ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 275 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лапик М.А., Туляков Д.Н.

Векторные задачи равновесия Анжелеско и Никишина и многомерный аналог цепочки Тоды. Предельный случай, когда второй отрезок стянут в точку

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лапик М.А., Туляков Д.Н. Векторные задачи равновесия Анжелеско и Никишина и многомерный аналог цепочки Тоды. Предельный случай, когда второй отрезок стянут в точку // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 275. 12 с. doi:**10.20948/prepr-2018-275**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-275**

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.А. Лапик, Д.Н. Туляков

ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ АНЖЕЛЕСКО И НИКИШИНА И МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ, КОГДА ВТОРОЙ ОТРЕЗОК СТЯНУТ В ТОЧКУ

Москва, 2018

М.А. Лапик, Д.Н. Туляков E-mail: mashalapik@gmail.com

Векторные задачи равновесия Анжелеско и Никишина и многомерный аналог цепочки Тоды. Предельный случай, когда второй отрезок стянут в точку [1]

Аннотация. В работе рассмотрен предельный случай векторной задачи равновесия Анжелеско и Никишина, когда на первом отрезке лежит масса x, а на втором отрезке, который стянут в точку, лежит масса y. Рассмотрена линейная зависимость внешнего поля от времени. Приведены уравнения в частных производных на концы носителя равновесных мер. `Стр.~12, библ. назв.~11`

Ключевые слова: цепочка Тоды, векторная задача равновесия логарифмического потенциала.

M.A. Lapik, D.N. Tulyakov E-mail: mashalapik@gmail.com

Nikishin and Anjelesko vector equilibrium problems and multidimensional Toda lattice. The limiting case when the second interval is a point

Abstract In this paper we consider the limiting case of vector equilibrium problems of Angelesco and Nikishin when on the first segment is the mass x, and on the second segment, which is pulled to a point, lies mass y. The linear dependence of the external field on time's. Partial differential equations on the ends of the support of equilibrium measures are given. `Pages~12, Bibl.~11`

Key words: Toda lattice, vector logarithmic potential problem.

Содержание

1 Введение **3**

1.1 Основные определения 3

1.2 Мотивация задачи 4

2 Постановка задачи. Основные результаты **7**

3 Доказательства **8**

Литература **12**

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 14-21-00025)

1 Введение

1.1 Основные определения

Связь задач теории логарифмического потенциала и систем уравнений с частными производными известна достаточно давно (см. [7], [8], [9]).

Напомним сначала некоторые основные понятия теории логарифмического потенциала в векторном и скалярном случаях, подробные доказательства читатель может найти в [3], [5], [11]. Пусть $\mathcal{M}^x$ – множество конечных положительных борелевских мер массы x с носителями $S_{\mu_Q^x}$ на $\mathbb{R}$. В качестве внешнего поля мы будем рассматривать непрерывную функцию $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, не равную тождественно бесконечности. Дополнительно потребуем, чтобы оно росло на бесконечности достаточно быстро:

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\Sigma} \frac{Q(z)}{\log|z|} = +\infty.$$

Это обеспечивает компактность носителя экстремальной меры.

Логарифмическим потенциалом меры $\mu \in \mathcal{M}^x$ называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log\frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y),$$

а *энергией меры во внешнем поле* – величину

$$I_Q(\mu) = \int\int \log\frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y)\, d\mu(z) + 2\int Q\, d\mu. \tag{1}$$

Равновесной или *экстремальной* мерой в поле Q называют меру μ_Q^x с минимальной энергией в своем классе:

$$I_Q(\lambda_Q^x) = \inf_{\mu\in\mathcal{M}^x} I_Q(\mu). \tag{2}$$

Экстремальные меры существуют и единственны (конечно, в случае конечных энергий). Отметим существование условий равновесия, которые однозначно характеризуют равновесную меру:

$$U^{\lambda_Q^x} + Q = \begin{cases} = w_Q^x & \text{на } \ S_{\lambda_Q^x}, \\ \geq w_Q^x & \text{на } \ \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

где w_Q^x есть некоторая константа.

