ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 254 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Дудникова Т.В.

Бесконечная неоднородная цепочка гармонических осцилляторов: Стабилизация статистических решений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дудникова Т.В. Бесконечная неоднородная цепочка гармонических осцилляторов: Стабилизация статистических решений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 254. 24 с. doi:10.20948/prepr-2018-254
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-254

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Т. В. Дудникова

Бесконечная неоднородная цепочка гармонических осцилляторов: Стабилизация статистических решений

Москва — 2018

Дудникова Т.В.

Бесконечная неоднородная цепочка гармонических осцилляторов: Стабилизация статистических решений

Рассматривается бесконечная неоднородная гармоническая цепочка частиц с различными силовыми константами взаимодействия между ними. Изучается поведение при больших временах распределений решений задачи Коши со случайными начальными условиями. Главная цель – доказать сходимость этих распределений к некоторой предельной мере.

Ключевые слова: бесконечная двух-компонентная цепочка гармонических осцилляторов, задача Коши, случайные начальные данные, слабая сходимость мер

Tatiana Vladimirovna Dudnikova

Infinite non-homogeneous chain of harmonic oscillators: Stabilization of statistical solutions

We consider an infinite irregular harmonic chain of particles with different force constants of interaction between them. For large times we study the behavior of distributions of solutions of the Cauchy problem with random initial conditions. The main goal is to prove the convergence of these distributions to a limiting measure.

Key words: infinite two-component chain of harmonic oscillators, Cauchy problem, random initial data, weak convergence of measures

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (грант N. 14-21-00025)

1. Введение

Мы рассматриваем бесконечную гармоническую цепочку частиц на прямой со взаимодействием в соседних точках и массой, равной единице. Предполагается, что частицы, расположенные в точках $x > 0$, имеют одинаковые силовые константы взаимодействия $\nu_+ > 0$, и на них действуют одинаковые внешние гармонические силы с константами $\kappa_+ \geq 0$, а частицы, расположенные в точках $x < 0$, имеют константы $\nu_+ > 0$ и $\kappa_- \geq 0$, соответственно. В то же время на частицу, расположенную в начале координат действует внешняя сила с константой $\kappa_0 \geq 0$. Отклонение частицы, расположенной в точке $x \in \mathbb{Z}$, от положения равновесия удовлетворяет следующим уравнениям:

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}(x,t) &= (\nu_+^2 \Delta_L - \kappa_+^2) u(x,t), \quad x \geq 1, \quad t > 0, && (1.1)\\
\ddot{u}(0,t) &= \nu_+^2 (u(1,t) - u(0,t)) + \nu_-^2 (u(-1,t) - u(0,t)) - \kappa_0^2 u(0,t), && (1.2)\\
\ddot{u}(x,t) &= (\nu_-^2 \Delta_L - \kappa_-^2) u(x,t), \quad x \leq -1, \quad t > 0. && (1.3)
\end{aligned}
$$

Здесь $u(x,t) \in \mathbb{R}$, Δ_L обозначает вторую производную на $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$:

$$
\Delta_L u(x) = u(x+1) - 2u(x) + u(x-1), \quad x \in \mathbb{Z}.
$$

Для системы (1.1)–(1.3) изучаем задачу Коши с начальными данными

$$
u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}
$$

Формально эта система является гамильтоновой с функцией Гамильтона следующего вида

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}(u, \dot{u}) &= \mathrm{H}_+(u, \dot{u}) + \mathrm{H}_-(u, \dot{u}) + \mathrm{H}_0(u, \dot{u}), && (1.5)\\
\mathrm{H}_\pm(u, \dot{u}) &= \frac{1}{2} \sum_{\pm x \geq 1} \Big(|\dot{u}(x,t)|^2 + \nu_\pm^2 |u(x \pm 1, t) - u(x,t)|^2 + \kappa_\pm^2 |u(x,t)|^2 \Big),\\
\mathrm{H}_0(u, \dot{u}) &= \frac{1}{2} \Big(|\dot{u}(0,t)|^2 + \kappa_0^2 |u(0,t)|^2 + \sum_{\pm} \nu_\pm^2 |u(\pm 1, t) - u(0,t)|^2 \Big).
\end{aligned}
$$

На коэффициенты уравнений $\nu_\pm > 0$, $\kappa_0, \kappa_\pm \geq 0$ накладывается условие **C**. Чтобы сформулировать это условие, введем следующие обозначения. Для простоты, допустим, что $\kappa_- \leq \kappa_+$. Положим

$$
\begin{aligned}
\bar{\kappa}^2 &:= \left(\kappa_-^2 + \kappa_+^2 \right)/2; \quad a_\pm := \sqrt{4\nu_\pm^2 + \kappa_\pm^2};\\
K_\pm(\omega) &:= \bar{\kappa}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 - \kappa_\pm^2} \sqrt{\omega^2 - a_\pm^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}: \ |\omega| \geq a_\pm;\\
K_0(\omega) &:= \bar{\kappa}^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\kappa_+^2 - \omega^2} \sqrt{a_+^2 - \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}: \ |\omega| \leq \kappa_+ \quad (\text{если } \ \kappa_+ > 0).
\end{aligned}
$$

Условие C: При различных значениях $\kappa_\pm$ и $\nu_\pm$ константа κ_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{array}{l}
\kappa_0^2 < K_+(a_-), \ \text{ если } \ a_- \geq a_+; \quad \kappa_0^2 < K_-(a_+), \ \text{ если } \ a_+ \geq a_-; \\
\kappa_0^2 > K_0(\kappa_-), \ \text{ если } \ \kappa_- \neq 0; \\
\kappa_0^2 > K_-(\kappa_+) \ \text{ или } \ \kappa_0^2 < K_0(a_-), \quad \text{ если } \ a_- \leq \kappa_+; \\
\kappa_0 \neq 0, \ \text{ если } \ \kappa_- = \kappa_+ = 0.
\end{array}$$

Например, из условия **C** вытекает, что $\kappa_0^2 \in \Big(0{,}2\max(\nu_-,\nu_+)\sqrt{|\nu_-^2-\nu_+^2|}\Big)$, если $\kappa_\pm = 0$ и $\nu_- \neq \nu_+$.

Обозначим $Y(t) = (u(\cdot,t), \dot{u}(\cdot,t))$, $Y_0(x) \equiv (Y_0^0(x), Y_0^1(x)) = (u_0(x), v_0(x))$. Предполагается, что начальные данные $Y_0(x)$ принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, определенному ниже.

Определение 1.1. *$\ell^2_\alpha \equiv \ell^2_\alpha(\mathbb{Z})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – гильбертово пространство последовательностей $u(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, с нормой*

$$\|u\|^2_\alpha = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \langle x\rangle^{2\alpha}|u(x)|^2 < \infty, \quad \langle x\rangle := (1+x^2)^{1/2}.$$

$\mathcal{H}_\alpha = \ell^2_\alpha \otimes \ell^2_\alpha$ – гильбертово пространство пар $Y = (u,v)$ последовательностей с нормой $\|Y\|^2_\alpha = \|u\|^2_\alpha + \|v\|^2_\alpha < \infty$.

