



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Рагимли П.И., [Повещенко Ю.А.](#),
[Подрыга В.О.](#), Рагимли О.Р.,
[Попов С.Б.](#)

Моделирование процессов
совместной фильтрации в
талой зоне и
пьезопроводной среде с
газогидратными
включениями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями / П.И.Рагимли [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 40. 32 с.
doi:[10.20948/prepr-2018-40](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-40)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-40>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**П.И. Рагимли, Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга,
О.Р. Рагимли, С.Б. Попов**

**Моделирование процессов совместной
фильтрации в талой зоне и пьезопроводной
среде с газогидратными включениями**

Москва — 2018

Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б.

Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями

В работе рассматривается термодинамически равновесная совместная дискретная модель двухкомпонентной (H_2O , CH_4) трехфазной (вода, газ, гидрат) фильтрационной флюидодинамики и двухфазных процессов в талой зоне с отсутствием газогидратов, для которой производится расщепление по физическим процессам. Целью исследования является построение как в талой зоне, так и в среде с газогидратными включениями совместного семейства двухслойных полностью консервативных разностных схем метода опорных операторов с профилированными по пространству временными весами в соответствии с предлагаемым алгоритмом расщепления равновесной модели по физическим процессам. Непосредственное нерасщепленное использование изучаемой системы для целей определения динамики переменных и построения неявной разностной схемы, требуемой для расчетов фильтрационных процессов с крупными шагами по времени, затруднительно.

Ключевые слова: газовые гидраты, фильтрация, талая зона, опорные операторы, полностью консервативные разностные схемы

Parvin Ilgar gizi Rahimly, Yury Andreevich Poveshchenko, Viktoriia Olegovna Podryga, Orkhan Rahim oglu Rahimly, Sergey Borisovich Popov

Modeling the processes of joint filtration in melted zone and piezocunductive medium with gas hydrate inclusions

In the paper the thermodynamically equilibrium joint discrete model of a two-component (H_2O , CH_4) three-phase (water, methane, hydrate) filtration fluid dynamics and two-phase processes in a melted zone with absence of gas hydrates is considered, for which the splitting by physical processes is performed. The aim of the study is to construct a joint family of two-layer fully conservative difference schemes of the support operators method with space-time temporal scales in accordance with the proposed algorithm for splitting the equilibrium model in terms of physical processes, both in the melted zone and in the gas hydrate inclusions medium. The direct unsplit utilization of the studying system for the purposes of determining the dynamics of variables and constructing the implicit difference scheme required for calculations of filtering processes with large steps in time is difficult.

Key words: gas hydrates, filtration, melted zone, support operators, completely conservative difference schemes

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 18-07-00841-а, 16-29-15081-офи_м, 16-29-15095-офи_м.

Введение

Исходная задача, сформулированная в виде законов сохранения (массы H_2O , CH_4 и полной энергии среды), с общей матрицей системы относительно функции S_v , характеризующей долю объема в порах, приходящуюся на свободные воду и газ в гидратонасыщенной части пористой среды, и функций влагонасыщенности S_w , давления P и температуры T обладает смешанными гиперболическими и параболическими свойствами. Непосредственное нерасщепленное использование такой системы для целей определения динамики переменных и построения неявной разностной схемы, требуемой для расчетов фильтрационных процессов с крупными шагами по времени, затруднительно.

В работе предложена дискретная модель расщепления по физическим процессам с получением соответствующего разностного уравнения пьезопроводности гидратизированной и талой флюидодинамической среды. Важно, что полученная таким образом расщепленная модель разностно эквивалентна дискретным исходным законам сохранения системы, записанным в дивергентной форме. Такой подход создания полностью консервативных схем в изучаемой флюидо-гидратной среде потребовал введения специальной свободно-объемной нелинейной аппроксимации сеточных функций по времени, которая зависит от доли объема в порах, занятом флюидами, и является простой в реализации. Применение этих схем важно в совместном моделировании трехфазной среды с процессами в талой зоне, где гидрат отсутствует, поскольку количество неизвестных, уравнений, их типы здесь меняются, и важно на разностном уровне дивергентно передать балансы в различные области течения.

В работах [1, 2] на нерегулярных метрических сетках теории метода опорных операторов применительно к специфике процессов переноса насыщенностей и внутренних энергий воды и газа в гидратизированной среде были рассмотрены способы аппроксимации относительной и абсолютной проницаемостей среды, соответствующих этим процессам, наряду с одновременным сохранением континуальных свойств операций $divgrad$ в их разностном виде, связанных с полем скоростей, обеспечивающим этот перенос. Это связано с еще одной вычислительной проблемой моделирования процессов фильтрационной флюидодинамики гидратизированной среды, которая заключается в необходимости аппроксимировать квадраты градиентов термодинамических величин (внутренних энергий или давления свободных воды и газа) вблизи депрессионных воронок скважин, имеющих сингулярные

особенности. Такие градиентные квадратичные формы встречаются в исследуемом в данной работе дискретном уравнении пьезопроводности фильтрационной флюидодинамики гидратизированной среды и определяют динамику нелинейного, квадратичного по градиенту переноса термодинамических параметров среды. Положительную определенность таких квадратичных форм удастся обеспечить привлечением теории метрических сеток метода опорных операторов, однако лишь при сохранении континуальных свойств операций *divgrad* в их разностном виде, связанных с полем скоростей этот нелинейный перенос определяющих. Монотонизация переноса процессов насыщения по функциям S_v , S_w при использовании ее в классическом виде нарушает свойства самосопряженности и знакоопределенности этих дискретных операций векторного анализа. В настоящей работе заимствуется представленный в [1, 2] механизм монотонизации сеточного решения, обеспечивающий одновременно эффективную монотонизацию аппроксимации по S_v , S_w , нелинейному переносу внутренних энергий свободных воды и газа и сохранение знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин в гидратизированной пьезопроводной части задачи.

Фильтрационная флюидодинамика свободных воды и газа при наличии в пористой среде твердых гидратных включений обладает рядом специфических особенностей.

Прежде всего, по правилу фаз Гиббса такая термодинамически равновесная двухкомпонентная (H_2O , CH_4) трехфазная (гидрат и свободные вода и газ) система обладает только одной термодинамической степенью свободы. Т.е. имеет место термобарическая связь $T_{dis} = f(P)$ между температурой диссоциации газогидрата и давлением. Понятно, что в этой ситуации за основную термодинамическую переменную можно выбрать любую (например, внутренние энергии воды или газа), если через них выражаются температура и давление. В дальнейшем это нам понадобится, чтобы представить флюидодинамику гидратизированной среды законами Дарси в дискретной энергетической формулировке (см. раздел 4). Однако необходимо иметь в виду, что при расчетах в талой безгидратной зоне в среде имеется два независимых термодинамических параметра (P , T). На практике интерес представляет именно динамика совместного поведения спонтанно возникающих пространственно разделенных талых и гидратосодержащих зон. Следующим важным обстоятельством является то, что исходная задача, сформулированная в виде законов сохранения (массы H_2O , CH_4 и полной энергии среды), с общей матрицей системы относительно функций S_v , S_w , давления P и температуры T обладает смешанными гиперболическими и параболическими свойствами. Непосредственное использование такой системы для целей определения динамики переменных S_v, S_w, P, T и построения неявной

разностной схемы, требуемой для расчетов параболических уравнений с крупными шагами по времени затруднительно.

В работах [3, 4] предложена и численно исследована модель двухкомпонентной трехфазной фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями, в которой производится расщепление по физическим процессам исходных законов сохранения задачи (сохранение массы H_2O , CH_4 и полной энергии среды). Расщепление происходит на блок переноса насыщенностей флюидов на фоне заданного поля скоростей (обладающий в основном гиперболическими свойствами) и пьезопроводный блок системы с гидратными включениями, определяющий диссипативную эволюцию термодинамических параметров равновесной флюидо-гидратной модели. Такое расщепление по физическим процессам позволяет создавать эффективные прикладные алгоритмы расчета гидратизированной среды с крупным шагом по времени, что невозможно в рамках модели исходных законов сохранения с общей матрицей системы со смешанными гиперболическими и разномасштабными параболическими свойствами.

Целью настоящего исследования является построение как в талой зоне, так и в среде с газогидратными включениями совместного семейства двухслойных полностью консервативных разностных схем метода опорных операторов с профилированными по пространству временными весами в соответствии с предлагаемым алгоритмом расщепления равновесной модели по физическим процессам.

2. Постановка задачи

2.1. Трехфазная среда с гидратными включениями

В пространственной области O с границей ∂O рассмотрим термодинамически равновесные двухкомпонентные (вода, метан) трехфазные уравнения фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w \right] \right\} + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + q_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w) \right] \right\} + \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + q_g = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_w = - \frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P - g \rho_w \mathbf{k}), \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_g = - \frac{k k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P - g \rho_g \mathbf{k}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v \right] + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s \right\} + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] \right\} + \operatorname{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{W} = - \left\{ m \left[S_v (S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - S_v) \lambda_v \right] + (1 - m) \lambda_s \right\} \nabla T, \quad (6)$$

$$T_{dis} = f(P) \quad (7)$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с интегральным соотношением:

$$\int_O (\mathbf{X} \nabla u) dV + \int_O u \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \int_{\partial O} u(\mathbf{X}, ds). \quad (8)$$

Принятые обозначения: индексы $l = g, w, v, s$ относятся к газу, воде, гидрату и скелету пористой среды. Здесь (1) – уравнение баланса массы воды, (2) – уравнение баланса массы метана, (3) – закон Дарси, определяющий скорость движения свободной воды \mathbf{V}_w в порах для двухкомпонентной несмешивающейся системы (вода, метан) с абсолютной проницаемостью $k = k(\mathbf{r}, S_v, P)$ и относительной проницаемостью $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$. μ_w – вязкость воды. Аналогично понимается уравнение (4) как закон Дарси для скорости свободного метана \mathbf{V}_g с относительной проницаемостью $k_{rg} = k_{rg}(S_w)$ и вязкостью μ_g . Наконец, (5) – уравнение баланса общей внутренней энергии системы, включающей энергии свободной воды, свободного метана, гидрата и скелета. Под ε_l понимаются внутренние энергии единиц массы компонент. Уравнение (6) определяет общий тепловой поток \mathbf{W} в среде с коэффициентами теплопроводности $\lambda_l(P, T)$. $g\mathbf{k}$ – вектор ускорения силы тяжести, направленный вертикально вниз; P – давление; S_w – водонасыщенность; v – гидратонасыщенность; $S_v = 1 - v$ – растепленность; $\rho_l(P, T)$ – плотности фаз; β_w – массовая доля воды в гидрате; \mathbf{r} – радиус-вектор; t – время; q_w , q_g и q_ε – плотности соответствующих источников, зависящие от параметров $(t, \mathbf{r}, S_w, S_v, P, T)$. По правилу фаз Гиббса трехфазная двухкомпонентная гидратная система является многовариантной, т.е. обладает одной степенью свободы (температурой или давлением) [5]. Следовательно для газового гидрата, находящегося в равновесии с жидкой водой или льдом, зависимость (7) носит однозначный характер. u, \mathbf{X} в (8) – произвольные скаляр (температура, давление, внутренняя энергия и т.п.) и вектор физически связанный с градиентным потоком этой скалярной величины.

