ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 270 за 2018 г.


ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Яшунский А.Д.

# О предельных точках алгебр бернуллиевских распределений

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Яшунский А.Д. О предельных точках алгебр бернуллиевских распределений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 270. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-270
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-270

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**А. Д. Яшунский**

# О предельных точках алгебр бернуллиевских распределений

Москва — 2018

**Яшунский А. Д.**

**О предельных точках алгебр бернуллиевских распределений**

Рассматриваются алгебры бернуллиевских распределений — множества распределений, замкнутые относительно преобразований распределений путем подстановки независимых случайных величин в булевы функции из некоторой заданной системы. Установлено, что если преобразующие функции не содержатся в множестве унарных функций, то множество предельных точек алгебры распределений либо пусто, либо одноэлемнтно, либо не менее чем счетно.

***Ключевые слова:*** бернуллиевская случайная величина, булева функция, алгебра, предельная точка

**Alexey Dmitrievich Yashunsky**

**On limit points of Bernoulli distribution algebras**

We consider algebras of Bernoulli distributions, i. e. sets of distributions that are closed under transformations defined by substituting independent random variables for variables of a Boolean function from a given system. We establish that unless the transforming functions are unary the set of algebra's limits point is either empty, one-element, or at least countable.

***Key words:*** Bernoulli random variable, Boolean function, algebra, limit point

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН №01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

# Оглавление

# Введение

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [6, 7], посвященные предельным точкам в алгебрах бернуллиевских распределений. Рассмотрение множества предельных точек позволяет классифицировать различные алгебры и является шагом на пути к описанию всевозможных решеток алгебр распределений.

После описания алгебр, не имеющих предельных точек [7], и алгебр, имеющих единственную предельную точку [6], представляется естественным рассмотреть вопрос о возможной мощности множества предельных точек. В данной работе установлено, что, за исключением некоторых достаточно тривиальных случаев, множество предельных точек, содержащее более одного элемента, как минимум счетно.

# Определения и свойства

## Алгебры бернуллиевских распределений

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, а $X_1, \dots, X_n$ — независимые в совокупности бернуллиевские случайные величины со значениями в множестве $\{0, 1\}$, причем $X_i = 1$ с вероятностью $p_i \in [0, 1]$. Тогда $f(X_1, \dots, X_n)$ — также бернуллиевская случайная величина со значениями в множестве $\{0, 1\}$. Вероятность ее обращения в $1$ является функцией от значений $p_1, \dots, p_n$, обозначим ее через $\hat{f}(p_1, \dots, p_n)$. Тогда:

$$\widehat{f}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} \pi(p_1, \sigma_1) \cdots \pi(p_n, \sigma_n), \tag{1}$$

где $\pi(p, 1) = p$ и $\pi(p, 0) = 1 - p$. Каждая функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ *индуцирует* таким образом функцию $\hat{f} : [0, 1]^n \to [0, 1]$. Эта функция описывает преобразование распределений, осуществляемое при подстановке случайных величин в функцию $f$.

Распределение бернуллиевской случайной величины однозначно задается вероятностью $p$ ее обращения в $1$, поэтому далее будем отождествлять бернуллиевские распределения с точками из отрезка $[0, 1]$. Отметим, что при $p_1, \dots, p_n \in \{0, 1\}$ выполнено $f(p_1, \dots, p_n) = \hat{f}(p_1, \dots, p_n)$.

Для индуцированных функций имеет место разложение по переменной, аналогичное соответствующему разложению для булевых функций. Обозначим подфункции $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ функции $f$ через $f_0$ и $f_1$ соответственно. Тогда для всех $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$

выполнено равенство:

$$\widehat{f}(p_1, \dots, p_n) = (1 - p_n)\widehat{f}_0(p_1, \dots, p_{n-1}) + p_n \widehat{f}_1(p_1, \dots, p_n). \qquad (2)$$

Непосредственно из определения $\hat{f}$ вытекает, что функция $\hat{f}$ непрерывна по всем переменным, а также то, что для любых распределений $p_1, \dots, p_{i-1}, p_i', p_i'', p_{i+1}, \dots, p_n \in [0, 1]$ и произвольного $\alpha$ выполнено:

$$\begin{aligned} &\hat{f}(p_1, \dots, p_{i-1}, \alpha p_i' + (1 - \alpha)p_i'', p_{i+1}, \dots, p_n) = \\ &= \alpha \hat{f}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i', p_{i+1}, \dots, p_n) + (1 - \alpha)\hat{f}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i'', p_{i+1}, \dots, p_n). \end{aligned} \qquad (3)$$

Это влечет следующие два утверждения.

**Лемма 1**. *Пусть для некоторых $p', p'', p_2, \dots, p_n$, $p' \neq p''$ выполнено равенство $\hat{f}(p', p_2, \dots, p_n) = \hat{f}(p'', p_2, \dots, p_n)$. Тогда для любого $t$ выполнено $\hat{f}(t, p_2, \dots, p_n) = \hat{f}(p', p_2, \dots, p_n) = \hat{f}(p'', p_2, \dots, p_n)$.*

**Следствие 1**. *Пусть $\{p_s'\}_{s \in \mathbb{N}}$ — счетное множество. Тогда для заданных $p_2, \dots, p_n$ множество $\{\hat{f}(p_s', p_2, \dots, p_n)\}_{s \in \mathbb{N}}$ либо одноэлементное, либо счетное.*

Естественно, как в лемме, так и в ее следствии вместо первой переменной можно рассматривать любую другую переменную функции $\hat{f}$.

Множеству булевых функций $B$ сопоставим множество индуцированных функций $\widehat{B} = \{\hat{f} \mid f \in B\}$. Тогда $\langle [0, 1], \widehat{B} \rangle$ — алгебра, ее подалгебры $\langle H, \widehat{B} \rangle$ будем называть *алгебрами* (*бернуллиевских*) *распределений*. Для заданного множества $G \subseteq [0, 1]$ положим: $V_B(G) = \bigcap\limits_{\substack{\langle H, \widehat{B} \rangle \text{ — алгебра}, \\ H \supseteq G}} H$, т. е. $V_B(G)$ — замыкание множества $G$ относительно операций из $\widehat{B}$. Естественно, для всякой алгебры распределений $\langle H, \widehat{B} \rangle$ выполнено равенство $V_B(H) = H$.