Задачу (1.1)–(1.4) с начальными данными из пространства $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 3/2$, мы уже изучали в [6, 8], однако в данной работе мы применим полученные результаты к случаю, когда начальные данные Y_0 являются *случайным элементом* пространства $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha < -3/2$. Через μ_0 обозначим вероятностную борелевскую меру, которая является распределением Y_0. Мы налагаем ряд условий на меру μ_0. В частности, предполагается, что μ_0 обладает нулевым средним значением. Кроме того, ее корреляционная матрица $Q_0(x,y) = \Big(Q_0^{ij}(x,y)\Big)_{i,j=0,1}$, где

$$Q_0^{ij}(x,y) = \int \Big(Y_0^i(x)Y_0^j(y)\Big)\,\mu_0(dY), \quad x,y \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

убывает как $|x-y|^{-N}$ при $|x-y| \to \infty$ с некоторым $N > 1$ (см. оценку (2.10) ниже), и удовлетворяет следующей оценке

$$Q_0(y+z,y) \to \left\{ \begin{array}{ll} q_-(z) & \text{при } \ y \to -\infty \\ q_+(z) & \text{при } \ y \to +\infty \end{array} \right| \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Здесь через $q_\pm(z)$ обозначаются корреляционные матрицы некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_\pm$ с нулевым средним значением в $\mathcal{H}_\alpha$. По определению, мера μ называется *трансляционно-инвариантной*, если

$$\mu(T_h B) = \mu(B),\ \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)\ \text{ и } \forall h \in \mathbb{Z},\ \text{где } T_h Y(x) = Y(x-h),\ x \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через μ_t, $t \in \mathbb{R}$, вероятностную меру на $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением случайного решения $Y(t)$ задачи (1.1)–(1.4). Первая цель работы – это доказать сходимость корреляционных функций мер μ_t к пределу, т.е.

$$Q_t(x,y) \equiv \int \Big(Y_0(x) \otimes Y_0(y)\Big)\, \mu_t(dY_0) \to Q_\infty(x,y),\ \ t \to \infty,\ \ x,y \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

и вывести точные формулы для предельной корреляционной матрицы Q_∞, см. формулы (2.25) ниже.

Второй целью работы является доказать, что меры μ_t слабо сходятся на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$ с $\alpha < -3/2$ к некоторой предельной гауссовской мере μ_∞,

$$\mu_t \rightharpoondown \mu_\infty \quad \text{при}\ \ t \to \infty. \quad (1.9)$$

По определению, это означает, что для любого непрерывного ограниченного функционала f на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$ имеет место следующая сходимость

$$\int f(Y)\, \mu_t(dY) \to \int f(Y)\, \mu_\infty(dY), \quad t \to \infty.$$

Доказательство утверждений (1.8) и (1.9) основано на следующей асимптотике решений в среднем

$$Y(t) \sim \Omega(U_0(t) Y_0), \quad t \to \infty,$$

где $U_0(t)$ – разрешающий оператор задачи (1.1), (1.3), (1.4) с нулевым граничным условием при $x = 0$, а Ω – некоторый линейный ограниченный оператор. Эта асимптотика выводится в разделе 4 (см. лемму 4.3), используя технику работ [6, 8].

2. Главные результаты

Теорема 2.1. *Пусть* $\kappa_\pm, \kappa_0 \ge 0$, $\nu_\pm > 0$ *и* $Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда*
(i) задача (1.1)–(1.4) имеет, и притом единственное, решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\alpha)$.
(ii) Оператор $U(t) : Y_0 \to Y(t)$ *непрерывен на* $\mathcal{H}_\alpha$. *Более того, существуют константы* $C, B < \infty$, *такие, что* $\|U(t)Y_0\|_\alpha \le C e^{B|t|} \|Y_0\|_\alpha$, $t \in \mathbb{R}$.
(iii) Если $Y_0 \in \mathcal{H}_0$, *то справедливо следующее тождество*

$$\mathrm{H}(Y(t)) = \mathrm{H}(Y_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где $\mathrm{H}(Y)$ *– гамильтониан, определенный в (1.5).*

Эта теорема может быть доказана аналогично теореме 2.1 из [4]. Доказательство ее основано на следующем представлении решений задачи (1.1)–(1.4):

$$u(x,t) = z(x,t) + r(x,t), \quad x \in \mathbb{Z}, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

где $z(x,t)$ – решение задачи с нулевым граничным условием

$$\ddot{z}(x,t) = (\nu_\pm^2 \Delta_L - \kappa_\pm^2) z(x,t), \quad \pm x > 0, \quad t > 0, \tag{2.3}$$
$$z(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.4}$$
$$z(x,0) = u_0(x), \quad \dot{z}(x,0) = v_0(x), \quad x \neq 0. \tag{2.5}$$

Следовательно, $r(x,t)$ является решением следующей смешанной задачи

$$\ddot{r}(x,t) = (\nu_\pm^2 \Delta_L - \kappa_\pm^2) r(x,t), \quad \pm x > 0, \quad t > 0, \tag{2.6}$$
$$\ddot{r}(0,t) = \nu_+^2 (r(1,t) - r(0,t)) + \nu_-^2 (r(-1,t) - r(0,t)) - \kappa_0^2 r(0,t), \tag{2.7}$$
$$r(x,0) = 0, \quad \dot{r}(x,0) = 0, \quad x \neq 0, \tag{2.8}$$
$$r(0,0) = u_0(0), \quad \dot{r}(0,0) = v_0(0). \tag{2.9}$$

2.1. Условия на начальную меру. Предполагается, что начальные данные $Y_0(x) = (Y_0^0(x), Y_0^1(x))$ в уравнении (1.4) – это измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}_\alpha,\, \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha))$, $\alpha < -3/2$, где $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ обозначает борелевскую σ-алгебру в $\mathcal{H}_\alpha$. Обозначим через μ_0 вероятностную борелевскую меру на $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением Y_0, а через $\mathbb{E}$ – математическое ожидание по этой мере. На начальную меру μ_0 накладываются следующие условия.

S1 μ_0 обладает нулевым средним значением, т.е.
$\mathbb{E}\,(Y_0(x)) \equiv \displaystyle\int Y_0(x)\, \mu_0(dY_0) = 0,\, x \in \mathbb{Z}.$

S2 μ_0 имеет конечную “среднюю плотность энергии”,

$$\mathbb{E}(|Y_0(x)|^2) = Q_0^{00}(x,x) + \, Q_0^{11}(x,x) \leq e_0 < \infty, \quad x \in \mathbb{Z},$$

где $Q_0^{ij}(x,y)$ определены в (1.6).

Введем меру $P_0 = \mu_0\{Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha :\, Y_0(0) = 0\}$. Через $\mathbb{E}_0$ обозначим математическое ожидание по мере P_0. Корреляционные функции меры P_0 обозначим через

$$Q_0^{P,ij}(x,y) = \mathbb{E}_0(Y_0^i(x) Y_0^j(y)), \quad x,y \in \mathbb{Z}, \quad i,j = 0{,}1.$$

Эти функции удовлетворяют следующим условиям **S3** и **S4**.

S3 Корреляционные функции $Q_0^{P,ij}(x,y)$ удовлетворяют условию (1.7).

