ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 47 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Абалакин И.В., Бобков В.Г.,
Козубская Т.К.

Многомодельный подход к оценке аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета с помощью вычислительного эксперимента

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Абалакин И.В., Бобков В.Г., Козубская Т.К. Многомодельный подход к оценке аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета с помощью вычислительного эксперимента // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 47. 32 с. doi:10.20948/prepr-2018-47
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-47

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

И. В. Абалакин, В. Г. Бобков, Т. К. Козубская

Многомодельный подход к оценке аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета с помощью вычислительного эксперимента

Москва — 2018

И. В. Абалакин, В. Г. Бобков, Т. К. Козубская

Многомодельный подход к оценке аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета с помощью вычислительного эксперимента

Разработан многомодельный подход для расчета аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета. Сформулирована матрица математических моделей, позволяющая оптимальным образом выбрать то или иное описание газодинамического течения около винта и генерируемого им шума в дальнем поле, а также поставить задачу моделирования в зависимости от режима эксплуатации винта и целей вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: численное моделирование, аэродинамика, аэроакустика, винт вертолета

Ilya Vladimirovich Abalakin, Vladimir Georgievich Bobkov, Tatiyana Konstantinovna Kozubskaya

Multimodel approach for helicopter rotor aeroacoustic and aerodynamic characteristics modeling using numerical simulation

The multimodel approach for evaluation of helicopter rotor aerodynamical and acoustical properties is developed. The matrix of models which provides the optimal model choice for the prediction of aerodynamic and acoustic rotor characteristics depending on helicopter flight regimes is built.

Key words: numerical simulation, aerodynamics, aeroacoustics, helicopter rotor

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 18-01-00445.

1 Введение

Целью производителей летательных аппаратов является постоянное совершенствование их эксплуатационных свойств, а также повышение их надежности и безопасности путем улучшения их аэродинамического качества. В последние годы в вертолетной промышленности все больше внимания уделяется оптимизации и акустических характеристик вертолета — уровню акустического шума внутри и вне вертолета. Это вызвано ужесточающимися требованиями Международного комитета гражданской авиации (ICAO) по шуму на местности, производимому летательными аппаратами.

Современная вертолетная промышленность обладает мощным арсеналом средств для совершенствования конструкции винта вертолета. В первую очередь, к ним относятся новые композитные материалы и развитые методики формирования лопастей сложной конфигурации, которые конструируются с использованием различных наборов аэродинамических профилей, законцовок и закрылков. В то же самое время новые широкие возможности в создании лопасти вертолетного винта предоставляют огромный выбор вариаций, из которых надо выбирать оптимальные варианты за ограниченное время. Выбор же оптимальной конфигурации винта достаточно сложный процесс — помимо предварительных, прикидочных, расчетов с использованием полуэмпирических методов определения характеристик несущего винта (НВ) вертолета на основе импульсной, вихревой и дисковой вихревой теорий [1–3] необходимо проведение многочисленных физических экспериментов. Однако проведение натурных экспериментов — достаточно трудоемкий процесс, требующий как дорогостоящей производственной базы, так и огромных человеческих и временных ресурсов. Более того, диапазон рабочих режимов винта, воспроизводимых в экспериментах на земле, и физический размер исследуемой модели винта ограничены характеристиками и размерами рабочей зоны аэродинамической трубы, задействованной в эксперименте. Таким образом, на этапе проектирования и разработки, до изготовления лётных образцов, не представляется возможным с достаточной точностью определить характеристики винта для всего диапазона эксплуатационных режимов.

В такой ситуации на помощь приходит математическое моделирование, которое в настоящее время находит все более широкое применение в промышленных авиационных приложениях и активно применяется при проектировании новых летательных аппаратов. Этому способствует рост мощности вычислительной техники и развитие математических моделей, позволяющих точно описывать течение вблизи элементов конструкции и лопастей винта и распространение возмущений в пространстве около летательного аппарата. Несмотря на то что вычислительный эксперимент не может полностью заменить натурный, он позволяет существенно сократить затраты на разработку оптимальных конфигураций винта вертолета. Помимо этого, вычислительный эксперимент обладает рядом достоинств, среди которых стоит упомянуть:

- относительно малое время получения результата, ограниченное только мощностью вычислительной техники, задействованной в расчете;
- возможность получения результата с повышенной точностью, при корректном выборе моделей и численных алгоритмов;
- возможность оценки характеристик винта для произвольных режимов эксплуатации винта;
- возможность численного моделирования полноразмерной конфигурации винта при реальных режимах эксплуатации;
- полное описание течения около винта, позволяющее проводить измерения в произвольных областях рядом с винтом и на поверхности лопастей.

Таким образом, синтез современных методов численного моделирования газодинамического течения в ближнем поле и оценки производимого им акустического излучения в дальнем поле вместе с постоянно растущими вычислительными мощностями современных суперкомпьютеров становится новым мощным средством исследования, приходящим в помощь натурному эксперименту в авиационной и вертолетной промышленности.

В работе разработан многомодельный подход, позволяющий оценивать аэродинамические и акустические характеристики винта вертолета для различных эксплуатационных режимов. Основным результатом работы является формулировка матрицы моделей для оптимального выбора математической модели и соответствующей ей постановки задачи по оценке характеристик винта в зависимости от режима работы винта и целей вычислительного эксперимента.

2 Особенности моделирования течения около вертолета

При моделировании течения около вертолета можно выделить три типа зон, течение в которых может моделироваться разными способами (см. рис. 1).

- «Неподвижная» область ближнего поля (область **«1»** на рис. 1): область внешнего обтекания вертолета как единого тела, для которой является естественным использование системы координат, связанной с фюзеляжем вертолета.
- Вращающиеся области ближнего поля (области **«2»** на рис. 1): области, содержащие винты вертолета. В областях этого типа моделирование течения около винта можно проводить как в неинерциальной вращающейся системе координат, так и с использованием абсолютной системы координат. Среди моделей в абсолютной системе координат можно выделить два основных класса: модели на основе движущейся сетки и модели на основе метода погруженных границ.
- Область дальнего поля (область **«3»** на рис. 1): области, удаленные от аку-

стического источника, представляемого вертолетом и его винтами. Для оценки акустического излучения в этой области используются модели на основе волновых уравнений.

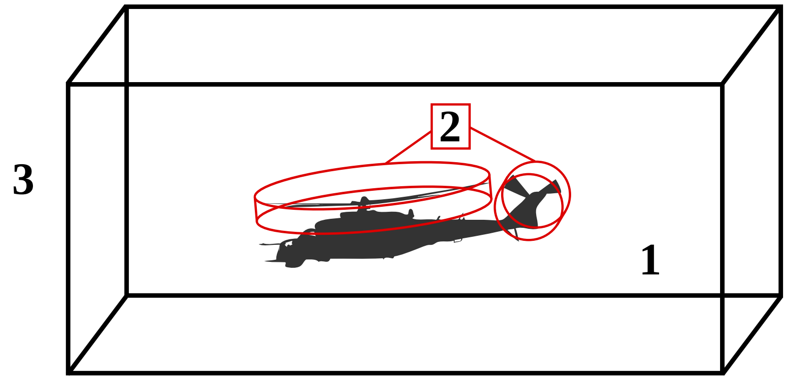


Рис. 1. Области моделирования течения около вертолета

Такое условное разделение на зоны вызвано тем, что в различных областях доминируют различные физические процессы, для описания которых возможно использовать разные математические модели, а также применять те или иные технологические приемы. Например, течение в зонах ближнего поля (**1** и **2**), где существенны нелинейные эффекты и могут образовываться скачки, где важна динамика вихреобразования, учет турбулентности и т.п., необходимо моделировать на основе полного газодинамического описания. В то же время в зоне дальнего поля **3**, где подразумевается однородное течение вдали от источника шума, перенос акустических возмущений можно описывать волновым уравнением. Зоны **1** и **2** ближнего поля принципиально отличаются вращением одной области относительно другой. Учет вращательного движения также тем или иным способом приводит к различному математическому описанию течения в смежных областях. Такое условное разделение на зоны вызвано тем, что в разных зонах для определения характеристик течения требуется моделирование разных эффектов с различной подробностью их описания.

3 Модели для описания течения в ближнем поле

3.1 Модели на основе системы уравнений Навье–Стокса в неподвижной системе координат

В зонах ближнего поля для достоверного моделирования течения и его параметров вблизи твердых поверхностей необходимо подробное газодинамическое описание. Именно это является определяющим фактором при выборе модели, которая может варьироваться в зависимости от режима эксплуатации вертолета.

Выпишем систему уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа, на основе которой строятся все математические модели для описания течения вблизи винта вертолета.