## Предельные точки

Точка $q \in [0, 1]$ называется *предельной* для множества $G \subseteq [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $g \in G$, что $0 < |q - g| < \varepsilon$. Точка $q$ может не принадлежать множеству $G$. Множество всех предельных точек множества $G$ обозначим через $\lambda(G)$. Если $q \in \lambda(G)$, то найдутся такие $q_n \in G \setminus \{q\}$, $n \in \mathbb{N}$, что $q_n \to q$ при $n \to \infty$, причем последовательность $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ можно выбрать монотонной.

Несложно проверить выполнение включения $\lambda(\lambda(G)) \subseteq \lambda(G)$. Кроме того, для произвольных $G, H \subseteq [0,1]$ выполнено $\lambda(G \cup H) = \lambda(G) \cup \lambda(H)$. Отсюда вытекает, что $G \subseteq H$ влечет $\lambda(G) \subseteq \lambda(H)$. Наконец, отметим, что для всякого отрезка $[a,b]$ выполнено $\lambda([a,b]) = [a,b]$.

Множество $G$ называется *топологически замкнутым*, если $\lambda(G) \subseteq G$. *Топологическим замыканием* множества $G$ называется множество $cl(G) = = \bigcap\limits_{\substack{H \supseteq G,\\ \lambda(H) \subseteq H}} H$. Несложно проверить, что $cl(G) = G \cup \lambda(G)$. Из этого равенства, в частности, следует, что $cl(\lambda(G)) = \lambda(G)$.

Для множества распределений $G$ положим $W_B(G) = \bigcap\limits_{\substack{\langle H, \widehat{B}\rangle \text{ — алгебра},\\ H \supseteq G, cl(H) = H}} H$, т. е. $W_B(G)$ — наименьшая по включению топологически замкнутая алгебра распределений, содержащая $G$. Из непрерывности индуцированных функций и ранее упомянутых соотношений вытекают равенства $W_B(G) = cl(V_B(G)) = V_B(G) \cup \lambda(V_B(G))$. Отметим, что при этом имеет место: $\lambda(W_B(G)) = \lambda(V_B(G) \cup \lambda(V_B(G))) = \lambda(V_B(G))$.

## Функциональные замыкания

Введем обозначения для некоторых булевых функций. Через $c_0, c_1$ будем обозначать булевы функции, тождественно равные константам $0$ и $1$ соответственно. Обозначим $x \oplus y = x + y \pmod 2$, $\overline{x} = x \oplus 1$, $x \& y = \min(x,y)$, $x \vee y = \max(x,y)$, и будем далее считать $\oplus, \&$ и $\vee$ обозначениями функций двух переменных.

Определим *терм* над системой функций $B$ и некоторым бесконечным множеством символов переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. По определению символы переменных считаем термами. Если $T_1, \ldots, T_n$ — термы и $f(x_1, \ldots, x_n) \in B$ — функция от $n$ переменных, то $f(T_1, \ldots, T_n)$ является термом. Каждому терму естественным образом сопоставляется выражаемая этим термом булева функция. Терм называется *бесповторным*, если каждый символ переменной встречается в нем не более одного раза. Множество функций, выразимых термами над $B$, будем обозначать $[B]$ и называть *функциональным замыканием* множества $B$ (за исключением некоторых деталей это совпадает с функциональным замыканием, определяемым, например, в [2]). Множество функций, выразимых бесповторными термами над $B$, будем обозначать $[B]_0$ и называть *бесповторным замыканием* множества $B$.

Оператор замыкания $V_B(G)$ можно описать, используя термы над системой $\widehat{B}$: $V_B(G) = \{\hat{f}(g_1, \ldots, g_n) \mid \hat{f} \in \left[\widehat{B}\right], g_1, \ldots, g_n \in G\}$. Это описание можно переформулировать в терминах замыканий самого множества $B$ (а не $\widehat{B}$), используя следующие соображения. Если булева функция $\varphi$ задана бесповторной формулой

$$\varphi(x_{11},\ldots,x_{mn_m}) = f(f_1(x_{11},\ldots,x_{1n_1}),\ldots,f_m(x_{m1},\ldots,x_{mn_m})),$$

то для индуцированной функции имеет место равенство:

$$\widehat{\varphi}(p_{11},\ldots,p_{mn_m}) = \widehat{f}(\widehat{f_1}(p_{11},\ldots,p_{1n_1}),\ldots,\widehat{f_m}(p_{m1},\ldots,p_{mn_m})). \tag{4}$$

(доказательство см., например, в [5]). Из равенства (4) вытекает, что каждому терму над $\widehat{B}$ можно поставить в соответствие некоторую функцию из $[B]_0$. Как следствие, получаем следующее соотношение:

$$V_B(G) = \{\widehat{\varphi}(g_1,\ldots,g_n) \mid \varphi \in [B]_0, g_1,\ldots,g_n \in G\}. \tag{5}$$

Отсюда, в частности, следует, что $V_B(G) = V_{[B]_0}(G)$, а в силу непрерывности функций из $\widehat{B}$, и $W_B(G) = W_{[B]_0}(G)$.

Напомним, что булева функция $f^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})}$ называется *двойственной* к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$. Непосредственно из (1) вытекает соотношение:

$$\widehat{f^*}(p_1,\ldots,p_n) = 1 - \hat{f}(1-p_1,\ldots,1-p_n). \tag{6}$$

Для множества булевых функций $B$ положим $B^* = \{f^* \mid f \in B\}$. То же обозначение будем использовать для множеств бернуллиевских распределений, полагая $G^* = \{1-g \mid g \in G\}$. Из соотношений (5) и (6) выводится следующая лемма.