S4 Функции $Q_0^{P,ij}(x,y)$ удовлетворяют следующей оценке

$$|Q_0^{P,ij}(x,y)| \leq h(|x-y|), \quad \text{где} \;\; h(r) \in L^1(0,+\infty). \tag{2.10}$$

Для того чтобы доказать сходимость (1.9), мы наложим более сильное условие **S5** на меру P_0, чем оценка (2.10). Чтобы сформулировать это условие, обозначим через $\sigma(\mathcal{A})$ (где $\mathcal{A}$ – некоторый интервал в $\mathbb{Z}$) σ-алгебру в пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, порожденную начальными данными $Y_0(x)$ с $x \in \mathcal{A}$. Введем коэффициент перемешивания меры P_0 следующим образом

$$\varphi(r) \equiv \sup_{\substack{\mathcal{A},\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}:\\ \mathrm{dist}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq r}} \ \sup_{\substack{A \in \sigma(\mathcal{A}), B \in \sigma(\mathcal{B})\\ P_0(B) > 0}} \frac{|P_0(A \cap B) - P_0(A)P_0(B)|}{P_0(B)}.$$

Определение 2.2. *Мера P_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова, если $\varphi(r) \to 0$ при $r \to \infty$.*

S5 Мера P_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова, и

$$\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(r)\, dr < \infty.$$

Замечание 2.3. Из условий **S1**, **S2** и **S5** вытекает оценка (2.10) с функцией $h(r) = Ce_0\varphi^{1/2}(r)$.

2.2. Задача с нулевым граничным условием. Сформулируем результаты, касающиеся решений задачи (2.3)–(2.5).

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда для любых $Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha$ существует, и притом единственное, решение $Z(t) \equiv (z(\cdot,t), \dot z(\cdot,t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\alpha)$ задачи (2.3)–(2.5); оператор $U_0(t) : Y_0 \mapsto Z(t)$ непрерывен на $\mathcal{H}_\alpha$.*

Доказательство. Решение задачи (2.3)–(2.5) можно представить в виде

$$z(x,t) = z_\pm(x,t) \quad \text{при} \ \ \pm x \geq 0, \quad t > 0,$$

где $z_\pm(x,t)$ – решения смешанных задач с нулевым граничным условием:

$$\ddot z_\pm(x,t) = (\nu_\pm^2 \Delta_L - \kappa_\pm^2) z_\pm(x,t), \qquad \pm x \geq 1, \quad t > 0, \tag{2.11}$$

$$z_\pm(0,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.12}$$

$$z_\pm(x,0) = u_0(x), \quad \dot z_\pm(x,0) = v_0(x), \qquad \pm x \geq 1. \tag{2.13}$$

Чтобы сформулировать результаты для решений $Z_\pm(t) \equiv (z_\pm(\cdot,t), \dot z_\pm(\cdot,t))$ задачи (2.11)–(2.13), введем гильбертовы пространства $\ell^2_{\alpha,\pm} \equiv \ell^2_{\alpha,\pm}(\mathbb{Z}_\pm)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, с нормой

$$\|u\|^2_{\alpha,\pm} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_\pm} \langle x \rangle^{2\alpha} |u(x)|^2 < \infty, \quad \mathbb{Z}_\pm = \{x \in \mathbb{Z} : \pm x \geq 0\}.$$

Лемма 2.2. *([4, лемма 2.7]) Для любых начальных данных $Y_0 \in \mathcal{H}_{\alpha,\pm}$ существует, и притом единственное, решение $Z_\pm(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\alpha,\pm})$ смешанной задачи (2.11)–(2.13). Оператор $U_\pm(t) : Y_0 \mapsto Z_\pm(t)$ непрерывен на $\mathcal{H}_{\alpha,\pm}$. Более того, справедливы следующие оценки*

$$\|U_\pm(t)Y_0\|_{\alpha,\pm} \le C\langle t\rangle^\sigma \|Y_0\|_{\alpha,\pm}$$

с константами $C = C(\alpha), \sigma = \sigma(\alpha) < \infty$.

Доказательство этой леммы основано на следующей формуле для решений задачи (2.11)–(2.13):

$$z_\pm^{(i)}(x,t) = \sum_{\pm y \ge 0} G^{ij}_{t,\pm}(x,y)Y_0^j(y), \quad \pm x \ge 1, \quad i = 0{,}1, \tag{2.14}$$

где $z_\pm^{(0)}(x,t) \equiv z_\pm(x,t)$, $z_\pm^{(1)}(x,t) \equiv \dot z_\pm(x,t)$, $Y_0^0(x) \equiv u_0(x)$, $Y_0^1(x) \equiv v_0(x)$, функция Грина $G_{t,\pm}(x,y) = (G^{ij}_{t,\pm}(x,y))^1_{i,j=0}$ – это матричнозначная функция вида

$$G^{ij}_{t,+}(x,x') := \mathcal{G}^{ij}_{t,\pm}(x-x') - \mathcal{G}^{ij}_{t,\pm}(x+x'), \tag{2.15}$$

$$\mathcal{G}^{ij}_{t,\pm}(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} e^{-ix\theta}\hat{\mathcal{G}}^{ij}_{t,\pm}(\theta)\,d\theta,$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathcal{G}}^{ij}_{t,\pm}(\theta)\right)^1_{i,j=0} &= \begin{pmatrix} \cos\phi_\pm(\theta)t & \sin\phi_\pm(\theta)t/\phi_\pm(\theta) \\ -\phi_\pm(\theta)\sin\phi_\pm(\theta)t & \cos\phi_\pm(\theta)t \end{pmatrix}, \\ \phi_\pm(\theta) &= \sqrt{\nu_\pm^2(2-2\cos\theta)+\kappa_\pm^2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

В частности, $\phi_\pm(\theta) = 2\nu_\pm|\sin(\theta/2)|$, если $\kappa_\pm = 0$. Очевидно, что для любых t $z_\pm(0,t) \equiv 0$, так как $\mathcal{G}^{ij}_{t,\pm}(-x) = \mathcal{G}^{ij}_{t,\pm}(x)$.

Введем оператор $U_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, следующим образом

$$\left(U_0(t)Y_0\right)(x) = \left(U_\pm(t)Y_0|_{\mathbb{Z}_\pm}\right)(x) \ \text{ при } \ \pm x \ge 0.$$

В частности, $\left(U_0(t)Y_0\right)(0) = 0$ для любых t. Тогда лемма 2.1 вытекает из леммы 2.2. ■

Определение 2.4. *Обозначим через P_t, $t \in \mathbb{R}$, вероятностную борелевскую меру на $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением решения $U_0(t)Y_0$ задачи (2.3)–(2.5), т.е. $P_t(B) = P_0(U_0(-t)B)$ для любых $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$.*

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* **S1–S4**, $\alpha < -1/2$, *если* $\kappa_\pm \neq 0$, *и* $\alpha < -1$ *в противном случае. Тогда имеют место следующие утверждения.*
(i) Справедлива следующая равномерная оценка,

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}_0 \|U_0(t)Y_0\|_\alpha^2 < \infty. \tag{2.17}$$

(ii) Корреляционные функции мер P_t *сходятся к пределу,*

$$Q_t^P(x,y) := \int \Big(Z(x) \otimes Z(y) \Big) \, P_t(dZ) \to Q_\infty^P(x,y), \quad t\to\infty, \quad x,y \in \mathbb{Z}.$$

Предельная корреляционная матрица $Q_\infty^P(x,y)$ *имеет вид*

$$Q_\infty^P(x,y) = \begin{cases} Q_{\infty,+}(x,y), & \textit{если} \quad x,y>0, \\ Q_{\infty,-}(x,y), & \textit{если} \quad x,y<0, \\ 0, & \textit{в противном случае}, \end{cases} \tag{2.18}$$

