВУХ. Кроме них, можно также рассматривать решения типа Флоке $f_{1,2}(z)$, удовлетворяющие условиям $f_{1,2}\big(z \exp(2\pi i)\big) = \exp(2\pi\kappa_{1,2}) f_{1,2}(z)$ ($\kappa_{1,2}$ — т. н. показатели Флоке).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzschild K., Über das Gravitationsfield eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie // *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.–Math. Klasse*, 189–196, 1916.

2. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., *Теория тяготения и эволюция звезд.* М.: Наука, 1971.

3. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., *Gravitation.* San Francisco: W.H. Freeman & Comp., 1973.

4. Cordinalesi E., Papapetrou A., Proc. Roy. Soc. V. A209, P. 259. 1951.

5. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А., Хлопов М.Ю., Чечеткин В.М., Письма в ЖЭТФ, Т.3, С. 189–193, 1977; Summer S.J., Verch R., Lett. Math. Phys. V.37. PP. 145–158. 1996.

6. Penrose R., Riv. Nuovo Cimento, V.1. P. 252. 1969.

7. Christodolou D., Phys. Rev. Lett., V.25. P. 1596, 1970.

8. Зельдович Я.Б., Письма в ЖЭТФ. Т.14, С. 270, 1971.

9. Старобинский А.А., ЖЭТФ, Т.64. № 1, с.48. 1973.

10. Старобинский А.А., ЖЭТФ, Т.65, № 1, с.3. 1973.

11. Unruh W.G., Phys. Rev. D. V.14. P. 3251. 1976.

12. Chandrasekhar S., *The mathematical theory of black holes.* New York: Oxford University Press. 1992.

13. Futterman J.A., Handler F.A., Matzner R.A., *Scattering from black holes.* Cambridge – New York: Cambridge University Press. 1988.

14. Bekenstein J.D., Phys. Rev. Lett. V. 70. P. 3680. 1993.

15. Malcadena J.M., Strominger A. Phys. Rev. D. V. 55, p.861, 1997.

16. Kuchiev M.Yu., Flambaum V.V., e-print qr-qc/0312065

17. Page D.N., Phys. Rev. D, V.14, p.1509, 1976.

18. Semiz I., Phys. Rev. D, V.46, p.5414, 1992.

19. Chandrabati S.K., Proc. Roy. Soc. London A, V.391, p.27, 1984.

20. Jin W.M., Class. Quant. Gravity, V.15, p.3163, 1998.

21. Нарожный Н.Б., Федотов А.М., Exact modes for scalar field in the 2D DGBH metric, частное сообщение.

22. Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1971.

23. Wu S.Q., Cai X., J. Math. Phys., V.44, pp.1084-1088, 2003.

24. Ronveaux A. (ed.), *Heun's differential equations.* Oxford – New York – Tokyo: Oxford University Press, 1995.

25. Damour T., Ruffini R., Phys. Rev. D, V.14, p.332, 1976

26. Sannan S., Gen. Rel. Grav, V.20, p.239, 1998.

27. Slavyanov S.Yu., Lay W., *Special functions: a unified theory based on singularities*. Oxford – New York: Oxford University Press, 2000.

28. Айнс Э., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Харьков: ГНТИ Украины, 1939.

29. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., *Специальные функции математической физики*. М.: Наука, 1984.