**Лемма 2.** $V_{B^*}(G^*) = (V_B(G))^*$, $W_{B^*}(G^*) = (W_B(G))^*$.

В дальнейшем изложении используются следующие функционально замкнутые классы булевых функций: $U = [\{c_0, \overline{x}\}]$ (функции одной переменной), $K = [\{c_0, c_1, \&\}]$ (конъюнкции), $D = [\{c_0, c_1, \vee\}]$ (дизъюнкции), $L = [\{c_1, \oplus\}]$ (линейные функции), $M = [\{c_0, c_1, \&, \vee\}]$ (монотонные функции).

Докажем несколько утверждений о бесповторном замыкании булевых функций, которые будут использованы впоследствии. Следующие два утверждения обычно формулируются для обычного функционального замыкания (см. [2]), однако анализ доказательств показывает, что утверждения остаются верными, а доказательства переносятся без изменений на случай бесповторных замыканий.

**Лемма 3.** *Если* $f \notin M$, *то* $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni \overline{x}$.

**Лемма 4**. *Если* $f \notin L$, *то* $[\{f, c_0, c_1, \overline{x}\}]_0 \ni x \& y$.

Свойства булевых функций, составляющие суть лемм 5 и 6, весьма близки к известным свойствам булевых функций, приведенным, в частности, в [1,3], однако в обоих указанных источниках при доказательстве существенным образом используется отождествление переменных, поэтому эти утверждения не могут быть перенесены без изменений на случай бесповторного замыкания. Для бесповторных замыканий соответствующие утверждения доказаны в [4], их доказательства приведены здесь для полноты изложения.

**Лемма 5**. *Пусть* $f \in M \setminus K$, *тогда* $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni x \vee y$.

*Доказательство.* Докажем утверждение индукцией по числу переменных функции $f$. В случае функций двух переменных утверждение тривиально — единственной функцией $f \in M \setminus K$ от двух переменных является $x \vee y$.

Пусть утверждение леммы выполняется для функций от $r-1$ переменной, покажем, что оно выполнено для функций от $r$ переменных. Пусть $f$ — функция от $r$ переменных. Рассмотрим такой набор $\tilde{\alpha} \in \{0,1\}^r$, что $f(\tilde{\alpha}) = 0$ и вес $w(\tilde{\alpha}) = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i$ максимален, т. е. для любого такого набора $\tilde{\alpha}'$, что $w(\tilde{\alpha}') > w(\tilde{\alpha})$, имеет место $f(\tilde{\alpha}') = 1$. По условию леммы функция $f \in M$ и $f \neq c_0$, следовательно, $w(\tilde{\alpha}) < r$.

Если $w(\tilde{\alpha}) \leqslant r-2$, то найдутся такие $i, j$, что $\alpha_i = 0, \alpha_j = 0$. Тогда

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_r) = x_i \vee x_j$$

и, следовательно, $x \vee y \in [\{f, c_0, c_1\}]_0$. Если же $w(\tilde{\alpha}) = r-1$, то найдется такое $i$, что $\alpha_i = 0$. Тогда в силу $f \in M$ имеет место соотношение $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_r) \leqslant f(\tilde{\alpha}) = 0$. Следовательно, функция $f$ представляется в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_r) = x_i f(x_1, .., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, .., x_r) \vee \overline{x_i} f(x_1, .., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, .., x_r) = \\ = x_i f(x_1, .., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, .., x_r). \end{aligned}$$

Из условия $f \notin K$ вытекает, что

$$f'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_r) \notin K.$$

Тогда по предположению индукции имеет место $[\{f', c_0, c_1\}]_0 \ni x \vee y$, откуда очевидно вытекает, что $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni x \vee y$. Шаг индукции, а вместе с ним и лемма доказаны. $\square$

Заменяя в утверждении леммы 5 все функции на двойственные, получаем следующее утверждение.

**Лемма 6**. *Пусть* $f \in M \setminus D$, *тогда* $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni x \& y$.

## Аппроксимационная полнота

Среди различных систем булевых функций $B$ и множеств распределений $G$ некоторые пары удовлетворяют равенству $W_B(G) = [0,1]$, которое можно называть условием аппроксимационной полноты — возможности сколь угодно точно приблизить любое распределение, подставляя случайные величины с распределениями из $G$ в булевы функции из $B$. Ниже приведен ряд утверждений, описывающих условия аппроксимационной полноты.

**Лемма 7** [6]. *Если* $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1\&\ldots\&x_n$*, то* $\hat{f}(p_1,\ldots,p_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$*. Если* $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1\oplus\cdots\oplus x_n\oplus c$*, то* $\hat{f}(p_1,\ldots,p_n) = \frac{1}{2}(1-(-1)^c\prod_{i=1}^{n}(1-2p_i))$*.*

**Лемма 8**. *Пусть* $f \in K\setminus U$ *и* $1 \in \lambda(G)$*. Тогда* $W_{\{f\}}(G) = [0,1]$*.*

*Доказательство.* Покажем, что множество $V_{\{f\}}(G) = V_{[\{f\}]_0}(G)$ всюду плотно на отрезке $[0,1]$. Если $f \in K\setminus U$, то $f(x_1,\ldots,x_m) = x_1\&\ldots\&x_m$, где $m > 1$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу $1 \in \lambda(G)$ найдется такое $h \in G$, что $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}} < h < 1$, т. е. $1-\varepsilon < h^{m-1} < 1$.

Заметим, что в множестве $[\{f\}]_0$ лежат функции $f_l$, $l \in \mathbb{N}$, являющиеся конъюнкциями $l(m-1)+1$ переменных. По лемме 7 получаем, что $V_{\{f\}}(G) \ni \widehat{f_l}(h,\ldots,h) = h^{l(m-1)+1}$. В силу условия $h < 1$ последовательность $h^{l(m-1)+1}$ монотонно убывает к нулю с ростом $l$. Рассмотрим разность $\widehat{f_l}(h,\ldots,h) - \widehat{f_{l+1}}(h,\ldots,h) = h^{l(m-1)+1} - h^{(l+1)(m-1)+1} = h^{l(m-1)+1}(1-h^{m-1}) < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\{\widehat{f_l}(h,\ldots,h)\}_{l\in\mathbb{N}} \subseteq V_{\{f\}}(G)$ является $\varepsilon$-сетью на отрезке $[0,1]$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ множество $V_{\{f\}}(G)$ всюду плотно на $[0,1]$. Лемма доказана. □

Двойственность классов $K$ и $D$ по лемме 2 влечет следующую лемму.