где

$$Q_{\infty,\pm}(x,y) := q_{\infty,\pm}(x-y) - q_{\infty,\pm}(x+y) - q_{\infty,\pm}(-x-y) + q_{\infty,\pm}(-x+y), \tag{2.19}$$

$x,y \in \mathbb{Z}_\pm$. *Члены матриц* $q_{\infty,\pm}(x)$, $x \in \mathbb{Z}$, *в преобразовании Фурье имеют вид*

$$\begin{aligned} \hat q^{00}_{\infty,\pm}(\theta) &= \frac{1}{4}\left(\hat q^{00}_\pm(\theta) + \hat q^{11}_\pm(\theta)\phi_\pm^{-2}(\theta)\right) \pm \frac{i}{4}\,\mathrm{sign}(\theta)\phi_\pm^{-1}(\theta)\left(\hat q^{10}_\pm(\theta) - \hat q^{01}_\pm(\theta)\right), \\ \hat q^{11}_{\infty,\pm}(\theta) &= \phi_\pm^2(\theta)\hat q^{00}_{\infty,\pm}(\theta), \\ \hat q^{10}_{\infty,\pm}(\theta) &= \frac{1}{4}\left(\hat q^{10}_\pm(\theta) - \hat q^{01}_\pm(\theta)\right) \mp \frac{i}{4}\,\mathrm{sign}(\theta)\phi_\pm(\theta)\left(\hat q^{00}_\pm(\theta) + \hat q^{11}_\pm(\theta)\phi_\pm^{-2}(\theta)\right) \\ &= \mp i\,\mathrm{sign}(\theta)\phi_\pm(\theta)\hat q^{00}_{\infty,\pm}(\theta), \end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\theta \in \mathbb{T}$, *если* $\kappa_\pm \neq 0$, *и* $\theta \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$ *в противном случае, функции* $q^{ij}_\pm$, $i,j = 0{,}1$, *введены в условии (1.7),* $\phi_\pm(\theta)$ *– в (2.16). Кроме того,*

$$\hat q^{11}_{\infty,\pm}(\theta) = \hat q^{11}_{\infty,\pm}(-\theta), \quad \hat q^{01}_{\infty,\pm}(\theta) = -\hat q^{01}_{\infty,\pm}(-\theta) = -\hat q^{10}_{\infty,\pm}(\theta). \tag{2.21}$$

Эта теорема может быть доказана, используя результаты работы [4] и следующее утверждение:

$$Q_t^P(x,y) \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty, \quad \text{если} \ \ x \geq 0, \quad \text{а} \ \ y \leq 0. \tag{2.22}$$

Это утверждение мы докажем в Дополнении.

Теперь введем действительную квадратичную форму $\mathcal{Q}_{\infty,\pm}(\Psi,\Psi)$ на пространстве $\mathcal{S}_\pm = [S(\mathbb{Z}_\pm)]^2$ следующего вида

$$\mathcal{Q}_{\infty,\pm}(\Psi,\Psi) = \langle Q_{\infty,\pm}(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle_\pm, \quad \Psi = (\Psi^0,\Psi^1)\in\mathcal{S}_\pm,$$

где через $S(\mathbb{Z}_\pm)$ обозначается пространство последовательностей, убывающих быстрее любой степени $1/|x|$, и

$$\langle Y,\Psi\rangle_\pm := \sum_{i=0,1}\sum_{x\in\mathbb{Z}_\pm} Y^i(x)\Psi^i(x), \quad Y=(Y^0,Y^1), \quad \Psi=(\Psi^0,\Psi^1).$$

Пусть $\mathcal{Q}^P_\infty(\Psi,\Psi)$ обозначает действительную квадратичную форму на $\mathcal{S} = [S(\mathbb{Z})]^2$, где $S(\mathbb{Z})$ определяется аналогично $S(\mathbb{Z}_\pm)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^P_\infty(\Psi,\Psi) &= \langle Q^P_\infty(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle \\ &= \textstyle\sum_\pm \langle Q_{\infty,\pm}(x,y), \Psi(x)\otimes\Psi(y)\rangle_\pm = \sum_\pm \mathcal{Q}_{\infty,\pm}(\Psi,\Psi). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Здесь $\langle Y,\Psi\rangle := \sum\limits_{i=0,1}\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}} Y^i(x)\Psi^i(x)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия* **S1**–**S3**, **S5**, $\alpha < -1/2$, *если* $\kappa_\pm \neq 0$, *и* $\alpha < -1$ *в противном случае. Тогда меры* P_t *слабо сходятся при* $t\to\infty$ *на пространстве* $\mathcal{H}_\alpha$. *Предельная мера* P_∞ *является гауссовой с нулевым средним и с корреляционной матрицей* Q^P_∞, *определенной в (2.18).*

Эта теорема может быть доказана аналогично теореме A в [4].

Замечание 2.7. *(i) В случае гауссовых мер* P_0 *вместо условия* **S5** *достаточно наложить более слабое условие* **S4**.

(ii) Из равенств (2.21) вытекает, что функции $q^{ij}_{\infty,\pm}(x)$ *нечетные, если* $i\neq j$, *и четные, если* $i=j$. *Поэтому, в силу (2.19), имеем*

$$Q^{ij}_{\infty,\pm}(x,y) = 0 \quad \textit{и} \quad \Big(Q^P_\infty(x,y)\Big)^{ij} = 0 \quad \textit{при } i\neq j, \tag{2.24}$$

$$Q^{ii}_{\infty,\pm}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \hat{q}^{ii}_{\infty,\pm}(\theta)\sin(x\theta)\sin(y\theta)\,d\theta = \Big(Q^P_\infty(x,y)\Big)^{ii}, \quad x,y\in\mathbb{Z}_\pm.$$

2.3. Результаты. Обозначим через μ_t, $t\in\mathbb{R}$, борелевскую вероятностную меру на $\mathcal{H}_\alpha$, которая является распределением $Y(t)$: $\mu_t(B) = \mu_0(U(-t)B)$ для любого $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$. Корреляционные функции меры μ_t определяются следующим образом:

$$Q^{ij}_t(x,y) = \mathbb{E}\left(Y^i(x,t)Y^j(y,t)\right), \quad i,j=0,1, \quad x,y\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Здесь $Y^i(x,t)$ – координаты случайного решения $Y(t) = (Y^0(\cdot,t), Y^1(\cdot,t))$. Обозначим через $\mathcal{Q}_t$ квадратичную форму с матричным ядром $(Q_t^{ij}(x,y))_{i,j=0,1}$,

$$\mathcal{Q}_t(\Psi,\Psi) = \int |\langle Y,\Psi\rangle|^2\, \mu_t(dY) = \sum_{ij=0,1} \langle Q_t^{ij}(x,y), \Psi^i(x)\Psi^j(y)\rangle, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Обозначим через $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ квадратичную форму на $\mathcal{S}$ вида

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi) = \mathcal{Q}_\infty^P(\Omega'\Psi,\Omega'\Psi), \tag{2.25}$$

где квадратичная форма $\mathcal{Q}_\infty^P$ введена в (2.23), а оператор Ω' – в (4.24).