Энтальпии единицы массы $i_l = \varepsilon_l + P/\rho_l$ гидрата, свободных воды и газа термодинамически согласованы в смысле следующего соотношения:

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h, \quad (9)$$

где h – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата. Для удельных (на единицу массы) энтальпий фаз также справедливо [6]

$$di_l = c_{pl}(-k_{dl}dP + dT) \quad (10)$$

с коэффициентами дросселирования

$$k_{dl} = \frac{1}{c_{pl}} \left[T \left(\frac{\partial V_l}{\partial T} \right)_p - V_l \right]. \quad (11)$$

Здесь индекс « p » у скобок означает, что частная производная по температуре берется при постоянном давлении; c_{pl} и $V_l = 1/\rho_l$ – удельные теплоемкости (при постоянном давлении) и объемы фаз. В частности, для газовой фазы с уравнением состояния:

$$\rho_g = \frac{P}{z_g RT} \quad (12)$$

справедливо

$$k_{dg} = \frac{RT^2}{c_{pg}P} \frac{\partial z_g}{\partial T}, \quad (13)$$

что означает наличие эффекта Джоуля-Томсона ($k_{dg} \neq 0$) для неидеального газа с коэффициентом сверхсжимаемости z_g в изучаемых процессах неизотермической фильтрации.

Из уравнений (1), (2), (5) путем исключения функций S_w и S_v из под знака производной по времени может быть получено уравнение пьезопроводности для флюидодинамики с гидратными включениями в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} m\delta_\varepsilon \{ S_v [S_w \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + (1 - S_w) \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t}] + (1 - S_v) \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial t} \} + \\ + \frac{\psi}{m\rho_v} \{ m [S_v [S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1 - S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t}] + (1 - S_v) \rho_v \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \} + \\ + \frac{\partial [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]}{\partial t} \} + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$DIG = \frac{1}{\rho_w} \text{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \text{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g},$$

$$\begin{aligned}
DIG_{\varepsilon} &= [\operatorname{div}(\rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w) - \varepsilon_w \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w)] + [\operatorname{div}(\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g)] + \\
&+ \operatorname{div}[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_{\varepsilon} - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g) = \\
&= \rho_w \mathbf{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \mathbf{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div}[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_{\varepsilon} - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g).
\end{aligned}$$

Также

$$\frac{\psi}{m\rho_v} = (\varphi - \frac{1}{\rho_v}) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{(1-\beta_w)}{\rho_g},$$

$$\delta_{\varepsilon} = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_v \geq 0$$

удельные скачки (на единицу массы) при фазовом переходе объема и внутренней энергии соответственно.

Далее также используется обозначение: $(\)_p = \frac{\partial}{\partial P}$.

Уравнение (14) представляет собой основное пьезопроводно-диссипативное термодинамически равновесное уравнение трехфазной двухкомпонентной флюидодинамики с гидратными включениями, расщепленное с блоком переноса процессов насыщения (1)-(4), обладающим на фоне зафиксированных термодинамических параметров среды в основном гиперболическими свойствами [3]. Введем новую величину – бароемкость гидратной системы D_P соотношением:

$$\begin{aligned}
D_P &= m\delta_{\varepsilon} \left\{ S_v \left[S_w \frac{(\rho_w)_p}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_p}{\rho_g} \right] + (1 - S_v) \frac{(\rho_v)_p}{\rho_v} + \frac{(m)_p}{m} \right\} + \\
&+ \frac{\psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[S_w \rho_w (\varepsilon_w)_p + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_p \right] + (1 - S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_p \right\} + \right. \\
&\left. + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_p \right\},
\end{aligned} \tag{15}$$

и перепишем уравнение (14) в более компактной форме

$$D_P \frac{\partial P}{\partial t} + \delta_{\varepsilon} DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_{\varepsilon} = 0. \tag{16}$$

В (15) берется полная производная по давлению с учетом зависимости (7). Воспользовавшись также этой зависимостью (7) и выбирая в качестве единственной термодинамической степени свободы в уравнениях (3), (4), (14) соответствующие внутренние энергии ε_w и ε_g , получим уравнение (14) в энергетическом представлении.

2.2. Двухфазная талая зона

Аналогично разделу 2.1, полагая растепленность $S_v = 1$, получим двухфазное уравнение в талой зоне:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m S_w \rho_w\} + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + q_w = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(1 - S_w) \rho_g\} + \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + q_g = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{m(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s\} + \\ & + \operatorname{div} \{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + [P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] \} + \operatorname{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{W} = - \left\{ m(S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - m) \lambda_s \right\} \nabla T. \quad (20)$$

Далее из уравнений (17)-(19), исключая функцию S_w из-под знака производной по времени, получим уравнения, определяющие неизотермический процесс пьезопроводности в талой зоне:

$$\frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial(m \rho_w)}{\partial t} + \frac{1 - S_w}{\rho_g} \frac{\partial(m \rho_g)}{\partial t} + DIG = 0, \quad (21)$$

$$m \left\{ S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1 - S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} \right\} + \frac{\partial[(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]}{\partial t} + DIG_\varepsilon = 0. \quad (22)$$

Здесь комбинация массовых (DIG) и энергетических (DIG_ε) дивергенций вместе с действием соответствующих источников (q_w, q_g, q_ε) определяются аналогично (14).

3. Метрические сетки метода опорных операторов

Результаты данного раздела аналогичны представленным в [1, 2], где не рассматривались процессы в талой зоне.

Для сеток метода опорных операторов, состоящих из ячеек (Ω), образованных узлами (ω), гранями (σ) и ребрами (λ), характерно наличие замкнутой сопряженной («сдвинутой») сетки, состоящей, например, из доменов $d(\omega)$ вокруг узлов ω (см. рис. 1).

Грани узлового домена определяются метрическим оператором сетки $\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ (см. также ниже). Базисы $\varphi(\lambda)$ здесь попарно входят в

ячейки $\Omega(\lambda)$, примыкающие к ребру λ . Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов (с естественным условием нормировки $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$). Она определяет конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четыреугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические и т.д. 3D сетки, а также их мортарные сшивки, адаптация (с введением новых узлов в ячейках Ω) с сохранением самосопряженности и знакоопределенности соответствующих «дивергентно-градиентных» операций векторного анализа континуальных краевых задач. Дальнейшее изложение носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов V_{φ} иллюстрируется на примере треугольно-четыреугольной 2D сетки.

В области O введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними ($\sigma(\lambda)$) – границами балансных узловых доменов $d(\omega)$ (см. рис. 1).

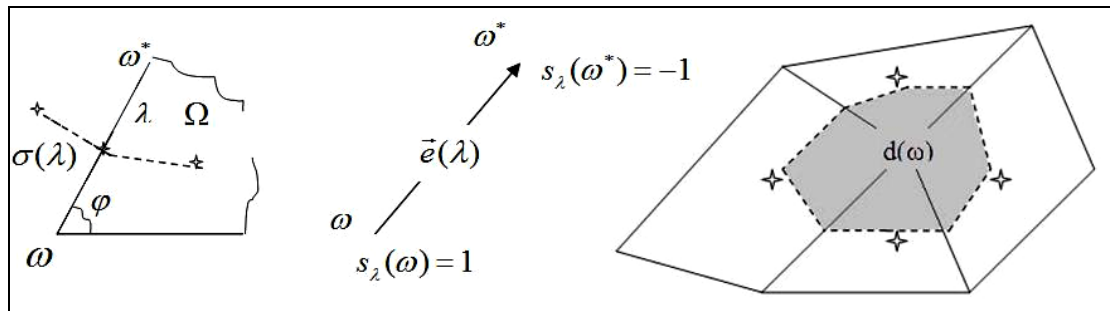


Рис. 1. Построение базисов

Базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\mathbf{e}(\lambda)$, образованных ребрами. Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой поверхность

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) ,$$

ориентированную также как и орт $\mathbf{e}(\lambda)$. Здесь $\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$ – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\mathbf{e}(\lambda)$. Базисный объем дается формулой $v_{\varphi} = \frac{1}{6} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$ для треугольной ячейки Ω , содержащей базис φ и $v_{\varphi} = \frac{1}{4} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$ для четырехугольной ячейки, если $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ – ребра, образующие базис φ .

Наконец, $\sum_{\varphi(\lambda)}$ – суммирование по всем базисам φ , в образовании которых приняло участие ребро λ . Замкнутые вокруг узла ω поверхности $\sigma(\lambda(\omega))$ образуют узловые домены $d(\omega)$.

