ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Савенков Е.Б., Борисов В.Е.,
Критский Б.В.

Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Савенков Е.Б., Борисов В.Е., Критский Б.В. Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 42. 36 с. doi:10.20948/prepr-2018-42
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-42

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.Б. Савенков, В.Е. Борисов, Б.В. Критский

Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки

Москва, 2018

Е.Б. Савенков, В.Е. Борисов, Б.В. Критский. Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки

Аннотация. В работе рассмотрен алгоритм метода X-FEM, в котором для представления поверхности трещины используется метод проекции ближайшей точки. Описан алгоритм метода, его отличия от традиционных вариантов, использующих представление поверхности на основе метода множеств уровня, сформулированы преимущества предлагаемого варианта метода. Приведены результаты численных расчетов, демонстрирующих работоспособность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: МКЭ, X-FEM, метод проекции ближайшей точки.

E.B. Savenkov, V.E. Borisov, B.V. Kritsky. X-FEM algorithm with closest point projection fracture representation

Abstract. In this work we consider a variant of X-FEM method which uses representation of fracture surface based on closest point projection method. The algorithm description is provided and its differences from the classical variants of X-FEM which utilize fracture representation based on level set approach. Simulation results which demonstrate efficiency of the proposed approach are presented.

Key words and phrases: FEM, X-FEM, closest point projection method.

Содержание

1 Введение **3**

2 Метод проекции ближайшей точки **5**

3 Постановка задачи теории упругости **13**

4 Конечномерные аппроксимации и метод X-FEM **14**

5 Особенности реализации метода X-FEM/CPP **21**

6 Примеры расчетов **22**

7 Заключение **34**

1 Введение

В настоящее время «расширенный» метод конечных элементов (eXtended Finite Elements Method, X-FEM) является одним из эффективных способов решения задач, содержащих разрывы того или иного рода, отнесенные к внутренним границам расчетной области. Метод был предложен в работах [Belytschko1999,Moes1999] для решения задач теории упругости при наличии крупномасштабных трещин и в настоящее время активно развивается (в том числе для других классов задач, см., например, [Fries2010,Fries2011]). Отличительными особенностями метода, обеспечивающими его эффективность, являются:

- возможность расчета задач в случае произвольной геометрии трещины (точнее, когда срединная поверхность трещины является произвольной достаточно гладкой поверхностью с краем и не согласована с геометрией расчетной сетки);
- возможность точного учета в конечномерном решении аналитических сингулярных асимптотик в окрестности фронта (в двумерном случае – кончика) трещины.

Метод основан на дополнении стандартного конечно-элементного базиса специальными дополнительными базисными функциями и соответствующими степенями свободы численного решения, которые позволяют корректно представить в конечномерном решении разрывные на срединной поверхности трещины поля перемещений, напряжений и деформаций. Подробное описание метода для решения задач теории упругости приведено в работах [Moes2002, Gravouil2002].

Одним из ключевых компонентов метода X-FEM является способ представления поверхности трещины в конечномерной задаче, который должен обеспечивать удобство вычисления всех необходимых для реализации метода величин (например, матрицы жесткости задачи). В современных вариантах метода для этого чаще всего используется метод поверхностей уровня (level set method, [Sethian1999, Osher2002]), предложенный в контексте метода X-FEM в [Stolarska2001]. Популярность последнего подхода обусловлена прежде всего тем, что он дает удобные и эффективные средства для описания случая как фиксированной трещины, так и эволюции динамической трещины (см. [Moes2002,Gravouil2002]). Таким образом, связка «X-FEM+метод поверхностей уровня» является мощным вычислительным инструментом, позволяющим решать широкий класс задач теории трещин.

В соответствии с методом поверхностей уровня поверхность с краем, задающая срединную поверхность трещины, описывается парой определенных в пространстве скалярных функций $\varphi(\mathbf{x}, t)$, $\psi(\mathbf{x}, t)$ так, что

$$\mathcal{F}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \psi(\mathbf{x}, t) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

где t – время. Другими словами, в фиксированный момент времени t поверхность задается как часть поверхности уровня ноль функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, ограниченной изоповерхностью функции $\psi(\mathbf{x}, t)$. Для проведения расчетов удобно, чтобы функции φ, ψ являлись знаковыми расстояниями, определенными в некоторой небольшой окрестности Ω поверхности $\mathcal{F}$. При этом движение края поверхности задается полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, описывающим эволюцию функций φ, ψ. Для пересчета функций φ, ψ применяются уравнения типа Гамильтона–Якоби. Основным недостатком такого метода является сложность реализации: в частности, для описания эволюции поверхности требуется согласованное множественное решение уравнений типа Гамильтона–Якоби относительно функций φ и ψ с целью обеспечить, помимо непосредственно эволюции поверхности, сохранение ортогональности градиентов функций ϕ и ψ, свойств знаковых расстояний и так далее, см. работы [Stolarska2001, Moes2002, Gravouil2002].

В настоящей работе для описания геометрии поверхности предлагается использовать другой подход, основанный на методе проекции ближайшей точки. В контексте задач моделирования развития трещин он является таким же общим, как и метод поверхностей уровня, однако обладает рядом преимуществ в том случае, когда состояние среды (граничные условия) на боковых поверхностях («берегах») трещины само по себе определяется решением некоторых уравнений, дополнительных по отношению к уравнениям во вмещающей среде. В настоящее время метод проекции ближайшей точки является удобным средством построения вычислительных алгоритмов для решения уравнений на поверхностях произвольной формы (и, более того, на множествах, представляющих объединение многообразий различной пространственной размерности), см. работы [Ruuth2008, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009].

Альтернативный подход, отчасти близкий использованному в настоящей работе, описан в работе [Ventura2003]. В нем поверхность задается с помощью так называемых «векторных поверхностей уровня» («vector level sets»), представляющих собой пару функций, первая из которых является оператором проектирования точки на поверхность в смысле ближайшего расстояния, а вторая определяет ориентацию поверхности. Вместе с тем в описанном подходе применяется полигональное представление поверхности, которое используется для построения проекторов. В ходе эволюции поверхности сначала обновляется ее полигональное представление, которое затем используется для построения проекторов и функций уровня.

В отличие от этого подхода в настоящей работе не используется полигональное представление поверхности, а значения операторов проектирования в ходе ее эволюции вычисляются непосредственно. При этом сама поверхность и задающие ее поверхности уровня при необходимости могут быть восстановлены локально. В этом смысле предложенный в настоящей работе подход на основе метода проекции ближайшей точки («closest point projection», CPP) является более гибким и по своей сути близок к методам представления поверхности как «облака точек» («point cloud surfaces», см., например, [Berger2014]).

В работе представлены основные понятия метода проекции ближайшей точки и метода X-FEM. Указывается способ вычисления всех необходимых компонентов конечномерной задачи метода X-FEM при использовании метода проекции ближайшей точки, приводятся результаты тестовых расчетов. В силу того, что основной целью настоящей работы является описание интеграции метода X-FEM и метода проекции ближайшей точки, вопросы, связанные с эволюцией поверхности трещины (в том числе соответствующие алгоритмы метода) в настоящей работе не рассматриваются. Соответствующие алгоритмы описаны в [Иванов2016].

2 Метод проекции ближайшей точки

Рассмотрим основные понятия метода ближайшей точки. Его строгое математическое обоснование приведено в [Marz2012].

Пусть $\mathcal{F}$ – гладкая поверхность с краем, вложенная в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. Термин «гладкая» здесь и далее отражает тот факт, что множество $\mathcal{F}$ является образом гладкого отображения ограниченной замкнутой подобласти двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. При этом будем считать, что используемые отображения имеют любое требуемое число производных. Также положим, что поверхность $\mathcal{F}$ целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть для произвольной точки $\mathbf{x} \in \Omega$ $\mathbf{x}_{\text{cp}}$ является ближайшей к ней точкой на поверхности $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{x}_{\text{cp}} = \arg\min_{\mathbf{y}\in\mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Здесь и далее используются екввклидовы нормы.

Точку $\mathbf{x}_{\text{cp}}$ будем называть проекцией точки $\mathbf{x}$ на поверхность $\mathcal{F}$ в смысле наименьшего расстояния, а соответствующий оператор проектирования будем обозначать $\mathbf{P}$, $\mathbf{x}_{\text{cp}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$. Оператор $\mathbf{P}$ является векторнозначным; он отображает область Ω на поверхность $\mathcal{F}$, рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. В случае, когда поверхность и ее край являются гладкими, а область Ω – «достаточно маленькая», оператор $\mathbf{P}$ однозначно определен, т.е.

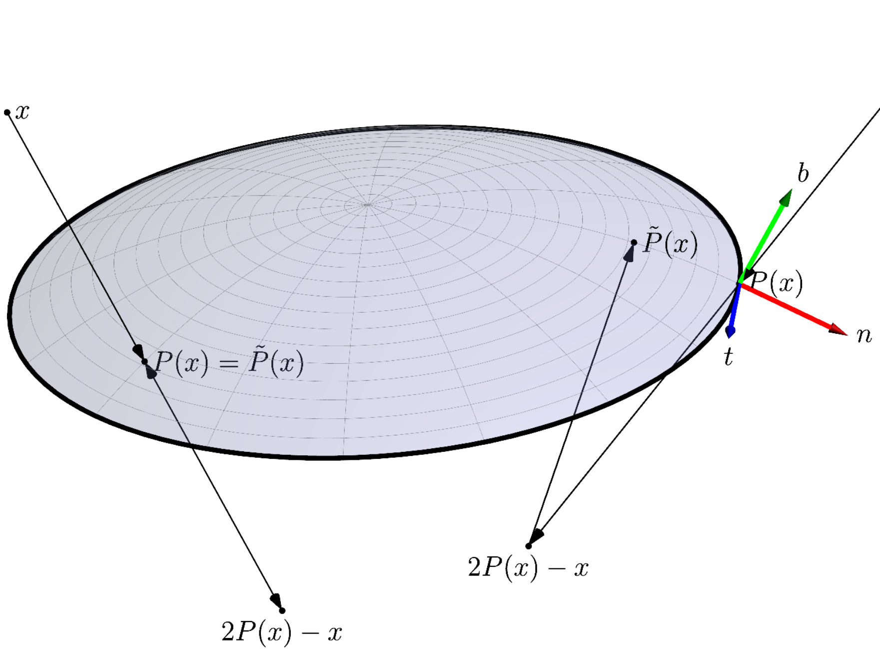

Рис. 1. К определению операторов $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$.

каждая точка области Ω однозначно проектируется в единственную точку на поверхности.

Если для поверхности $\mathcal{F}$ можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ (то есть $\mathcal{F}$ – ориентированная поверхность без края), то для оператора $\mathbf{P}$ справедливо представление $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\nabla d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$. Можно показать, что проектор $\mathbf{P}$ однозначно описывает поверхность $\mathcal{F}$ как множество своих неподвижных точек: $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \ \mathbf{x} = P\mathbf{x}\}$.

В дальнейшем нам понадобится различать точки области Ω, которые проектируются во внутренние точки поверхности $\mathcal{F}$ или на ее край $\partial\mathcal{F}$. Для этого рассмотрим вспомогательный оператор $\tilde{\mathbf{P}}$, который определим как [Macdonald2011]:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}). \tag{2}$$

Из простых геометрических соображений (см. рис. 1) следует, что для точек $\mathbf{x}$, проекции которых принадлежат краю поверхности, справедливо соотношение

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{P}(\mathbf{x}), \tag{3}$$

а для точек, проекции которых принадлежат внутренним точкам $\mathcal{F}$, значения проекторов $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{P}$ совпадают:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Вместе с описанным выше способом описания поверхности $\mathcal{F}$ в дальнейшем нам понадобится способ представления функций, заданных на этой поверхности. В силу того, что никаких локальных координат на поверхности $\mathcal{F}$

не вводится, удобно использовать «неявный» способ их представления. А именно: функцию на поверхности будем задавать как след на ней функции, заданной в области Ω.

Удовлетворяющее последнему свойству продолжение функции, заданной на поверхности, в область Ω может быть построено различными способами. Удобным и используемым в дальнейшем способом является ее продолжение с помощью оператора $\mathbf{P}$. А именно: для произвольной функции u, заданной на поверхности, ее продолжение $\mathcal{E}[u]$ в Ω определим как $\mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(\mathbf{P}\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega$. Построенное таким образом продолжение постоянно вдоль отрезков, соединяющих точку области Ω и ее проекцию. Этот факт позволяет удобным способом вычислять производные функции на поверхности, а также дифференциальные операторы более высокого порядка.

Отметим, что введенный выше оператор продолжения позволяет определить «поверхностные» дифференциальные операторы на $\mathcal{F}$, см. работы [Ruuth2008, Marz2012].

С точки зрения реализации метода X-FEM любой способ представления поверхности должен обеспечивать возможность его использования в дискретном случае, в том числе давать возможность вычисления на крае поверхности и в его окрестности локальных векторных базисов и связанных с фронтом трещины координат, давать возможность интегрировать заданные на поверхности функции. В последующих разделах эти вопросы рассмотрены применительно к методу проекции ближайшей точки.