Законы сохранения в газовой динамике представимы в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0;\\
&\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{Div}\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{Div}\mathbf{S};\\
&\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u}E + \operatorname{div}\mathbf{u}p = \operatorname{div}\mathbf{q} + \operatorname{div}\mathbf{Su}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$\mathbf{u} = (u, v, w)$ — декартовы компоненты скорости;

ρ — плотность;

p — гидродинамическое давление, вычисляемое по уравнению состояния совершенного газа $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1)$, где ε — внутренняя энергия газа, γ — показатель адиабаты, для воздуха равный значению 1.4;

E — полная энергия газа, определяемая по формуле

$$E = \rho\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \rho\varepsilon;$$

$\mathbf{S} = [S_{ij}]$ — тензор вязких напряжений, компоненты которого имеют вид

$$S_{ij} = 2\mu\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\tau_{ij}} - \delta_{ij}\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

где $\mathcal{T} = [\tau_{ij}]$ — тензор скоростей деформации, а δ_{ij} — символ Кронекера;

$\mathbf{q}$ — вектор теплового потока, компоненты которого могут быть выражены через градиенты внутренней энергии[1]

$$q_i = \frac{\gamma\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}.$$

Число Прандтля задано соотношением $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\lambda$, где μ — коэффициент динамической молекулярной вязкости газа, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, λ — коэффициент теплопроводности. Значение числа Прандтля для воздуха есть величина $\mathrm{Pr} = 0.72$. Коэффициент молекулярной вязкости μ задается формулой Сазерленда:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\frac{T_0 + 120^\circ\mathrm{K}}{T + 120^\circ\mathrm{K}},$$

[1] Рассматривается политропный газ, то есть удельная теплоемкость c_V не зависит от температуры и, как следствие, внутренняя энергия газа есть линейная функция температуры: $\varepsilon = c_V T$.

где μ_0 — характерная вязкость при характерной температуре T_0.

Операторы div и Div в системе уравнений (1) представляют собой операторы дивергенции векторной и тензорной величин соответственно, а $\otimes$ — оператор диадного произведения векторов:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right], \ \operatorname{Div}\mathbf{T} = \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\right], \ a \otimes b = [a_i b_j]\,.$$

При этом результатами применения операторов div, Div и $\otimes$ являются скаляр, вектор и тензор соответственно.

При численной реализации методов расчета на основе выписанной модели (1) удобнее использовать её форму, записанную в псевдовекторном потоковом виде относительно вектора консервативных переменных $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}_1^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3^{NS}(\mathbf{Q})}{\partial z}. \quad (2)$$

В системе (2) конвективные потоки $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ определены как

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ v(E+p) \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ w(E+p) \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, вязкие потоки $\mathbf{F}_1^{NS}$, $\mathbf{F}_2^{NS}$, $\mathbf{F}_3^{NS}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{F}_1^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ uS_{xx} + vS_{xy} + wS_{xz} + q_x \end{pmatrix}, \ \mathbf{F}_2^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{yx} \\ S_{yy} \\ S_{yz} \\ uS_{yx} + vS_{yy} + wS_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_3^{NS} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{zx} \\ S_{zy} \\ S_{zz} \\ uS_{zx} + vS_{zy} + wS_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Математическая модель (1) описывает вязкое газодинамическое течение в неподвижной системе координат и может быть использована для расчета течения в области ближнего поля **1**, рис. 1. Далее (в пп. 4) будет рассмотрена модификация данной системы для проведения расчета во вращающихся областях **2**.

3.2 Модели для описания турбулентных течений

Для описания турбулентного газодинамического течения в области ближнего поля можно использовать осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes – RANS) для сжимаемого газа с различными замыкающими моделями турбулентности, а также гибридные RANS-LES (Large Eddy Simulation – LES) модели.

В качестве замыкания уравнений RANS выбрана модель турбулентности Спаларта–Аллмараса, подразумевающая включение в систему эволюционного уравнения для турбулентной вязкости [4]. Практика показывает, что этот подход на данный момент является оптимальным для решения задач внешней аэродинамики, связанных с моделированием безотрывных течений и течений с ограниченными отрывными зонами [5].

Для моделирования течений с наличием существенных отрывных областей и нестационарным взаимодействием крупно- и мелкомасштабных вихревых структур предлагается использовать гибридный вихреразрешающий подход DES [6], сочетающий преимущества RANS-подхода и метода моделирования крупных вихрей LES [5].

3.3 Граничные условия

Под внешними границами областей ближнего поля **1** (см. рис. 1) понимаются границы расчетной области, на которых задаются параметры внешнего невозмущенного потока. Таким образом, там задаются вектор внешнего потока $\mathbf{U}_0$, значения плотности ρ_0 и давления p_0. Вообще говоря, задание параметров невозмущенного потока на внешней границе не всегда корректно, так как на границе *реальной* расчетной области течение всегда будет слабооднородным из-за приходящих возмущений из источниковой зоны. Под *реальной* расчетной областью будем понимать область с диаметром $D = (3 \div 10)L$, где L — характерный размер обтекаемой конструкции, например диаметр винта. Поэтому на внешней границе расчетной области необходимо задавать искусственные или численные граничные условия. В данной работе на внешних границах предлагается использовать граничные условия на основе расщеплённых по направлению характеристических скоростей потоков, связывающих значения газодинамических параметров внутри расчетной области ρ_i, $\mathbf{U}_i$, p_i и их значений в удаленном потоке ρ_∞, $\mathbf{U}_\infty$, p_∞.

Под значениями газодинамических величин ρ_∞, $\mathbf{U}_\infty$, p_∞ в удаленном потоке будут пониматься либо невозмущенные значения

$$\rho_\infty = \rho_0,\ p_\infty = p_0,\ \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_0, \tag{3}$$

либо значения, определяемые характеристическими соотношениями

$$\rho_\infty = \rho_i \left(\frac{p_\infty}{p_i}\right)^{1/\gamma}, \ p_\infty = p_0, \ \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_i + \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\gamma\frac{p_i}{\rho_i}\right)^{1/2} - \left(\gamma\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\right)^{1/2}\right]\cdot\mathbf{n}. \quad (4)$$

При проведении расчетов без учета вязкости, т.е. с использованием уравнений Эйлера, на твердой поверхности, ставятся граничные условия непротекания, заключающиеся в задании нулевой нормальной скорости на границе.

В случае использования моделей с учетом вязкости на основе уравнений Навье–Стокса (1) на твердой границе ставится условие прилипания, то есть условие равенства нулю величины вектора скорости.

4 Моделирование течения во вращающихся областях

4.1 Система уравнений Навье–Стокса в неинерциальной вращающейся системе координат

Существующие подходы к моделированию течения около вращающегося винта на основе уравнений Навье–Стокса можно разделить на несколько классов: подходы в неинерциальной и абсолютной системах координат. Среди подходов, использующих абсолютную систему координат, можно выделить два основных направления: методы на основе движущейся сетки [7–9] и методы на основе метода погруженных границ [10; 11].

В данной работе для описания течения вблизи вращающихся винтов (зона **2**, рис. 1) используются уравнения Навье–Стокса, записанные в неинерциальной вращающейся системе координат. Рассмотрим вывод этой системы в деталях.

Введём K'-систему координат, вращающуюся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ вокруг оси, неподвижной в K-системе. Пусть начала отсчета обеих систем определены в одной точке на оси вращения. В этом случае радиус-векторы K-системы и K'-системы совпадают: $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Тогда вектор относительной скорости $\mathbf{u}'$ в K'-системе определяется следующим образом ([12], стр. 26):

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{V},$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые важные свойства вектора линейной скорости вращения **V**:

- стационарность:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0; \quad (5)$$

- градиент вектора $\mathbf{V}$ (диадное произведение векторов набла и вектора $\mathbf{V}$) есть кососимметрический тензор:

$$\nabla \mathbf{V} = \nabla \otimes \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

а это означает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{V} \tag{6}$$

и его симметричная часть равна нулю

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) = 0; \tag{7}$$

- вектор $\mathbf{V}$ удовлетворяет следующим дифференциальным соотношениям:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,, \\ &(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\,\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'. \end{aligned} \tag{8}$$

Для относительной скорости $\mathbf{u}'$ справедлив второй закон Ньютона, который можно записать в виде ([12], стр. 49):

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{1}{\rho}\mathbf{F} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'), \tag{9}$$

где $\mathbf{F}$ — внешняя сила, $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — осестремительное ускорение (центробежная сила), $2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}')$ — поворотное ускорение (сила Кориолиса).

Для уравнений движения системы уравнений Навье–Стокса полная производная по времени имеет вид

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{\partial\,\mathbf{u}'}{\partial\,t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\,\mathbf{u}', \tag{10}$$

а внешняя сила определяется дивергенцией тензора напряжений:

$$F_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \text{ или } \mathbf{F} = \operatorname{Div}\mathbf{P}, \tag{11}$$

где тензор напряжений есть функция градиентов относительной скорости $\mathbf{u}'$, так как вращающаяся система координат никак не влияет на внутренние силы внутри жидкости, которые по определению не зависят от движения одной системы координат относительно другой.