Внутреннюю дивергенцию векторного поля $DIN_w : (\varphi) \rightarrow (\omega)$ определим аппроксимируя теорему Гаусса на $d(\omega)$:

$$DIN_w X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega) \tau_{wX}(\lambda),$$

$$\tau_{wX}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_\varphi(\mathbf{e}'_{w\varphi}(\lambda), \mathbf{X}_\varphi),$$

$$\mathbf{e}'_{w\varphi}(\lambda) = W_\varphi(\lambda) \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\lambda).$$

Здесь $\sum_{\lambda(\omega)}$ – суммирование по всем ребрам λ , имеющим общий узел ω .

Сеточное векторное поле X задается своими представлениями в базисах X_φ . Множители $W_\varphi(\lambda) > 0$, задаваемые в базисах φ на образующих их ребрах $\lambda(\varphi)$, связаны с монотонизацией сеточных решений в следующем смысле. В соответствии с анализом гиперболичности линеаризованной группы уравнений (1), (2) для насыщенностей в отсутствии гравитации и при фиксированных давлении и температуре [3] аппроксимация абсолютной проницаемости $k(S_v)$ выбирается вниз по потоку. Относительные проницаемости $k_{rw}(S_w)$ и $k_{rg}(1 - S_w)$ берутся вверх по потоку. Это учитывается при выборе множителей $W_\varphi(\lambda)$. Отсутствие индекса, здесь обозначаемого как w в выражениях $DIN_w X$, $\tau_{wX}(\lambda)$, $\mathbf{e}'_{w\varphi}$ и $GRAD_w u$, автоматически обозначает $W_\varphi(\lambda) = 1$ во всех базисах φ на образующих их ребрах $\lambda(\varphi)$, т.е. означает отсутствие монотонизации сеточного решения в используемых аппроксимациях в указанном выше смысле.

Обозначая через $(\cdot)_\Delta$ аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\int_0 (\mathbf{X}, \nabla u) dv \right)_\Delta &= - \left(\int_0 u \operatorname{div} \mathbf{X} dv - \int_{\partial 0} u (\mathbf{X}, \mathbf{ds}) \right)_\Delta \\ &= - \sum_\omega (u_\omega, DIN_w \mathbf{X}) = \sum_\varphi v_\varphi (\mathbf{X}_\varphi, GRAD_w u). \end{aligned}$$

Градиентное векторное поле $GRAD_w : (\omega) \rightarrow (\varphi)$ дается своими представлениями в базисах

$$GRAD_w u = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda u \mathbf{e}'_{w\varphi}(\lambda), \quad \Delta_\lambda u = - \sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega) u_\omega = u_\omega^* - u_\omega.$$

Полагая в базисах φ в качестве \mathbf{X}_φ векторное поле $\mathbf{X}_{w\varphi} = K_\varphi \text{GRAD}_w u$, получим самосопряженный неотрицательный оператор $-\text{DIN}_w \mathbf{X}_w : (\omega) \rightarrow (\omega)$ или $-\text{DIN}_w K \text{GRAD}_w : (\omega) \rightarrow (\omega)$. Здесь потоковое векторное поле \mathbf{X}_w дается своими компонентами в базисах $\mathbf{X}_{w\varphi}$. Оно определяется градиентными свойствами скалярной сеточной функции u , заданной в узлах ω и сеточным симметричным положительно определенным тензорным полем проводимости K , задаваемым своими представлениями в базисах K_φ . Этот оператор будет строго положительным, если хотя бы в одном граничном узле связной разностной сетки задана первая краевая задача, т.е. в этом граничном узле скалярная сеточная функция обращается в ноль.

Также считается, что с повышением аппроксимации множители монотонизации сеточного решения стремятся к единичным, т.е. $W_\varphi(\lambda) \rightarrow 1$. При этом оператор $-\text{DIN}_w K \text{GRAD} : (\omega) \rightarrow (\omega)$ становится близок к самосопряженному неотрицательному оператору $\text{DIN} K \text{GRAD} : (\omega) \rightarrow (\omega)$, хотя в строгом смысле (за исключением ортогональной сетки) не является самосопряженным и неотрицательным.

Ячейки, состоящие из ортогональных базисов, не нарушают свойств самосопряженности и знакоопределенности оператора $\text{DIN}_w \text{GRAD}$ в строгом смысле несмотря на наличие в их базисах аппроксимационной монотонизации сеточного решения.

Для сохранения свойств самосопряженности и знакоопределенности этого оператора рассмотрим два семейства аппроксимаций.

Схемы с ограниченной монотонизацией сеточного решения.

Выделим множество ячеек сетки (Ω^*) , в которых есть хотя бы один неортогональный базис φ , образованный ребрами $(\lambda(\varphi))$. Во всех базисах $(\varphi(\Omega^*))$ внутри этих ячеек Ω^* (т.е. может быть и ортогональных) считается $W_\varphi(\lambda) = 1$. Т.е. в этих базисах монотонизация сеточного решения отсутствует. Например, зависимость представления тензорного поля проводимости K_φ от “гиперболических” переменных (здесь растеппленность S_v , влагонасыщенность S_w и т.п.) аппроксимируется непосредственно в центральном узле ω сетки образующей базис φ . Такие схемы будут обладать самосопряженным и знакоопределенным оператором $\text{DIN}_w K \text{GRAD} : (\omega) \rightarrow (\omega)$. Однако в них отсутствует монотонизация на множестве ячеек сетки, содержащих неортогональность.

Квазимонотонные схемы.

Обозначим через (φ^*) – множество неортогональных базисов сетки. Соответственно $(\varphi)/(\varphi^*)$ – ортогональные базисы. Для аппроксимации

векторного поля $\mathbf{X} = K \operatorname{grad} u$ введем $\mathbf{X}_{w\varphi} = K_{\varphi} \operatorname{GRAD}_w^* u$,

$$\operatorname{GRAD}_w^* u = \begin{cases} \operatorname{GRAD} u, & \varphi \in (\varphi) / (\varphi^*) \\ \operatorname{GRAD}_w u, & \varphi \in (\varphi^*) \end{cases}.$$

Эти схемы также будут обладать самосопряженным и знакоопределенным оператором $\operatorname{DIN}_w K \operatorname{GRAD}_w^* : (\omega) \rightarrow (\omega)$. Поскольку с повышением аппроксимации множители монотонизации сеточного решения стремятся к единичным, т.е. $W_{\varphi}(\lambda) \rightarrow 1$, то операторы $\operatorname{GRAD}_w : (\omega) \rightarrow (\varphi)$ и $\operatorname{GRAD} : (\omega) \rightarrow (\varphi)$, аппроксимируют дифференциальный оператор grad . В отличие от схем с ограниченной монотонизацией, квазимонотонные схемы наряду с самосопряженностью и знакоопределенностью оператора в неортогональных базисах сетки (φ^*) сохраняют монотонность в “главном” смысле при вычислении потоков в сопряженных базисных направлениях.

Подходы 1 и 2 можно применять и локально, т.е. только в части неортогональных базисов (φ^{**}) , где на этапе “предиктор” (явный временной слой, известная итерация и т.п.) не выполняется условие $(\operatorname{GRAD} u, \operatorname{GRAD}_w u) \geq 0$. Для схем с ограниченной монотонизацией при этом генерируется соответствующее множество ячеек (Ω^{**}) , в образовании которых принимал участие хотя бы один базис из (φ^{**}) . Такие локально регуляризируемые в смысле знакоопределенности оператора $\operatorname{divgrad}$ схемы не будут обладать строгими свойствами знакоопределенности и самосопряженности этого оператора. Однако с точки зрения физических приложений сохранение знакоопределенности квадратичных форм в указанном выше смысле является полезным, поскольку позволяет правильно аппроксимировать точный квадрат градиента термодинамических величин в депрессионных воронках скважин, в частности, связанный с этим эффект Джоуля-Томсона в рассматриваемых ниже процессах неизотермической фильтрации.

В рассматриваемой модели фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями механизм монотонизации сеточного решения $W_{\varphi}(\lambda) > 0$, с учетом исследованной в [3] гиперболичности (с отсутствующей гравитацией, $g=0$), системы (1), (2), обеспечивает эффективную монотонизацию сеточных решений по S_v , S_w и $S_g = 1 - S_w$, наряду с сохранением знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин, в пьезопроводной части рассматриваемой ниже дискретной связной задачи неизотермической фильтрации.

В соответствии с исследованиями [3] абсолютная проницаемость $k(S_v)$ в базисах φ на ребрах $(\lambda(\varphi))$, образующих эти базисы всегда выбирается вниз по потоку (по растепленности). Относительные проницаемости $k_{rw}(S_w)$ и

$k_{rg}(1-S_w)$, как правило, берутся вверх по потоку (по влаго- и газонасыщенностям), т.е. как и в двухфазной талой зоне с отсутствием гидрата. Однако в соответствии с анализируемыми в [3] условиями устойчивости здесь возможна также аппроксимация вниз по потоку (по влаго- и газонасыщенностям).

4. Свободно-объемная аппроксимация дивергентно-пьезопроводных разностных схем в талой зоне и в среде с газогидратными включениями

4.1. Трехфазная среда с гидратными включениями

Введем обозначения для функций сетки метода опорных операторов (п.3, см. также рис. 1). К ее узлам ω будем относить ранее представленные в континуальной модели величины

$$\overline{m}, S_v, S_w, \rho_v, \rho_w, \rho_g, \rho_s, P, T, \varepsilon_v, \varepsilon_w, \varepsilon_g, \varepsilon_s, \mu_w, \mu_g, k_{rw}, k_{rg}, q_w, q_g, q_e.$$

К базисам сетки φ в соответствии с п.3 отнесем векторные функции

$$\mathbf{V}_w, \mathbf{V}_g, \nabla P, \nabla T, \mathbf{W}.$$

Сеточные функции, представляющие разрывные материальные свойства веществ, отнесем к ячейкам Ω

$$m, k, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_g, \lambda_s.$$

Очевидны также соотношения

$$\overline{m}_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi m_{\Omega(\varphi)}, \quad \overline{(1-m)}_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi (1-m_{\Omega(\varphi)}) = V_\omega - \overline{m}_\omega, \quad V_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi,$$

т.е. \overline{m}_ω и $\overline{(1-m)}_\omega$ представляют собой объем порового домена $d(\omega)$ (см. рис. 1) и его каркасной части соответственно.