Дискретная модель поверхности

Пусть в области Ω, содержащей поверхность $\mathcal{F}$, задана расчетная сетка, ячейки которой являются тетраэдрами. Полученную триангуляцию будем считать регулярной (т.е. пересечение двух различных тетраэдров может являться пустым множеством, узлом сетки, ее ребром или гранью). Соответствующую дискретную область обозначим как Ω_h. Предполагается, что сетка является достаточно мелкой так, что характерный шаг h сетки много меньше радиусов главных кривизн поверхности и радиуса кривизны ее края.

Множество узлов сетки обозначим как $\mathbf{x}_i$, $i = \overline{1, N}$, N – число узлов сетки. Отнесем к каждому узлу сетки базисную функцию $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x})$. В простейшем случае могут быть использованы непрерывные кусочно-линейные базисные функции, для которых $\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а внутри ячеек сетки φ_i продолжены линейно.

В дискретном случае оператор проектирования $\mathbf{P}^h$ задается своими значениями $\mathbf{P}^h_i$ в узлах сетки. Для вычисления оператора проектирования $\mathbf{P}^h$ в произвольной точке области используется ранее введенная система базисных функций. Если $\mathbf{x} \in \Omega_h$ – произвольная точка области Ω_h, ω – тетраэдр, в котором она расположена, $\{\xi_k\}_{k=1}^4$ – ее барицентрические координаты относительно вершин тетраэдра ω, тогда проекцией точки $\mathbf{x}$ считается точка

$$\mathbf{P}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{4} \xi_i \mathbf{P}_k^h.$$

Построенные аппроксимации проектора $\mathbf{P}^h$ позволяют естественным образом построить аппроксимации проектора $\tilde{\mathbf{P}}^h$ в соответствии с (2).

Пусть, далее, $\mathbb{I}$ – множество всех узлов сетки. Определим его подмножества $\mathbb{I}_{d,b}$, $\mathbb{I} = \mathbb{I}_d \cup \mathbb{I}_b$, $\mathbb{I}_d \cap \mathbb{I}_b = \emptyset$, соответствующие узлам, которые проектируются во внутренние точки поверхности и на ее край соответственно:

$$\mathbb{I}_d = \left\{ \mathbf{x}_i \in \mathbb{I} : \, \|\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x}_i)\| \leqslant \epsilon \right\}, \quad \mathbb{I}_b = \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_d,$$

где $0 < \varepsilon \ll h$ – малый вещественный параметр, который является параметром алгоритма.

Интегрирование по поверхности

Рассмотрим вопросы интегрирования функций на поверхностях, заданных проектором «ближайшей точки». Конкретно, речь пойдет о вычислении интегралов вида:

$$G = \int\limits_{\mathcal{F}} g(\mathbf{x}) \, dS.$$

Рассмотрим сразу дискретный случай. Как и ранее, будем считать, что поверхность расположена внутри некоторой сеточной области Ω_h. Пусть $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ – ее граница, образованная объединением граней T_i:

$$\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{N_f} T_i,$$

где N_f – число граней. При известном разбиении области Ω_h множество Γ_h легко может быть определено как множество граней, инцидентных одному и только одну тетраэдру триангуляции.

Представим Γ_h в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств: $\Gamma_h = \Gamma_h^+ \cup \Gamma_h^- \cup \Gamma_h^0$, где Γ_h^0 состоит из граней, все узлы которых проектируются на фронт (то есть являются элементами множества $\mathbb{I}_b$), а Γ_h^+ и Γ_h^- – множество остальных граней, причем все грани из множества Γ_h^+ и Γ_h^- лежат по одну сторону от поверхности.

Заметим теперь, что:

- все узлы граней из Γ_h^0 проектируются на край поверхности. Площади треугольников, вершины которых являются проекциями вершин треугольников из Γ_h^0, пренебрежимо малы при стремении шага сетки h к нулю;

- оператор проектирования (как континуальный, так и дискретный), ограниченный на множества $\Gamma_h^\pm$, является сюръекцией на поверхность $\mathcal{F}$;

- в случае, когда прямая, проходящая через произвольную точку на поверхности и ориентированная единичной нормалью к ней, пересекает границы множества $\Gamma_h^\pm$ по одному разу, треугольные сетки, заданные на $\Gamma_h^\pm$, порождают треугольные сетки на поверхности $\mathcal{F}$. Узлы этих сеток образованы проекциями вершин треугольников из $\Gamma_h^\pm$, при этом два узла этой сетки считаются связанными ребром, если им связаны соответствующие узлы в $\Gamma_h^\pm$.

Для вычисления интегралов от функций, заданных на поверхности, будем фактически использовать эти сетки Γ_h, при этом для вычисления приближенного значения интеграла по одному треугольнику будем использовать одноточечную квадратурную формулу.

При таком подходе не возникает необходимости в явном представлении в алгоритме описанных выше сеток на поверхности $\mathcal{F}$ – суммирование по треугольникам такой сетки можно проводить в цикле по всем треугольникам, образующим множество Γ_h. При этом вклад от треугольников, принадлежащих множеству Γ_h^0, будет исчезающе мал при $h \to 0$, а вклад от поверхностей $\Gamma_h^\pm$ будет (асимптотически) удваиваться.

Далее, в том случае, когда прямая проходящая через произвольную точку на поверхности и ориентированная единичной нормалью к ней пересекает границы множества $\Gamma_h^\pm$ более одного раза, проекции сеток $\Gamma_h^\pm$ уже не будут образовывать корректную сетку на $\mathcal{F}$ в силу того, что проекции отдельных треугольников могут иметь непустое пересечение. В этом случае приведенная выше схема вычислений должна быть скорректирована. А именно: необходимо учитывать взаимную ориентацию внешней нормали к грани и направление проектирования, например, ее центра.

Так, рассмотрим некоторую грань (треугольник) ω_k, образованную узлами сетки $\mathbf{x}_{k_1}$, $\mathbf{x}_{k_2}$ и $\mathbf{x}_{k_3}$. Соответственно, четвертый узел тетраэдра будем обозначать $\mathbf{x}_{k_4}$. Тогда нормаль к грани определяется выражением:

$$\mathbf{n}_k = \frac{(\mathbf{x}_{k_1} - \mathbf{x}_{k_2}) \times (\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_3})}{\left\|(\mathbf{x}_{k_1} - \mathbf{x}_{k_2}) \times (\mathbf{x}_{k_2} - \mathbf{x}_{k_3})\right\|},$$

где «$\times$» обозначает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Направление нормали можно определить по взаимной ориентации рассчитанной нормали и вектора, соединяющего центр грани и его проекцию. Так, вектор нормали $\mathbf{n}_k$ будет являться вектором внешней нормали, если

$$(\mathbf{P}^h(\mathbf{x}_c) - \mathbf{x}_c)\cdot\mathbf{n}_k < 0, \quad \mathbf{x}_c = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{x}_{k,2} + \mathbf{x}_{k,3}).$$

В дальнейшем будем считать, что это условие выполняется.

Таким образом, приходим к следующему выражению для вычисления интеграла по поверхности:

$$2G \approx \frac{1}{4} \sum_{T_k \in \Gamma_h} \tilde{g} \left(\frac{\mathbf{P}^h_{k_1} + \mathbf{P}^h_{k_2} + \mathbf{P}^h_{k_3}}{3} \right) \left\| \left(\mathbf{P}^h_{k_1} - \mathbf{P}^h_{k_2}\right) \times \left(\mathbf{P}^h_{k_2} - \mathbf{P}^h_{k_3}\right) \right\|,$$

где $\tilde{g}$ – какое-либо продолжение функции g с поверхности в область Ω. Если $\tilde{g} = \mathcal{E}[g]$, то имеем $\tilde{g}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) = \tilde{g}(\mathbf{x})$, и выражение для приближенного вычисления интеграла соответственно упрощается.

Множитель 2 перед интегралом возникает за счет того, что фактически интеграл вычисляется дважды – при обходе треугольников из Γ_h^+ и Γ_h^-.

Расчет локальных базисов на поверхности и ее крае

Введем еще один оператор проектирования $\mathbf{P}_f$, представляющий собой оператор проектирования в смысле кратчайшего расстояния на край поверхности:

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{x}) = \arg\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \partial\mathcal{F}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|.$$

Оператор $\mathbf{P}_f$ корректно (в смысле единственности проекции) определен в некоторой достаточно малой окрестности края $\partial\mathcal{F}$ поверхности $\mathcal{F}$. Соответствующую окрестность будем обозначать как Ω_f.

Будем считать, что (а) $\Omega_f \subset \Omega$ и (б) область Ω_f содержит все точки области Ω, которые проектируются на край поверхности в смысле критериев (3) и (4). Далее, пусть Ω^+ – подобласть областей Ω и Ω_f, состоящая из точек, которые проектируются на край поверхности, см. рис. 2. Отсюда следует, что:

- в подобласти Ω^+ определены все три оператора $\mathbf{P}$, $\tilde{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{P}_f$;
- образы операторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_f$, действующих на области Ω^+, совпадают между собой и с множеством точек края $\partial\mathcal{F}$ поверхности.

Если обозначить через Ω^+ множество точек Ω, проектирующихся на край поверхности, то множество Ω_f может быть выбрано в виде:

$$\Omega_f = \Omega^+ \cup \left\{ \{2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \Omega^+\} \cap \Omega \right\},$$

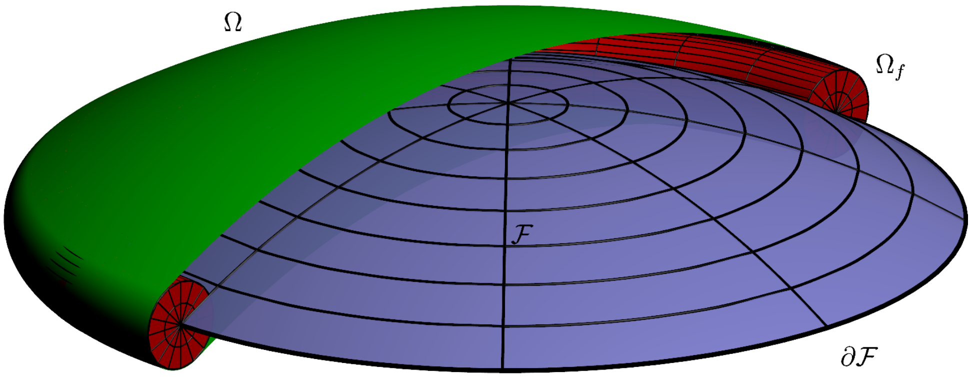

Рис. 2. Области Ω и Ω_f.

то есть получено «зеркальным» отражением множества Ω^+ относительно края поверхности. Этот же алгоритм может быть применен и для построения области $\Omega_{f,h}$ в дискретной постановке.

Рассмотрим теперь вопрос о построении локальных базисов на поверхности и ее крае.

Во всех точках проекций $\mathbf{P}_i^h = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i)$ узлов сетки из множества $\mathbb{I}_d$ вектор единичной нормали к поверхности может быть определен как

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}(\mathbf{P}_i^h) = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h\|}, \tag{5}$$

при этом направления векторов $\mathbf{n}_i$ для всех узлов сетки, лежащих «по одну сторону» от поверхности $\mathcal{F}$, совпадают. В том случае, когда поверхность «слабо искривлена», то есть ее радиус кривизны существенно больше диаметра самой поверхности, ориентация поверхности может быть однозначно задана выбором вектора $\mathbf{N}$ (не зависящего от точки поверхности и области Ω). В этом случае для узла сетки $\mathbf{x}_i$, $i \in \mathbb{I}_d$, положение узла и ориентация нормали $\mathbf{n}_i$ могут быть определены путем вычисления знака произведения $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_i$.

Тогда во всех узлах из множества $\mathbb{I}_d$ может быть восстановлено значение аппроксимации функции $\varphi(\mathbf{x})$ знакового расстояния до поверхности:

$$\varphi_i^h = \varphi^h(\mathbf{x}_i) = \operatorname{sign}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}_i)\|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h\|.$$

В произвольной точке области, проектирующейся на поверхность (но не на ее край), вектор единичной нормали в точке проекции и значение функции знакового расстояния могут быть восстановлены интероляцией. Если $\{\xi_i\}_{i=1}^4$ – барицентрические координаты точки $\mathbf{x}$ относительно тетраэдра, в котором она расположена, то имеем:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}_i^h \xi_i, \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{n}_i \xi_i, \quad \varphi^h(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i^h \xi_i,$$

где $\mathbf{n}_i$ определены согласно (5). Рассмотрим теперь аналогичные вопросы для точек, проекция которых попадает на край $\partial\mathcal{F}$ поверхности.