**Лемма 9**. *Пусть* $f \in D\setminus U$ *и* $0 \in \lambda(G)$*. Тогда* $W_{\{f\}}(G) = [0,1]$*.*

**Лемма 10**. *Пусть* $f \in L\setminus U$ *и* $0 \in \lambda(G)$*. Тогда* $W_{\{f\}}(G) \supseteq [0,\frac{1}{2}]$*.*

*Доказательство.* Покажем, что множество $V_{\{f\}}(G) = V_{[\{f\}]_0}(G)$ всюду плотно на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$. Если $f \in L\setminus U$, то $f(x_1,\ldots,x_m) = x_1\oplus\cdots\oplus x_m\oplus c$, где $m > 1$ и $c \in \{0,1\}$. Если $c = 1$, то рассмотрим функцию $g(x_1,\ldots,x_{2m-1}) = f(x_1,\ldots,x_{m-1},f(x_m,\ldots,x_{2m-1})) \in [\{f\}]_0$, тогда выполнено $g(x_1,\ldots,x_{2m-1}) = x_1\oplus\ldots\oplus x_{2m-1}$ и вместо функции $f$ можно рассматривать далее функцию $g$. Итак, не ограничивая общности, можем считать, что $f(x_1,\ldots,x_m) = x_1\oplus\cdots\oplus x_m$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из условия $0 \in \lambda(G)$ вытекает, что найдется такое $h \in G$, что $0 < h < \frac{1}{2}\min\{(2\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}},1\}$.

Заметим, что в множестве $[\{f\}]_0$ лежат функции $f_l$, $l \in \mathbb{N}$, являющиеся суммами $l(m-1)+1$ переменных $\bmod 2$. По лемме 7 получаем, что $V_{\{f\}}(G) \ni \widehat{f_l}(h,\ldots,h) = \frac{1}{2}(1-(1-2h)^{l(m-1)+1})$. Рассмотрим разность: $\widehat{f_{l+1}}(h,\ldots,h) - \widehat{f_l}(h,\ldots,h) = \frac{1}{2}(1-(1-2h)^{(l+1)(m-1)+1}) - \frac{1}{2}(1-(1-2h)^{l(m-1)+1}) = \frac{1}{2}(1-2h)^{l(m-1)+1}(2h)^{m-1}$. В силу выбора $h$ эта разность положительная, и, следовательно, последовательность значений $\widehat{f_l}(h,\ldots,h)$ монотонно возрастает к $\frac{1}{2}$ с ростом $l$. Кроме того, рассмотренная разность не превышает $\varepsilon$ в силу неравенства $(2h)^{m-1} < 2\varepsilon$. Таким образом $\{\widehat{f_l}(h,\ldots,h)\}_{l\in\mathbb{N}} \in V_{[\{f\}]_0}(G)$ является $\varepsilon$-сетью на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, и в силу произвольности $\varepsilon$ получаем, что $V_{[\{f\}]_0}(G)$ всюду плотно на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$. Лемма доказана. □

По лемме 2 также получаем следующее утверждение.

**Лемма 11**. *Пусть* $f \in L \setminus U$ *и* $1 \in \lambda(G)$. *Тогда* $W_{\{f\}}(G) \supseteq [\frac{1}{2}, 1]$.

Частный случай леммы 12 доказан в [4], причем доказательство переносится практически без изменений на более общую формулировку, используемую в данной работе. Приводим его для полноты изложения.

**Лемма 12**. *Пусть* $0, 1 \in \lambda(W_B(G))$. *Тогда* $W_B(G) = W_{B\cup\{c_0,c_1\}}(G)$.

*Доказательство.* Очевидно, что $W_B(G) \subseteq W_{B\cup\{c_0,c_1\}}(G)$, покажем, что обратное включение также имеет место. Пусть $g \in W_{B\cup\{c_0,c_1\}}(G)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi_\varepsilon \in [B \cup \{c_0, c_1\}]_0$ и такие распределения $g_1,\ldots,g_n \in G$, что $|g - \widehat{\varphi_\varepsilon}(g_1,\ldots,g_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Заметим, что $\varphi_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n)$ можно представить в виде $\psi(x_1,\ldots,x_n,c_{i_1},\ldots,c_{i_m})$, где $\psi \in [B]_0$ и $i_1,\ldots,i_m \in \{0,1\}$. Поскольку $0, 1 \in \lambda(W_B(G))$, найдутся такие $h_0 \in W_B(G)$ и $h_1 \in W_B(G)$, что $h_0 < \frac{\varepsilon}{2m}$ и $h_1 > 1 - \frac{\varepsilon}{2m}$. Рассмотрим разность:

$$\widehat{\psi}(g_1,\ldots,g_n,i_1,\ldots,i_m) - \widehat{\psi}(g_1,\ldots,g_n,h_{i_1},\ldots,h_{i_m}) = \\ = \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\widehat{\psi}(g_1\ldots,g_n,i_1,\ldots,i_{m-j-1},i_{m-j},h_{i_{m-j+1}},\ldots,h_{i_m}) - \\ - \widehat{\psi}(g_1\ldots,g_n,i_1,\ldots,i_{m-j-1},h_{i_{m-j}},h_{i_{m-j+1}},\ldots,h_{i_m})\Big). \quad (7)$$

В каждой скобке берется разность значений функции $\widehat{\psi}$ на наборах, различающихся ровно в одной компоненте, причем в одном случае эта компонента равна $i_{m-j}$, а в другом $h_{i_{m-j}}$. Покажем, что для выбранных значений $h_i$ абсолютное значение такой разности не превышает $\frac{\varepsilon}{2m}$.