Далее на временных слоях t и $\hat{t} = t + \tau$ ($\tau > 0$ – шаг по времени) введем разностные производные по времени и пространственно-точечные (т.е. в узлах сетки ω) временные интерполяции $a_t = (a - a) / \tau$, $a^{(\delta)} = \delta a + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может зависеть от узла пространственной сетки ω . Например, под величиной

$$\delta_v = \sqrt{(\overline{m}S_v)}^\wedge / \left(\sqrt{(\overline{m}S_v)}^\wedge + \sqrt{(\overline{m}S_v)} \right), \quad 0 < S_v < 1$$

будем понимать свободно-объемную временную аппроксимацию заданных в узлах ω сеточных функций. Т.е. интерполяционный вес δ_v определяется долей объема пор, предназначенного для свободного движения жидкости и газа.

Выбор такой аппроксимации позволит нам в дальнейшем производить дискретные преобразования уравнений, связанные с их расщеплением по физическим процессам, близкие к континуальным. Другие произвольные интерполяции по времени будем обозначать как $[]^{\sim}$. Они могут относиться не только к узлам сетки ω , но и к другим ее элементам (базисам φ и т.п.).

Понимая под индексом S в операциях векторного анализа DIN_s и $GRAD_s$ один из описанных выше видов монотонизации сеточного решения (либо ее отсутствие), монотонизирующей перенос по насыщенностям S_w и S_v , запишем аппроксимацию уравнений (1), (2) и (5) в следующем виде.

Уравнения неразрывности, представляющие собой баланс массы водной и газовой компонент

$$\left\{ \overline{m} [S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w] \right\}_t + DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w)^{\sim} + q_w^{\sim} = 0, \quad (23)$$

$$\left\{ \overline{m} [S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w)] \right\}_t + DIN_s (\rho_g \mathbf{V}_g)^{\sim} + q_g^{\sim} = 0. \quad (24)$$

С помощью оператора $GRAD_s$ потоки воды $(\rho_w \mathbf{V}_w)^{\sim}$ и газа $(\rho_g \mathbf{V}_g)^{\sim}$ аппроксимируются в базисах сетки φ с учетом дискретизации закона Дарси (3), (4), например, на неявном слое по времени любым из стандартных способов [7, 8].

$$\begin{aligned} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{p\sim} &= - \left(\rho_w \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} GRAD_s P^{\sim} + \left(\rho_w^2 \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} g \mathbf{k}, \\ (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{p\sim} &= - \left(\rho_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} GRAD_s P^{\sim} + \left(\rho_g^2 \frac{kk_{rg}}{\mu_g} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} g \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Здесь под $()_{\Delta\varphi}^{\sim}$ понимаются аппроксимации соответствующих выражений в базисах сетки φ с некоторой интерполяцией по времени.

Однако при наличии термобарической зависимости вида (7) для сохранения континуальных свойств знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин вида $\int \varepsilon \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) dV$ (см. также (27) ниже) более предпочтительна форма закона Дарси в энергетической формулировке. Получим ее из следующих соображений.

С учетом термобарической зависимости (7) в зоне трехфазного равновесия гидрат-вода-газ можно написать

$$d\varepsilon_w = \varepsilon_{wp}' dP, \quad d\varepsilon_g = \varepsilon_{gp}' dP,$$

где ε_{wp}' и ε_{gp}' – полные производные от внутренней энергии по давлению с учетом (7).

Тогда закон Дарси (3), (4) в базисах сетки φ (образованных узлами, в которых выполнено термобарическое соотношение (7)) представим в энергетической форме:

$$(\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} = - \left(\rho_w \frac{kk_{rw}}{\mu_w \varepsilon_{wp}} \right)_{\Delta \varphi}^{\sim} GRAD_s \varepsilon_w^{(\delta_v)} + \left(\rho_w^2 \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \right)_{\Delta \varphi}^{\sim} g \mathbf{k},$$

$$(\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} = - \left(\rho_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g \varepsilon_{gp}} \right)_{\Delta \varphi}^{\sim} GRAD_s \varepsilon_g^{(\delta_v)} + \left(\rho_g^2 \frac{kk_{rg}}{\mu_g} \right)_{\Delta \varphi}^{\sim} g \mathbf{k}.$$

Таким образом

$$(\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim} = \{ (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{p \sim} | (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} \},$$

$$(\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\sim} = \{ (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{p \sim} | (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} \}$$

Уравнение баланса внутренней энергии, аппроксимирующее (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \overline{m} \left[S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v \right] + \overline{(1 - m)} \rho_s \varepsilon_s \right\}_t + \\ & + DIN_s \left[\left(\varepsilon_w^{(\delta_v)} \right)_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim} \right] + DIN_s \left[\left(\varepsilon_g^{(\delta_v)} \right)_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\sim} \right] + \\ & + DIN \left[\left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right]_{\varphi}^{\sim} \right] + DIN \mathbf{W}^{\sim} + q_{\varepsilon}^{\sim} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Индекс up в выражении для энергии воды $(\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{up}$ обозначает, что соответствующие величины берутся вверх (up wind) по водному потоку $(\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim}$ в определенной ранее дивергенции $DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim}$. Аналогично индекс up понимается в выражении для энергии газа $(\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{up}$.

Работа сил давления $[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]_{\varphi}^{\sim}$ и полный поток тепла \mathbf{W}^{\sim} в среде аппроксимируются в базисах сетки φ , например, на неявном слое по времени стандартным образом [7, 8]:

$$[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]_{\varphi}^{\sim} = \left(\frac{P}{\rho_w} \right)_{\varphi}^{\sim} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{p \sim} + \left(\frac{P}{\rho_g} \right)_{\varphi}^{\sim} (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{p \sim}$$

Далее, дискретный аналог пьезопроводно-диссипативного уравнения (14), физически расщепленного с блоком переноса процессов насыщения (23), (24), но разностно эквивалентный системе исходных законов сохранения модели (23)-(25), имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \delta_{\varepsilon}^{(\delta_v)} \{ [(\bar{m}S_v)S_w]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_w)_t}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + [(\bar{m}S_v)(1-S_w)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_g)_t}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} + \\
& + [\bar{m}(1-S_v)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_v)_t}{(\rho_v)^{(\delta_v)}} + (\bar{m})_t \} + \\
& + \left[\frac{\psi}{m\rho_v} \right] \sim \{ [(\bar{m}S_v)S_w\rho_w]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_w)_t + [(\bar{m}S_v)(1-S_w)\rho_g]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_g)_t + \\
& + [\bar{m}(1-S_v)\rho_v]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_v)_t + [(1-\bar{m})\rho_s\varepsilon_s]_t \} + \delta_{\varepsilon}^{(\delta_v)} DIG \sim + \left[\frac{\psi}{m\rho_v} \right] \sim DIG_{\varepsilon} \widetilde{=} 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\delta_{\varepsilon} = [\beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g] - \varepsilon_v,$$

$$[\psi / (m\rho_v)] \sim = \left[\beta_w / (\rho_w)^{(\delta_v)} + (1 - \beta_w) / (\rho_g)^{(\delta_v)} \right] - 1 / (\rho_v)^{(\delta_v)},$$

$$DIG \sim = \frac{1}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} DIN_s(\rho_w \mathbf{V}_w) \sim + \frac{1}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} DIN_s(\rho_g \mathbf{V}_g) \sim + \frac{q_w}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + \frac{q_g}{(\rho_g)^{(\delta_v)}},$$

$$\begin{aligned}
DIG_{\varepsilon} &= \left[DIN_s \left\{ (\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w) \sim \right\} - (\varepsilon_w)^{(\delta_v)} DIN_s(\rho_w \mathbf{V}_w) \sim \right] + \\
&+ \left[DIN_s \left\{ (\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g) \sim \right\} - (\varepsilon_g)^{(\delta_v)} DIN_s(\rho_g \mathbf{V}_g) \sim \right] + \\
&+ DIN \left\{ \left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right] \sim \right\} + DIN \mathbf{W} \sim + \left(q_{\varepsilon} - \varepsilon_w^{(\delta_v)} q_w - \varepsilon_g^{(\delta_v)} q_g \right)
\end{aligned} \tag{27}$$

В выражении DIG_{ε} , входящем в (26), имеет место монотонная (вверх по потоку) энергетическая аппроксимация для $\varepsilon_w^{(\delta_v)}$ и $\varepsilon_g^{(\delta_v)}$ в соответствующих комбинациях дивергентных выражений, содержащих эти величины.

4.2. Двухфазная талая зона

Аналогично разделу 4.1, полагая сеточную функцию $S_v = 1$ в узлах ω , получим двухфазное семейство полностью консервативных разностных схем в талой зоне. Вместо интерполяционного веса δ_v здесь соответственно вводится вес: $\delta_1 = \sqrt{(\bar{m})} / \left(\sqrt{(\bar{m})} + \sqrt{(\bar{m})} \right)$ в узлах сетки ω .

Уравнения неразрывности, представляющие собой баланс массы водной и газовой компонент в талой зоне, запишутся в виде:

$$\left\{ \overline{m} S_w \rho_w \right\}_t + DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim + q_w^\sim = 0, \quad (28)$$

$$\left\{ \overline{m} (1 - S_w) \rho_g \right\}_t + DIN_s (\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim + q_g^\sim = 0. \quad (29)$$

В талой зоне с помощью оператора $GRAD_s$ потоки воды $(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$ и газа $(\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim$ определяются в неэнергетической формулировке, т.е. аппроксимируются в базисах сетки φ величинами $(\rho_w \mathbf{V}_w)_\varphi^{p\sim}$ и $(\rho_g \mathbf{V}_g)_\varphi^{p\sim}$ соответственно (см. раздел 4.1).