Пусть $\mathbf{n}$ – вектор в точке края поверхности, который является нормальным к ее краю и лежит в касательной плоскости поверхности. Для произвольной точки $\mathbf{x}$ области Ω_f («трубчатой» окрестности края поверхности) определим аппроксимацию вектора $\mathbf{n}$ в точке проекции $\mathbf{x}_p = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_f(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{n}^h = \frac{\mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x})\|}.$$

Очевидно, что этот вектор аппроксимирует точное значение вектора нормали $\mathbf{n}$ с точность $\mathcal{O}(\|\mathbf{P}_f(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x})\|)$. Если «диаметр» трубчатой окрестности Ω_f линейно уменьшается с уменьшением шага расчетной сетки (например, «диаметр» окрестности ограничен фиксированным числом шагов сетки), то $\|\mathbf{n} - \mathbf{n}^h\| = \mathcal{O}(h),\ h \to 0$. Далее, аппроксимации векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}^h$, касательного к краю и нормального и к краю, и к поверхности в точке $\mathbf{x}_p$, могут быть вычислены как

$$\mathbf{t}^h = \mathbf{n}^h \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x})|}, \quad \mathbf{b}^h = \mathbf{t}^h \times \mathbf{n}^h.$$

Приведенные выше построения иллюстрирует рис. 1.

Таким образом, в каждой точке проекции может быть построен локальный ортогональный базис векторов. Ориентация этого базиса может быть определена, если известен не зависящий от точки поверхности «глобальный» вектор $\mathbf{N}$, задающий ориентацию поверхности.

Введенный базис позволяет определить в каждом «сечении» трубчатой окрестности Ω_f локальные декартовы и полярные координаты по правилу:

$$X = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}, \quad Y = \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},$$
$$r = \|\mathbf{r}\|, \quad \theta = \operatorname{atan2}(Y, X), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}),$$

где функция atan2 определена всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$:

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \operatorname{atan}(y/x), & x > 0, \\ \operatorname{atan}(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \geqslant 0, \\ \operatorname{atan}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ +\pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0, \end{cases}$$

и возвращает значение полярного угла вектора $\mathbf{r}$ в базисе $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$.

Функции, задающие поверхность и ее край как множества меры ноль (см. (1)), могут быть восстановлены как $\varphi(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x})$.

Наконец, в окрестности точек как на поверхности, так и на ее крае возможно локально восстановить уравнения поверхности в параметрической форме. Для этого можно воспользоваться методами, разработанными для представления поверхностей как множества принадлежащих им точек («point cloud surfaces»), см., например, [Berger2014]. Основу соответствующих подходов составляет метод наименьших квадратов.

3 Постановка задачи теории упругости

В настоящем разделе рассмотрена постановка линейной задачи теории упругости, на примере которой далее будет продемонстрировано применение метода X-FEM.

Задача рассматривается в пространственной области Ω, целиком содержащей трещину, геометрия которой описывается срединной поверхностью $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \Omega$. Поверхность трещины будем считать двухсторонней со сторонами $\mathcal{F}^{\pm}$ и единичными внешними нормалями $\mathbf{n}^{\pm}$.

В квазистационарной постановке рассматриваемая модель состоит из одного уравнения закона сохранения импульса:

$$\nabla\cdot\mathbf{T} + \mathbf{b} = 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши, $\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$, $\mathbf{C} = \mathrm{const}$ – тензор четвертого ранга упругих коэффициентов, $\mathbf{b}$ – вектор объемной плотности внешних сил, $\mathbf{E}$ – тензор деформаций,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\mathbf{u} + (\nabla\otimes\mathbf{u})^T\right].$$

На боковых поверхностях трещины будем считать заданными динамические граничные условия (Неймана), которые имеют вид:

$$\mathbf{T}^{+}\cdot\mathbf{n}^{+} = -p_f\mathbf{n}^{+}, \quad \mathbf{T}^{-}\cdot\mathbf{n}^{-} = -p_f\mathbf{n}^{-}.$$

На внешней границе области Ω будем считать заданными подходящие граничные условия Дирихле (заданные перемещения) или Неймана (заданные нормальные напряжения).

Рассмотрим слабую постановку задачи. Будем считать, что поле перемещений $\mathbf{u}$ принадлежит пространству гладких векторных полей в области Ω, $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}} = V_{\mathbf{u}}(\Omega)$, которые могут иметь разрыв на срединной поверхности $\mathcal{F} \in \Omega$ трещины. Пусть Γ – внешняя граница области Ω. Таким образом, «полная» граница области Ω состоит из трех «кусков»: внешней границы Γ и боковых поверхностей трещины $\mathcal{F}^{\pm}$.

Для простоты далее будем считать, что на внешней границе области заданы однородные граничные условия Дирихле для перемещений, то есть

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Умножим уравнение (6) на произвольную функцию $\delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$ и проинтегрируем по области Ω. Тогда, с использованием соответствующей формулы Грина, получим следующую слабую постановку задачи (6): определить векторное поле $\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}$, такое, что справедливо

$$\mathbb{A}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \langle \mathbf{t}_n, [[\delta\mathbf{u}]] \rangle = (\mathbf{b}, \delta\mathbf{u}), \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}. \tag{7}$$

В последнем выражении $\mathbf{t}_n = -p_f \mathbf{n}$,

$$< \phi, \psi >= \int\limits_{\mathcal{F}} \phi\psi \, d\mathcal{F}, \quad (u, v) = \int\limits_{\Omega} uv \, d\Omega,$$

билинейная форма $\mathbb{A}_{\mathbf{u}}$ определена как

$$\forall\ \mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u} \in V_{\mathbf{u}} : \quad \mathbb{A}_u(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega. \tag{8}$$

4 Конечномерные аппроксимации и метод X-FEM

«Стандартные» аппроксимации

Для построения конечномерных аппроксимаций задачи (7) необходимо ввести конечномерные аппроксимации пространства $V_{\mathbf{u}}$, которые, соответственно, будем обозначать верхним индексом «h», $V_{\mathbf{u}}^h \subset V_{\mathbf{u}}$. Как только пространств выбраны, построение конечномерных аппроксимаций не составляет труда. Коротко это процедура бует описана ниже.

В соответствии с методом конечных элементов расчетная область Ω разбивается на множество конечных элементов ω_i,

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{N_e} \omega_i,$$

где N_e – число конечных элементов, Ω_h – аппроксимация области Ω. В дальнейшем положим, что область Ω – многогранник, тогда $\Omega = \Omega_h$.

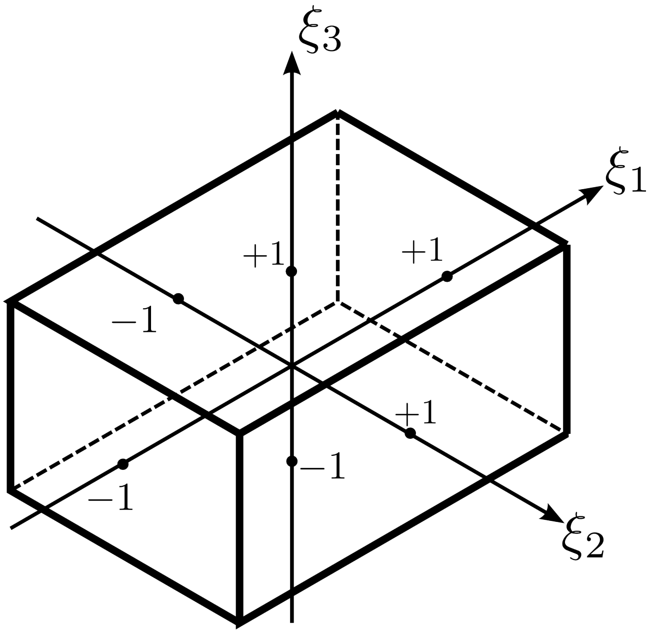

Рис. 3. Канонический элемент ω.

Будем считать, что разбиение Ω_h области Ω на конечных элементы – правильное, то есть два конечных элемента либо не пересекаются, либо имеют общую вершину (узел), либо общее ребро, либо общую грань.

Конечные элементы обычно имеют простую форму и являются тетраэдрами, шестигранниками или призмами и т.д. В дальнейшем будем считать, что все конечные элементы имеют одинаковую форму и являются параллелепипедами, или, в общем случае, – шестигранниками, ребра которых – отрезки прямых. Обобщение рассмотренных ниже методов на случай конечных элементов другой формы (например, тетраэдров) является технической задачей.

Для каждого конечного элемента ω_i существует его отображение T_i на канонический конечный элемент (в данном случае это куб с ребром длины 2 и центром в начале локальной системы координат $\{\xi_i\}_{i=1}^{3}$), $T_i : \omega_i \to \omega = [-1,1]^3$. Отображение T_i является гладким и имеет гладкое обратное отображение T_i^{-1}. Локальная система координат и нумерация узлов канонического элемента показаны на рис. 3.

Базисные функции метода конечных элементов для аппроксимации всех требуемых полей будем относить к узлам P_i, $i = \overline{1, N_n}$ расчетной сетки Ω_h. В большинстве случаев базисные функции обладают δ-свойством, то есть для базисной функции $N_i = N_i(\mathbf{x})$ имеем $N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Отметим, что к одному узлу может быть отнесено более одной степени свободы решения (более одного неизвестного). Соответственно, и число базисных функций, отнесенных к узлу, может быть больше единицы.

Как только базис в соответствующих конечномерных пространствах задан, аппроксимация билинейных форм, входящих в слабую постановку задачи, строится стандартным способом. Например, для аппроксимации поля перемещений будем рассматривать 8 узловой конечный элемент, показанный на рис. 3. К каждому из его узлов отнесены три компоненты поля перемещений. Тогда вектор узловых значений элемента имеет вид:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = [u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)},\ u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}, \dots, u_x^{(8)}, u_y^{(8)}, u_z^{(8)}]^T \in \mathbb{R}^{24\times 1},$$

где $u_\alpha^{(i)}$ – значение компонента α векторного поля перемещений в узле i, $i = \overline{1,8}$ конечного элемента.

Здесь и далее величины в квадратных скобках («$[\cdot]$») обозначают матрицы, величины в фигурных скобках («$\{\cdot\}$») – вектор-столбцы.

Пусть теперь

$$[\mathbf{\Phi}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 24}$$

– матрица базисных функций. Тогда поле перемещений внутри конечного элемента ω_e имеет вид:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})|_{\omega_e} = [\mathbf{\Phi}] \cdot \{\mathbf{u}^{(e)}\} \in \mathbb{R}^3.$$

Далее, в силу того, что тензоры деформаций и напряжений являются симметричными, будем представлять их в виде 6 мерных вектор-столбцов вида (векторные обозначения Войгта, см. [Helnwein2001]):

$$\{\mathbf{T}\} = [T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{xz}, T_{xy}]^T \in \mathbb{R}^6$$

и

$$\{\mathbf{E}\} = [E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, 2E_{yz}, 2E_{xz}, 2E_{xy}]^T \in \mathbb{R}^6.$$

Перемещения и деформация связаны следующим матричным дифференциальным оператором:

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{u}^{(e)} = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{\Phi}] \cdot \{\mathbf{u}^{(e)}\},$$

где

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x & \partial_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 6}.$$

Закон Гука, связывающий напряжения и деформации, в матричных обозначениях имеет вид $\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{E}\}$, где $[\mathbf{C}]$ – матрица упругих коэффициентов с элементами

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{2122} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6},$$

где C_{ijkl}, $i,j,k,l = \overline{1,3}$ – компоненты симметричного тензора четвертого ранга $\mathbf{C}$ (тензора упругих коэффициентов).

В частном случае изотропной среды матрица $[C]$ имеет вид:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6},$$

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ (C_{11}-C_{12})/2 = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu,$$

где E – модуль Юнга среды, ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига.

Наконец, подынтегральное выражение билинейной формы (8) примет вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}^{(e)}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}^{(e)}) = \{\delta\mathbf{u}^{(e)}\}^T \left([\mathbf{\Phi}]^T \cdot [\mathbf{D}]^T \cdot [C] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{\Phi}]\right) \{\mathbf{u}^{(e)}\}.$$

Пусть теперь

$$\mathbb{A}^{(k)} = \int\limits_{\omega_i} \left([\mathbf{\Phi}]^T \cdot [\mathbf{D}]^T \cdot [C] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{\Phi}]\right) d\Omega \in \mathbb{R}24\times 24 \tag{9}$$

– локальная матрица жесткости конечного элемента ω_k.

Далее, пусть $\mathcal{I}^k$ – множество глобальных номеров локальных степеней свобод i ($i = \overline{1,24}$) конечного элемента номер k. Зададим для каждого конечного элемента матрицы проекторы, сопоставляющие полному вектору неизвестных вектор неизвестных, отнесенных к одному элементу с номером k по правилу:

$$\mathbf{P}^{(k)}_{il} = \begin{cases} 1, & l \in \mathcal{I}^{(k)}, \\ 0, & l \notin \mathcal{I}^{(k)}, \end{cases},\ i = \overline{1,24},\ j = \overline{1,N_u};\quad \mathbf{P}^{(k)} \in \mathbb{R}^{24\times N_u},$$

где N_u – число степеней свободы для описания поля перемещений (в простейшем случае $N_u = 3N_n$, где N_n – число узлов расчетной сетки).