Пусть различающаяся компонента — последняя (в остальных случаях доказательство аналогичное), все прочие компоненты обозначим за $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in [0,1]$ и рассмотрим величину $|\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, i) - \widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_i)|$. В случае $i = 0$ получаем, используя (2):

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0) - \widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_0)| = \\
&\quad = |\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0) - (1 - h_0)\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0) - h_0\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1)| = \\
&\qquad = h_0|\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0) - \widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1)|.
\end{aligned}$$

В случае $i = 1$ аналогично, используя (2), получаем:

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1) - \widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_1)| = \\
&\quad = |\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1) - (1 - h_1)\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0) - h_1\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1)| = \\
&\qquad = (1 - h_1)|\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1) - \widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0)|.
\end{aligned}$$

В силу выбора $h_i$ имеет место неравенство $|h_i - i| < \frac{\varepsilon}{2m}$, а кроме того, легко проверяется неравенство $|\widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 1) - \widehat{\psi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0)| \leqslant 1$. Используя эти оценки и равенство (7), приходим к неравенству:

$$|\widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_n, i_1, \ldots, i_m) - \widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_n, h_{i_1}, \ldots, h_{i_m})| \leqslant m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вместе с условием выбора функций $\varphi_\varepsilon$ и $\psi$ это дает неравенства:

$$\begin{aligned}
&|g - \widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_n, h_{i_1}, \ldots, h_{i_m})| \leqslant |g - \widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_n, i_1, \ldots, i_m)| + \\
&\quad + |\widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_n, i_1, \ldots, i_m) - \widehat{\psi}(g_1, \ldots, g_n, h_{i_1}, \ldots, h_{i_m})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $g \in W_B(G)$, что и требовалось доказать. $\square$

**Лемма 13**. *Пусть $B \not\subseteq U$ и $G = W_B(G)$. Равенство $G = [0,1]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda(G) \ni 0, 1$.*

*Доказательство.* Необходимость условия $\lambda(G) \ni 0, 1$ очевидна, покажем его достаточность.

Рассмотрим сначала случай $B \subseteq M$. Поскольку $B \not\subseteq U$, найдется либо $f \in B \cap (M \setminus K)$, либо $f \in B \cap (M \setminus D)$. Тогда $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni x \vee y$ (соответственно, $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni x \& y$), откуда по лемме 12 получаем, что $W_{\{f\}}(G) \supseteq W_{\{x \vee y\}}(G)$ (соответственно, $W_{\{f\}}(G) \supseteq W_{\{x \& y\}}(G)$). Применяя затем либо лемму 9, либо лемму 8, получаем, что $W_B(G) \supseteq W_{\{f\}}(G) \supseteq [0,1]$, откуда $G = W_B(G) = [0,1]$.

Пусть теперь $B \not\subseteq M$. Если при этом $B \subseteq L$, то найдется функция $f \in B \cap (L \setminus U)$ и в силу лемм 10 и 11 получаем, что

$$G = W_B(G) \supseteq W_{\{f\}}(G) \supseteq [0, \tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{1}{2}, 1] = [0, 1].$$

Если же $B \not\subseteq L$, то выберем, во-первых, функцию $f \in B \setminus M$. Тогда по лемме 3 выполнено $[\{f, c_0, c_1\}]_0 \ni \overline{x}$. Во-вторых, поскольку $B \not\subseteq L$, найдется функция $g \in B \setminus L$, и тогда по лемме 4 выполнено $[\{f, g, c_0, c_1\}]_0 \ni x\&y$. В силу леммы 12 выполнено $W_{\{f,g\}}(G) = W_{\{f,g,c_0,c_1\}}(G)$, что с использованием леммы 8 влечет:

$$G = W_B(G) \supseteq W_{\{f,g\}}(G) = W_{\{f,g,c_0,c_1\}}(G) \supseteq W_{\{x\&y\}}(G) = [0, 1].$$

Лемма доказана. □

# Алгебры предельных точек

**Теорема 1**. *Пусть* $V_B(G) = G$. *Тогда* $V_{B\setminus\{c_0,c_1\}}(\lambda(G)) = \lambda(G)$.

*Доказательство.* Рассмотрим распределения $q_1, \ldots, q_n \in \lambda(G)$ и функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in B \setminus \{c_0, c_1\}$. Покажем, что $\hat{f}(q_1, \ldots, q_n) \in \lambda(G)$, тогда утверждение теоремы будет доказано.

В силу определения предельных точек для каждого $q_i \in \lambda(G)$ найдется такая последовательность $\{p_{i,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, что $p_{i,s} \neq q_i$, $p_{i,s} \to q_i$ при $s \to \infty$ монотонно.

Определим множества $A^j_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_n}$ следующим образом:

$$A^j_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_n} = \{\hat{f}(p_{1,i_1}, \ldots, p_{j-1,i_{j-1}}, p_{j,s}, p_{j+1,i_{j+1}}, \ldots, p_{n,i_n})\}_{s\in\mathbb{N}},$$

где $j = 1, \ldots, n$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$. То есть в каждом таком множестве содержатся значения функции $\hat{f}$ на наборах, в которых все переменные, кроме $j$-й, фиксированы, а $j$-я переменная принимает всевозможные значения из множества $\{p_{j,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$. По следствию 1 каждое такое множество либо счетное, либо одноэлементное. Положим

$$I^j = \{(i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_n) \mid A^j_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_n} \text{ — счетное}\}.$$

Для наборов натуральных чисел $\tilde{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ и $\tilde{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1})$ будем писать, что $\tilde{\mu} > \tilde{\nu}$, если это неравенство выполнено для каждой компоненты наборов: $\mu_i > \nu_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тем самым введен (строгий) частичный порядок на множестве наборов длины $n-1$, подмножествами которого являются множества $I^j$, $j = 1, \ldots, n$.