Уравнение баланса внутренней энергии в талой зоне, аппроксимирующее (19), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \overline{m} (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + \overline{(1 - m)} \rho_s \varepsilon_s \right\}_t + \\ & + DIN_s \left[\left(\varepsilon_w^{(\delta_1)} \right)_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim \right] + DIN_s \left[\left(\varepsilon_g^{(\delta_1)} \right)_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim \right] + \\ & + DIN \left[\left[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right]^\sim \right] + DIN \mathbf{W}^\sim + q_\varepsilon^\sim = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначение и понимание разностных объектов (индексы up, s , работа сил давления, поток тепла) здесь такие же, как у соответствующих аналогов в разделе 4.1.

Далее из уравнений (28)-(30), исключая функцию S_w , определенную в узлах сетки ω , из под знака разностной производной по времени, получим полностью консервативные разностные уравнения, определяющие неизотермический процесс пьезопроводности в талой зоне:

$$\frac{(S_w)^{(\delta_1)}}{(\rho_w)^{(\delta_1)}} \left[\overline{m} \rho_w \right]_t + \frac{(1 - S_w)^{(\delta_1)}}{(\rho_g)^{(\delta_1)}} \left[\overline{m} \rho_g \right]_t + DIG^\sim = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & (\overline{m})^{(1-\delta_1)} \{ [S_w \rho_w]^{(\delta_1)} (\varepsilon_w)_t + [(1 - S_w) \rho_g]^{(\delta_1)} (\varepsilon_g)_t \} + \\ & + \left[\overline{(1 - m)} \rho_s \varepsilon_s \right]_t + DIG_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Комбинация в узлах ω разностных массовых (DIG^\sim) и энергетических (DIG_ε) дивергенций вместе с действием соответствующих источников ($q_w^\sim, q_g^\sim, q_\varepsilon^\sim$) определяются аналогично (27), но с заменой интерполяционного веса δ_v на вес δ_1 .

5. Алгоритмы совместного расчета гидратосодержащих и талых состояний флюидодинамической среды

Поставим в соответствие узловому балансному домену сетки $d(\omega)$ фиксированный единичный объем и всю массу молекул воды M_w , массу молекул метана M_g и полную внутреннюю энергию системы E , включая скелет, находящиеся в этом объеме. Тогда по этим параметрам $\{1, M_w, M_g, E\}$ локальное термодинамически равновесное состояние среды определяется однозначно. Будем также считать, что диапазон изменения балансных параметров $\{M_w, M_g, E\}$ таков, что возникает либо талая зона, либо трехфазная гидратосодержащая среда. Т.е. существует обязательная альтернатива: либо решение $\{S_v, S_w, P, T\}$ в трехфазном гидратосодержащем термодинамически равновесном состоянии, либо решение $\{S_w, P, T\}$, соответствующее термодинамически равновесной двухфазной талой зоне. Далее рассмотрим раздельно эти две задачи.

5.1. Трехфазное гидратосодержащее состояние

Балансные уравнения для массы воды M_w , массы метана M_g и полной внутренней энергии системы E в единичном приузловом объеме (с пористостью $m_\omega = \bar{m}_\omega / V_\omega$) имеют вид:

$$m[S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w] = M_w, \quad (33)$$

$$m[S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w)] = M_g, \quad (34)$$

$$m[S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v] + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s = E. \quad (35)$$

Кроме того считается выполненным термобарическое соотношение $T_{dis} = f(P)$.

Для энтальпий единицы массы $i_l = \varepsilon_l + P / \rho_l$, $l = g, w, v, s$ выполнено $i_l = c_{pl} T$, $l = g, w, s$, c_{pl} – соответствующие теплоемкости при постоянном давлении.

Энтальпии гидрата, свободных воды и газа термодинамически согласованы в смысле соотношения: $\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h$, где h – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата. Учет неидеальности газа может быть выполнен заменой теплоемкости c_{pg} на i_g / T в ниже вводимых растепленных теплоемкостях Φ_p и f_{pk} (см. раздел 5.3), если известна функция

$i_g(P, T)$. Это же относится к заменам c_{pw} на i_w/T и c_{ps} на i_s/T в тех случаях, когда энтальпия непропорциональна температуре среды. Например, в ниже рассматриваемой модели двойной каркасности среды (см. раздел 5.3.), интерпретируемой как двухфазная талая зона (см. (56)), теплоемкость простого скелета c_{ps} заменяется на i_k/T .

$$\Phi_p = M_w c_{pw} + M_g c_{pg} + (1-m) \rho_s c_{ps} > 0. \quad (36)$$

Здесь Φ_p – растепленная теплоемкость при постоянном давлении системы, приходящаяся на единицу объема среды.

Исключая функции растепленности S_v и влагонасыщенности S_w в системе уравнений (33)-(35), после несложных преобразований получим уравнение для равновесного давления P в системе:

$$-\Phi_p + \frac{1}{T} \left[P + E + \frac{\psi_h}{\psi_\rho} \rho_v h \right] = 0, \quad (37)$$

$$\psi_h = -(m\rho_w - M_w)\rho_g + M_g\rho_w, \quad (m\rho_w - M_w) > 0, \quad (38)$$

$$\psi_\rho = -(\rho_w - \beta_w\rho_v)\rho_g + (1 - \beta_w)\rho_v\rho_w, \quad (\rho_w - \beta_w\rho_v) > 0. \quad (39)$$

На решении системы (33)-(35) также выполнено соотношение:

$$\psi_h = m(1 - S_v)\psi_\rho, \quad (40)$$

позволяющее по заданным термодинамическим параметрам среды P и $T = T_{dis} = f(P)$ определить растепленность S_v , и далее, например, из уравнения (33), найти влагонасыщенность S_w .

Для итерационного процесса (37)-(39) по определению давления P считается заданным начальное приближение $P_* \in (P_i, P_a)$ и физически приемлемый диапазон давлений $(P_i < P_a)$, в котором решение существует и единственно. Отметим также следующие из (38), (39) соотношения:

$$\rho_g \Big|_{\psi_\rho=0} = \frac{1 - \beta_w}{\rho_w / \rho_v - \beta_w} \rho_w < \rho_w,$$

$$\psi_h \Big|_{\psi_\rho=0} = \left[M_g - \chi_w(1 - \beta_w) \right] \rho_w, \quad \chi_w = (m\rho_w - M_w) / (\rho_w - \beta_w\rho_v) > 0.$$

5.1.1. Приближение идеального газа

Для метана рассмотрим случай идеального газа, полагая в (12) коэффициент сверхсжимаемости $z_g = 1$. Также в качестве термобарического соотношения (7) выберем приближение [9]:

$$T = A \ln P + B, \quad A > 0, \quad B > 0$$

или

$$T = A \ln(P/P_0), \quad P_0 = e^{-B/A} > 0.$$

Тогда зависимость плотности газа от давления:

$$\rho_g = P / [AR \ln(P/P_0)]$$

имеет вид, представленный на рис. 2, и при определении итерационного решения для (37)-(39) можно ограничиться диапазоном $eP_0 \ll P_i < P_a < P_2$ $\psi_{\rho=0}$.

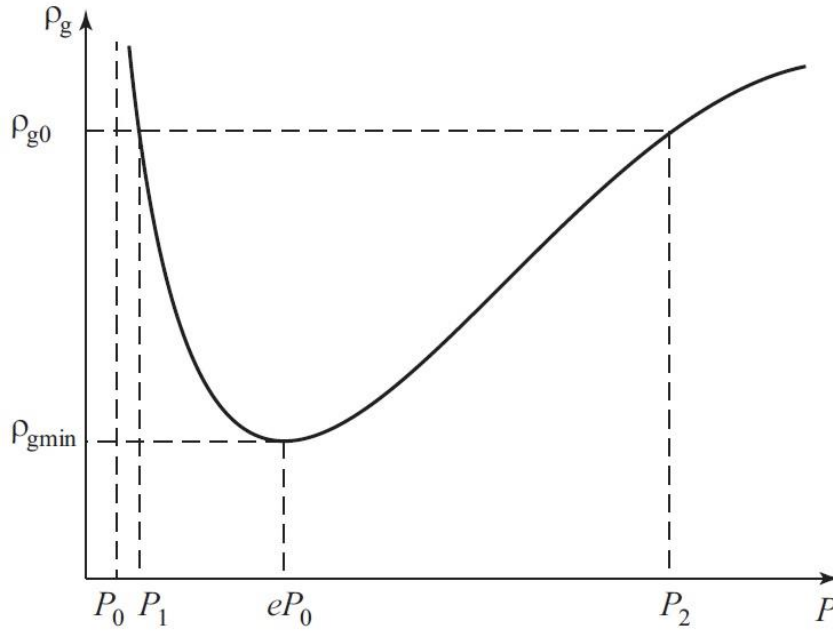


Рис. 2. Зависимость плотности газа от давления.

На рис. 2 $\rho_{gmin} = eP_0 / (AR) < \rho_g|_{\psi_{\rho}=0}$, $\rho_{g0} = \rho_g|_{\psi_{\rho}=0}$, $P_1 = P_1|_{\psi_{\rho}=0}$, $P_2 = P_2|_{\psi_{\rho}=0}$.

5.2. Двухфазное равновесие в талой зоне

Аналогично разделу 5.1. балансные уравнения имеют вид (полагаем $S_v = 1$):

$$m[S_w \rho_w] = M_w, \quad (41)$$

$$m[(1 - S_w) \rho_g] = M_g, \quad (42)$$

$$m[S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g] + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s = E. \quad (43)$$

Поскольку $S_v = 1$, то из (40) следует $\psi_h = 0$, т.е.

$$-(m \rho_w - M_w) \rho_g + M_g \rho_w = 0, \quad (m \rho_w - M_w) > 0.$$

Кроме того, из (37) следует:

$$-\Phi_p + \frac{1}{T}[P + E] = 0.$$

Здесь $\Phi_p > 0$ определяется согласно (36).