Вектор неизвестных, соответствующий одному конечному элементу с номером k, имеет вид:

$$\{\mathbf{u}^{(k)}\} = [\mathbf{P}^{(k)}] \cdot \{\mathbf{u}^h\},$$

где $\{\mathbf{u}^h\} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$ – полный вектор неизвестных.

Тогда значения билинейной формы $\mathbb{A}$ на элементах конечномерного пространства $V_{\mathbf{u}}$ имеют вид:

$$\mathbb{A}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \{\delta\mathbf{u}^h\}^T \cdot \mathbb{A}^h \cdot \{\delta\mathbf{u}^h\}, \quad \mathbb{A}^h = \sum_k [\mathbf{P}^{(k)}] \cdot [\mathbb{A}^{(k)}] \cdot [\mathbf{P}^{(k)}]^T, \tag{10}$$

где $\mathbb{A}^{(k)}$ – матрица жесткости конечного элемента с номером k, вычисляемая в соответствии с (9).

Уравнение (10) является формализацией стандартного алгоритма сборки матрицы жесткости из матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Для вычисления значений матрицы $\mathbb{A}^{(k)}$ выражение (9) интегрируется численно с использованием квадратурных формул нужного порядка, см., например, [Шайдуров1989, Zienkewicz2005].

Пространства функций для разрывных полей

Как уже отмечалось, в рассматриваемой постановке поля перемещения, давления и температуры терпят разрыв на срединной поверхности трещины. Величина этого разрыва априорно неизвестна и определяется решением задачи. В настоящем разделе описан способ построения соответствующих конечномерных пространств V^h и базиса в них для случая, когда срединная поверхность трещины не согласована с расчетной конечноэлементной сеткой, заданной в области Ω_h. Такой подход удобен тем, что не требует в обязательном порядке перестройки расчетной сетки при развитии трещины.

Суть метода X-FEM заключается в том, что к стандартным базисным функциям, описывающим непрерывную компоненту решения, добавляются специальные базисные функции, которые позволяют учесть те или иные особенности решения, в частности наличие сильного разрыва или асимптотику решения в окрестности фронта трещины. Дополнительные базисные функции являются финитными, то есть имеют конечный носитель. Таким образом, с одной стороны, матрица системы остается разреженной, а с другой – построенное конечномерное пространство позволяет описать все требуемые особенности решения.

В соответствии с методом X-FEM, конечномерная аппроксимация решения состоит из частей:

- стандартные, непрерывные аппроксимации гладкой части решения;
- дополнительные базисные функции для аппроксимации разрыва поля перемещений (для конечных элементов, которые срединная поверхность трещины делит на две несвязанные части);
- дополнительные базисные функции для аппроксимации разрыва поля перемещений в окрестности фронта трещины (для конечных элементов, которые содержат фронт трещины, при этом срединная поверхность трещины *не* делит элемент на две несвязанные части);

Пусть, как и ранее, $\mathcal{F}$ – срединная поверхность трещины, $\mathcal{I}$ – множество узлов сетки. Будем считать, что узлу i соответствует базисная функция $N_i(\mathbf{x})$. В соответствие со взаимным расположением трещины и узлов сетки разобьем все множество узлов сетки на три подмножества:

- к множеству $\mathcal{I}_t$ отнесем такие узлы i, что носитель соответствующей базисной функции $N_i(\mathbf{x})$ имеет непустое пересечение с фронтом $\partial\mathcal{F}$ трещины:
$$\mathcal{I}_t = \{i \in \mathcal{I} : \operatorname{supp} N_i(\mathbf{x}) \cap \partial\mathcal{F} \neq \emptyset\};$$
- к множеству $\mathcal{I}_c$ отнесем такие узлы i, что носитель соответствующей базисной функции $N_i(\mathbf{x})$ имеет непустое пересечение со срединной поверхностью $\mathcal{F}$ трещины, при этом узел не входит в множество $\mathcal{I}_t$:
$$\mathcal{I}_c = \{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_t : \operatorname{supp} N_i(\mathbf{x}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\};$$
- последнее множество дополняет первые два до полного множества узлов:
$$\mathcal{I}_s = \mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}_t \cup \mathcal{I}_c).$$

По построению множества $\mathcal{I}_{t,c,s}$ попарно не пересекаются, их объединение равняется полному множеству узлов $\mathcal{I}$.

При программной реализации множества $\mathcal{I}_s$, $\mathcal{I}_c$ и $\mathcal{I}_t$ легко строятся на основе анализа знаков функций $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ и $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$, задающих срединную поверхность трещины и ее край.

В соответствии с методом X-FEM представление решения имеет вид

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i\in\mathcal{I}_s} N_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_c} N_i^*(\mathbf{x}) \left[(H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)\right] a_i + \\ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i\in\mathcal{I}_t} N_i^*(\mathbf{x}) \left[B^k(\mathbf{x}) - B^k(\mathbf{x}_i)\right] b_i^k, \quad (11)$$

где $N_i(\mathbf{x})$ – стандартная базисная функция, соотвествующая узлу i; u_i – соотвествующее узловое значения компонента поля перемещений; $N_i^*(\mathbf{x})$ – вообще говоря, произвольные отнесенные к узлам сетки достаточно гладие функции, задающие в Ω_h разбиение единицы,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} N^*(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_s \cup \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_t,$$

при этом обычно принимают $N^*(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})$; $B^k(\mathbf{x})$ – некоторый набор функций, описывающий асимптотику поля перемещений в окрестности фронта трещины; $H(\mathbf{x})$ – функция, описывающая разрывный характер решения в окрестности срединной поверхности трещины.

В представлении (11) первая сумма является аппроксимацией гладкой компоненты решения, вторая служит для представления разрывной компоненты решения в окрестности срединной поверхности $\mathcal{F}$ трещины, третья – для представления разрывной и сингулярной компоненты решения в окрестности фронта $\partial\mathcal{F}$ трещины.

В качестве функции $H(\mathbf{x})$ проще всего взять функцию типа функции Хевисайда, принимающую постоянные значения 0 и 1 по разные стороны от срединной поверхности трещины:

$$H(\mathbf{x}) = h(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & \phi(\mathbf{x}) < 0, \\ 0, & \phi(\mathbf{x}) \geq 0, \end{cases}$$

где $h(x)$ – обычная функция Хевисайда скалярного аргумента, $\phi(\mathbf{x})$ – функция знакового расстояния, задающая срединную поверхность $\mathcal{F}$ трещины,

$$\phi(\mathbf{x}) = d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = \operatorname{sign}\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{F}) = \pm \min_{\tilde{\mathbf{x}}\in\mathcal{F}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|.$$

Набор функций $B^k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1,m}$ предназначен для описания как асимптотического поведения решения в окрестности фронта трещины, так и его разрывного характера. Для рассматриваемой модели и в системе координат, приведенной на рис. 4, они имеют вид:

$$\mathbf{B}(r,\theta) = \left\{ \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \ \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \ \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta), \ \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) \right\},$$

где (r,θ) – полярные координаты в окрестности фронта трещины, см. рис. 4.

Вычисление матрицы жесткости отдельного элемента, содержащего узлы, в которых заданы дополнительные базисные функции

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = N_i^*(\mathbf{x})(H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)), \quad \Psi_i^{(k)} = N_i^*(\mathbf{x})(B^k(\mathbf{x}) - B^k(\mathbf{x}_i)),$$

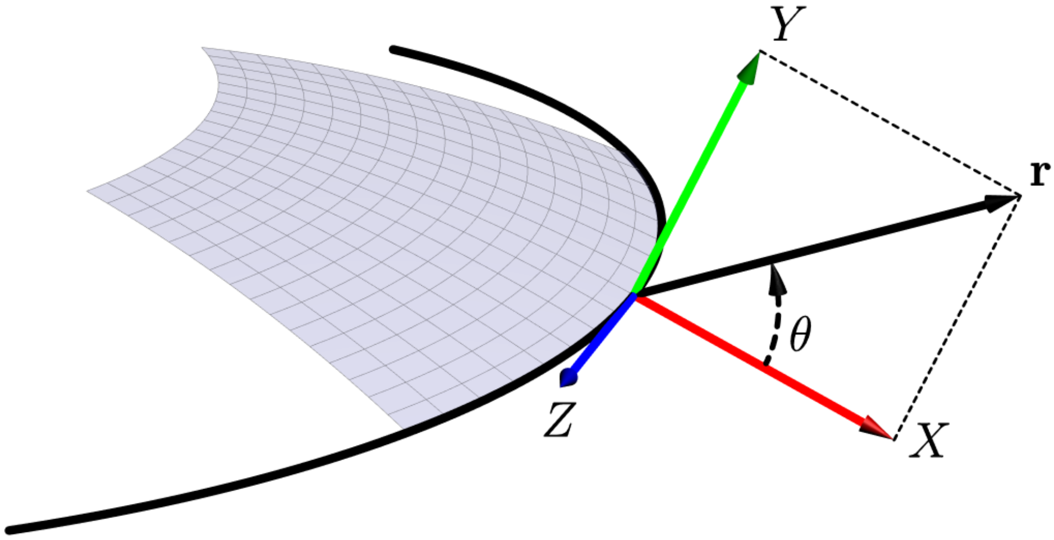

Рис. 4. Локальные координаты в окрестности фронта трещины.

выполняется аналогично ситуации без использования дополнительных базисных функций: в вектор узловых значений конечного элемента добавляются дополнительные степени свободы,

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = [u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)},\ u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}, \ldots, u_x^{(8)}, u_y^{(8)}, u_z^{(8)},\\ a_x^{(1)}, a_y^{(1)}, a_z^{(1)}, \ldots, b_{x,1}^1, b_{y,1}^1, b_{z,1}^1, \ldots]^T,$$

а в матрицу $[\mathbf{\Phi}]$ – соответствующие новым степеням свободы блоки-столбцы размерности 3×3 вида

$$[\mathbf{\Phi}_i] = \operatorname{diag}(\Psi_i, \Psi_i, \Psi_i), \quad [\Phi_i^{(k)}] = \operatorname{diag}(\Psi_i^{(k)}, \Psi_i^{(k)}, \Psi_i^{(k)}).$$

Дальнейшая процедура ничем не отличается от рассмотренной ранее.

5 Особенности реализации метода X-FEM/CPP

Рассмотрим теперь особенности реализации метода X-FEM с использованием проекции ближайшей точки CPP для представления срединной поверхности трещины.

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе описанием метода X-FEM для его реализации необходимы (а) возможность определения взаимного расположения конечных элементов и срединной поверхности трещины и ее фронта; (б) алгоритм вычисления локальных полярных координат (r, θ)

точки в окрестности фронта; (в) возможность интегрирования заданных на срединной поверхности трещины полей по поверхности трещины.

Последние два вопроса были подробно рассмотрены в разделе 2.

Для решения первой задачи могут быть использованы два подхода.

Первый из них предполагает, что в окрестности трещины в соответствии с указанным в разделе 2 способом локально восстанавливаются функции ϕ и ψ, задающие геометрию трещины своими поверхностями уровня ноль. Далее взаимное положение срединной поверхности трещины, ее фронта и конечного элемента определяется аналогично тому, как это происходит в классическом варианте метода X-FEM, а именно: на основе знаков значений функций ϕ и ψ. Так, например, считается, что конечный элемент имеет непустое пересечение положительной меры со срединной поверхностью, если значения функции ϕ в узлах конечного элемента отличны от нуля и имеют разные знаки.

Второй способ предполагает использование лишь значений проектора в узлах. В этом случае считается, что срединная поверхность трещины и заданный конечный элемент пересекаются, если вектора проекций узлов на срединную поверхность трещины имеют различные направления относительно вектора, задающего ориентацию поверхности (то есть существуют по крайней мере два узла, такие что скалярное произведение векторов проекций в них отрицательно). Для определения конечного элемента, содержащего фронт трещины, можно использовать аналогичный критерий: конечный элемент содержит фронт трещины, если существуют три узла тетраэдра, векторы проекций которых «сонаправлены» (в смысле знака скалярного произведения), а четвертый – направлен в противоположном им направлении (опять же, в смысле знака скалярного произведения соответствующих векторов).

6 Примеры расчетов

В настоящей работе в качестве исследуемой задачи для демонстрации работоспособности и эффективности предложенной расчетной методики рассматривается задача о стационарной круговой трещине («penny shaped») [Fabrikant1989], [Bower2009], [Kachanov2003], возникающей в однородной упругой среде при ее одноосном нагружении на бесконечности. Схематично она представлена на рис. 5, где p обозначает величину нагружения, a – радиус трещины, нагружение осуществляется вдоль оси Oy.