Запишем тензор напряжений в виде

$$
\begin{aligned}
P_{ij} = P_{ij}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right) = &\quad \mu\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\left(\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + p\right) = \\
= &\quad 2\mu\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}_{\tau_{ij}} - \delta_{ij}\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} - \delta_{ij}p = \\
= &\quad \underbrace{2\mu\tau_{ij} - \delta_{ij}\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}_{S_{ij}} - \delta_{ij}p = S_{ij} - \delta_{ij}p,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $\mathcal{T} = [\tau_{ij}]$ — тензор скоростей деформации, а $\mathbf{S} = [S_{ij}]$ — тензор вязких напряжений. Исходя из свойств (6) и (7) вектора линейной скорости вращения $\mathbf{V}$, получаем, что тензор напряжений как функция от производных линейной скорости вращения тождественно равна нулю:

$$
P_{ij} = P_{ij}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) \equiv 0,
$$

а следовательно,

$$
P_{ij}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right) = P_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad S_{ij}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right) = S_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad \tau_{ij}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right) = \tau_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \tag{13}
$$

Таким образом, тензор вязких напряжений инвариантен относительно скорости вращения системы координат.

Запишем вначале уравнения Навье–Стокса в K'**-системе** координат относительно вектора скорости $\mathbf{u}' = (u', v', w')^T$ K'**-системы** координат, плотности и давления. Так как скорость вращения K'**-системы** координат не дает вклад в баланс массы, то уравнение неразрывности остается инвариантным и может быть записано в виде

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{u}' = 0. \tag{14}
$$

Уравнение движения определяется вторым законом Ньютона (9)—(11):

$$
\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\,\mathbf{u}' + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{Div}\mathbf{S} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'). \tag{15}
$$

Запишем уравнение баланса внутренней энергии, которое определяется индивидуальным изменением во времени удельной внутренней энергии среды, притоком внутренней энергии извне и плотностью распределения мощности внутренних сил, определяемых скалярным произведением тензора напряжений и тензора скоростей деформации $\mathbf{P}\cdot\mathcal{T} = P_{ij}\tau_{ij}$, и не зависит от выбора системы координат:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho\left(\operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{P}\cdot\mathcal{T}\right),$$

или, учитывая определение (12) и равенство $p\operatorname{div}\mathbf{u}' = -\delta_{ij}p\tau_{ij}$, имеем

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u}'\cdot\nabla\varepsilon + p\operatorname{div}\mathbf{u}' = \rho\left(\operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{S}\cdot\mathcal{T}\right). \tag{16}$$

Перейдем от уравнения для внутренней энергии (16) к уравнению для давления, используя уравнение неразрывности (14) и уравнение состояния совершенного газа $p = (\gamma - 1)\,\rho\varepsilon$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u}'\cdot\nabla p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{u}' = (\gamma - 1)\,\rho\left(\operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{S}\cdot\mathcal{T}\right). \tag{17}$$

Полученная система (14)—(17) есть система уравнений Навье–Стокса записанная в неинерциальной вращающейся системе координат.

Заметим, что для численных расчетов лучше использовать систему (14)—(17), записанную относительно абсолютной скорости (скорости в неподвижной K-системе координат) $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{V}$. При этом согласно (13) тензор вязких напряжений и тензор скоростей деформации не изменятся. Принимая во внимание стационарность (5) и соленоидальность (6) векторного поля $\mathbf{V}$, уравнение неразрывности и уравнение энергии в абсолютных скоростях будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\left(\mathbf{u} - \mathbf{V}\right) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{V})\cdot\nabla p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{u} = (\gamma - 1)\,\rho\left(\operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{S}\cdot\mathcal{T}\right). \tag{19}$$

Для записи уравнения движения в абсолютных скоростях преобразуем правую часть уравнения (15), используя соотношения (9):

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}') = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} - \left(\mathbf{u}'\cdot\nabla\right)\mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}' &= \\ = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} - \left((\mathbf{u} - \mathbf{V})\cdot\nabla\right)\mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (15) запишется как

$$\frac{\partial\left(\mathbf{u} - \mathbf{V}\right)}{\partial t} + \left((\mathbf{u} - \mathbf{V})\cdot\nabla\right)(\mathbf{u} - \mathbf{V}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{Div}\mathbf{S} - \left((\mathbf{u} - \mathbf{V})\cdot\nabla\right)\mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}$$

или

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \left((\mathbf{u} - \mathbf{V})\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{Div}\mathbf{S} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}. \tag{20}$$

Запишем уравнения Навье–Стокса в неинерциальной системе координат (18)—(20) в виде законов сохранения, используя то, что (см. [13])

$$\mathbf{u}\cdot\left(\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}=\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\cdot\nabla\frac{\mathbf{u}^2}{2}$$

и

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\frac{\rho\,\mathbf{u}^2}{2}\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right) &= \frac{\mathbf{u}^2}{2}\operatorname{div}\rho\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)+\rho\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\nabla\frac{\mathbf{u}^2}{2}= \\ &= \frac{\mathbf{u}^2}{2}\operatorname{div}\rho\,\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)+\rho\mathbf{u}\cdot\left(\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Для получения уравнения сохранения импульса сложим домноженное на вектор скорости **u** уравнение (20) с домноженным на плотность ρ уравнением (18). В результате имеем

$$\frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t}+\operatorname{Div}\rho\,\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\otimes\mathbf{u}+\nabla p=\operatorname{Div}\mathbf{S}-\rho\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}\right). \tag{21}$$

Выведем уравнения для полной энергии

$$E=\frac{\rho\,\mathbf{u}^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}.$$

Для этого умножим уравнение (18) на $\mathbf{u}^2/2$, уравнение (20) — на импульс $\rho\mathbf{u}$, уравнение (19) — на величину $1/(\gamma-1)$ и сложим результаты. В результате, учитывая свойство (6), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\,\mathbf{u}^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)+\underbrace{\operatorname{div}\frac{\rho\,\mathbf{u}^2}{2}\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)}_{(18)\times\frac{\mathbf{u}^2}{2}+(20)\times\rho\mathbf{u}}+\underbrace{\frac{1}{\gamma-1}\left(\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\cdot\nabla p+p\operatorname{div}\left(\mathbf{u}-\mathbf{V}\right)\right)}_{(19)\times\frac{1}{\gamma-1}} \\ &\quad+\underbrace{\mathbf{u}\cdot\nabla p}_{(20)\times\rho\mathbf{u}}+\underbrace{p\operatorname{div}\mathbf{u}}_{(19)\times\frac{1}{\gamma-1}}=-\rho\mathbf{u}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}\right)+\rho\operatorname{div}\mathbf{q}+\rho\left(\mathbf{u}\operatorname{Div}\mathbf{S}+\mathbf{S}\cdot\mathcal{T}\right).\end{aligned} \tag{22}$$

Член $\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u})$ в правой части (22) равен нулю, так как вектор **u** ортогонален вектору $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u})$. Преобразуем выражение $\mathbf{u}\operatorname{Div}\mathbf{S}+\mathbf{S}\cdot\mathcal{T}$, записав его в координатной форме и используя свойство симметричности тензора **S**:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot\mathcal{T}+\mathbf{u}\operatorname{Div}\mathbf{S} &= S_{ij}\cdot\tau_{ij}+u_i\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}=S_{ij}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial u_iS_{ij}}{\partial x_j}-S_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}= \\ &= S_{ij}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial u_iS_{ij}}{\partial x_j}-\frac{1}{2}\left(S_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+S_{ji}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)= \\ &= S_{ij}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial u_iS_{ij}}{\partial x_j}-S_{ij}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)= \\ &= \frac{\partial u_iS_{ij}}{\partial x_j}=\operatorname{div}\mathbf{S}\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{23}$$

Воспользовавшись тождеством

$$\operatorname{div} \varphi \, \mathbf{u} = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi$$

и равенством (23), получим уравнение сохранения энергии в неинерциальной вращающейся системе координат, записанной относительно скорости в абсолютной системе координат:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\mathbf{u} - \mathbf{V} \right) E + \operatorname{div} \mathbf{u} p = \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u}. \tag{24}$$

Уравнения (18), (21) и (24) составляют систему уравнений Навье–Стокса во вращающейся неинерциальной системе координат, записанной в виде законов сохранения относительно вектора абсолютной скорости, применимой для использования при моделировании течения около вращающегося винта вертолета:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \left(\mathbf{u} - \mathbf{V} \right) = 0; \\
&\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{Div} \rho \left(\mathbf{u} - \mathbf{V} \right) \otimes \mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{Div} \mathbf{S} - \rho \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right); \\
&\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\mathbf{u} - \mathbf{V} \right) E + \operatorname{div} \mathbf{u} p = \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{25}$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в неподвижной системе координат, система уравнений (25) описывает изменение консервативных переменных за счет их переноса во вращающейся со скоростью $\mathbf{V}$ среде, градиента давления и поворота вектора скорости на угол равный $|\boldsymbol{\omega}| \, t$. При численной реализации данной системы уравнений скорость вращения можно интерпретировать как скорость подвижной сетки. В таком виде система уравнений рассматривалась, например, в публикациях [14; 15], где выполнялся одновременный расчет течения во вращающейся и неподвижной областях.