Для неидеального газа ($z_g \neq 1$ в (12)) в итерационном процессе по определению давления P (44) задается некоторое начальное приближение P_* .

$$\frac{P}{z_g(P, T)RT} = \frac{M_g \rho_w}{m \rho_w - M_w}, \quad T = \frac{P + E}{\Phi_p}, \quad (44)$$

В случае идеального газа ($z_g = 1$ в (12)) для определения термодинамических параметров P и T могут быть использованы соотношения:

$$\frac{E}{P} = \frac{(m \rho_w - M_w) \Phi_p}{M_g \rho_w R} - 1, \quad T = \frac{P + E}{\Phi_p}, \quad (45)$$

Далее влагонасыщенность S_w определяется с учетом (41).

5.3. Двойная каркасность

Выберем близкую к единице величину $\Delta_v < 1$. В данном узле ω близкую к единице растепленность $S_v \rightarrow 1$, такую что $\Delta_v < S_v < 1$, зафиксируем как параметр. В физическом смысле мы в балансном домене сетки $d(\omega)$ производим гидратное капсулирование, т.е. считаем, что новый твердый каркас системы (помечаемый индексом k) состоит из двух частей: старый скелет с плотностью ρ_s , объемная доля которого в пространстве $(1 - m)$ и капсулированный гидрат с плотностью ρ_v и объемной долей $(m - m_v)$. Здесь $m_v = m S_v$ интерпретируется как капсулированная пористость двухфазной системы, т.е. та доля объема, в которой происходит течение свободных флюидов – воды и газа. Таким образом, для плотности каркаса, его внутренней энергии и энтальпии, приходящихся на единицу массы, можно написать:

$$\rho_k = \frac{m - m_v}{1 - m_v} \rho_v + \frac{1 - m}{1 - m_v} \rho_s, \quad (46)$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{\rho_k} \left[\frac{m - m_v}{1 - m_v} \rho_v \varepsilon_v + \frac{1 - m}{1 - m_v} \rho_s \varepsilon_s \right], \quad (47)$$

$$i_k = \varepsilon_k + \frac{P}{\rho_k}. \quad (48)$$

Здесь

$$i_k = f_{pk} T - \frac{m - m_v}{1 - m_v} \frac{\rho_v}{\rho_k} h, \quad (49)$$

$$f_{pk} = \frac{1}{\rho_k} \left\{ \frac{m - m_v}{1 - m_v} \rho_v (\beta_w c_{pw} + (1 - \beta_w)_g c_{pg} + \frac{1 - m}{1 - m_v} \rho_s c_{ps}) \right\}. \quad (50)$$

Величина f_{pk} интерпретируется как каркасная растепленная теплоемкость единицы массы при постоянном давлении.

Вводя по определению вместо масс M_w и M_g (см. начало раздела 5) ту их часть, которая приходится на течение свободных воды и газа и соответствует капсулированной пористости $m_v = m S_v$, запишем:

$$M_{vw} = M_w - m(1 - S_v) \beta_w \rho_v, \quad (51)$$

$$M_{vg} = M_g - m(1 - S_v)(1 - \beta_w) \rho_v. \quad (52)$$

Тогда система уравнений (33)-(35) может быть переписана в виде:

$$m_v [S_w \rho_w] = M_{vw}, \quad (53)$$

$$m_v [(1 - S_w) \rho_g] = M_{vg}, \quad (54)$$

$$m_v [S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g] + (1 - m_v) \rho_k \varepsilon_k = E, \quad (55)$$

что совпадает с системой уравнений (41)-(43) для двухфазной равновесной талой зоны с формальной заменой:

$$m_v \leftrightarrow m, M_{vw} \leftrightarrow M_w, M_{vg} \leftrightarrow M_g, \rho_k \leftrightarrow \rho_s, \varepsilon_k \leftrightarrow \varepsilon_s. \quad (56)$$

Из (55) следует также энтальпийное соотношение:

$$m_v [S_w \rho_w i_w + (1 - S_w) \rho_g i_g] + (1 - m_v) \rho_k i_k = E + P. \quad (57)$$

Таким образом, осуществляя перерасчет вида (56) в отдельных узловых балансных доменах $d(\omega)$ разностной сетки, мы можем переключать режим расчета из трехфазного гидратосодержащего состояния в двухфазную талую зону с двойной каркасностью. Причем двойной каркас можно интерпретировать как среду с простым скелетом. Возможны также и обратные переходы из двухфазной талой зоны (с двойным каркасом или простым скелетом) в трехфазное гидратосодержащее состояние.

5.4. Эволюционные трансфазные алгоритмы

Изложенное в предыдущих разделах позволяет предложить некоторые методы регуляризации эволюционных трансфазных расчетов задач совместной фильтрации в пьезопроводной среде с газогидратными включениями и в талой безгидратной зоне с сохранением полной консервативности соответствующих разностных алгоритмов.

5.4.1. Метод двойной каркасности

Переход из трехфазной среды с газогидратными включениями в двухфазную талую безгидратную зону методом двойной каркасности (см. раздел 5.3.) на данном шаге по времени используется как один из возможных видов регуляризации трансфазных расчетов. В дальнейшем, на последующих временных шагах двойная каркасность переводится в простой скелет, если энергии в узловом балансном домене $d(\omega)$ системе хватает, чтобы оставаться двухфазной (раздел 5.2). Т.е. выполняется условие $T \geq T_{dis}$. Или система находит свое термодинамическое равновесие как трехфазная гидратосодержащая среда (раздел 5.1), если ее температура оказывается ниже температуры диссоциации T_{dis} (см. (7)).

5.4.2. Метод перегретого растепления

Перегретое растепление с балансным переходом в двухфазную талую зону с простым скелетом осуществляется следующим образом. Если в узловом балансном домене $d(\omega)$ происходил расчет трехфазной среды с газогидратными включениями и растепленность S_v превысила единичное значение ($S_v \geq 1$), то это означает что трехфазного термодинамического равновесия определяемого параметрами M_w , M_g и E согласно (33)-(35) не существует. Поскольку термодинамически равновесное состояние среды определяется однозначно, то по этим же параметрам (M_w , M_g и E) определяется решение $\{S_w, P, T\}$ соответствующее термодинамически равновесной двухфазной талой зоне согласно (41)-(43). Дальнейший расчет в данном узле ω на последующих шагах по времени происходит уже в двухфазной талой зоне с простым скелетом.

5.4.3. Метод переохлажденной талой зоны

Пусть в узловом балансном домене $d(\omega)$ происходил расчет двухфазной талой зоны (с простым скелетом или двойным каркасом) и на данном шаге по времени в узле ω температура оказалась ниже температуры диссоциации (т.е. $T < T_{dis} = f(P)$, см. (7)). Тогда по известным из (41)-(43) значениям $\{M_w, M_g$ и $E\}$ в талой зоне вычисляются $\{S_v, S_w, P$ и $T\}$ согласно (33)-(35) для

трехфазного гидратосодержащего состояния. Дальнейший расчет в данном узле ω на последующих шагах по времени происходит в трехфазной гидратосодержащей зоне. Возможна модификация этого подхода, когда при выполнении условия $T < T_{dis}$ в данном узле ω перерасчета согласно уравнениям (33)-(35) не производится, а трехфазным гидратосодержащим состоянием на явном слое по времени считается $S_v = 1$ и известные из талой зоны значения S_w , P и T . При этом термобарическое условие (7) для трехфазного расчета выполняется только на неявном шаге по времени.

6. Результаты расчетов

Рассмотрим следующий пространственно-одномерный процесс на отрезке $x \in [0, l]$, l – длина расчетной области. В нем в начальный момент времени давление $P(x, 0) = 2 \times 10^7$ Па, водонасыщенность $S_w(x, 0) = S_w^*$ и растепленность $S_v(x, 0) = S_v^*$ однородны по пространству, $0 < S_w^* < 1$ и $0 < S_v^* < 1$ – постоянные величины. Ускорение свободного падения не учитывается ($g = 0$). Границы расчетной области предполагаются непроницаемыми твердыми «стенками», т.е. поток через них нулевой: $\mathbf{V}_w|_{x=0} = 0$, $\mathbf{V}_g|_{x=0} = 0$, $\mathbf{V}_w|_{x=l} = 0$, $\mathbf{V}_g|_{x=l} = 0$, $t > 0$.

Предположим, что в некоторой узкой пространственной области работает источник:

$$q_w = \alpha(P - P^*), \quad q_g = \beta(P - P^*), \quad q_\varepsilon = \varepsilon_w q_w + \varepsilon_g q_g,$$

где P^* – постоянная величина, α и β – характеристики источника (стока) в призабойной зоне, обусловленные перепадом давления внутри скважины и в пласте. Всюду в дальнейшем будем считать $\alpha = 0$, $\beta = 0.00001 \frac{c}{M^2}$. При этом размерность давления $[P] = \text{Па}$. Источник действует только в пространственной области $x \in [0.4, 0.6] \text{ м}$.