Если поле Q специальным образом зависит от параметра t:

$$Q(z,t) := -\frac{zt}{2} + Q(z,0),$$

то концевые точки носителя $S_{\lambda^x_Q} = [\alpha(x,t),\beta(x,t)]$ удовлетворяют некоторым гиперболическим системам уравнений в частных производных по x и t (так называемый непрерывный предел цепочки Тоды):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = -\dfrac{\beta-\alpha}{4}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial\beta}{\partial t} = \dfrac{\beta-\alpha}{4}\dfrac{\partial\beta}{\partial x}. \end{cases} \tag{4}$$

В рассмотренной выше задаче теории логарифмического потенциала носители мер растут по x при фиксированном t. Следовательно, мы можем рассматривать только монотонные начальные условия и монотонные по x решения. Для расширения класса начальных условий можно рассматривать более общий класс задач теории логарифмического потенциала. Существует и другой путь обобщения: можно рассматривать многомерные по пространственной переменной x системы. С этой целью были рассмотрены векторные задачи равновесия логарифмического потенциала, см. [6], [7].

Авторы выражают глубокую признательность А. И. Аптекареву за внимание к этой работе.

1.2 Мотивация задачи

Рассмотрим систему двух отрезков $\Gamma = \{\Gamma_1,\Gamma_2\}$ в $\mathbb{R}$, не пересекающихся по внутренним точкам. Пусть $\mathcal{M}_{xy} = \mathcal{M}_{xy}(\Gamma)$ – множество векторных положительных конечных борелевских мер на Γ и

$$\mathcal{M}_{xy}(\Gamma) = \{\overline{\mu} = (\mu_1,\mu_2) : \mu_i \in \mathcal{M}(\Gamma_i), |\mu_1| = x, |\mu_2| = y\}.$$

Мы будем рассматривать матрицу взаимодействия Никишина (-) и Анжелеско (+):

$$C^{\pm} = \begin{pmatrix} 2 & \pm1 \\ \pm1 & 2 \end{pmatrix} = (c^{\pm}_{ij}). \tag{5}$$

Внешним полем будем называть непрерывную вектор-функцию:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2), \qquad Q_i : \Gamma_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1,2. \tag{6}$$

Векторный логарифмический потенциал меры $\overline{\mu}$ во *внешнем поле* $\mathbf{Q}$ с *матрицей взаимодействия* C определим как вектор-функцию $\mathbf{W}^{\overline{\mu}} = (W_1^{\overline{\mu}}, W_2^{\overline{\mu}})$, такую что

$$\left(W_1^{\overline{\mu}},\ W_2^{\overline{\mu}}\right) = \left(U^{\mu_1},\ U^{\mu_2}\right) C^{\pm} + \left(Q_1\ \ Q_2\right).$$

Энергия во внешнем поле для векторных мер из $\mathcal{M}_{xy}$ задается следующим функционалом

$$I(\overline{\mu}) = I_1(\overline{\mu}) + I_2(\overline{\mu}), \quad I_i(\overline{\mu}) = \int \Big(W_i^{\overline{\mu}}(z) + Q_i(z)\Big) d\mu_i(z). \qquad (7)$$

Аналогично скалярному случаю ставится *векторная экстремальная задача во внешнем поле*: найти меру $\overline{\lambda^{xy}} \in \mathcal{M}_{xy}$ с минимальной энергией (7) в соответствующем классе:

$$I(\overline{\lambda}^{xy}) = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}_{xy}} I(\overline{\mu}). \qquad (8)$$