Аналитическое решение данной задачи записывается в виде [Bower2009]:

$$u_r(r,y) = -\frac{\nu pr}{E} + \frac{(1+\nu)\,pr}{\pi E}\left[(1-2\nu)\left(\frac{a(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2} - \arcsin\frac{a}{l_2}\right) + \frac{2a^2|y|(a^2-l_1^2)^{1/2}}{l_2^2(l_2^2-l_1^2)}\right], \quad (12)$$

$$u_y(r,y) = \frac{py}{E} + \frac{2\,(1+\nu)\,p}{\pi E}\left[2(1-\nu)\left(\frac{y}{|y|}(a^2-l_1^2)^{1/2} - y\arcsin\frac{a}{l_2}\right) + y\arcsin\frac{a}{l_2} - \frac{ay(l_2^2-a^2)^{1/2}}{l_2^2-l_1^2}\right], \quad (13)$$

где $r = \sqrt{x^2+z^2}$, $u_x = u_r\sin\varphi$, $u_z = u_r\cos\varphi$ и

$$2l_{1,2} = \sqrt{(a+r)^2+y^2} \mp \sqrt{(a-r)^2+y^2}.$$

Расчетная область представляет собой куб со стороной $L = 5$ м, в центре которого в плоскости $y = L/2$ расположена срединная поверхность трещины, имеющая форму диска радиусом $a = 1$ м, величина нагружения составляет $p = 300$ Атм. В качестве параметров упругой среды использовались следующие значения: $\nu = 0.25$ – дренированный коэффициент Пуассона, $E = 1.5 \times 10^{10}$ [Н/м^2] – модуль Юнга.

Расчеты проводились на трех адаптивных тетраэдральных сетках, имеющих сгущение в окрестности срединной поверхности трещины и отличающихся степенью измельчения ячеек. Их параметры представлены в табл. 1. Часть элементов расчетной сетки №3, обладающей наилучшей степенью измельчения, представлена на рис. 6.

номер сетки	число узлов	число элементов
1	7983	43523
2	17932	104981
3	27410	162486

Таблица 1. Параметры расчетных сеток.

В предложенном комплексе алгоритмов трещина описывается с помощью оператора проекции ближайшей точки. В случае конечномерной задачи этот проектор задается в узлах расчетной конечноэлементной сетки и сопоставляет каждому узлу сетки его проекцию на срединную поверхность трещины. В силу того, что указанный проектор является гладким отображением лишь локально, в небольшой окрестности срединной поверхности трещины, в реализации имеет смысл определять его только для множества узлов тетраэдров

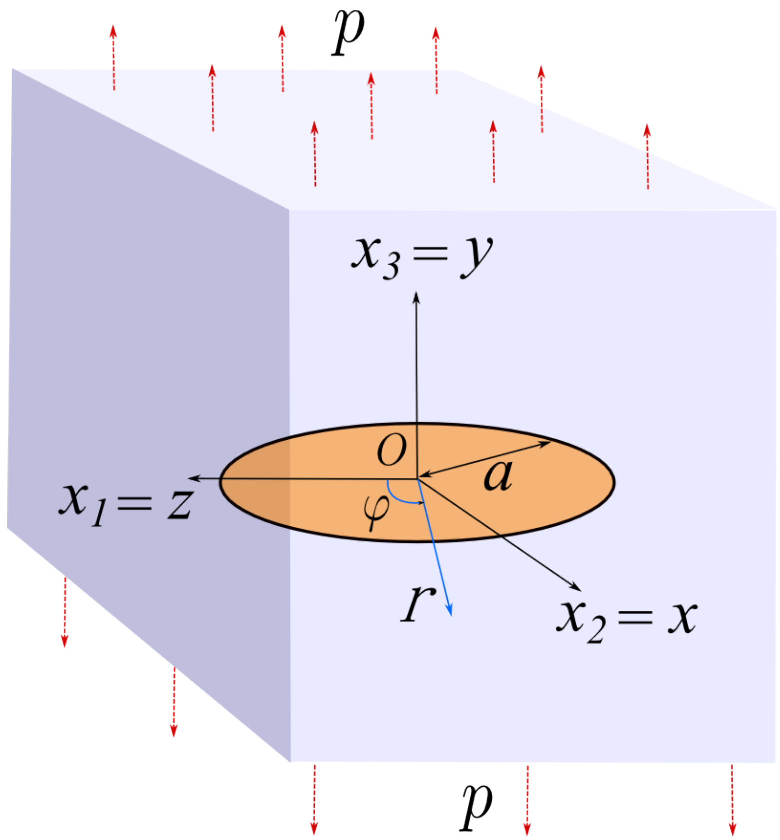

Рис. 5. Схематичный вид задачи о круговой трещине.

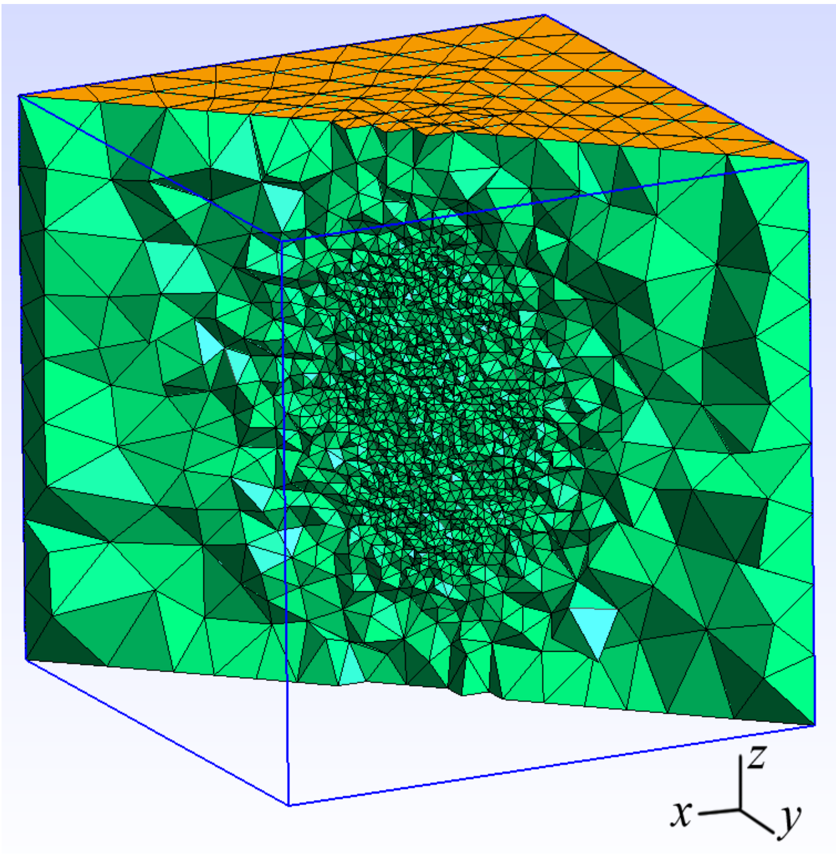

Рис. 6. Часть элементов расчетной сетки №3.

триангуляции, образующих первые несколько слоев «вокруг» трещины. На рис. 7 показано такое множество тетраэдров (конечных элементов), на рис. 8 показаны элементы вокруг фронта трещины, то есть края срединной поверхности. На рис. 8 дополнительно приведена визуализация действия проектора ближайшей точки на фронт трещины. Указанные структуры данных являются одними из основных в используемом подходе: они используются при построении аппроксимаций методом X-FEM, при расчете течения в трещине и при расчете эволюции трещины. На рисунке 10 показаны узлы и конечные элементы, используемые для построения базисных функций в использованном в комплексе алгоритмов методе X-FEM. Синим цветом показаны конечные элементы, все узлы которых имеют дополнительные базисные функции, соответствующие разрезу. Непосредственно такие узлы показаны зелеными маркерами. Конечные элементы, которые имеют узлы, имеющие базисные функции для края, обозначены коричневым цветом. Непосредственно узлы показаны красными маркерами.

На рис. 11–13 показаны относительные ошибки численного решения в сравнении с точным (с использованием для оценки сеточной нормы в пространстве l_2) для соответствующих компонент поля перемещений на всех трех сетках. Четко виден аналог сеточной сходимости, когда при уменьшении характерного линейного размера тетраэдров в окрестности срединной поверхности трещины ошибка убывает.

Наконец, на рисунках 14–20 показаны распределения полей перемещений и компонент полного тензора напряжений, получившиеся в расчетах на сетке №3. На всех приведенных рисунках не показаны конечные элементы, которые имеют непустое пересечение с трещиной. Это сделано в связи со сложностью отрисовки таких конечных элементов. Но в расчете они, конечно, используются (и имеют узлы, в которых в соответствии с методом X-FEM присутствуют дополнительные степени свободы).

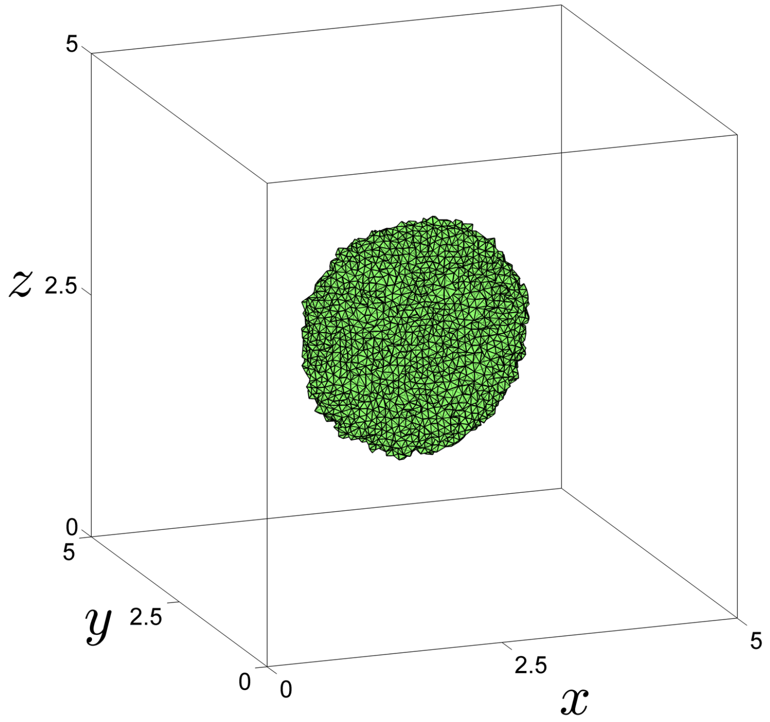

Рис. 7. Область в окрестности срединной поверхности трещины, в которой определен проектор ближайшей точки.

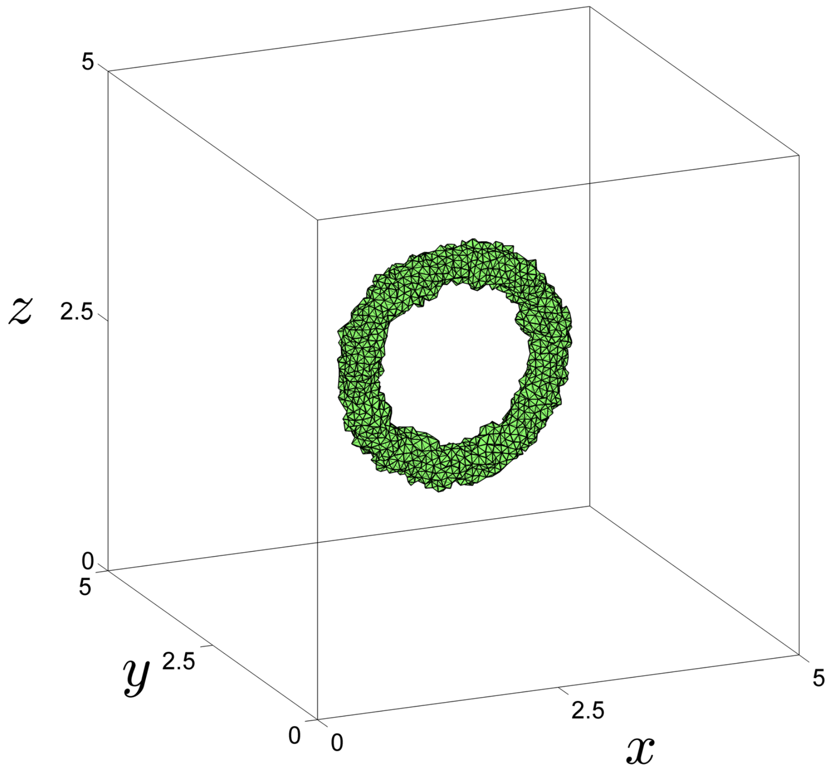

Рис. 8. Область в окрестности фронта трещины, в которой определен проектор ближайшей точки.