Для расчета были выбраны следующие значения параметров, характерные для Мессояхского газогидратного месторождения [10-12].

$$\rho_w = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_v = 910 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_s = 2800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \beta_w = 0.9, \quad A = 7.28 \text{ К}, \quad B = 169.7 \text{ К},$$

$$\mu_w = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_g = 0.014 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad c_w = 4165 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad c_g = 2500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

$$c_s = 873 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad M = 0.016 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad h = 514810 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad R = \frac{8.31}{M} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}, \quad S_w^* = 0.6,$$

$$S_v^* = 0.8, \quad k(S_v) = k_0 \cdot (S_v)^3, \quad k_0 = 10 \text{ мД} = 10^{-14} \text{ м}^2, \quad P^* = 2 \text{ МПа}, \quad m = 0.35,$$

$$k_{rw}(S_w) = 1.477S_w^5 - 1.587S_w^6 + 1.11S_w^7 - 0.0473, \quad k_{rg}(S_w) = 1.044 - 1.7S_w + 0.6S_w^2.$$

Минимальное значение водонасыщенности $S_{w\min} = 0.55$.

$$k_{rw}(S_w) = 0, \quad k_{rg}(S_w) = k_{rg}(S_{w\min}) \quad \text{при } S_w \leq S_{w\min}.$$

Максимальное значение водонасыщенности $S_{w\max} = 0.9$.

$$k_{rw}(S_w) = k_{rw}(S_{w\max}), \quad k_{rg}(S_w) = 0 \quad \text{при } S_w \geq S_{w\max}.$$

Длина модельной трубы полагается равной $l = 1$ м, шаг по пространственной координате $h = 0.01$ м. Расчеты приводятся для моментов времени $t = 1, 10, 100$ с. На рис. 3-9 представлены результаты расчетов по схеме со свободно-объемной аппроксимацией $\alpha = 0$, $\beta = 0.00001$ при $x \in [0.4; 0.6]$.

На рис. 3-6 можно увидеть, что в расчетах реализуется совместный трансфазный пространственно расширяющийся внутри области действия отбора газа $[0.4; 0.6]$ процесс депрессии давления в возникающей талой зоне и в остальной пьезопроводной среде коллектора с газогидратными включениями. Такой трансфазный расчет проводится впервые.

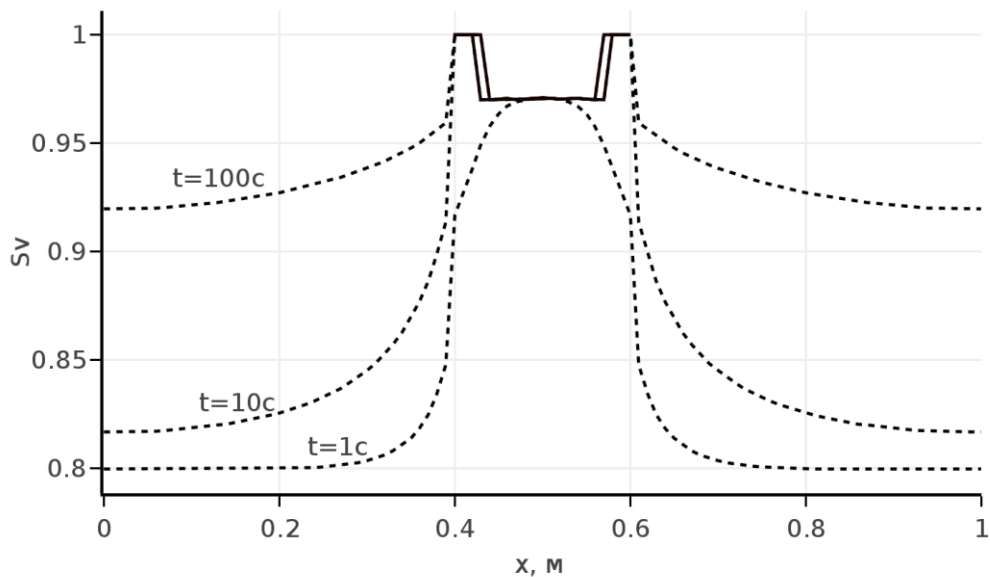


Рис. 3. Распределение растепленности для моментов времени 1, 10, 100 с.

Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.

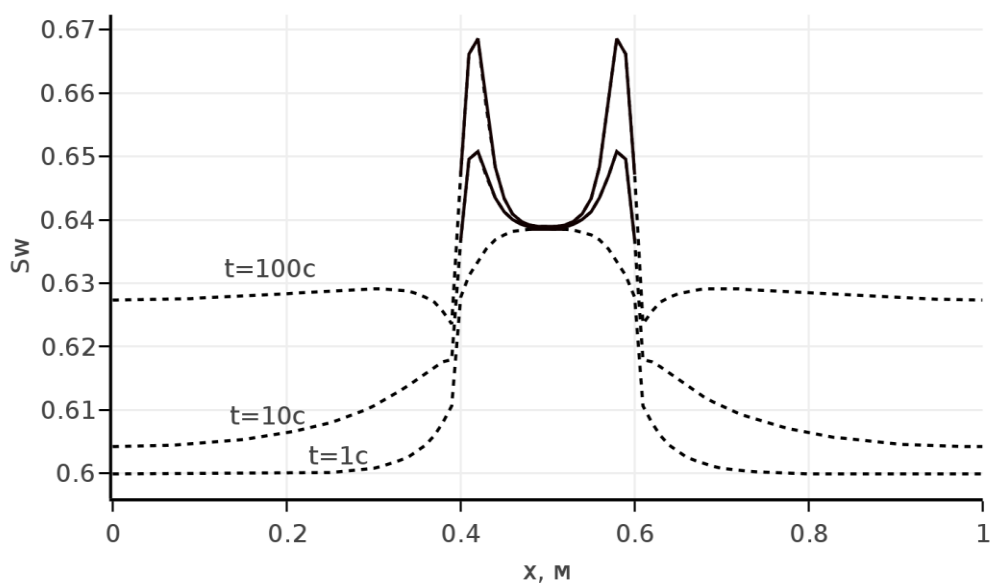


Рис. 4. Распределение водонасыщенности для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.

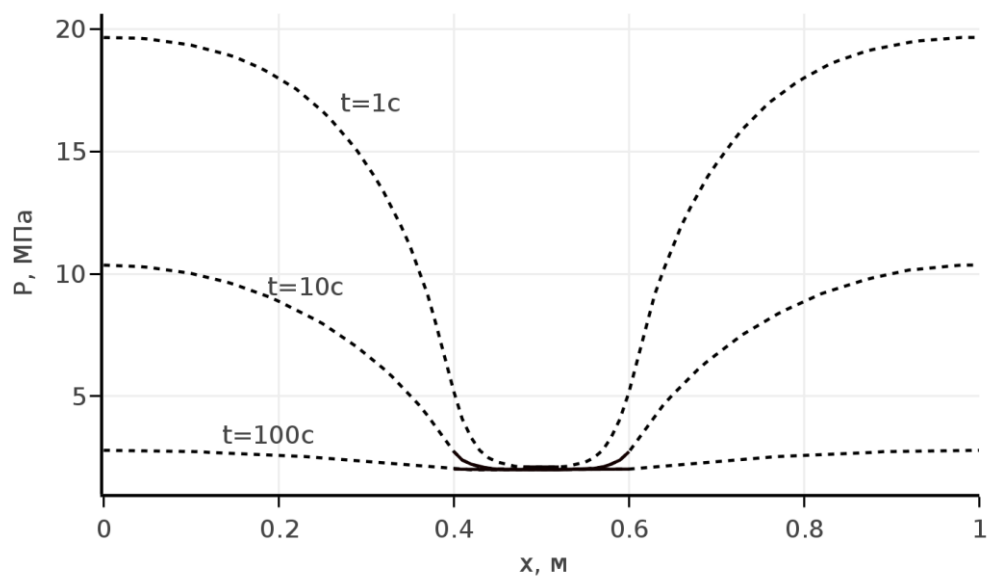


Рис. 5. Распределение давления для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.

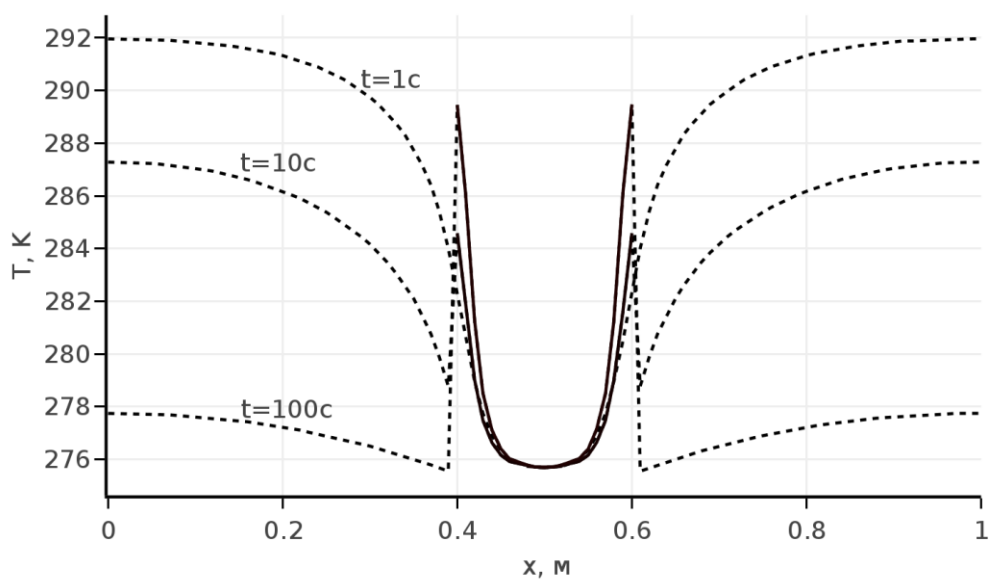


Рис. 6. Распределение температуры для моментов времени 1, 10, 100 с. Трехфазная зона – штрих-пунктир, талая зона – сплошная линия.