Существует единственное решение $\overline{\lambda}^{xy} \in \mathcal{M}_{xy}$ задачи (8) см. [4], [5]. Там же были приведены условия равновесия для векторной задачи во внешнем поле, однозначно характеризующие экстремальные меры. Точнее, существуют и единственны такие константы F_i^{xy}, $i = 1, 2$, что

$$\begin{cases} 2U^{\lambda_1^{xy}}(z) \pm U^{\lambda_2^{xy}}(z) + Q_1(z) & \begin{cases} = F_1^{xy} & \text{на} \quad S_{\lambda_1^{xy}}, \\ \geq F_1^{xy} & \text{на} \quad \Gamma_1, \end{cases} \\ \\ \pm U^{\lambda_1^{xy}}(z) + 2U^{\lambda_2^{xy}}(z) + Q_2(z) & \begin{cases} = F_2^{xy} & \text{на} \quad S_{\lambda_2^{xy}}, \\ \geq F_2^{xy} & \text{на} \quad \Gamma_2. \end{cases} \end{cases} \qquad (9)$$

В случае аналитических полей (мы далее будем считать $Q_2 \equiv 0$) и когда носители мер суть отрезки, известна (см., например, [7]) связь задачи (9) с мероморфными функциями на трехлистных римановых поверхностях. Далее мы кратко опишем вышеупомянутую связь и сформулируем нашу основную задачу, решению которой посвящена данная работа.

Рассмотрим трехлистную риманову поверхность $\Re$ с тремя двойными точками ветвления в точках a, b, c и d:

$$\Re = \overline{\Re^0 \bigcup \Re^1 \bigcup \Re^2}, \qquad (10)$$

где $\Re^0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, $\Re^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \big([a, b] \bigcup [c, d]\big)$ и $\Re^2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d]$ (см. рис. 1) Для системы Анжелеско поверхность отличается только нумерацией листов: $\Re^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, $\Re^0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \big([a, b] \bigcup [c, d]\big)$ и $\Re^2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d]$ (см. рис. 2)

Определим на римановой поверхности $\Re$ алгебраические функции h_{AN} (см. рис. 1,2) для систем Анжелеско и Никишина. Выделим три голоморфные ветви функций h_{AN}

$$\begin{array}{rcl} h_{AN}^0(z) & \in & H(\Re^0), \\ h_{AN}^1(z) & \in & H(\Re^1), \\ h_{AN}^2(z) & \in & H(\Re^2). \end{array} \qquad (11)$$

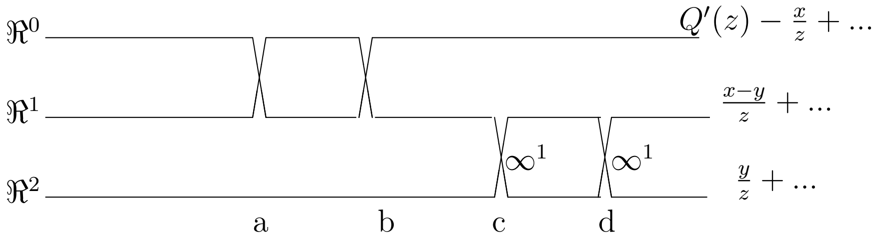

Рис. 1: Риманова поверхность для задачи с матрицей Никишина, функция h_N

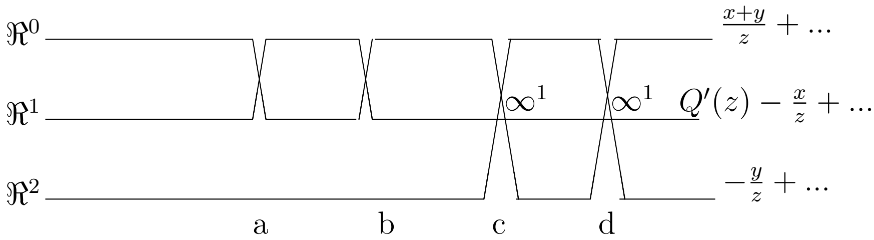

Рис. 2: Риманова поверхность для задачи с матрицей Анжелеско, функция h_A

В точках ветвления c и d будут полюса первого порядка, поведение на бесконечности задается следующими формулами для матриц Никишина и Анжелеско соответственно:

$$\begin{array}{rcl} h_N^0(z) & = & Q'(z) - \frac{x}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ h_N^1(z) & = & \frac{x-y}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ h_N^2(z) & = & \frac{y}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right). \end{array} \tag{12}$$

$$\begin{array}{rcl} h_A^0(z) & = & -\frac{x+y}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ h_A^1(z) & = & Q'(z) - \frac{x}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ h_A^2(z) & = & -\frac{y}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right). \end{array} \tag{13}$$

Тогда верно следующее утверждение:

Утверждение 1. *Плотность равновесной меры $\overline{\lambda}^{xy} = (\lambda_1^{xy}, \lambda_2^{xy})$ для задачи с матрицей Никишина или Анжелеско равна скачку соответствующей аналитической функции $h_{AN}^{xy}(z) = h_{AN}(z)$ (12),(13) на $[a,b]$ и $[c,d]$:*

$$\begin{array}{l} d\lambda_1^{xy} := \dfrac{(h_N^0 - h_N^1)_+}{2\pi i} dz, \\ d\lambda_2^{xy} = \dfrac{(h_N^2 - h_N^1)_+}{2\pi i} dz. \end{array} \tag{14}$$

$$\begin{array}{l} d\lambda_1^{xy} := \dfrac{(h_A^0 - h_A^1)_+}{2\pi i} dz, \\ d\lambda_2^{xy} = \dfrac{(h_A^0 - h_A^2)_+}{2\pi i} dz. \end{array} \tag{15}$$

Теперь рассмотрим следующую задачу: стянем отрезок $[c, d]$ в точку, тогда поверхность превратится в двулистную, а у функции h_{AN}^{xy} появится еще один полюс в точке p, в которой находится точечная масса y.

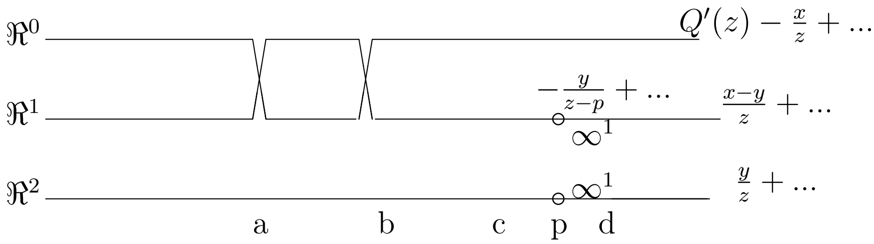

Рис. 3: Риманова поверхность для задачи с матрицей Никишина, второй отрезок стянут в точку, функция h_+

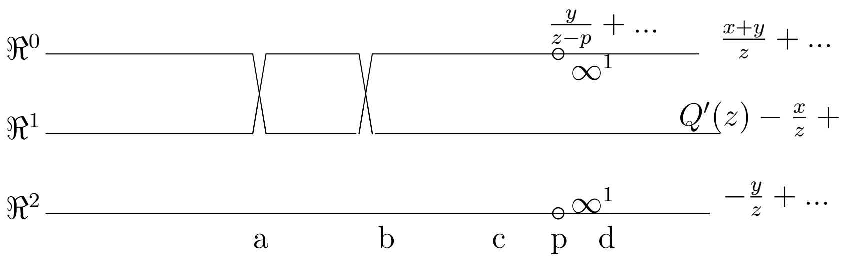

Рис. 4: Риманова поверхность для задачи с матрицей Анжелеско, второй отрезок стянут в точку, функция h_-

Для матрицы Анжелеско аналогично предыдущему случаю, мы получаем после стягивания распавшуюся риманову поверхность и мероморфную функцию на ней. Система Анжелеско в этом случае отличается от системы Никишина знаком при y.