Перепишем систему (25) в псевдовекторном потоковом виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^I}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^I}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^I}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_x^{NI}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_y^{NI}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_z^{NI}}{\partial z} = \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^V}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^V}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^V}{\partial z}; \\
&\mathbf{Q} = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E \right)^T, \\
&\mathbf{H} = \left(0, \, -v\omega_z + w\omega_y, u\omega_z - w\omega_x, \, -u\omega_y + v\omega_x, 0 \right)^T,
\end{aligned} \tag{26}$$

где $\mathbf{F}_x^I$, $\mathbf{F}_y^I$, $\mathbf{F}_z^I$ — конвективные потоки системы уравнений Навье–Стокса в инерциальной (неподвижной) системе координат, $\mathbf{F}_x^{NI} = V_x \mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_y^{NI} = V_y \mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_z^{NI} = V_z \mathbf{Q}$ — добавки к потокам, определяемые неинерциальной системой координат или скоростью движения сетки. $\mathbf{F}_x^V$, $\mathbf{F}_x^V$, $\mathbf{F}_x^V$ — вязкие потоки системы уравнений Навье–Стокса, определяемые градиентами вектора абсолютной скорости и градиентом теплового потока.

Матрицы Якоби конвективного потока, инициируемого скоростью вращения, имеют диагональный вид

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x,y,z}^{NI}}{\partial \mathbf{Q}} = V_{x,y,z}\mathbf{I},$$

следовательно, матрицы Якоби полного конвективного потока можно записать как

$$\frac{\partial \left(\mathbf{F}_{x,y,z}^{I} - \mathbf{F}_{x,y,z}^{NI}\right)}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{S}_{x,y,z}\mathrm{diag}\left(\lambda_{x,y,z}^{i} - V_{x,y,z}\right)\mathbf{S}_{x,y,z}^{-1}, i = 1, ..., 5 ,$$

где $\lambda_{x,y,z}^{i}$ — собственные значения, $\mathbf{S}_{x,y,z}$ $(\mathbf{S}_{x,y,z})$ — матрица правых (левых) собственных векторов матриц Якоби $\partial\left(\mathbf{F}_{x,y,z}^{I} - \mathbf{F}_{x,y,z}^{NI}\right)/\partial \mathbf{Q}$ соответствующих конвективных потоков уравнений Навье–Стокса в инерциальной системе координат. Таким образом, отличие системы (26) от системы уравнений Навье–Стокса, записанной в неподвижной системе координат (2), заключается только в изменении характеристических скоростей и наличии источника в правой части. Поэтому при дальнейшей численной реализации системы (26) схемами годуновского типа методы аппроксимации останутся теми же самыми, что и при решении уравнений в неподвижной системе координат.

4.2 Граничные условия

Граничные условия на внешней свободной границе во вращающейся области формулируются аналогично пп. 3.3 с тем отличием, что вектор абсолютной скорости на внешней границе поворачивается в направлении, противоположном направлению вращения области, и определяется как

$$\mathbf{U}_0^R = \mathbf{U}_0 + \left(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{U}_0\right)\sin\Psi + \left(\left(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{U}_0\right) \times \mathbf{e}_\omega\right)\left(\cos\Psi - 1\right), \tag{27}$$

где $\mathbf{e}_\omega = -\boldsymbol{\omega}/\left|\boldsymbol{\omega}\right|$ — единичный вектор, относительно которого происходит вращение, $\Psi = \left|\boldsymbol{\omega}\right| t$ — угол поворота.

Для определения значений скалярных физических переменных на внешней границе справедливы выражения (3)—(4), приведенные пп. 3.3 для задания значений газодинамических величин на внешней свободной границе.

Рассмотрим подробнее постановку граничного условия непротекания на твердых поверхностях при использовании вращающейся системы координат на примере модельной геометрической конфигурации, сектор которой изображен на рис. 2. Поверхности “2” (лопасть) и “1” (поверхность «втулки» или «центрального тела») представляют собой вращающиеся поверхности, а поверхность “3” («кольцо») — неподвижна в абсолютной системе координат.

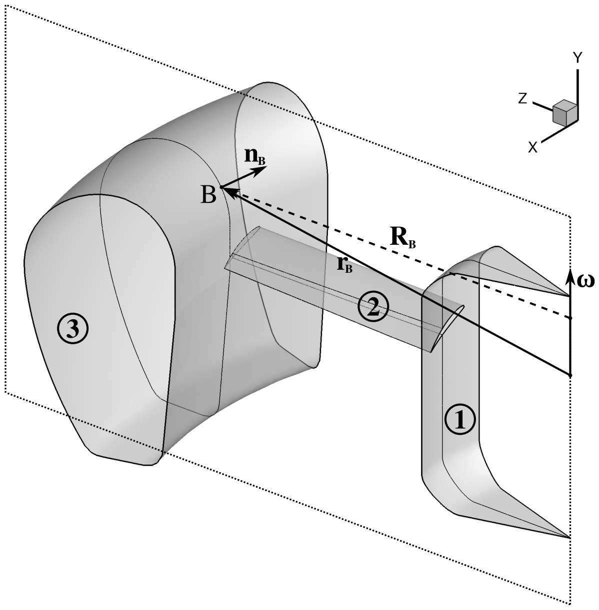


Рис. 2. Модельная геометрическая конфигурация с подвижными и неподвижными поверхностями

На вращающихся твердых поверхностях (поверхности 1 и 2, рис. 2) задаются условия непротекания:

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_B = (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_B = 0, \tag{28}$$

где $\mathbf{n}_B$ — единичная нормаль к поверхности.

Будем предполагать, что неподвижная поверхность является поверхностью вращения вокруг оси, задаваемой вектором $\boldsymbol{\omega}$. Определим граничные условия на неподвижной поверхности 3 с учетом того, что сеточное значение абсолютной скорости на кольце должно изменяться при вращении. В подвижной неинерциальной системе координат, связанной с лопастью, кольцо вращается вокруг оси около неподвижной лопасти с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$. Пусть на момент времени t_0 вектор скорости на кольце задан значением $\mathbf{u}_0$, тогда условие непротекания в абсолютной неподвижной системе координат запишется в виде

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_{B0} = 0, \tag{29}$$

где $\mathbf{n}_{B0}$ — единичная нормаль к поверхности в точке B_0, в которой задана скорость $\mathbf{u}_0$. Найдем вектор абсолютной скорости $\mathbf{u}$ на кольце в произвольный момент времени t. Для этого решим начальную задачу для следующей системы:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}\left(t_0\right) = \mathbf{u}_0.$$

Решение это задачи есть вектор[2]

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \sin\Psi + ((\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \times \mathbf{e}_\omega)(\cos\Psi - 1), \\
&\mathbf{e}_\omega = \frac{\omega}{|\boldsymbol{\omega}|}, \quad \Psi = |\boldsymbol{\omega}|\, t.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Заметим, что, так как неподвижная поверхность кольца представляет собой поверхность вращения, нормаль в любой точки B поверхности кольца лежит в плоскости вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и радиус-вектора $\mathbf{R}_B$ (см. рис. 2). Следовательно,

$$
\mathbf{n}_B = \alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\mathbf{R}_B \text{ и } (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_B) \cdot \mathbf{R}_B = 0. \tag{31}
$$

Аналогично для точки B_0 с радиус-вектором $\mathbf{R}_{B0}$, полученной из точки B поворотом вокруг оси определяемой вектором $\boldsymbol{\omega}$, справедливо

$$
\mathbf{n}_{B0} = \alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\mathbf{R}_{B0}.
$$

Домножим обе части первого равенства в (30) на нормаль $\mathbf{n}_B$ и получим следующее соотношение:

$$
\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_B = \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}_B + \beta\,(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{R}_B \sin\Psi + \beta\,((\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{u}_0) \times \mathbf{e}_\omega)\cdot\mathbf{R}_B\,(\cos\Psi - 1). \tag{32}
$$

Если в физической постановке задачи направление вектора угловой скорости совпадает с положительным направлением оси z, то есть $\mathbf{e}_\omega = (0,0,1)^T$, то легко получить соотношение между векторами $\mathbf{R}_B$ и $\mathbf{R}_{B0}$ и упростить вид равенства (30). Так, вектор $\mathbf{R}_{B0}$ можно определить как

$$
\mathbf{R}_B = \begin{pmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi & 0 \\ \sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_{B0},
$$

и после несложных преобразований равенство (32) запишется в виде

$$
\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_B = \mathbf{u}_0\cdot(\alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\mathbf{R}_{B0}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{B0}
$$

или с учётом (29)

$$
\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\mathbf{B} = 0.
$$

Таким образом, условие равенства нулю нормальной скорости инвариантно относительно поворота скорости. Следовательно, во вращающейся неинерциальной системе координат, связанной с лопастью, на кольце выполняются

[2]Обратим внимание, что полученное решение аналогично формуле (27), определяющей поворот вектора относительно оси вращения, задающейся единичным вектором $\mathbf{e}_\omega$.