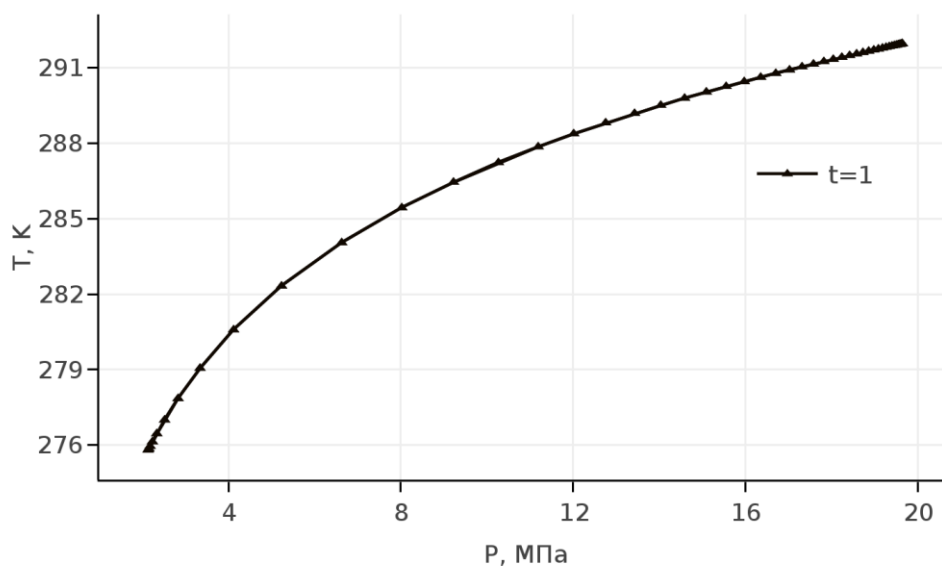


Рис. 7. Зависимость температуры от давления во всей плоскости для момента времени 1 с. Термобарическое равновесие $T=f(P)$ – сплошная линия.

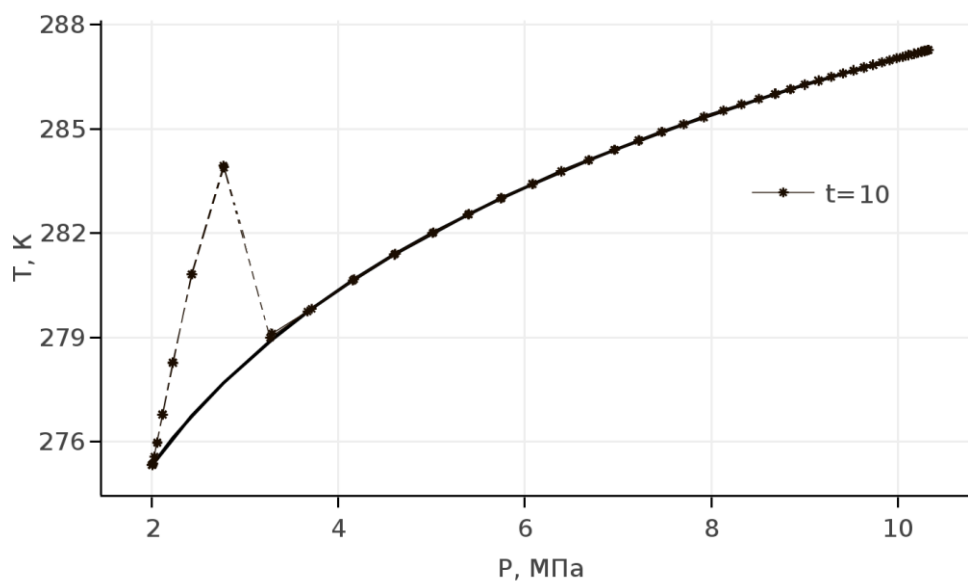


Рис. 8. Зависимость температуры от давления во всей плоскости для момента времени 10 с. Термобарическое равновесие $T=f(P)$ – сплошная линия.

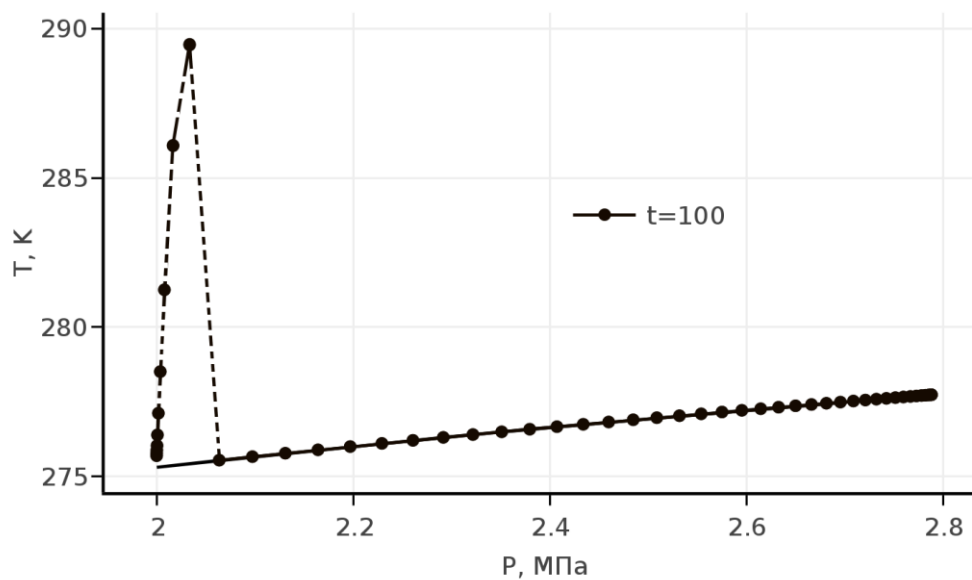


Рис. 9. Зависимость температуры от давления во всей плоскости для момента времени 100 с. Термобарическое равновесие $T=f(P)$ – сплошная линия.

Пики температуры на рис. 6 на границах области отбора газа ($x = 0.4$ м и $x = 0.6$ м) связаны с отсутствием термобарической зависимости $T_{dis} = T(P)$ в возникшей здесь и продолжающей пространственно расширяться талой зоне. Сюда прибывает более горячий газ из областей, где отбор газа отсутствует, энергия которого не тратится на растепление гидратов, уже отсутствующих в талой зоне.

На рис. 7-9 представлены зависимости температуры от давления, полученные в расчетах для моментов времени 1, 10, 100 с. Расчетные данные помечены маркерами в отличие от кривой термобарического равновесия $T_{dis} = T(P)$, изображенной сплошной линией. Также видно, что в процессе расчета происходит перемещение области трехфазного течения в целом в зону пониженного давления вдоль кривой термобарического равновесия. При этом часть области флюидодинамического течения вблизи границ области отбора газа ($x = 0.4$ м и $x = 0.6$ м), соответствующая возникающей двухфазной талой зоне, «соскальзывает» с кривой равновесия в область более высоких температур.

7. Заключение

В работе применительно как к талой зоне, так и среде с твердофазными гидратными включениями разработан метод решения этих задач. Метод основан на расщеплении по физическим процессам переноса влаго-, гидратонасыщенностей с одной стороны и выделения пьезопроводных процессов, учитывающих наличие твердой гидратной фазы в порах с другой. Были написаны алгоритмы и разработана программная реализация. Совместный трансфазный расчет с динамически изменяющимися во времени пространственными локализациями различного числа фаз проводится впервые. Результаты расчетов показывают эффективность разработанных методов для расчета реальных задач, связанных с залежами газогидратов, исследования сложных трансфазных процессов, а также динамики водо- и гидратонасыщенности в пласте.

Библиографический список

1. Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга, П.И. Рагимли. Об одном подходе свободно-объемной аппроксимации пьезопроводной среды с газогидратными включениями // *Mathematica Montisnigri*, 2017, т. 40, с. 68–89.
2. Yu.A. Poveshchenko, V.O. Podryga, P.I. Rahimly, Yu.S. Sharova. About one discrete model of splitting by the physical processes of a piezoconductive medium with gas hydrate inclusions // *Journal of Physics: Conference Series (JPCS)*, 2018, v. 946, p. 012077.
3. Ю.А. Повещенко, Г.И. Казакевич. Математическое моделирование газогидратных процессов // *Математические машины и системы*, 2011, т. 3, с. 105–110.
4. П.И. Рагимли, Ю.А. Повещенко, О.Р. Рагимли, В.О. Подрыга, Г.И. Казакевич, И.В. Гасилова. Использование расщепления по физическим процессам для численного моделирования диссоциации газовых гидратов // *Математическое моделирование*, 2017, т. 29, №7, с. 133–144.
5. С.Ш. Бык, Ю.Ф. Макогон, В.И. Фомина. Газовые гидраты. – М.: Химия, 1980, 296 с.
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости. – М.: Наука, 1987, 248 с.
7. А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, И.В. Гасилова, Е.Ю. Дорофеева. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, №12, с. 86–96.
8. А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, Е.А. Самарская, В.Ф. Тишкин. Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000, 254 с.
9. Э.А. Бондарев, Г.Д. Бабе, А.Г. Гройсман, М.А. Каниболотский. Механика образования гидратов в газовых потоках. – Новосибирск: Наука, 1976, 158 с.
10. Р.С. Богатыренко. Особенности разработки и эксплуатации газогидратных месторождений (на примере Мессояхского месторождения). – М.: Диссертация кандидата технических наук, 1979, 159 с.
11. А.Л. Сухоносенко. Термогидродинамическое моделирование процессов разработки газогидратных месторождений. – М.: Диссертация кандидата технических наук, 2013, 145 с.
12. А.Н. Дмитриевский, А.В. Каракин, Ю.А. Повещенко, Г.И. Казакевич, П.И. Рагимли. Гидродинамическое моделирование гидратного месторождения // *Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений*, 2017, т. 2, с. 30–35.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Постановка задачи.....	5
3. Метрические сетки метода опорных операторов.....	9
4. Свободно-объемная аппроксимация дивергентно-пьезопроводных разностных схем в талой зоне и в среде с газогидратными включениями	14
5. Алгоритмы совместного расчета талых и гидратосодержащих состояний флюидодинамической среды.....	19
6. Результаты расчетов.....	25
7. Заключение.....	30
Библиографический список.....	31