2 Постановка задачи. Основные результаты

Пусть в точке $p > 0$ находится точечная масса y, которая взаимодействует с мерой λ^{xy} массы x на $(-\infty, 0]$. Поле Q_1 такое, что носитель равновесной меры λ^{xy} есть отрезок $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta < 0$. Для этого достаточно рассматривать выпуклые поля, растущие на бесконечности быстрее, чем логарифм. Внешнее поле линейно зависит от времени:

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 = S_{\lambda^{xy}} = [\alpha(x,y,t), \beta(x,y,t)] & Q_1(z) = Q(z) + ctz, \quad c = const, \\ \Delta_2 = [p,p] & Q_2 \equiv 0. \end{array} \tag{16}$$

Условия равновесия для такой задачи выглядят следующим образом ("+"соответствует случаю Анжелеско,"$-$" соответствует случаю Никишина)

$$2U^{\lambda^{xy}}(z) \pm yU^{\delta(z-p)}(z) + Q(z) + 2tz \begin{cases} = F^{xy} & \text{на} \quad S_{\lambda^{xy}}, \\ \geq F^{xy} & \text{на} \quad (-\infty, 0]. \end{cases} \tag{17}$$

Решение такой задачи существует и единственно. Далее считаем, что y может принимать отрицательные значения (случай матрицы взаимодействия Никишина).

Теорема 1. *Пусть $Q \in C^2(-\infty, 0]$ и выпукло, тогда концы носителя равновесной меры $S_{\lambda^{xy}} = [\alpha(x,y,t), \beta(x,y,t)]$ в задаче (16 -17) удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \dfrac{\beta - \alpha}{2} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial \beta}{\partial t} = -\dfrac{\beta - \alpha}{2} \dfrac{\partial \beta}{\partial x} \\[2ex] 2\dfrac{\partial \beta}{\partial y} = \left(1 - \sqrt{\dfrac{p-\alpha}{p-\beta}}\right) \dfrac{\partial \beta}{\partial x}, \\[2ex] 2\dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = \left(1 - \sqrt{\dfrac{p-\beta}{p-\alpha}}\right) \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}. \end{cases} \tag{18}$$

3 Доказательства

Для нахождения носителей равновесных мер полезным оказывается рассмотрение функционала $F(K)$ на регулярных компактах $K \subseteq \mathbb{R}$, введенного Машкаром и Саффом в [10]. Пусть ω_K $-$ мера Робена компакта K (т.е. вероятностная равновесная мера в нулевом векторном поле) и через $cap(K)$ обозначена логарифмическая емкость компакта K. По определению

$$F_Q(K) := -x \log cap(K) + \int Q(z)\, d\omega_K(z). \tag{19}$$

Оказывается (см. [10], [11], [2]), что носитель равновесной меры $S_{\lambda^{xy}}$ минимизирует этот функционал, точнее, для любого компакта K справедливо

$$F(K) \geq F(S_{\lambda^{xy}}). \tag{20}$$

Мы можем рассматривать только этот функционал только на $K=[\alpha,\beta]$, поскольку известно, что носители мер $S_{\lambda^{xy}}$ суть отрезки. Запишем функционал (19) для задачи (17):

$$F(\alpha,\beta)=-(y+2x)\log\frac{\beta-\alpha}{4}-yg_{[\alpha,\beta]}(p)+\frac{1}{\pi}\int\frac{Q_1(z)\,d(z)}{\sqrt{(\beta-z)(z-\alpha)}},\quad(21)$$

$$g_{[\alpha,\beta]}(p)=\log\left|\left(\frac{2p-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)+\sqrt{\left(\frac{2p-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)^2-1}\right|.\quad(22)$$

Фиксируем ветвь корня: $\sqrt{1}=1$. В интеграле сделаем замену переменных

$$\int Q_1\,d\omega_{[\alpha,\beta]}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_1(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\cos(\theta))\,d\theta.$$