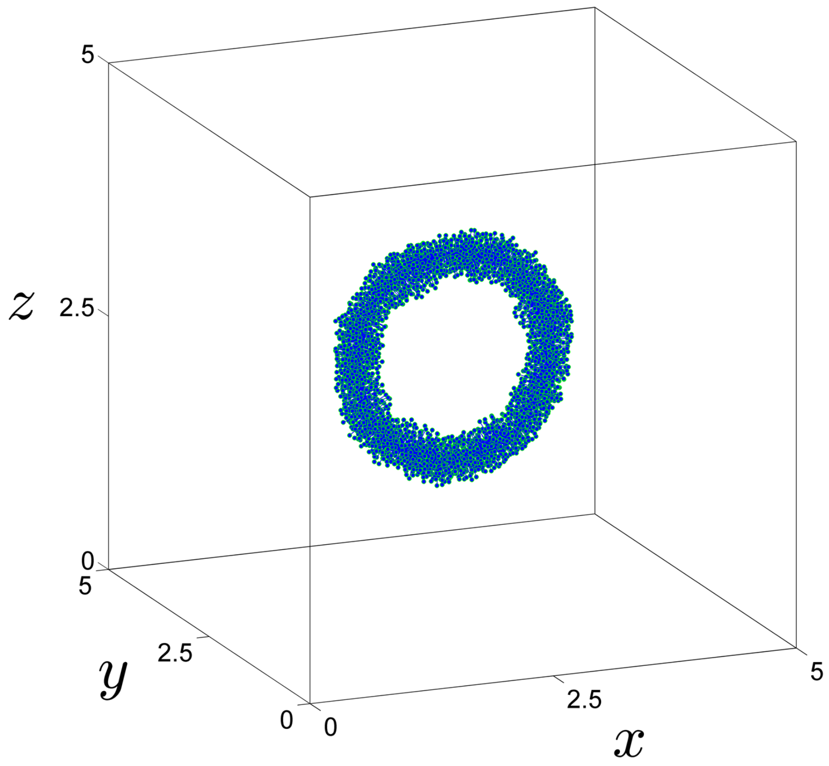

Рис. 9. Визуализация проектора ближайшей точки на фронт трещины.

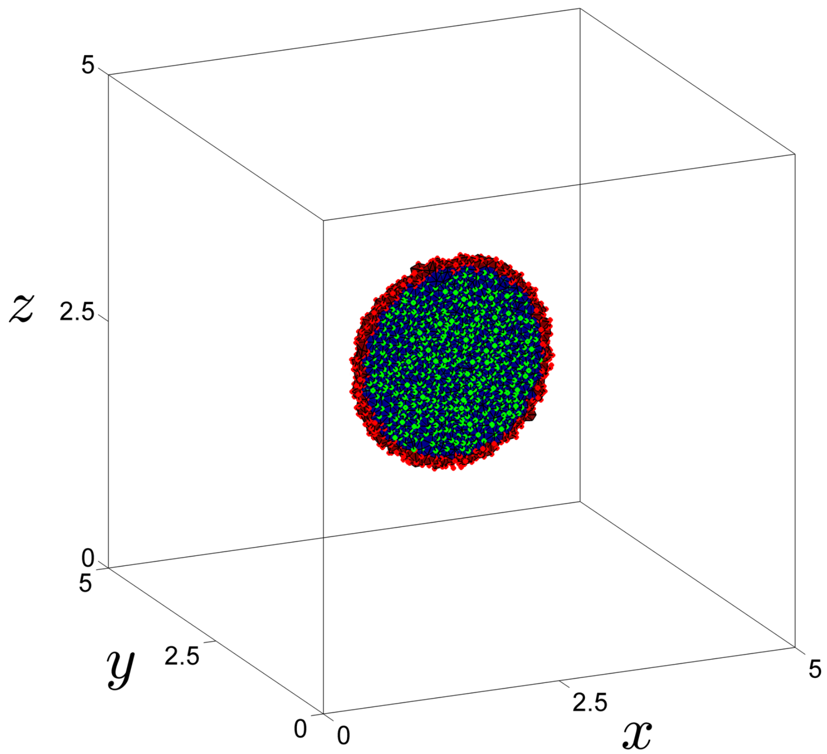

Рис. 10. Область в окрестности фронта трещины с обозначением выделенных узлов и конечных элементов метода X-FEM.

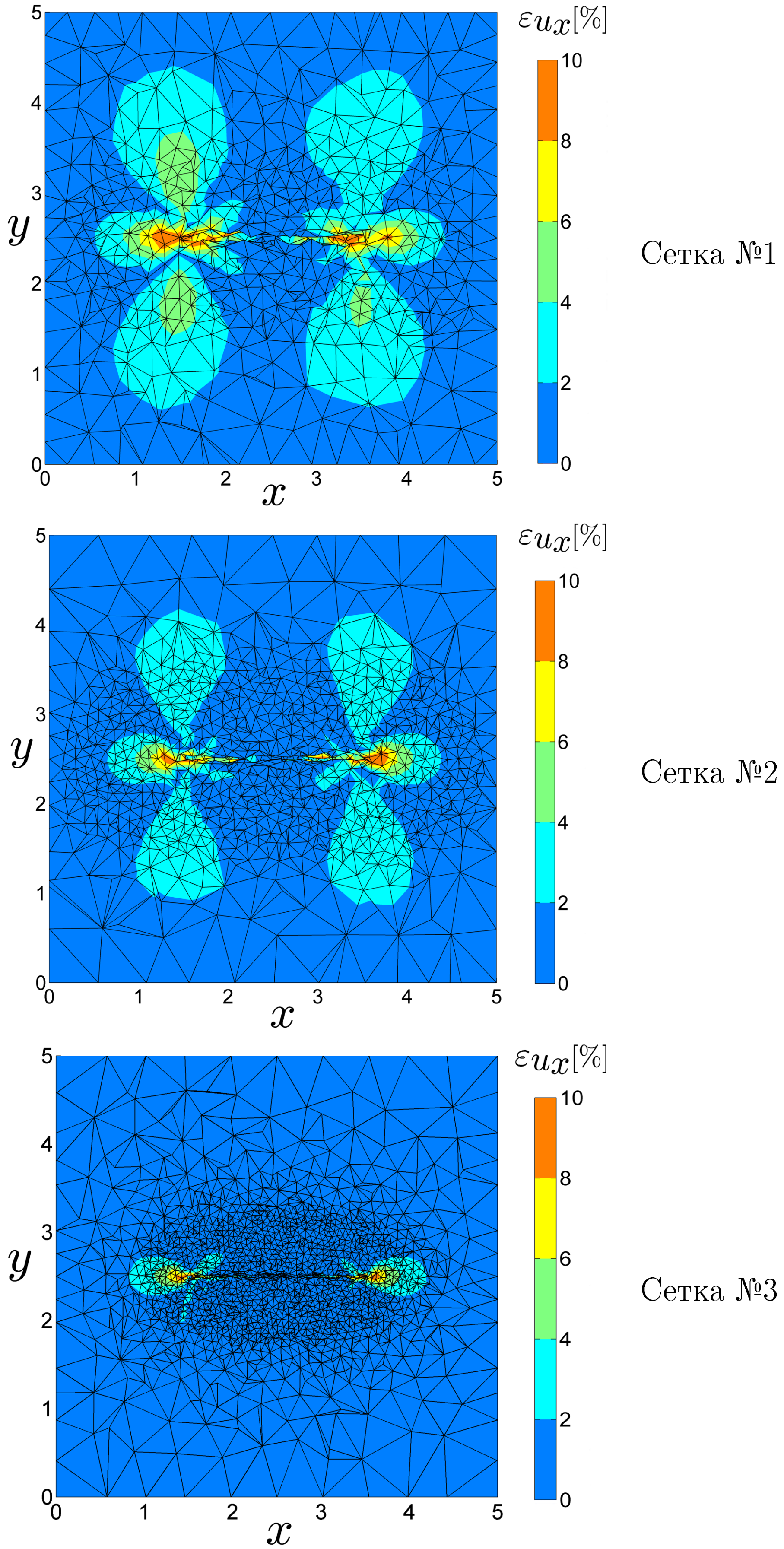

Рис. 11. Относительная ошибка поля u_x в плоскости $z = L/2$.

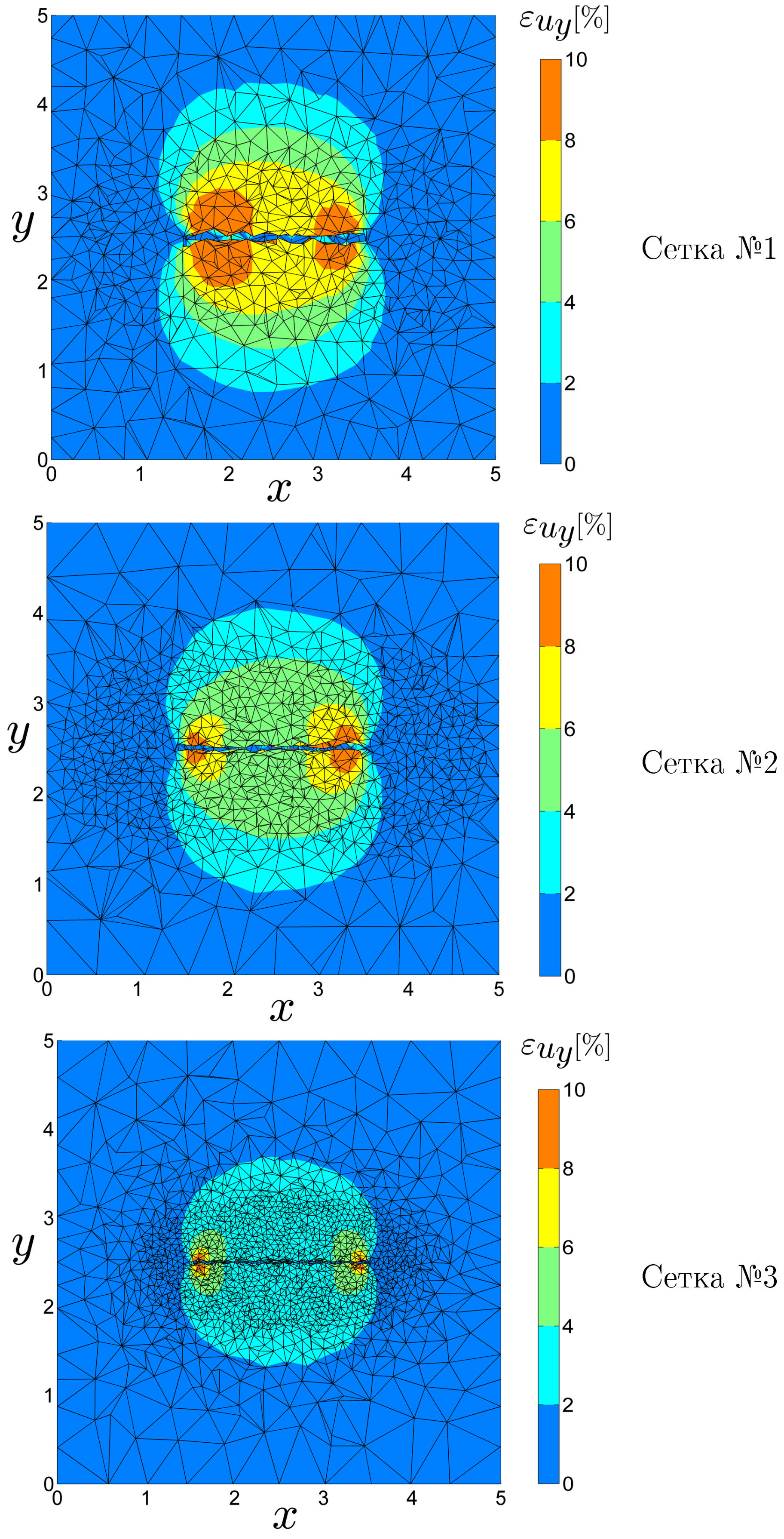

Рис. 12. Относительная ошибка поля u_y в плоскости $z = L/2$.