Первым результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия* **S1–S4** *и* **C**. *Тогда имеет место сходимость (1.8), и для всех* $\Psi\in\mathcal{S}$ *имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}|\langle Y(t),\Psi\rangle|^2 = \mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi).$$

Замечание 2.9. (i) Из явных формул для Ω' и Q_∞ вытекает, что $Q_\infty^{ij}(0,0) = 0$, если $i\neq j$, а при $i=j$ имеем

$$Q_\infty^{ii}(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \sin^2(\theta)\Big(\sum_{\pm} \hat{q}^{ii}_{\infty,\pm}(\theta)\,\Big|\int\limits_0^{+\infty} N(s)e^{i\phi_\pm(\theta)s}\,ds\Big|^2\Big)\,d\theta.$$

(ii) Предположим, что члены матриц $q_\pm(x)$ из условия (1.7) в преобразовании Фурье имеют вид

$$\hat{q}^{00}_\pm(\theta) = T_\pm\phi_\pm^{-2}(\theta), \quad \hat{q}^{11}_\pm(\theta) = T_\pm, \quad \hat{q}^{01}_\pm(\theta) = \hat{q}^{10}_\pm(\theta) = 0, \tag{2.26}$$

где $T_\pm > 0$, функция $\phi(\theta)$ введена в (2.16), $\theta\in\mathbb{T}$, если $\kappa_\pm\neq 0$, и $\theta\in\mathbb{T}\setminus\{0\}$, если $\kappa_\pm = 0$. Другими словами, меры $\mu_\pm$ из условия (1.7) являются гиббсовскими мерами с температурами $T_\pm$. Тогда

$$\begin{aligned}
\hat{q}^{11}_{\infty,\pm}(\theta) &= \hat{q}^{00}_{\infty,\pm}(\theta)\phi^2_\pm(\theta) = \frac{1}{2}T_\pm,\\
\hat{q}^{01}_{\infty,\pm}(\theta) &= -\hat{q}^{10}_{\infty,\pm}(\theta) = \pm\frac{i}{2}T_\pm\,\mathrm{sign}(\theta)\,\phi_\pm^{-1}(\theta).
\end{aligned}$$

Кроме того, $\Big(Q_\infty^P(x,y)\Big)^{ij} = 0$ при $i\neq j$,

$$\Big(Q_\infty^P(x,y)\Big)^{ii} = \frac{T_\pm}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \hat{\phi}_\pm^{2i-2}(\theta)\sin(x\theta)\sin(y\theta)\,d\theta, \quad i=0,1, \quad x,y\in\mathbb{Z}_\pm.$$

Вторым результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия* **S1–S3**, **S5** *и* **C**. *Тогда справедлива сходимость (1.9). При этом предельная мера* μ_∞ *является гауссовой мерой на* $\mathcal{H}_\alpha$.

3. Преобразование Фурье–Лапласа

В этом разделе мы изучаем свойства решений $r(x,t)$ задачи (2.6)–(2.9), используя преобразование Фурье–Лапласа.

Определение 3.1. *Пусть $|r(t)| \le Ce^{Bt}$. Преобразование Фурье–Лапласа функции $r(t)$ задается следующей формулой*

$$\tilde{r}(\omega) = \int\limits_0^{+\infty} e^{i\omega t} r(t)\, dt, \quad \Im\omega > B. \tag{3.1}$$

Из неравенства Гронуолла вытекает стандартная априорная оценка для решений $r(x,t)$, $x \in \mathbb{Z}$. В частности, существуют константы $A, B < \infty$, такие, что

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} (|r(x,t)|^2 + |\dot{r}(x,t)|^2) \le Ce^{Bt} \quad \text{при} \;\; t \to +\infty.$$

Следовательно, преобразование Фурье–Лапласа решений $r(x,t)$ задачи (2.6), (2.8) относительно переменной t (т.е. $r(x,t) \to \tilde{r}(x,\omega)$) существует по крайней мере для $\Im\omega > B$ и удовлетворяет следующему уравнению

$$(-\nu_\pm^2 \Delta_L + \kappa_\pm^2 - \omega^2)\tilde{r}(x,\omega) = 0 \qquad \pm x \ge 1, \quad \Im\omega > B. \tag{3.2}$$

Построим решение уравнения (3.2). Заметим, что преобразование Фурье оператора $-\nu_\pm^2 \Delta_L + \kappa_\pm^2$ есть оператор умножения на функцию

$$\phi_\pm^2(\theta) = \nu_\pm^2(2 - 2\cos\theta) + \kappa_\pm^2.$$

Таким образом, $-\nu_\pm^2 \Delta_L + \kappa_\pm^2$ является самосопряженным оператором, а его спектр является абсолютно непрерывным и совпадает с областью значений функции $\phi_\pm^2(\theta)$, т.е. с отрезком $[\kappa_\pm^2, a_\pm^2]$, где $a_\pm^2 := \kappa_\pm^2 + 4\nu_\pm^2$. Обозначим

$$\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-, \quad \Lambda_\pm := [-a_\pm, -\kappa_\pm] \cup [\kappa_\pm, a_\pm], \quad \text{где} \;\; a_\pm = \sqrt{\kappa_\pm^2 + 4\nu_\pm^2},$$

и

$$\Lambda^0 = \Lambda^0_- \cup \Lambda^0_+, \quad \text{где} \;\; \Lambda^0_\pm := \{-a_\pm, -\kappa_\pm, \kappa_\pm, a_\pm\}.$$

Лемма 3.1. *(см. [9, лемма 2.1]) Для $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ уравнение*

$$\nu_\pm^2(2 - 2\cos\theta) + \kappa_\pm^2 = \omega^2 \tag{3.3}$$

имеет, и притом единственное, решение $\theta_\pm(\omega)$ в области $\{\theta \in \mathbb{C} : \Im\theta > 0,\ -\pi < \Re\theta \le \pi\}$. Более того, $\theta_+(\omega)$ ($\theta_-(\omega)$) – аналитическая функция в области $\mathbb{C} \setminus \Lambda_+$ (в $\mathbb{C} \setminus \Lambda_-$, соответственно).

Так как мы ищем решение $r(\cdot,t)\in\ell^2_\alpha$ с некоторым α, то $\tilde r(x,\omega)$ имеет вид

$$\tilde r(x,\omega)=\begin{cases}\tilde r(0,\omega)e^{i\theta_+(\omega)x}, & x\ge 0,\\ \tilde r(0,\omega)e^{-i\theta_-(\omega)x}, & x\le 0.\end{cases}$$

Введем функцию

$$\tilde\Gamma^\pm_x(\omega)=e^{\pm i\theta_\pm(\omega)x},\quad \pm x\ge 1.$$

Применяя обратное преобразование Фурье–Лапласа относительно переменной ω, перепишем решение $r(x,t)$ задачи (2.6), (2.8) в виде

$$(r(x,t),\dot r(x,t))=\int_0^t\Gamma^\pm_x(t-s)\big(r(0,s),\dot r(0,s)\big)\,ds\quad \pm x\ge 1,\quad t>0,\tag{3.4}$$

где

$$\Gamma^\pm_x(t):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu}e^{-i\omega t}\tilde\Gamma^\pm_x(\omega)\,d\omega,\ \ x\ne 0,\ \ t>0,\tag{3.5}$$

с некоторым $\mu>0$. Следующая теорема была доказана в работе [5].