В каждом из множеств $I^j$ либо содержится, либо не содержится бесконечная последовательность из монотонно возрастающих (в смысле определенного выше частичного порядка) наборов. Если такой последовательности в множестве $I^j$ нет, то существует такой набор $\tilde{\beta}^j = (\beta_1^j, \ldots, \beta_{j-1}^j, \beta_{j+1}^j, \ldots, \beta_n)$, что $\{\tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} > \tilde{\beta}^j\} \cap I^j = \varnothing$. Если же монотонно возрастающая последовательность наборов в множестве $I^j$ существует, обозначим ее наборы через

$$\tilde{\alpha}^{j,s} = (\alpha_1^{j,s}, \ldots, \alpha_{j-1}^{j,s}, \alpha_{j+1}^{j,s}, \ldots, \alpha_n^{j,s}).$$

Тогда для всех $s \in \mathbb{N}$ и всех $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ выполнено $\alpha_i^{j,s+1} > \alpha_i^{j,s}$.

Возможны два случая:

1. ни в одном множестве $I^j$ нет монотонно возрастающей последовательности наборов;

2. найдется множество $I^j$, содержащее возрастающую последовательность наборов.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

**1.** Пусть для каждого множества $I^j$ нашелся такой набор $\tilde{\beta}^j$, что $\{\tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} > \tilde{\beta}^j\} \cap I^j = \varnothing$. Тогда возьмем $\gamma_j = \max\limits_{k \neq j} \beta_j^k$ для $j = 1, \ldots, n$ и определим $\tilde{\gamma}^j = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_n)$. Тогда для любого $j = 1, \ldots, n$ выполнено $\{\tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} > \tilde{\gamma}^j\} \cap I^j = \varnothing$. Следовательно, при всех $j = 1, \ldots, n$ и всевозможных $i_1, \ldots, i_n$, удовлетворяющих неравенствам $i_l > \gamma_l$ для всех $l = 1, \ldots, n$, множества $A^j_{i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_n}$ — одноэлементные.

Рассмотрим два $n$-элементных набора индексов $\tilde{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и $\tilde{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, удовлетворяющих соотношениям $\mu_i > \gamma_i$ и $\nu_i > \gamma_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что если $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ различаются только в $j$-й компоненте, то значения $\hat{f}(p_{1,\mu_1}, \ldots, p_{n,\mu_n})$ и $\hat{f}(p_{1,\nu_1}, \ldots, p_{n,\nu_n})$ лежат (например) в множестве $A^j_{\mu_1, \ldots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_n}$ и, следовательно, $\hat{f}(p_{1,\mu_1}, \ldots, p_{n,\mu_n}) = \hat{f}(p_{1,\nu_1}, \ldots, p_{n,\nu_n})$. Из совпадения значений $\hat{f}$ на наборах, различающихся в одной компоненте, вытекают следующие равенства:

$$\hat{f}(p_{1,\mu_1}, p_{2,\mu_2}, \ldots, p_{n-1,\mu_{n-1}}, p_{n,\mu_n}) = \hat{f}(p_{1,\mu_1}, p_{2,\mu_2}, \ldots, p_{n-1,\mu_{n-1}}, p_{n,\nu_n}) = \ldots =$$
$$= \hat{f}(p_{1,\mu_1}, p_{2,\nu_2}, \ldots, p_{n-1,\nu_{n-1}}, p_{n,\nu_n}) = \hat{f}(p_{1,\nu_1}, p_{2,\nu_2}, \ldots, p_{n-1,\nu_{n-1}}, p_{n,\nu_n}).$$

Таким образом, равенство $\hat{f}(p_{1,\mu_1}, \ldots, p_{n,\mu_n}) = \hat{f}(p_{1,\nu_1}, \ldots, p_{n,\nu_n})$ в действительности выполнено для любых наборов индексов $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$, удовлетворяющих условиям $\mu_i > \gamma_i$ и $\nu_i > \gamma_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть далее $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ таковы, что $\mu_i \neq \nu_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда в силу монотонности каждой из последовательностей $\{p_{i,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ также при всех $i = 1, \ldots, n$ выполнено $p_{i,\mu_i} \neq p_{i,\nu_i}$.

Пусть $r = \hat{f}(p_{1,\mu_1}, \ldots, p_{n,\mu_n})$ (то же значение функция $\hat{f}$ принимает и на любом другом наборе $p_{1,\xi_1}, \ldots, p_{n,\xi_n}$, где $\xi_i > \gamma_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$). Покажем, что для любых $t_1, \ldots, t_n$ выполнено $\hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = r$. Действительно, для любых заданных $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ найдутся такие $\tau_1, \ldots, \tau_n$, что $t_i = p_{i,\mu_i} + \tau_i(p_{i,\nu_i} - p_{i,\mu_i}) = (1 - \tau_i)p_{i,\mu_i} + \tau_i p_{i,\nu_i}$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Используя эти представления и соотношение (3), получаем:

$$\begin{gathered}
\hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = \hat{f}((1 - \tau_1)p_{1,\mu_1} + \tau_1 p_{1,\nu_1}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) = \\
= (1 - \tau_1)\hat{f}(p_{1,\mu_1}, (1 - \tau_2)p_{2,\mu_2} + \tau_2 p_{2,\nu_2}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) + \\
+ \tau_1 \hat{f}(p_{1,\nu_1}, (1 - \tau_2)p_{2,\mu_2} + \tau_1 p_{2,\nu_2}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) = \\
= (1 - \tau_1)(1 - \tau_2)\hat{f}(p_{1,\mu_1}, p_{2,\mu_2}, (1 - \tau_3)p_{3,\mu_3} + \tau_3 p_{3,\nu_3}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) + \\
+ (1 - \tau_1)\tau_2 \hat{f}(p_{1,\mu_1}, p_{2,\nu_2}, (1 - \tau_3)p_{3,\mu_3} + \tau_3 p_{3,\nu_3}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) + \\
+ \tau_1(1 - \tau_2)\hat{f}(p_{1,\nu_1}, p_{2,\mu_2}, (1 - \tau_3)p_{3,\mu_3} + \tau_3 p_{3,\nu_3}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) + \\
+ \tau_1\tau_2 \hat{f}(p_{1,\nu_1}, p_{2,\nu_2}, (1 - \tau_3)p_{3,\mu_3} + \tau_3 p_{3,\nu_3}, \ldots, (1 - \tau_n)p_{n,\mu_n} + \tau_n p_{n,\nu_n}) = \\
= \ldots = (1 - \tau_1)\cdots(1 - \tau_n)\hat{f}(p_{1,\mu_1}, \ldots, p_{n,\mu_n}) + \ldots + \tau_1 \cdots \tau_n \hat{f}(p_{1,\nu_1}, \ldots, p_{n,\nu_n}) = \\
= (1 - \tau_1)\cdots(1 - \tau_n)r + (1 - \tau_1)\cdots(1 - \tau_{n-1})\tau_n r + \ldots + \tau_1 \cdots \tau_n r = r.
\end{gathered}$$