Поскольку носитель равновесных мер является экстремальной точкой, мы можем записать систему уравнений на концы носителя

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)=\frac{\partial F}{\partial\beta}(\alpha,\beta)=0.\quad(23)$$

Выполним дифференцирование функционала Маскара$-$Саффа, ниже приведены промежуточные действия.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}g_{[\alpha,\beta]}(p)=\frac{|p-\beta|}{\beta-\alpha}\frac{1}{\sqrt{(p-\alpha)(p-\beta)}}=\frac{1}{\beta-\alpha}\sqrt{\frac{p-\beta}{p-\alpha}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}g_{[\alpha,\beta]}(p)=-\frac{|p-\alpha|}{\beta-\alpha}\frac{1}{\sqrt{(p-\alpha)(p-\beta)}}=-\frac{1}{\beta-\alpha}\sqrt{\frac{p-\alpha}{p-\beta}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int Q_1\,d\omega_{[\alpha,\beta]}=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\frac{\beta-z}{\beta-\alpha}\frac{Q'(z)}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}dz+ct,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int Q_1\,d\omega_{[\alpha,\beta]}=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\frac{Q'(z)}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}dz+ct.$$

Уравнения (23) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases}2x+y-y\sqrt{\dfrac{p-\beta}{p-\alpha}}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\alpha^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{\beta-z}{z-\alpha}}dz+t(\beta-\alpha)=0,\\[2ex] -2x-y+y\sqrt{\dfrac{p-\alpha}{p-\beta}}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\alpha^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}dz+t(\beta-\alpha)=0.\end{cases}\quad(24)$$

После сложения и вычитания получаем

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{(p-\beta)(p-\alpha)}} + 2t + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\alpha^\beta \dfrac{Q'(z)}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}dz = 0, \\ \\ 4x + 2y - \dfrac{y(2p-\alpha-\beta)}{\sqrt{(p-\alpha)(p-\beta)}} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\alpha^\beta \dfrac{Q'(z)(2z-\alpha-\beta)}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}dz = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Продифференцируем по x, y, и t соответственно каждое из выражений в (24), полагая, что α, β зависят от x, y, и t.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось обосновать дифференцирование интегралов в (24). Рассмотрим второй интеграл в (24), обоснуем дифференцируемость функции $F(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz$ по a справа.

$$\frac{F(\alpha+\frac{1}{n}) - F(\alpha)}{\frac{1}{n}} = \frac{\displaystyle\int_{\alpha+\frac{1}{n}}^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha-\frac{1}{n}}{\beta-z}}\,dz - \int_{\alpha+\frac{1}{n}}^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz}{\frac{1}{n}} +$$
$$+\frac{\displaystyle\int_{\alpha+\frac{1}{n}}^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz - \int_\alpha^\beta Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz}{\frac{1}{n}}.$$

Второе слагаемое в пределе при $n \to \infty$ дает 0, поскольку

$$\left| \int_{\alpha+\frac{1}{n}}^\alpha Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz \right| \leq ||Q'||_{L^\infty} * \frac{1}{n} * \sqrt{\frac{1/n}{\beta-\alpha}}.$$

Рассмотрим первое слагаемое, для этого определим последовательность функций $h_n(z)$

$$h_n(z) := \begin{cases} Q'(z)\dfrac{\sqrt{\dfrac{z-\alpha-1/n}{\beta-z}} - \sqrt{\dfrac{z-\alpha}{\beta-z}}}{\dfrac{1}{n}}, & z \geq \alpha + \frac{1}{n}, \\ 0, & z \in (\alpha, \alpha+\frac{1}{n}). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\frac{\displaystyle\int_{\alpha+\frac{1}{n}}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha-\frac{1}{n}}{\beta-z}}\,dz-\int_{\alpha+\frac{1}{n}}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz}{\frac{1}{n}}=\int_{\alpha}^{\beta} h_n(z)\,dz$$