Теорема 3.2. *Для любых $\alpha<-3/2$ справедлива следующая оценка*

$$\|\Gamma^+_x(t)\|'_{-\alpha,+}\le C\langle t\rangle^{-3/2},\quad \|\Gamma^-_x(t)\|'_{-\alpha,-}\le C\langle t\rangle^{-3/2},\quad t>0,\tag{3.6}$$

где по определению

$$\|f(x)\|'_{\alpha,\pm}:=\Big(\sum_{\pm x\ge 1}\langle x\rangle^{2\alpha}|f(x)|^2\Big)^{1/2}.\tag{3.7}$$

В частности,

$$|\Gamma^+_1(t)|\le C(1+t)^{-3/2},\quad |\Gamma^-_{-1}(t)|\le C(1+t)^{-3/2},\quad t>0.\tag{3.8}$$

Чтобы оценить $r(0,t)$, перепишем уравнение (2.7), используя (3.4), в виде

$$\ddot r(0,t)\;=\;-(\nu_+^2+\nu_-^2+\kappa_0^2)r(0,t)+\nu_+^2z_+(1,t)+\nu_-^2z_-(-1,t)$$

$$+\int\limits_0^t\Big(\nu_+^2\Gamma^+_1(t-s)+\nu_-^2\Gamma^-_{-1}(t-s)\Big)r(0,s)\,ds,\quad t>0.$$

Сначала изучим решения соответствующего однородного уравнения

$$\ddot r(0,t)=-(\nu_+^2+\nu_-^2+\kappa_0^2)r(0,t)+\sum_\pm\nu_\pm^2\int\limits_0^t\Gamma^\pm_{\pm1}(t-s)r(0,s)\,ds,\tag{3.9}$$

с начальными данными

$$r(0,t)|_{t=0} = u_0(0), \quad \dot{r}(0,t)|_{t=0} = v_0(0). \tag{3.10}$$

Применяя преобразование Фурье–Лапласа к решениям $q(0,t)$ уравнения (3.9), получим

$$\tilde{r}(0,\omega) = \tilde{N}(\omega)\left(-i\omega u_0(0) + v_0(0)\right) \quad \text{при } \Im\omega > B, \tag{3.11}$$

где $\tilde{N}(\omega) := [\tilde{D}(\omega)]^{-1}$ и

$$\tilde{D}(\omega) := \kappa_0^2 - \omega^2 + \nu_+^2(1 - e^{i\theta_+(\omega)}) + \nu_-^2(1 - e^{i\theta_-(\omega)}) \quad \omega \in \mathbb{C}. \tag{3.12}$$

Свойства функций $\tilde{D}(\omega)$ и $\tilde{N}(\omega)$ изучаются в [6, 8]. В частности, в [8] доказано, что $\tilde{N}(\omega)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости. Кроме того, для произвольных констант $\nu_\pm > 0$ $\kappa_\pm, \kappa_0 \geq 0$ мы доказали, что $\tilde{D}(\omega) \neq 0$, если $\omega \in \mathbb{C}_+ = \{\omega \in \mathbb{C} : \Im\omega > 0\}$, и $\tilde{D}(\omega \pm i0) \neq 0$ для любых $\omega \in \Lambda \setminus \Lambda^0$, где

$$\tilde{D}(\omega \pm i0) := \lim_{\varepsilon \to +0} \tilde{D}(\omega \pm i\varepsilon).$$

Однако могут быть такие значения констант $\nu_\pm, \kappa_\pm, \kappa_0$, при которых $\tilde{D}(\omega) = 0$ в некоторой точке $\omega \in (\mathbb{R} \setminus \Lambda) \cup \Lambda^0$. Условие **C** включает все значения этих констант, при которых $\tilde{D}(\omega) \neq 0$ для любых $\omega \in \mathbb{R}$. Кроме того, в окрестности сингулярных точек $\omega_0 \in \Lambda^0$ имеем $\Im\tilde{D}(\omega) \sim C\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$ при $\omega \to \omega_0$, $\omega \in \mathbb{C}_+$.

Обозначим

$$N(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} e^{-i\omega t} \tilde{N}(\omega)\, d\omega, \quad t \geq 0, \quad \text{с некоторым } \mu > 0. \tag{3.13}$$

Следующая теорема доказана в [6, 8].

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие* **C**. *Тогда*

$$|N^{(k)}(t)| \leq C(1+t)^{-3/2}, \quad t \geq 0, \quad k = 0,1,2. \tag{3.14}$$

Следствие 3.4. *Обозначим через $S(t)$ разрешающий оператор задачи Коши (3.9), (3.10). Применяя формулу вариации постоянной, получаем следующее представление для решений задачи (3.9), (3.10):*

$$\begin{pmatrix} r(0,t) \\ \dot{r}(0,t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} u_0(0) \\ v_0(0) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t S(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_+^2 z_+(1, t-\tau) + \nu_-^2 z_-(-1, t-\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Очевидно, $S(0) = I$. Более того, матрица $S(t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \dot{N}(t) & N(t) \\ \ddot{N}(t) & \dot{N}(t) \end{pmatrix}$. Следовательно, $|S(t)| \leq C\langle t\rangle^{-3/2}$.

4. Асимптотическое поведение решений в среднем

Введем следующие обозначения.

(i) Пусть

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^0_\pm(y,t) &:= \Big(G^{00}_{t,\pm}(\pm 1,y), G^{01}_{t,\pm}(\pm 1,y)\Big)\\ &= \Big(\mathcal{G}^{00}_{t,\pm}(\pm 1-y) - \mathcal{G}^{00}_{t,\pm}(\pm 1+y), \mathcal{G}^{01}_{t,\pm}(\pm 1-y) - \mathcal{G}^{01}_{t,\pm}(\pm 1+y)\Big),\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $y\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{R}$, функции $\mathcal{G}^{ij}_{t,\pm}$ определены в (2.15) и (2.16).

(ii) $\mathbf{G}^j_\pm(y)$, $j=0{,}1$, обозначает векторнозначную последовательность

$$\mathbf{G}^j_\pm(y) = \int\limits_0^{+\infty} N^{(j)}(s)\mathbf{g}^0_\pm(y,-s)\,ds, \quad y\in\mathbb{Z}, \quad j=0{,}1, \tag{4.2}$$

где $N^{(0)}(s)\equiv N(s)$, $N^{(1)}(s)\equiv \dot N(s)$, функция $N(s)$ введена в (3.13). Заметим, что $\mathbf{g}^0_\pm(0,t)=0$ и $\mathbf{G}^j_\pm(0)=0$. Введем

$$\overline{\mathbf{G}}^j(y) = \nu^2_\pm \mathbf{G}^j_\pm(y) \quad \text{при} \quad \pm\, y\ge 0, \quad j=0{,}1. \tag{4.3}$$

(iii) Обозначим через $U'_\pm(t)$ оператор, сопряженный к $U_\pm(t)$, $t\in\mathbb{R}$,

$$\langle Y, U'_\pm(t)\Psi\rangle_\pm = \langle U_\pm(t)Y,\Psi\rangle_\pm,\ \ Y\in\mathcal{H}_{\alpha,\pm},\ \ \Psi=(\Psi^0,\Psi^1)\in[S(\mathbb{Z}_\pm)]^2. \tag{4.4}$$