условия непротекания. А если еще принять во внимание соотношения (31), то имеем следующую цепочку равенств

$$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_B + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_B = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}_B.$$

Отсюда следует, что граничное условие непротекания на неподвижной поверхности вращения идентично условию (28) для вращающихся поверхностей.

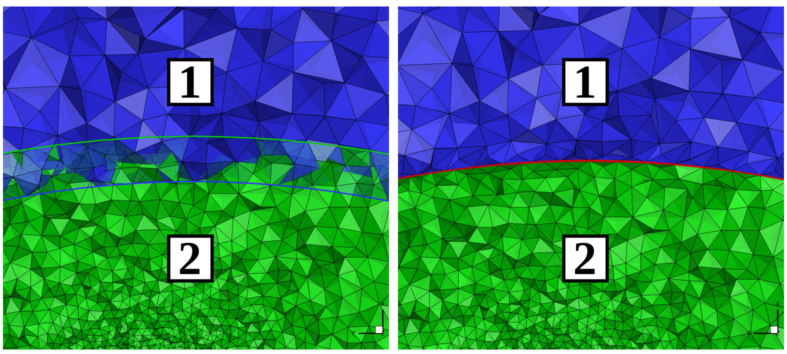
5 Области определения моделей в ближнем поле

5.1 Сопряжение вращающейся и невращающейся областей

При использовании в смежных зонах ближнего поля моделей в различных системах координат возникает проблема сопряжения этих областей. Существует два способа решения этой проблемы: методы на основе перекрывающихся или скользящих областей.

В первом подходе предполагается, что области определения задач в смежных областях перекрываются (см. рис. 3а). В этом случае в процессе расчета необходимо организовать корректный обмен данными на перекрываемых участках. При численной реализации такого подхода речь идет об интерполяции значений моделируемых физических величин с сетки, покрывающей одну область, на сетку в другой области. Такая технология известна под названием «химера», применительно к моделированию течения вокруг винта вертолета она использована, например, в работах [7–9].

Второй подход не предполагает пересечения областей определения моделей в неподвижной и вращающейся области, и интерфейс между двумя областями определяется только границей, а в случае численной реализации — граничными элементами сетки (см. рис. 3б). Для моделирования течения вокруг винта вертолета такой подход использовался, например, в работах [15–17].



(а) *(б)*

Рис. 3. Сопряжение областей: пересекающееся сетки (а) и скользящий интерфейс (б)

Следует отметить, что при численной реализации обоих подходов ключевыми проблемами является обеспечение локальной консервативности (т.е. консервативности для сеточных контрольных объемов) и сохранение точности того или иного численного алгоритма в приграничных областях. Пути решения указанных проблем при использовании скользящих сеток рассматриваются, например, в работе [17] при построении численного алгоритма на основе объемно-центрированных схем, использующих квазиодномерную реконструкцию переменных.

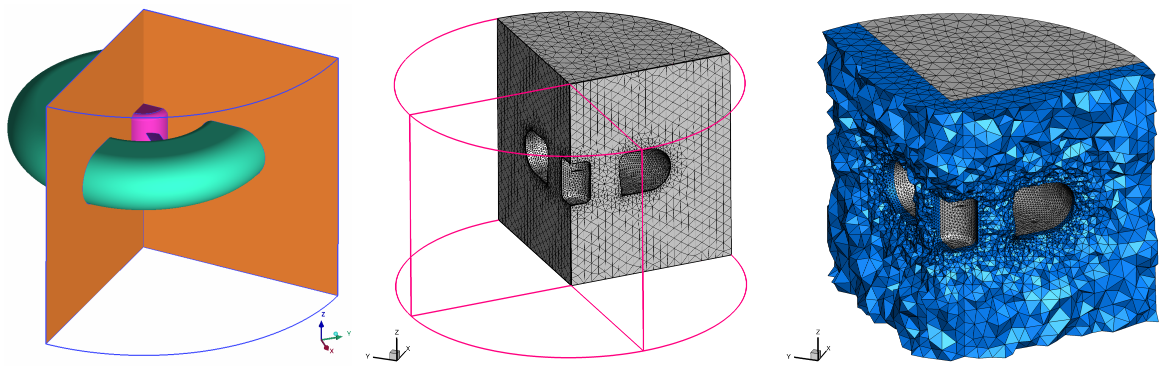
5.2 Определение задачи в секторе при осевом обтекании

Отдельно стоит выделить моделирование винта вертолета в режиме осевого обтекания, когда проекции составляющих скорости внешнего потока (скорости полета вертолета) на плоскость вращения винта равна нулю, и течение в области моделирования обусловлено исключительно потоком воздуха, индуцированного винтом и, возможно, вертикальным движением (вертикальным снижением или набором высоты) вертолета.

В этом случае, если выполняются следующие три условия:

1) невращающиеся поверхности в моделируемой конфигурации винта являются телами вращения с осью, совпадающей с осью вращения винта;
2) лопасти винта идентичны и установлены под одним углом;
3) лопасти винта расположены в одной плоскости, ортогональной оси вращения винта,

возможно рассмотрение не полной конфигурации, а лишь одного сектора с одной лопастью (см. рис. 4).



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 4. Построение сектора с лопастью: полная конфигурация (а), расчетная сетка в секторе с лопастью (б), расчетная сетка с достроенным периодическим замыканием (в)

Описание задачи в секторе требует реализации дополнительных граничных условий, а именно периодических условий на азимутальных границах сектора, заключающихся в топологическом замыкании сетки на двух азимутальных плоскостях сектора.

При численной реализации такое замыкание строится следующим образом: из исходной геометрической конфигурации выделяется сектор с одной лопастью (см. рис. 4а) и в нем строится расчетная сетка таким образом, чтобы узлы на двух азимутальных плоскостях сектора совпадали с точностью до поворота на угол раствора этого сектора (см. рис. 4б). Далее для «совпадающих» узлов на этих плоскостях строится соответствие образ–прообраз, то есть происходит топологическое замыкание границ сектора. При этом для связанных узлов достраиваются на необходимую глубину топологические связи между этими узлами. На рис. 4в условно изображено такое замыкание – синим цветом выделена зона достроенных топологических связей образ–прообраз.

Такой подход позволяет существенно сократить вычислительную трудоемкость задачи, а реализация периодических условий позволяет вести сквозной счет и практически не влияет на общее время счета.

6 Аэродинамические характеристики

Основными параметрами, характеризующими аэродинамические свойства винта, являются аэродинамических силы – тяга, крутящий момент и их коэффициенты.

Аэродинамические характеристики винта вертолета оцениваются на основе данных в ближнем поле течения. Значения силы тяги T и крутящего момента M_z вычисляются на основе распределения давления по поверхности лопасти S, полученного в результате расчета по следующим формулам:

$$T = NT_z^{blade} = N \int\limits_S p n_z ds, \quad M_z = N \int\limits_S p(x n_y - y n_x) ds, \tag{33}$$

где $p(x, y, z)$ – распределение давления по поверхности S лопасти, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – вектор единичной нормали внешней к поверхности S, N – число лопастей, а ρ_0 — плотность невозмущённого воздуха.

Безразмерные коэффициенты силы тяги c_T и крутящего момента m_K, в свою очередь, определяются по формулам

$$c_T = \frac{2T}{\rho_0 A (\omega R)^2}, \quad m_K = \frac{2M_K}{\rho_0 R A (\omega R)^2}, \tag{34}$$

где $A = \pi R^2$ – площадь диска винта, R – радиус винта, а ω – модуль угловой скорости лопасти.

В случае проведения расчета в секторе в присутствии невращающихся конструкций предварительно проводится процедура осреднения поля двления по азимутальному углу (подробнее см. [18]).

Таким образом, распределение давления на твердой поверхности, полученное в результате расчета, позволяет в соответствии с формулами (33) и (34) вычислить в произвольный момент времени размерные силы, действующие на лопасти и винт, а также их коэффициенты.