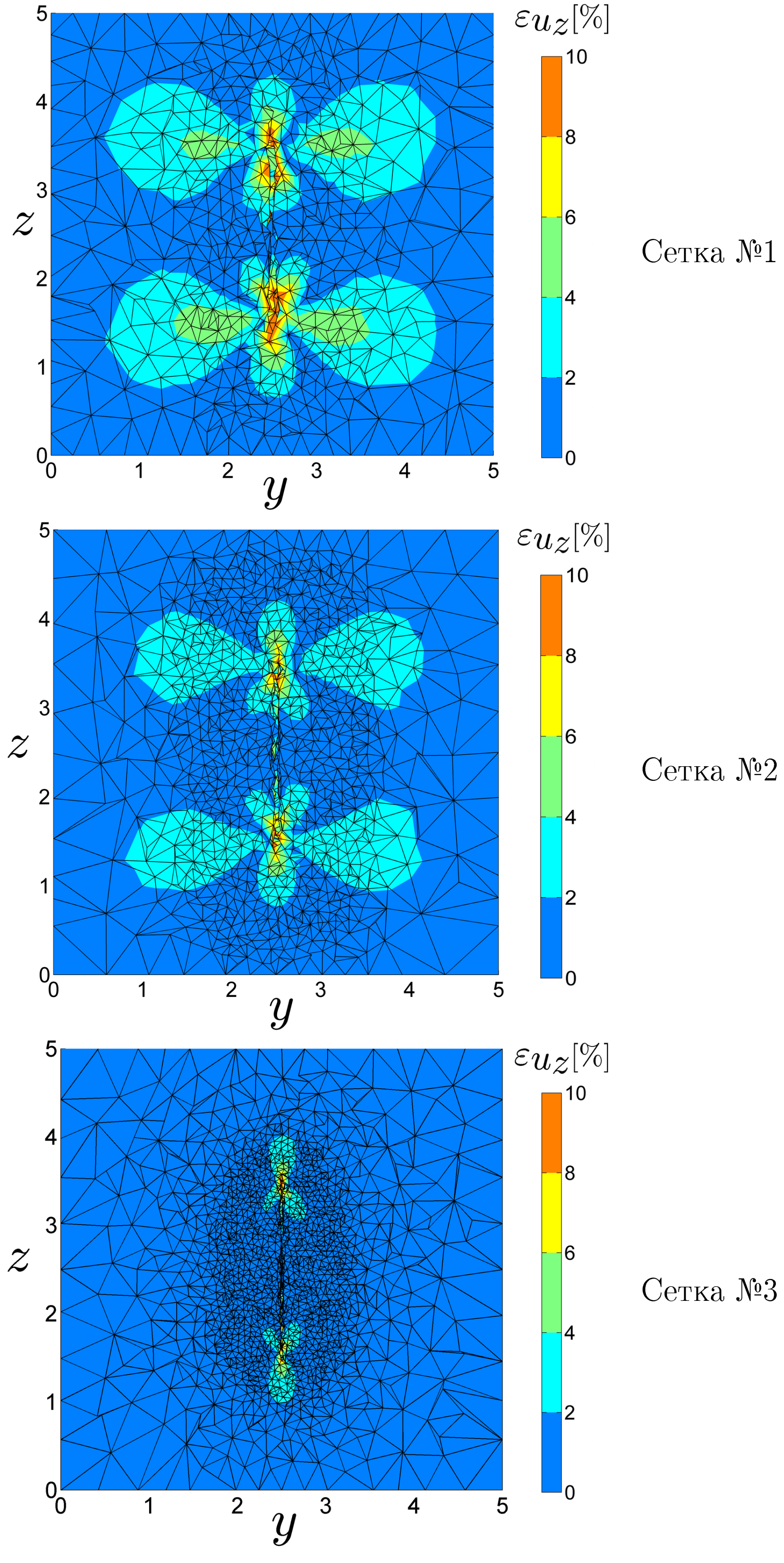

Рис. 13. Относительная ошибка поля u_z в плоскости $x = L/2$.

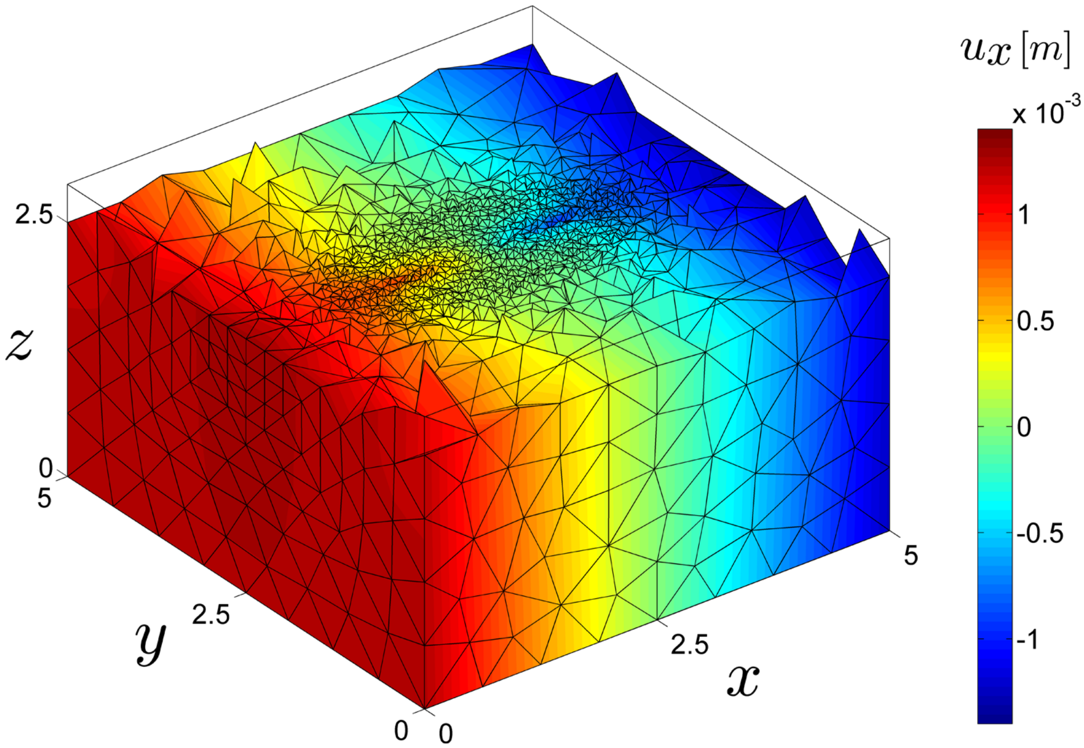

Рис. 14. Распределение компоненты u_x поля перемещений, $z \leq L/2$.

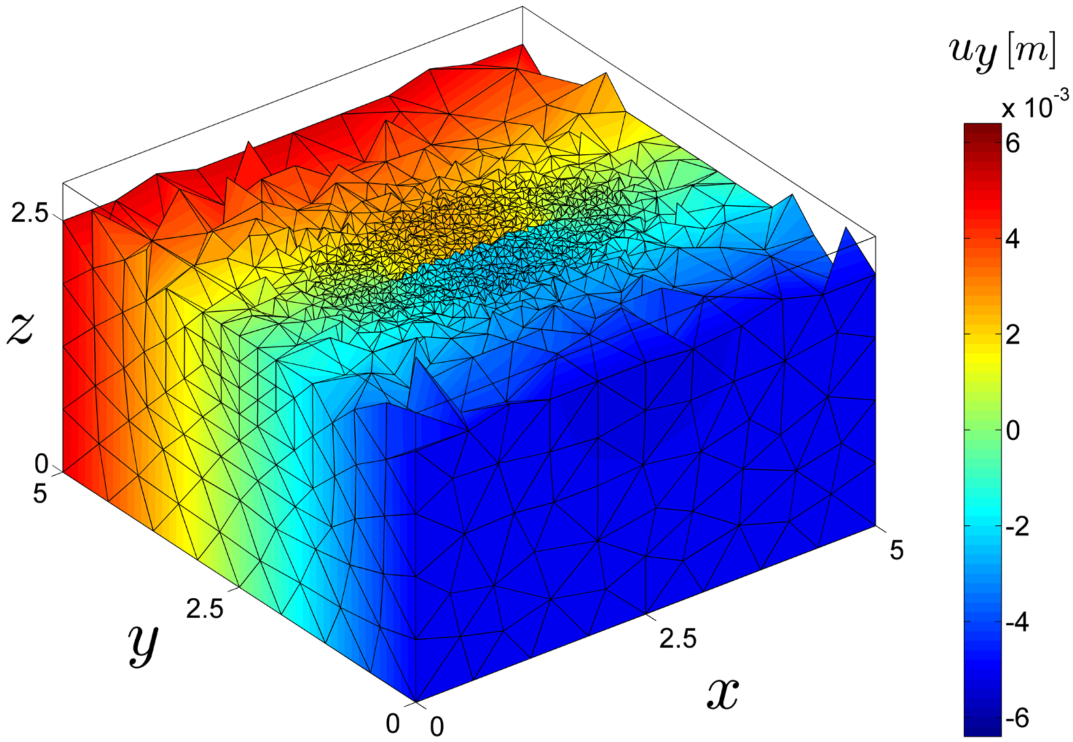

Рис. 15. Распределение компоненты u_y поля перемещений, $z \leq L/2$.

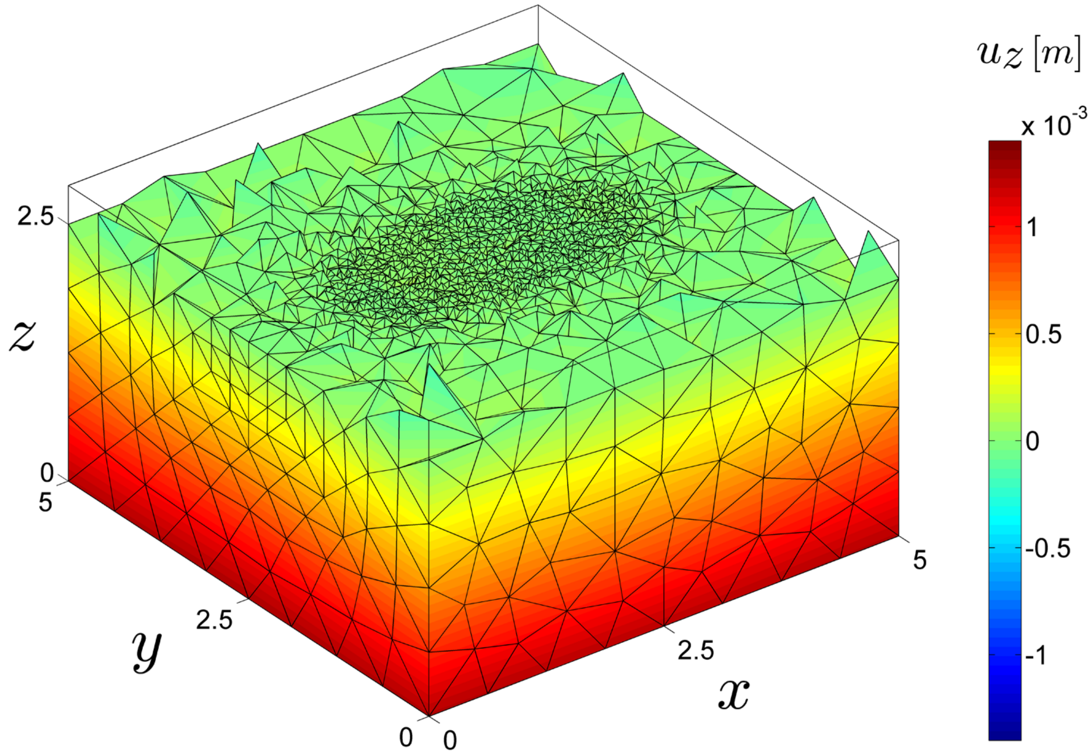

Рис. 16. Распределение компоненты u_z поля перемещений, $z \leq L/2$.

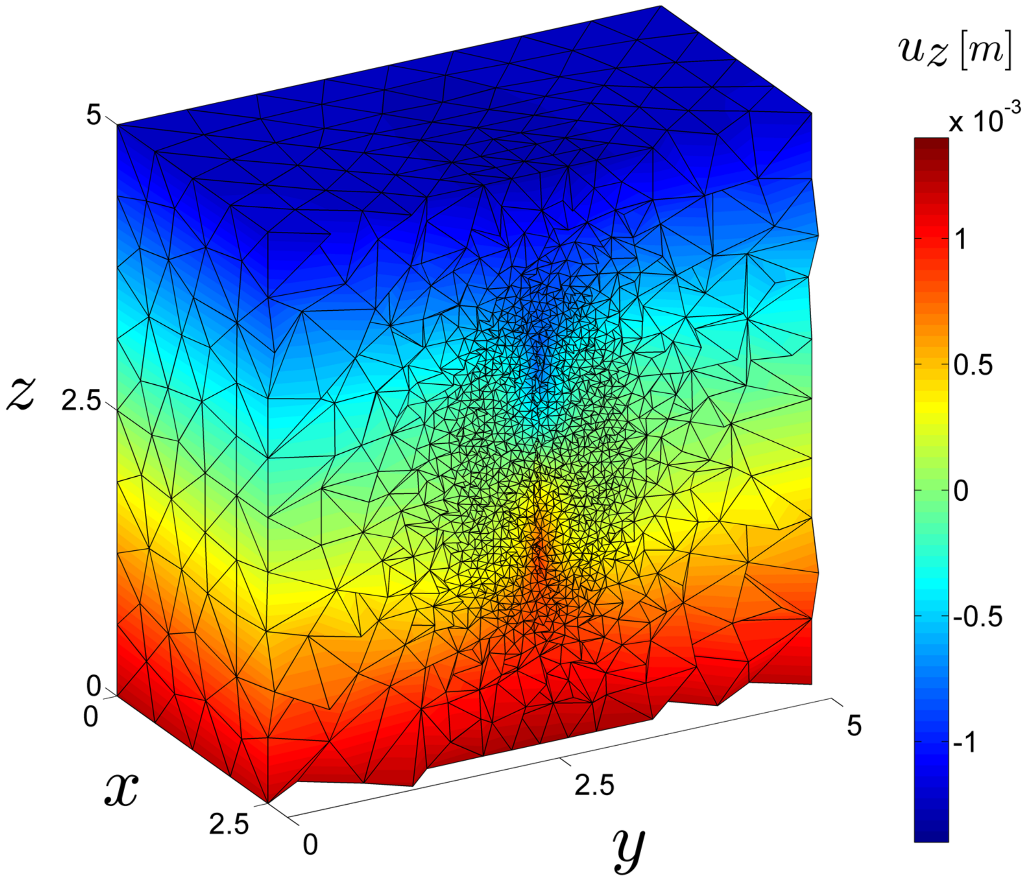

Рис. 17. Распределение компоненты u_z поля перемещений, $x \leq L/2$.