Итак, для произвольных $t_1, \ldots, t_n$ выполнено $\hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = r$, и, в частности, это верно для $t_1, \ldots, t_n \in \{0, 1\}$. Но для $t_1, \ldots, t_n \in \{0, 1\}$ выполнено $\hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$, и, следовательно, при всех $t_1, \ldots, t_n \in \{0, 1\}$ выполняется $f(t_1, \ldots, t_n) = r$, откуда $r \in \{0, 1\}$, и тогда $f$ — одна из константных функций $c_0, c_1$. Это противоречит тому, что $f \in B \setminus \{c_0, c_1\}$, а значит, для рассматриваемой функции $f$ невозможен случай, когда для каждого множества $I^j$ нашелся такой набор $\tilde{\beta}^j$, что $\{\tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} > \tilde{\beta}^j\} \cap I^j = \varnothing$.

**2.** Следовательно, в условиях теоремы обязательно найдется такое множество $I^j$, в котором содержится последовательность наборов $\{\tilde{\alpha}^{j,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, возрастающих по каждой компоненте при $s \to \infty$. Рассмотрим для всех $s \in \mathbb{N}$ множества:

$$A^j_{\alpha_1^{j,s}, \ldots, \alpha_{j-1}^{j,s}, \alpha_{j+1}^{j,s}, \ldots, \alpha_n^{j,s}} = \{\hat{f}(p_{1,\alpha_1^{j,s}}, \ldots, p_{j-1,\alpha_{j-1}^{j,s}}, p_{j,t}, p_{j+1,\alpha_{j+1}^{j,s}}, \ldots, p_{n,\alpha_n^{j,s}})\}_{t\in\mathbb{N}}.$$

Каждое из них счетное, следовательно, имеет (по крайней мере одну) предельную точку $q_{\alpha_1^{j,s}, \ldots, \alpha_{j-1}^{j,s}, \alpha_{j+1}^{j,s}, \ldots, \alpha_n^{j,s}}$, к которой сходится некоторая последовательность точек множества:

$$\lim_{m\to\infty} \hat{f}(p_{1,\alpha_1^{j,s}}, \ldots, p_{j-1,\alpha_{j-1}^{j,s}}, p_{j,t_m}, p_{j+1,\alpha_{j+1}^{j,s}}, \ldots, p_{n,\alpha_n^{j,s}}) = q_{\alpha_1^{j,s}, \ldots, \alpha_{j-1}^{j,s}, \alpha_{j+1}^{j,s}, \ldots, \alpha_n^{j,s}}.$$

В силу непрерывности функции $\hat{f}$ по $j$-ой переменной и равенств $\lim\limits_{m\to\infty} p_{j,t_m} = \lim\limits_{t\to\infty} p_{j,t} = q_j$ получаем, что выполнено равенство:

$$\hat{f}(p_{1,\alpha_1^{j,s}},\ldots,p_{j-1,\alpha_{j-1}^{j,s}},q_j,p_{j+1,\alpha_{j+1}^{j,s}},\ldots,p_{n,\alpha_n^{j,s}}) = q_{\alpha_1^{j,s},\ldots,\alpha_{j-1}^{j,s},\alpha_{j+1}^{j,s},\ldots,\alpha_n^{j,s}}.$$

В силу включения $A^j_{\alpha_1^{j,s},\ldots,\alpha_{j-1}^{j,s},\alpha_{j+1}^{j,s},\ldots,\alpha_n^{j,s}} \subseteq G$ точка $q_{\alpha_1^{j,s},\ldots,\alpha_{j-1}^{j,s},\alpha_{j+1}^{j,s},\ldots,\alpha_n^{j,s}}$ принадлежит множеству $\lambda(G)$.

Поскольку последовательность $\{q_{\alpha_1^{j,s},\ldots,\alpha_{j-1}^{j,s},\alpha_{j+1}^{j,s},\ldots,\alpha_n^{j,s}}\}_{s\in\mathbb{N}}$ ограничена, из нее можно выбрать подпоследовательность $\{q_{\alpha_1^{j,s_m},\ldots,\alpha_{j-1}^{j,s_m},\alpha_{j+1}^{j,s_m},\ldots,\alpha_n^{j,s_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$, сходящуюся к $q$ при $m\to\infty$. Ее предел $q$ будет либо совпадать с одним из элементов последовательности, либо лежать в множестве $\lambda(\lambda(G)) \subseteq \lambda(G)$, т. е. в любом случае $q \in \lambda(G)$.

Наконец, заметим, что для каждого $i = 1,\ldots,n$ последовательность $\{p_{i,\alpha_i^{j,s_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность последовательности $\{p_{i,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, а следовательно, выполнены равенства $\lim\limits_{m\to\infty} p_{i,\alpha_i^{j,s_m}} = \lim_{s\to\infty} p_{i,s} = q_i$. В силу непрерывности функции $\hat{f}$ получаем:

$$\begin{aligned}\lambda(G) \ni q = \lim_{m\to\infty} q_{\alpha_1^{j,s_m},\ldots,\alpha_{j-1}^{j,s_m},\alpha_{j+1}^{j,s_m},\ldots,\alpha_n^{j,s_m}} = \\ = \lim_{m\to\infty} \hat{f}(p_{1,\alpha_1^{j,s_m}},\ldots,p_{j-1,\alpha_{j-1}^{j,s_m}},q_j,p_{j+1,\alpha_{j+1}^{j,s_m}},\ldots,p_{n,\alpha_n^{j,s_m}}) = \\ = \hat{f}\left(\lim_{m\to\infty} p_{1,\alpha_1^{j,s_m}},\ldots,\lim_{m\to\infty} p_{1,\alpha_{j-1}^{j,s_m}},q_j,\lim_{m\to\infty} p_{1,\alpha_{j+1}^{j,s_m}},\ldots,\lim_{m\to\infty} p_{1,\alpha_n^{j,s_m}}\right) = \\ = \hat{f}(q_1,\ldots,q_n).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Используя теорему 1, можно получить описание алгебр с конечным множеством предельных точек. Для этого нам также потребуется следующая теорема, характеризующая конечные алгебры бернуллиевских распределений.