7 Модели для описания шума в дальнем поле

Описанные выше в пп. 3–5 модели и подходы позволяют проводить моделирование течения около вертолета и, таким образом, получать пространственно-временное распределение газодинамических переменных в ближнем поле. С точки зрения акустики, сложные нестационарные газодинамические процессы в ближнем поле течения можно интерпретировать как распределённый акустический источник, ответственный за генерацию шума в дальнем поле (области **1** и **2** на рис. 1). Для моделирования акустических возмущений в дальнем поле (область **3** на рис. 1) применяются модели на основе волнового уравнения, решение которого может быть представлено в виде пространственно-временного интеграла. При этом аналитически решается внешняя краевая задача в неограниченной области, краевые условия которой ставятся на некоторой, окружающей акустический источник, поверхности. Такая поверхность, называемая *контрольной*, располагается внутри ближнего поля течения.

Применительно к задачам моделирования акустических характеристик винта вертолета, предлагается использовать методику – так называемую "формулировку «1A»" Фарассата [19] для уравнения Фокса Уилльямса–Хокингса (Ffowcs Williams–Hawkings — FWH). Формулировка «1A» допускает использование контрольной поверхности произвольной формы. Однако при этом предполагается, что скорость движения точек контрольной поверхности меньше скорости звука. В противном случае, при переходе через скорость звука в интегральной формуле появляется особенность, что делает данный метод неприменимым для определения пульсаций в дальнем поле. Это затрудняет применение метода FWH для вращающегося винта, так как при «погружении» контрольной поверхности в область вращения винта (зона **2**) на небольшом удалении от законцовок лопастей относительно неподвижной системы координат она вращается со скоростью, превышающую концевую скорость лопасти, и, вообще говоря, может быть выше скорости звука. Существуют решения этой проблемы, предложенные в [20] и [21], позволяющие работать с трансзвуковым движением точек контрольной поверхности, но реализация их достаточно сложна и влечет за собой дополнительные вычислительные затраты.

В работе [22] предложено альтернативное простое в реализации решение. Оно заключается во введении модификации в исходную формулировку Фарассата «1A». Считая, что контрольная поверхность является поверхностью вращения с осью, совпадающей с осью вращения винта, разделяется движение точек контрольной поверхности относительно фонового потока на поступательное и вращательное. При этом параметризация контрольной поверхности происходит не во вращающейся системе координат, связанной с винтом, а в инерциальной системе, связанной с фюзеляжем вертолета.

То, что контрольная поверхность является поверхностью вращения, обеспечивает сохранность ее формы и, при использовании равномерной сетки в сферических координатах, позволяет легко интерполировать значения и вычислять производную по углу в любой точке поверхности. В результате задача сводится к вычислению поверхностного интеграла с запаздыванием, на контрольной поверхности, поступательно движущейся относительно фонового потока.

В соответствии с этим подходом пульсации давления в точке $\mathbf{R}$ в момент времени T вычисляются по интегральной формуле

$$\begin{gathered}
p'\left(\mathbf{R},T\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\Psi(\mathbf{r},t^*(\mathbf{r}))ds=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\left[\frac{1}{\Xi^2 r}\left(\frac{\partial U}{\partial t}-\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}\right)_r\right)+\right.\\
\left.+\left(\frac{M_r-M^2}{\Xi^3 r^2}+\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right)_r\right)(U-L_r)-\frac{L_r-(\mathbf{L}\cdot\mathbf{M})}{\Xi^2 r^2}\right]_{t=t^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{R},T),\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_0,\mathbf{R},T)} ds\,.
\end{gathered} \tag{35}$$

Здесь интегрирование производится по поверхности S, параметризуемой в каждый момент времени вектором $\mathbf{r}_0$, пробегающим поверхность S_0. Мировая линия, по которой движется точка $\mathbf{r}_0$ в абсолютной системе координат, с учетом того что *точка движется поступательно и равномерно*, описывается как $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0-\mathbf{M}t$, где $\mathbf{M}$ — отношение вектора скорости фонового потока к фоновой скорости звука. Момент времени t^*, в который излучающая точка $\mathbf{r}_0$ поверхности S_0 внесёт вклад в поле в точке $\mathbf{R}$ в момент времени T, определятся как время запаздывания $t^*=T-\tau(\mathbf{R}-\mathbf{r})$, где

$$\tau\left(\mathbf{x}\right)=\frac{\sqrt{\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{M}\right)^2+\left(1-M^2\right)\mathbf{x}^2}-\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{M}\right)}{c(1-M^2)}\ ,\quad M=|\mathbf{M}|.$$

Радиус эмиссии при поступательном движении контрольной поверхности определяется как $\mathbf{r}_e=\mathbf{R}-(\mathbf{r}_0+\mathbf{M}\tau(\mathbf{r}_0))$, компоненты вектора $\mathbf{L}$ определяются как $L_i=\left(p\delta_{ij}+\rho u_i(u_j+M_j)\right)n_j$, член U имеет вид $U=\left(\rho u_i+\rho' M_i\right)n_i$, где $\mathbf{n}$ – единичная трехмерная нормаль к поверхности, а $\mathbf{u}$ – скорость газа относительно фонового потока. Проекции на направление вектора эмиссии векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ обозначаются как M_r и L_r соответственно, а допплеровский множитель определяется соотношением $\Xi=1-M_r$.

Интегральную формулу (35) можно интерпретировать как представление поля в точке наблюдения в виде суперпозиции полей, излучаемых точками контрольной поверхности.

8 Акустические характеристики

Полученные в процессе расчета значения пульсаций давления по времени позволяют определить акустические характеристики как в ближнем, так и в дальнем поле.

Наиболее важными характеристиками с точки зрения разработчиков летательных аппаратов являются зависимость общего уровня звукового давления (Overall Sound Pressure Level – OASPL) от направления на точку наблюдения, и спектральный состав акустического сигнала в точках наблюдения.

Пульсации давления $p'(\mathbf{R}, t)$ в точке наблюдения $\mathbf{R}$, на основе которых производится последующий анализ сигнала, могут быть получены двумя способами.

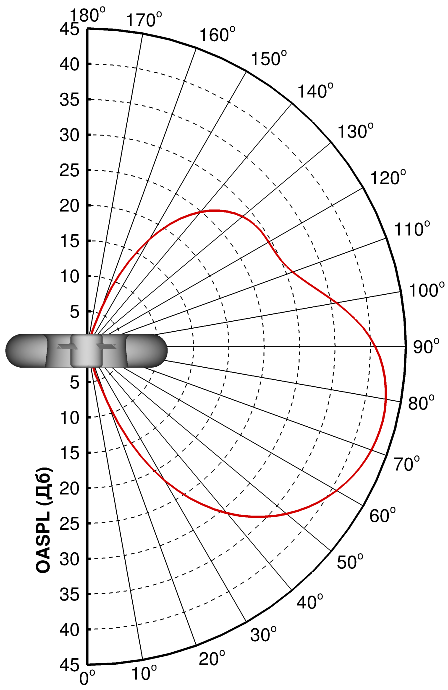


Рис. 5. Пример диаграммы направленности общего уровня звукового давления

Первый способ применим, если точка наблюдения находится в расчетной области ближнего поля (области **1** и **2**, рис. 1). В данном случае сеточное разрешение в области распространения акустического сигнала от источника до точки наблюдения должно соответствовать исследуемому частотному диапазону, что не всегда может быть осуществимо.

Второй способ предполагает использование интегрального метода FWH (см. пп. 7), при этом акустический сигнал в точках наблюдения будет получен в результате обработки данных на контрольных поверхностях на этапе постобработки, после проведения расчета.

Полученный как в ближнем, так и в дальнем полях акустический сигнал подвергается дальнейшему анализу для получения интересующих акустических характеристик. Одной из наиболее репрезентативных акустических характеристик является общий уровень пульсаций давления, который определяется по следующей формуле:

$$OASPL(\mathbf{R}) = 10 \log \left(\left\langle p'(\mathbf{R})^2 \right\rangle / p_0^2 \right),$$

где $p_0 = 2 \times 10^{-5}$ Па – минимальный порог слышимости звука.

С точки зрения инженерных разработок, наиболее полезным представлением о картине общего уровня звукового давления является азимутальная диаграмма направленности – график в полярных координатах, на котором отражена зависимость общего уровня звукового давления в некоторой плоскости для некоторого диапазона значений азимутального угла (как правило, в плоскости, проходящей через ось вращения винта значений азимутального угла от 0 до π или до 2π). В качестве примера на рис. 5 приведен вид диаграммы направленности общего уровня звукового давления для конфигурации «винт в кольце».

Спектральные характеристики сигналов, которые также представляют интерес с инженерной точки зрения, могут быть получены с помощью методов, основанных на дискретном преобразовании Фурье (см. [23]).