и модуль $h_n(z)$ меньше $\dfrac{||Q'||_{L^\infty}}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}$. Далее применяем теорему Лебега. Аналогично рассматривается левая производная. Используя (25) получим выражение для производной

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz=\frac{y}{2\sqrt{(p-\beta)(p-\alpha)}}+t$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{\beta-z}{z-\alpha}}\,dz=\frac{-y}{2\sqrt{(p-\beta)(p-\alpha)}}-t$$

Чтобы продифференцировать $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz$ по β нужно воспользоваться заменой переменных:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\int_{0}^{\pi} Q''\Big(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\cos(\theta)\Big)(1+\cos(\theta))\,d\theta\right]=\frac{1}{(\beta-\alpha)\pi}\cdot$$
$$\cdot\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}}\,dz+\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\int_{0}^{\pi} Q''(z(\theta))(1+\cos(\theta))^2\,d\theta=$$
$$=\frac{2x+y-y\sqrt{\frac{p-\alpha}{p-\beta}}}{\beta-\alpha}-t+\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\int_{0}^{\pi} Q''(z(\theta))(1+\cos(\theta))^2\,d\theta.$$

Другой интеграл дифференцируется аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{\beta-z}{z-\alpha}}\,dz=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\int_{0}^{\pi} Q''\Big(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\cos(\theta)\Big)(1-\cos(\theta))\,d\theta\right]=\frac{-1}{(\beta-\alpha)\pi}\cdot$$
$$\cdot\int_{\alpha}^{\beta} Q'(z)\sqrt{\frac{\beta-z}{z-\alpha}}\,dz+\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\int_{0}^{\pi} Q''(z(\theta))(1-\cos(\theta))^2\,d\theta$$
$$=\frac{2x+y-y\sqrt{\frac{p-\beta}{p-\alpha}}}{\beta-\alpha}-t+\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\int_{0}^{\pi} Q''(z(\theta))(1-\cos(\theta))^2\,d\theta.$$

После последовательного дифференцирования (24) получается система из шести уравнений. Исключая из нее интегралы получим систему уравнений (18). Теорема доказана.

Список литературы

[1] *А.И. Аптекарев*, *Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина*, Мат. сб., N6 190(1999), 11-22.

[2] *В.С. Буяров, Е А. Рахманов*, *О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси*, Мат. сб. N5 190(1999), 11-22.

[3] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов*, *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов*, Мат. сб. 1984 Т.125(167), N1, с.117-127.

[4] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов*, *О задаче равновесия для векторных потенциалов,* УМН, Том 40, вып. 4, 1985.

[5] *Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин*, *Рациональные аппроксимации и ортогональность,* Москва "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1988.

[6] *A.I. Aptekarev, M. Derevyagin, H. Miki, W. Van Assche,* Multidimensional Toda Lattices: Continuous and Discrete Time, SIGMA, 12 (2016), 54, 54-30, 30 pp.

[7] A.I. Aptekarev, *The Mhaskar–Saff Variational Principle and Location of the Shocks of Certain Hyperbolic Equations*, Contemporary Mathematics, 661 (2016), 167-186.

[8] *A.I. Aptekarev, W. Van Assche*, *Asymptotic of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice.* Journal of physics A: Mathematics and General, 34(48), 2001, 10627-10639.

[9] *P. Deift, K. T-R McLaughlin*, *A Continuum Limit of the Toda Lattice.* Memoirs of the American Mathematical Society. Number 624. January 1998, Volume 131.

[10] *H.N. Maskar, E.B. Saff*, *Where does the sup norm of a weighted polynomial live?* Constr. Approx(1985), 1, 71-91.

[11] *E.B. Saff, V. Totik*, *Logarithmic Potentials with External Fields.* Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin, 1997.