**Теорема 2** [7]. *Пусть* $V_B(G) = G$ *и* $|G| < \infty$. *Тогда имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений*: (1) $G \subseteq \{0,1\}$*;* (2) $B \subseteq U$*;* (3) $G = \{p\}$*,* $p \notin \{0,1\}$ *— алгебраическое число;* (4) $G \subseteq \{0,1,\frac{1}{2}\}$*,* $B \subseteq L$*.*

**Теорема 3**. *Пусть* $V_B(G) = G$. *Если при этом* $\lambda(G)$ *конечно, то либо* $B \subseteq U$*, либо* $|\lambda(G)| < 2$*.*

*Доказательство.* Для заданного в условии теоремы множества $B$ рассмотрим множество $B' = B \setminus \{c_0, c_1\}$. Тогда по теореме 1 получаем, что $V_{B'}(\lambda(G)) = \lambda(G)$, причем по условию теоремы $\lambda(G)$ — конечное множество. Тогда в силу теоремы 2 выполнено одно из следующих утверждений:

1. $\lambda(G) \subseteq \{0,1\}$;

2. $B' \subseteq U$;

3. $\lambda(G) = \{p\}$, $p \notin \{0,1\}$ — алгебраическое число;

4. $\lambda(G) \subseteq \{0,1,\frac{1}{2}\}$, $B' \subseteq L$.

Предположим, что при этом $B \nsubseteq U$ и $|\lambda(G)| > 1$. Тогда пп. 2 и 3 заведомо не могут выполняться, и должно быть выполнено хотя бы одно из следующих двух утверждений:

1. $\lambda(G) = \{0,1\}$, $B \nsubseteq U$.

2. $\lambda(G) \ni c$, где $c \in \{0,1\}$, $B \subseteq L$, $B \nsubseteq U$.

Рассмотрим сначала такие множества $B$, что $B \subseteq L, B \nsubseteq U$: при этом может быть выполнено как первое, так и второе из приведенных выше утверждений. Если выполнено первое, то $\lambda(G) = \{0,1\}$ и, очевидно, $\lambda(G) \ni c$, где $c \in \{0,1\}$. Если же выполнено второе, то также имеет место $\lambda(G) \ni c$, где $c \in \{0,1\}$. Таким образом, из предположения конечности множества $\lambda(G)$, условий $B \nsubseteq U$, $|\lambda(G)| > 1$ и $B \subseteq L$ вытекает, что $\lambda(G) \ni c$ для некоторого $c \in \{0,1\}$. Используя в зависимости от значения $c$ либо лемму 10, либо лемму 11, получаем, что $W_B(G)$, а следовательно, и $\lambda(G)$, содержит либо отрезок $[0,\frac{1}{2}]$, либо отрезок $[\frac{1}{2},1]$, и значит множество $\lambda(G)$ не может быть конечным. Итак, $B \nsubseteq L$, и, следовательно, второе утверждение выполняться не может.

Таким образом, из предположения $B \nsubseteq U$, конечности множества $\lambda(G)$ и неравенства $|\lambda(G)| > 1$ неизбежно вытекает равенство $\lambda(G) = \{0,1\}$ и соотношение $B \nsubseteq L$. Если при этом $B \subseteq K$ или $B \subseteq D$, то, используя лемму 8 или лемму 9, получаем, что $W_B(G) = [0,1]$, а следовательно, $\lambda(G) = [0,1]$, что противоречит конечности множества $\lambda(G)$.

Если же $B \nsubseteq K, D$, то рассмотрим $G' = W_B(G)$. Тогда по лемме 13 получаем, что $G' = [0,1] = G \cup \lambda(G)$, откуда $\lambda(G) = [0,1]$, а это противоречит конечности множества $\lambda(G)$. Таким образом, наше предположение о наличии в случае $B \nsubseteq U$ конечного множества $\lambda(G)$ с $|\lambda(G)| > 1$ неверно. Теорема доказана. $\square$

# Заключение

Теорема 3 вместе с результатами работ [7] и [6] практически полностью закрывает вопрос об устройстве алгебр бернуллиевских распределений с конечным множеством предельных точек. За исключением вырожденного (в определенном смысле) случая множеств $B \subseteq U$, алгебры бернуллиевских распределений могут иметь только ноль или одну предельную точку, причем соответствующие алгебры охарактеризованы достаточно полно в работах [6, 7].

Согласно теореме 3, алгебр с каким-либо другим конечным числом предельных точек не существует, и, следовательно, все прочие алгебры обязаны иметь как минимум счетное множество предельных точек. Примером алгебры, в которой $\lambda(G)$ именно счетно (а не континуально), может служить алгебра $W_{\{(x\&y)\vee(y\&z)\vee(z\&x)\}}(p)$, где $p \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (см. [4]).

Автор выражает признательность О. М. Касим-Заде за внимание к данной работе.

# Список литературы


[1] Гиндикин С. Г., Мучник А. А. Решение проблемы полноты для систем функций алгебры логики с ненадежной реализацией // Проблемы кибернетики. Вып. 15. М.: Наука, 1965. С. 65–84.

[2] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высш. шк., 2001.

[3] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[4] Яшунский А. Д. О вероятностях значений случайных булевых выражений: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2006.

[5] Яшунский А.Д. О подалгебрах вероятностных распределений над конечными кольцами // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 84. 14 с. doi:10.20948/prepr-2018-84

[6] Яшунский А.Д. Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 135. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-135

[7] Яшунский А. Д. Конечные алгебры бернуллиевских распределений // Дискрет. матем., 2018. Т. 30, № 2. С. 148–161.