9 Матрица моделей

9.1 Режимы эксплуатации несущего винта вертолета

Вид и характеристики течения около НВ вертолета существенно зависят от режима полета вертолета. Среди штатных режимов полета вертолета можно выделить [24]:

- режим висения – режим полета, при котором равны нулю как горизонтальная, так и вертикальные составляющие скорости[3];
- режим вертикального полета – режим полета, при котором равна нулю горизонтальная составляющая скорости, а вертикальная составляющая скорости положительна (режим вертикального набора высоты) или отрицательна (режим вертикального снижения);
- крейсерский режим полета – режим полета при котором все составляющие скорости отличны от нуля и динамически изменяются.

Для каждого из вышеупомянутых режимов полета течение вокруг НВ вертолета имеет специфические особенности, влияющие как на аэродинамику НВ, так и на его акустические характеристики.

Выделим три основных режима эксплуатации НВ вертолета: набор высоты и медленное вертикальное снижение (I), снижение (II) и крейсерский режим полета (III). Для первых двух режимов характерно наличие осевого обтекания с нулевыми компонентами горизонтальной скорости. При этом угол установки лопасти в таком режиме зафиксирован, и, как следствие, отсутствует динамическое изменение углов взмаха, качания и установки, а также необходимость в компенсации неосевых составляющих подъемной силы при разных азимутальных положениях лопастей (при этом предполагается, что лопасти идентичны), а аэродинамические характеристики не зависят от времени и азимутального положения лопастей. Существенное отличие первого режима от других заключается в минимальном взаимодействии вихревых структур (концевых вихрей и турбулентной «вихревой пелены») с лопастями в силу высокой скорости потока, индуцированной вращением винта и внешним потоком, достаточной для сноса концевых и мелкомасштабных вихревых структур вниз по потоку.

[3] Под вертикальной скоростью здесь понимается проекция вектора скорости внешнего невозмущенного потока на ось вращения винта.

9.2 Матрица моделей для оценки характеристик несущего винта вертолета

При проведении промышленно-ориентированных расчетов для оценки характеристик винта вертолета необходимо оптимальным образом выбрать модель, подходящую для описания течения в ближнем поле и сформулировать постановку численной задачи. Выбор модели принципиальным образом зависит от режима работы винта и от того, оценка каких характеристик является целью численного исследования. Под «оптимальностью» выбора понимается минимизация ресурсов (и, как следствие, длительности вычислительного эксперимента), необходимых для получения оценок требуемых характеристик с необходимой точностью.

Как было упомянуто выше, для описания течения вокруг винта вертолёта в ближнем поле на основе уравнений Навье–Стокса существует достаточно много математических моделей. Большое количество моделей и их разнообразие вызвано тем обстоятельством, что при численном решении задач, ориентированных на авиационную и аэрокосмическую промышленность, мощности современных вычислительных систем (и даже суперкомпьютеров обозримого будущего) недостаточно для обеспечения столь высокого пространственно-временного разрешения турбулентных структур течения, которое бы позволило проводить прямое численное моделирование путём решения уравнений Навье–Стокса. Поэтому в качестве альтернативы численному воспроизведению мгновенных газодинамических параметров течения стали развиваться вычислительно менее затратные подходы моделирования статистических характеристик этих параметров либо нестационарных величин, полученных в результате их пространственно-временной фильтрации. Эти подходы в той или иной степени используют эмпирические знания о природе течения, требуемые для корректного замыкания получаемых систем. Речь идет о таких подходах, как RANS, LES, а также гибридных RANS-LES методах, в рамках которых было предложено множество математических моделей.

В настоящее время для инженерных приложений в авиационной промышленности наиболее эффективными признаны гибридные RANS-LES модели. Среди них применительно к моделированию характеристик винта вертолёта, рассматриваемому в настоящей работе, предпочтение отдаётся моделям семейства DES. Безусловно, DES подход даёт наиболее точные оценки аэродинамических и акустических характеристик винта для всех режимов его эксплуатации. Однако с точки зрения проведения промышленных расчётов с целью проектирования реальных конструкций массовое DES-моделирование всё еще остаётся нереализуемым из-за его высокой вычислительной стоимости. Поэтому для активного внедрения вычислительного эксперимента в инженерные разработки важно рассмотрение возможности использования менее дорогих моделей, указание диапазонов их применимости, а также случаев, когда их применение некорректно.

Рассмотрим сначала возможность снижения ресурсоемкости расчетов за счет выбора более дешевых с вычислительной точки зрения моделей для оценки аэродинамических характеристик. В режиме набора высоты и медленного вертикального снижения для расчета аэродинамических характеристик в большинстве случаев достаточно использовать уравнения RANS. Более того, так как для определения тяги достаточно знать только нормальные составляющие действующих на лопасть сил, то, чтобы получить её вполне приемлемую оценку, можно применять модель без учета вязкости, а именно уравнения Эйлера. В то же время оценка крутящих моментов, зависящих от продольных составляющих сил, требует учета вязких эффектов и может быть осуществлена на основе подхода RANS. В обоих случаях в режиме набора высоты и медленного снижения вблизи винта формируется осесимметричное течение, а потому можно проводить расчеты по оценке всех аэродинамических характеристик в секторе, включающем одиночную лопасть, с периодическими граничными условиями (см. пп. 5.2). Возможность использования сектора отражается значением поля «сектор» в таблице 1.

Для общего режима снижения с заметной вертикальной скоростью существенным физическим фактором может быть наличие взаимодействия концевых вихрей с лопастями винта. Приемлемую точность в оценке аэродинамических характеристик дает та или иная модель RANS. Однако взаимодействие концевых вихрей с лопастями может приводить к сложной вихревой картине с разномасштабными структурами, для корректного описания которой может понадобиться «дорогая» модель DES. Тем не менее, в силу осевого характера обтекания в режиме снижения, техника моделирования одиночного сектора с лопастью также применима.

Для крейсерского режима полета характерно наличие взаимодействия вихревых структур, формируемых за обтекаемыми препятствиями, с лопастями винта. Так же как и в предыдущем случае, аэродинамические характеристики можно оценивать с помощью уравнений RANS, однако подход DES здесь также предпочтителен. При крейсерском режиме из-за наличия ненулевых проекций скорости внешнего потока на плоскость вращения винта моделирование сектора с одной лопастью, с очевидностью, некорректно. Поэтому для такого эксплуатационного режима необходимо рассмотрение полной конфигурации винта.

С точки зрения оценки акустических характеристик винта зона ближнего поля представляет собой распределенный акустический источник. Поэтому возможность воспроизведения в численном эксперименте шума того или иного состава напрямую зависит от выбора модели для описания тех или иных газоди-

Режим	Характеристики	«сектор»	Модели ближнего поля
Висение, вертикальный набор высоты, медленное снижение[4]	Тяга	$+$	EE
	Крутящий момент	$+$	RANS
	Тональный шум	$+$	EE/RANS
	Широкополосный шум[5]	$+$	DES
Снижение	Тяга	$+$	EE
	Крутящий момент	$+$	RANS/DES
	Тональный шум	$+$	EE/RANS
	Широкополосный шум	$\pm$	DES
Крейсерский полет	Тяга	$-$	EE
	Крутящий момент	$-$	RANS/DES
	Тональный шум	$-$	EE/RANS
	Широкополосный шум	$-$	DES

Таблица 1. Матрица моделей

намических процессов в источнике, т.е. в ближнем поле. Так, для моделирования источника тонального шума вытеснения и нагружения могут вполне подойти не учитывающие вязкие эффекты уравнения Эйлера. Однако более точное предсказание мощности акустического излучения для тонального шума дадут все же уравнения RANS. При этом на режимах висения и вертикального набора высоты можно проводить расчет акустического источника тонального шума только в одном секторе. Для крейсерского режима такой подход невозможен.

Для моделирования источников всего производимого винтом шума, включая широкополосную составляющую, необходимо качественное описание разномасштабных турбулентных структур и процессов их взаимодействия с течением и лопастями винта, что могут дать только вихреразрешающие подходы и, в частности, модели семейства DES. С этой точки зрения, расчет акустических характеристик винта вертолета для полного состава шума требует наибольших вычислительных затрат для всех эксплуатационных режимов. Более того, моделирование широкополосного шума винта предпочтительно проводить для полной его конфигурации, так как «секторальный» подход может дать искажения акустических характеристик. Однозначно расчет для одного сектора не подходит для крейсерского режима.

Рассмотрим более подробно причины возможного искажения акустических характеристик при моделировании широкополосного шума в секторе с одной лопастью. На режиме висения и вертикального снижения такой подход да-

[4]«Медленным снижением» здесь называется такой режим вертикального снижения, при котором взаимодействие вихревых структур с последующими лопастями минимально.

[5]Широкополосный шум здесь включает пульсации всего спектра частот, т.е. включает и тональный шум.