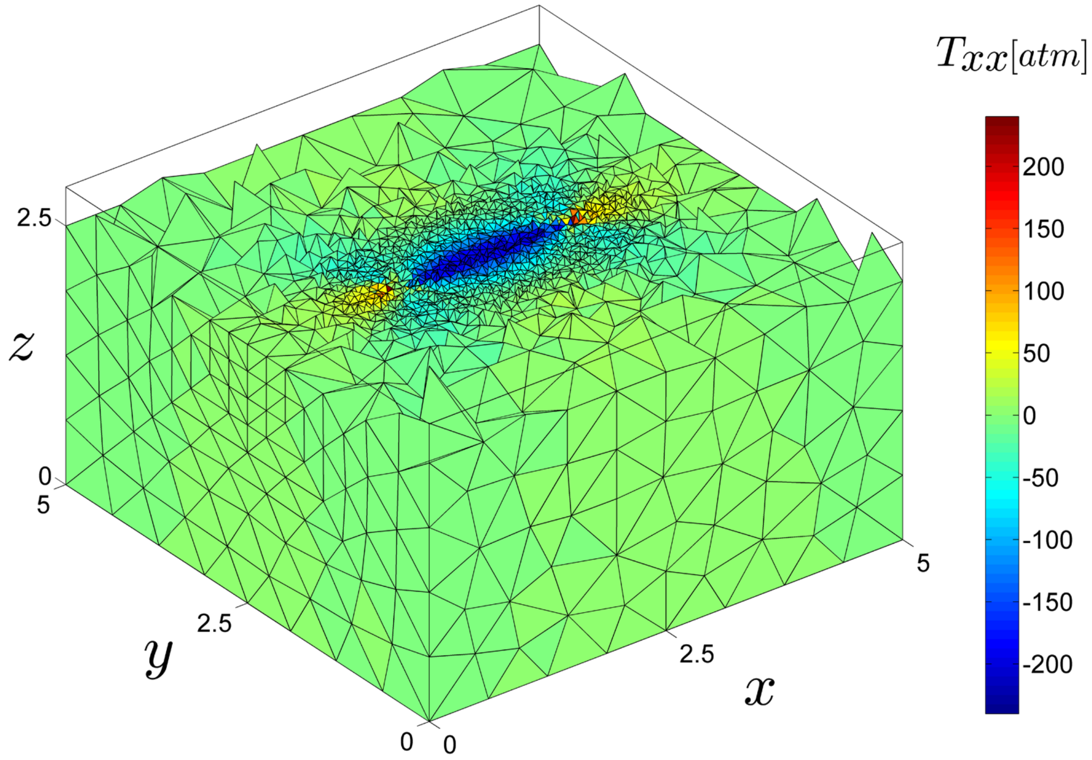

Рис. 18. Распределение компоненты T_{xx} поля полных напряжений, $z \leq L/2$.

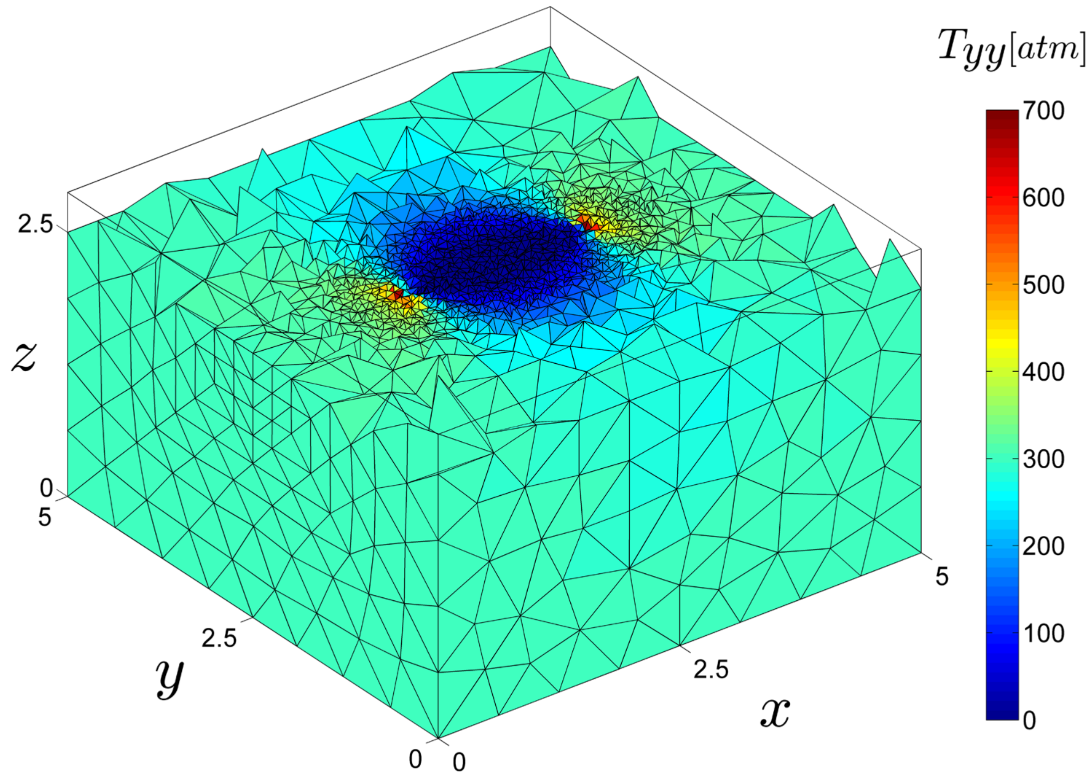

Рис. 19. Распределение компоненты T_{yy} поля полных напряжений, $z \leq L/2$.

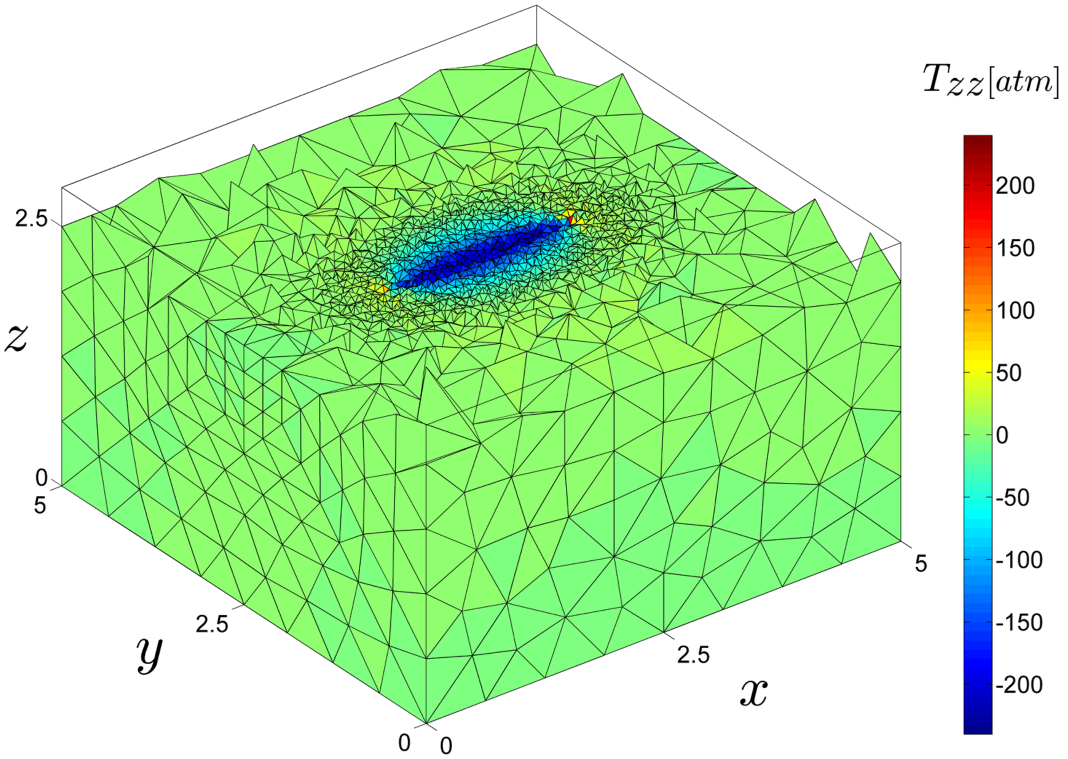

Рис. 20. Распределение компоненты T_{zz} поля полных напряжений, $z \leq L/2$.

7 Заключение

В работе предложен алгоритм X-FEM/CPP – вариант «расширенного» метода конечных элементов (X-FEM) для расчета задач теории упругости с учетом крупномасштабных трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Предложенный подход обладает возможностями, не уступающими традиционному варианту метода X-FEM, в котором для представления поверхности применяется метод проекций уровня. В частности, срединная поверхность трещины может представлять собой произвольную достаточно гладкую поверхность в краем. Описан алгоритм метода, его отличия от традиционных вариантов, использующих представление поверхности на основе метода множеств уровня.

Представлены результаты расчетов задачи напряженно-деформированного состоянии упругой среды со стационарной круговой трещиной при одноосном нагружении среды на бесконечности. Проведено сравнение результатов расчетов на трех адаптивных сетках с различным уровнем измельчения и данных известного аналитического решения, продемонстрировано приемлемое совпадение. Результаты расчетов показали практическую возможность применения и работоспособность предложенного метода X-FEM/CPP.

Список литературы

[Иванов2016] Иванов А.В., Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная Визуализация, том 9, № 2, стр. 64–81, 2017.

[Шайдуров1989] Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.

[Belytschko1999] Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing // Internat. J. Numer. Methods Engrg., vol. 45, pp. 601–620, 1999.

[Berger2014] Berger M., Tagliasacchi A., Seversky L., Alliez, P., Levine, J., Sharf, A., Silva, C. State of the Art in Surface Reconstruction from Point Clouds // EUROGRAPHICS 2014 / S. Lefebvre and M. Spagnuolo. STAR – State of The Art Report, 2014.

[Bower2009] Bower A.F. Applied Mechanics of Solids. CRC Press, 2009.

[Fabrikant1989] Fabrikant V.I. Applications of Potential Theory in Mechanics. Selection of New Results, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.

[Fries2010] Fries T.P., Belytschko T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications // Internat. J. Numer. Methods Engrg., vol. 84, pp. 253–304, 2010.

[Fries2011] Fries T.P., Moës N. (editors), Zilian A. The extended finite element method. Special issue // Internat. J. Numer. Methods Engrg., vol. 86, pp. 403–666, 2011.

[Gravouil2002] Gravouil A., Moës N., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II: Level set update // Int. J. Numer. Meth. Engng. V. 53, pp. 2569–2586, 2002.

[Helnwein2001] Helnwein P. Some Remarks on the Compressed Matrix Representation of Symmetric Second-Order and Fourth-Order Tensors // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(22–23), pp. 2753–2770, 2001.

[Kachanov2003] Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov Ig. Handbook of Elasticity Solutions // Springer Science + Bisiness Media, B.V., 2003.

[Macdonald2008] Macdonald C.B., Ruuth S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput., 35 (2008), pp. 219–240.

[Macdonald2009] Macdonald C.B., Ruuth S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 4330–4350.

[Macdonald2011] Macdonald C.B., Brandman J., Ruuth S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys., 230 (2011), pp. 7944–7956.

[Marz2012] März T., Macdonald C.B. Calculus on surfaces with general closest point functions // SIAM J. Numer. Anal., Vol. 50, No. 6, pp. 3303–3328.

[Moes1999] Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // Internat. J. Numer. Methods Engrg., vol. 46, pp. 131–150, 1999.

[Moes2002] Moës N., Gravouil A., Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended fiite element and level sets—Part I: Mechanical model // Int. J. Numer. Meth. Engng 2002; 53:2549–2568.

[Osher2002] Osher S.J., Fedkiw R.P. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. Springer-Verlag. 2002.

[Ruuth2008] Ruuth S.J., Merriman B.M. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // J. Comput. Phys., 227 (2008), pp. 1943–1961.

[Sethian1999] Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science. Cambridge University Press. 1999.

[Stolarska2001] Stolarska M., Chopp D., Moes N., Belytschko T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2001; 51:943–960.

[Ventura2003] Ventura G., Budyn E., Belytschko T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements // Int. J. Numer. Meth. Engng 2003; 58:1571–1592.

[Wieners2003] Wieners C. Taylor-Hood elements in 3D // in Analysis and Simulation of Multifield Problems, Wolfgang L. Wendland, Messoud Efendiev, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 12, 381 pp., Springer, 2003.

[Zienkewicz2005] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, 2005.