Применяя функцию Грина $G_{t,\pm}$, перепишем $U'_\pm(t)\Psi$ в виде

$$(U'_\pm(t)\Psi)^j(y) = \sum_{i=0,1}\sum_{\pm x\ge 0} G^{ij}_{t,\pm}(x,y)\Psi^i(x), \quad t\in\mathbb{R},\ \ \pm y\ge 0,\ \ j=0{,}1. \tag{4.5}$$

В частности (см. (4.1)),

$$\mathbf{g}^0_\pm(y,t) = (U'_\pm(t)Y_0)(y) \quad \text{с} \quad Y_0(x) = (\delta_{\pm 1x},0), \quad x,y\in\mathbb{Z}_\pm, \tag{4.6}$$

где δ_{ij} обозначает символ Кронекера. Поэтому

$$U_\pm(t)\mathbf{g}^0_\pm(y,-s) = \mathbf{g}^0_\pm(y,t-s).$$

(iv) Обозначим через $U'_0(t)$ следующий оператор

$$\left(U'_0(t)Y_0\right)(x) = \left(U'_\pm(t)Y_0|_{\mathbb{Z}_\pm}\right)(x) \quad \text{при} \quad \pm\, x\ge 0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.7}$$

В частности, $\left(U'_0(t)Y_0\right)(0)=0$ для любого t и

$$\left(U'_0(t)\overline{\mathbf{G}}^j\right)(x) = \nu^2_\pm\left(U'_\pm(t)\mathbf{G}^j_\pm\right)(x) \quad \text{при} \ \ \pm\, x\ge 0, \quad t\in\mathbb{R}, \quad j=0{,}1.$$

(v) Введем векторнозначную функцию $\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,y)$, $j=0{,}1$, $x,y\in\mathbb{Z}$, следующим образом

$$\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}\int\limits_0^{+\infty}\Gamma_x^{\pm}(s)\Big(U_0'(-s)\overline{\mathbf{G}}^j\Big)(y)\,ds, & \text{если}\quad \pm x>0\\ \overline{\mathbf{G}}^j(y), & \text{если}\ \ x=0\end{array}\right| \qquad y\in\mathbb{Z}, \tag{4.8}$$

где функция $\Gamma_x^{\pm}(s)$ введена в (3.5), $\overline{\mathbf{G}}^j$ – в (4.3). В частности, $\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,y)$ нечетна по $y\in\mathbb{Z}$ для любых $x\in\mathbb{Z}$.

Положим $r^{(0)}(x,t)=r(x,t)$, $r^{(1)}(x,t)=\dot r(x,t)$, $x\in\mathbb{Z}$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* **S1**–**S4** *и* **C**, *а* $r(0,t)$ *– решение задачи (3.9), (3.10). Тогда*

$$r^{(j)}(0,t)=\langle U_0(t)Y_0,\overline{\mathbf{G}}^j\rangle+\delta_j(t),\quad t>0,\quad \text{где}\ \mathbb{E}|\delta_j(t)|^2\le C\langle t\rangle^{-1}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Из следствия 3.4 вытекает, что

$$\mathbb{E}\left|\begin{pmatrix} r(0,t)\\ \dot r(0,t)\end{pmatrix}-\sum_{\pm}\int\limits_0^t S(\tau)\begin{pmatrix}0\\ \nu_{\pm}^2 z(\pm1,t-\tau)\end{pmatrix}d\tau\right|^2\le C\langle t\rangle^{-3}.$$

Заметим, что

$$S(\tau)\begin{pmatrix}0\\ z_{\pm}(\pm1,t-\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N(\tau)\\ \dot N(\tau)\end{pmatrix}z_{\pm}(\pm1,t-\tau).$$

Более того, для $j=0{,}1$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|\int\limits_t^{+\infty}N^{(j)}(\tau)z_{\pm}(\pm1,t-\tau)d\tau\right|^2\\ &=\int\limits_t^{+\infty}N^{(j)}(\tau_1)d\tau_1\int\limits_t^{+\infty}N^{(j)}(\tau_2)\mathbb{E}\Big(z_{\pm}(\pm1,t-\tau_1)z_{\pm}(\pm1,t-\tau_2)\Big)d\tau_2.\end{aligned}$$

Применяем оценку (2.17) и получаем

$$|\mathbb{E}\left(z_{\pm}(\pm1,t-\tau_1)z_{\pm}(\pm1,t-\tau_2)\right)|\le C\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbb{E}|z_{\pm}(\pm1,s)|^2\le C_1<\infty.$$

Следовательно, из оценки (3.14) вытекает

$$\mathbb{E}\left|\int\limits_t^{+\infty} S(\tau)\left(\begin{array}{c} 0 \\ z_\pm(\pm 1, t-\tau) \end{array}\right) d\tau\right|^2 \leq C_1\langle t\rangle^{-1}.$$

Отсюда следует представление (4.9), так как в силу (4.6) имеем

$$z_\pm(\pm 1, t-\tau) = \langle U_\pm(-\tau)U_\pm(t)Y_0(x), (\delta_{\pm 1x}, 0)\rangle_\pm = \langle U_\pm(t)Y_0(\cdot), \mathbf{g}^0_\pm(\cdot, -\tau)\rangle_\pm. \ \blacksquare$$

Замечание 4.1. (i) Применяя преобразование Фурье, получаем

$$\hat{\mathbf{g}}^0_\pm(\theta, t) = \pm 2i\sin\theta\Big(\cos(\phi_\pm(\theta)t), \sin(\phi_\pm(\theta)t)/\phi_\pm(\theta)\Big), \quad \theta\in\mathbb{T}.$$

Поэтому из формул (2.16) вытекает, что

$$\|\mathbf{g}^0_\pm(\cdot, t)\|^2_0 = C\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos^2(\phi_\pm(\theta)t) + \frac{\sin^2(\phi_\pm(\theta)t)}{\phi^2_\pm(\theta)}\right)\sin^2(\theta)\,d\theta \leq C < \infty. \quad (4.10)$$

(ii) Функция $\mathbf{G}^j_\pm(\cdot)$ нечетна. Из оценок (3.14) и (4.10) следует, что $\mathbf{G}^j_\pm \in \mathcal{H}_0$, так как

$$\|\mathbf{G}^j_\pm(\cdot)\|_0 \leq \int\limits_0^{+\infty} |N^{(j)}(s)|\|\mathbf{g}^0_\pm(\cdot, -s)\|_0\,ds \leq C\int\limits_0^{+\infty}|N^{(j)}(s)|\,ds < \infty. \quad (4.11)$$

В преобразовании Фурье

$$\hat{\mathbf{G}}^j_\pm(\theta) = \pm 2i\sin\theta\int\limits_0^{+\infty} N^{(j)}(s)\Big(\cos(\phi_\pm(\theta)s), -\sin(\phi_\pm(\theta)s)/\phi_\pm(\theta)\Big)ds, \quad \theta\in\mathbb{T}.$$

Следствие 4.2. *(i) Из условия* **S4** *вытекает, что*

$$|\langle Q_0(x,y), \Psi_1(x)\otimes\Psi_2(y)\rangle| \leq C\|\Psi_1\|_0\|\Psi_2\|_0 \ \ \textit{для любых} \ \ \Psi_1, \Psi_2\in\mathcal{H}_0. \quad (4.12)$$

(ii) Для функции $\overline{\mathbf{G}}^j$, определенной в (4.3), справедлива следующая оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{E}|\langle U_0(t)Y_0, \overline{\mathbf{G}}^j\rangle|^2 = \sup_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{E}|\langle Y_0, U'_0(t)\overline{\mathbf{G}}^j\rangle|^2 \leq C < \infty. \quad (4.13)$$

Действительно, так как $U'_\pm(t)\mathbf{g}^0_\pm(y,\tau) = \mathbf{g}^0_\pm(y, \tau+t)$, то

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|U'_0(t)\overline{\mathbf{G}}^j\|_0 \leq C < \infty, \quad (4.14)$$

в силу (4.2), (4.3), (4.10) и (3.14). Следовательно, (4.13) вытекает из оценок (4.12) и (4.14).