ет достаточно точные оценки акустического излучения в ближнем поле течения. Однако при использовании техники сектора и метода FWH для дальнего поля полные данные на контрольной поверхности получаются путем дублирования и поворота фрагмента контрольной поверхности рассматриваемого сектора. Как следствие, расчёт пульсаций давления в точке дальнего поля путем пространственно-временного интегрирования по контрольной поверхности можно трактовать как влияние N скореллированных источников (N – число лопастей). При этом эффект этой искусственной корреляции наиболее заметен при оценке акустических пульсаций в областях, находящихся вблизи оси вращения винта, и проявляется в виде завышения уровня звукового давления в этих областях. Подобные искажения в оценках акустических характеристик также можно устранять искусственным образом. Однако для более аккуратного моделирования следует рассматривать полную, многолопастную, конфигурацию винта.

10 Заключение

В работе представлен многомодельный подход для оценки аэродинамических и акустических характеристик винта вертолёта. Спецификой задач по моделированию течения вокруг вертолета и, в частности, вертолетного винта как ключевого элемента конструкции, влияющего на аэродинамику и акустику летательного аппарата в целом, является то, что в разных зонах определения задачи могут использоваться разные математические модели. Отчасти это происходит потому, что в зонах ближнего поля с неизбежностью находятся вращающиеся друг относительно друга элементы. И ещё потому, например, что акустика в дальнем поле не нуждается в столь полном газодинамическом описании, которое требуется для корректного воспроизведения течения вблизи вертолета.

Если существуют различные математические модели, приемлемые для описания той или иной задачи, встаёт вопрос о выборе лучшей для каждой из рассматриваемых подобластей, а также о согласовании моделей в зонах их интерфейсов. Данная работа даёт ответы на поставленные вопросы применительно к задачам по определению характеристик винта. Так, в ней подробно рассмотрены математические модели, которые могут быть использованы для описания течения вблизи вертолета. Для конкретной же промышленно-ориентированной задачи по оценке характеристик винта, требующей ответа в максимально сжатые сроки, оптимальный выбор модели в ближнем поле течения и корректная вычислительная постановка делаются в зависимости от исследуемого режима эксплуатации винта вертолета и целей численного исследования. Под целями исследования понимается, например, интересуют ли разработчика акустические характеристики, или только аэродинамические; критичен ли в акустических характеристиках учет широкополосной составляющей шума или нет. В работе строится итоговая матрица моделей, позволяющая выбрать оптимальный набор моделей для оценки аэродинамических и акустических характеристик винта вертолета с необходимой точностью для всего диапазона эксплуатационных режимов.

Следует отметить, что представленная в работе матрица моделей может корректироваться и эволюционировать в сторону усложнения газодинамического описания и соответствующего повышения точности численных оценок вместе с развитием высокопроизводительных вычислительных систем.

Модели и подходы, описанные в работе, были успешно применены для моделирования аэродинамических и акустических характеристик различных конфигураций винтов вертолета. Так, были получены оценки характеристик рулевого винта КБ «Камов» типа «винт–в–кольце» [18], а также модельных несущих винтов ПСВ КБ «Камов» и LL-24 ЦАГИ.

Список литературы

1. Теория несущего винта / В. Э. Баскин, Л. С. Вильдгрубе, Е. С. Вождаев, Г. И. Майкапар. — Москва : Машиностроение, 1973.
2. *Ван Ши-цунь.* Обобщенная вихревая теория несущего винта вертолета // Труды Московского авиционного института. — Москва, 1961. — Вып. 142. — С. 82.
3. *Аникин В. А.* К теории индукции несущего винта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 1982. — № 5.
4. *Spalart P. R., Allmaras S. R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings. — 1992. — DOI: `10.2514/6.1992-439`.
5. Современные подходы к моделированию турбулентности / А. В. Гарбарук, М. Х. Стрелец, А. К. Травин, М. Л. Шур. — Санкт-Петербург : Издательство Политехническое университета, 2016. — С. 234.
6. Comments on the Feasibility of LES for Wings and on the Hybrid RANS/LES Approach / P. R. Spalart, W.-H. Jou, M. Stretlets, S. R. Allmaras // Advances in DNS/LES, Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES / под ред. C. Liu, Z. Liu. — Greyden Press, 1997. — С. 137–147.
7. Navier–Stokes computations of a complete helicopter configuration accounting for main and tail rotor effects / T. Renaud, C. Benoit, J.-C. Boniface, P. Gardarein // Twenty-ninth European Rotorcraft Forum, Friedrichshafen, Germany, September. — 2003.
8. *Potsdam M., Yeo W., Johnson W.* Rotor airloads prediction using loose aerodynamic/structural coupling // Journal of Aircraft. — 2006. — Т. 43, № 3. — С. 732–742.
9. Investigations of Aerodynamic Performance of Bell 412 Helicopter in Real-Time Hover Flight Conditions / H. Xu, S. Zhang, N. Ball, A. Gubbels // Proceedings of 33rd European Rotorcraft Forum. Т. 1. — Curran Associates, Inc., 2007. — С. 643–676.
10. *Peskin C. S.* Flow patterns around heart valves: A numerical method // J. Comput. Phys. — 1972. — Т. 10, № 2. — С. 252–271. — DOI: `https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4`.
11. *Mittal R., Iaccarino G.* Immersed Boundary Methods // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 37, № 1. — С. 239–261. — DOI: `10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743`.
12. *Иродов И. Е.* Основные законы механики. — 3-е изд. — Москва : Высшая школа, 1983. — С. 248.

13. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. — 7-е изд. — Москва : Дрофа, 2003. — С. 840.

14. *Pomin H., Wagner S.* Navier-Stokes analysis of helicopter rotor aerodynamics in hover and forward flight // Journal of Aircraft. — 2002. — Т. 39, № 5. — С. 813–821.

15. *Steijl R., Barakos G., Badcock K.* A framework for CFD analysis of helicopter rotors in hover and forward flight // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2006. — Т. 51, № 8. — С. 819–847.

16. *Steijl R., Barakos G.* Sliding mesh algorithm for CFD analysis of helicopter rotor–fuselage aerodynamics // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2008. — Т. 58, вып. 5. — С. 527–549.

17. *Бахвалов П. А., Бобков В. Г., Козубская Т. К.* Применение схем с квазиодномерной реконструкцией переменных для расчётов на неструктурированных скользящих сетках // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 8. — С. 13–32.

18. Численное исследование аэродинамических и акустических свойств винта в кольце / И. В. Абалакин, В. А. Аникин, П. А. Бахвалов, В. Г. Бобков, Т. К. Козубская // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2016. — № 3. — С. 130–145.

19. *Farassat F.* Derivation of Formulations 1 and 1A of Farassat: тех. отч. ; NASA. — Langley Research Center, Hampton, Virginia, март 2007. — TM-2007-214853.

20. *Farassat F., Myers M. K.* The Kirchhoff Formula for a Supersonically Moving Surface // CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference (16th AIAA Conference), Munich, Germany, June 12-15 (Munich, Germany). — 1995.

21. *Farassat F., Brentner K., Dunn M.* A study of supersonic surface sources — The Ffowcs Williams–Hawkings equation and the Kirchhoff formula // 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, France, June 2-4. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1998.

22. *Бахвалов П. А., Бобков В. Г., Козубская Т. К.* Технология расчёта акустических пульсаций в дальнем поле при расчёте во вращающейся системе координат // Матем. моделирование. — 2017. — Т. 29, № 7. — С. 94–108.

23. *Bendat J. S., Piersol A. G.* Random Data: Analysis and Measurement Procedures. — 4-е изд. — New York : John Wiley & Sons, 2010. — С. 640.

24. *Джонсон У.* Теория вертолета (в 2-х кингах). Т. 1. — Москва : Мир, 1983. — С. 502.

Оглавление

1 Введение 3
2 Особенности моделирования течения около вертолета 4
3 Модели для описания течения в ближнем поле 5
3.1 Модели на основе системы уравнений Навье–Стокса в неподвижной системе координат 5
3.2 Модели для описания турбулентных течений 8
3.3 Граничные условия 8
4 Моделирование течения во вращающихся областях 9
4.1 Система уравнений Навье–Стокса в неинерциальной вращающейся системе координат 9
4.2 Граничные условия 15
5 Области определения моделей в ближнем поле 18
5.1 Сопряжение вращающейся и невращающейся областей 18
5.2 Определение задачи в секторе при осевом обтекании 19
6 Аэродинамические характеристики 20
7 Модели для описания шума в дальнем поле 21
8 Акустические характеристики 23
9 Матрица моделей 24
9.1 Режимы эксплуатации несущего винта вертолета 24
9.2 Матрица моделей для оценки характеристик несущего винта вертолета 25
10 Заключение 28