(iii) Представление (4.9), лемма 2.5 и оценка (4.13) приводят к следующей сходимости

$$\mathbb{E}\Big(r^{(i)}(0,t)r^{(j)}(0,t)\Big) \to \mathcal{Q}_\infty^P(\overline{\mathbf{G}}^i,\overline{\mathbf{G}}^j) \quad \text{\textit{при} } t\to\infty, \tag{4.15}$$

где квадратичная форма $\mathcal{Q}_\infty^P$ определена в (2.23).

(iv) Заметим, что $\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,\cdot)\in\mathcal{H}_0$ для любых $x\neq 0$, и $\|\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,\cdot)\|_0\in\mathcal{H}_\alpha$ с $\alpha<-3/2$ в силу (3.6), (4.8) и (4.14).

Лемма 4.2. *Пусть $\alpha<-3/2$. Тогда справедливы следующие утверждения.*
(i) Решение $r(x,t)$, $x\neq 0$, задачи (2.6)–(2.9) допускает следующее представление

$$r^{(j)}(x,t)=\langle U_0(t)Y_0,\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,\cdot)\rangle+\delta_j(x,t),\quad j=0,1,\quad t>0, \tag{4.16}$$

где $\mathbb{E}(\|\delta_j(\cdot,t)\|'_\alpha)^2\le C\langle t\rangle^{-1}$.

(ii) Корреляционные функции сходятся к пределу, т.е. для $x,y\neq 0$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\Big(r^{(i)}(x,t)r^{(j)}(y,t)\Big)=\mathcal{Q}_\infty^P(\overline{\mathbf{\Gamma}}^i(x,\cdot),\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(y,\cdot)),\quad i,j=0,1.$$

Доказательство. Из (3.4) и (4.9) следует, что для $\pm x\ge 1$

$$\begin{aligned} r^{(j)}(x,t) &= \int_0^t \Gamma_x^\pm(t-s)r^{(j)}(0,s)\,ds \\ &= \int_0^t \Gamma_x^\pm(t-s)\langle U_0(s)Y_0,\overline{\mathbf{G}}^j\rangle\,ds+\delta_j'(x,t), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где $\mathbb{E}\left(\|\delta_j'(\cdot,t)\|'_{\alpha,\pm}\right)^2\le C\langle t\rangle^{-1}$. Действительно, в силу (4.9) и (3.6),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\|\delta_j'(\cdot,t)\|'_{\alpha,\pm}\right)^2 &= \mathbb{E}\Big(\Big\|\int_0^t \Gamma_x^\pm(t-s)\delta_j(s)\,ds\Big\|'_{\alpha,\pm}\Big)^2 \\ &\le \Big(\int_0^t \|\Gamma_x^\pm(t-s)\|'_{\alpha,\pm}\sqrt{\mathbb{E}|\delta_j(s)|^2}\,ds\Big)^2 \\ &\le C\Big(\int_0^t (1+t-s)^{-3/2}(1+s)^{-1/2}\,ds\Big)^2\le C_1\langle t\rangle^{-1}. \end{aligned}$$

Первый член в правой части (4.17) имеет вид (см. (4.8))

$$\int\limits_0^t \Gamma_x^{\pm}(s)\langle U_0(t-s)Y_0, \overline{\mathbf{G}}^j\rangle\, ds = \langle U_0(t)Y_0, \overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,\cdot)\rangle + \delta_j''(x,t), \quad \pm x \ge 1, \tag{4.18}$$

где

$$\delta_j''(x,t) := -\int\limits_t^{+\infty} \Gamma_x^{\pm}(s)\langle U_0(t-s)Y_0, \overline{\mathbf{G}}^j\rangle\, ds, \quad \pm x \ge 1.$$

Из оценок (3.6) и (4.13) вытекает

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\|\delta_j''(\cdot,t)\|_{\alpha,\pm}'\right)^2 &\le \Big(\int\limits_t^{+\infty} \|\Gamma_x^{\pm}(s)\|_{\alpha,\pm}'\Big(\mathbb{E}_0\left|\langle U_0(t-s)Y_0, \overline{\mathbf{G}}^j\rangle\right|^2\Big)^{1/2} ds\Big)^2 \\ &\le C\langle t\rangle^{-1} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Следовательно, из (4.17)–(4.19) следует (4.16) с $\delta_j(x,t) = \delta_j'(x,t) + \delta_j''(x,t)$. Окончательно утверждение (ii) леммы 4.2 вытекает из представления (4.16) и леммы 2.5. ■

Замечание. *Если мы определим* $\tilde{\Gamma}_0(\omega) := e^{i\theta(\omega)|x|}|_{x=0} = 1$*, то формально* $\Gamma_0(t) = \delta_{0t}$*. Поэтому будем считать, что* $\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(0,y) = \overline{\mathbf{G}}^j(y)$*,* $y \in \mathbb{Z}$*. Тогда представление (4.9) следует из (4.16).*

Для любых $\psi \in S(\mathbb{Z})$ и $j = 0{,}1$ определим

$$\mathbf{\Gamma}_\psi^j(y) := \langle \overline{\mathbf{\Gamma}}^j(\cdot,y), \psi(\cdot)\rangle = \overline{\mathbf{G}}^j(y)\psi(0) + \sum_{x\ne 0} \overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,y)\psi(x), \ \ y \in \mathbb{Z}. \tag{4.20}$$

Так как функция $\overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,y)$ нечетная по $y \in \mathbb{Z}$, то $\mathbf{\Gamma}_\psi^j$ тоже нечетная функция.

Следствие 4.3. *(i) Для любых* $\psi \in S(\mathbb{Z})$ *и* $j = 0{,}1$ *имеет место следующее представление*

$$\langle r^{(j)}(\cdot,t), \psi\rangle = \langle U_0(t)Y_0, \mathbf{\Gamma}_\psi^j\rangle + \delta_j(t), \quad t > 0, \quad \text{где } \ \mathbb{E}|\delta_j(t)|^2 \le C\langle t\rangle^{-1}. \tag{4.21}$$

(ii) Для любых $\psi \in S(\mathbb{Z})$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|\langle U_0(t)Y_0, \mathbf{\Gamma}_\psi^j\rangle|^2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|\langle Y_0, U_0'(t)\mathbf{\Gamma}_\psi^j\rangle|^2 \le C < \infty. \tag{4.22}$$

(iii) Для любых $\psi, \chi \in S$

$$\mathbb{E}\Big(\langle r^{(i)}(\cdot,t), \psi\rangle\langle r^{(j)}(\cdot,t), \chi\rangle\Big) \to \mathcal{Q}_\infty^P(\mathbf{\Gamma}_\psi^i, \mathbf{\Gamma}_\chi^j) \quad \text{при } \ t \to \infty.$$

Доказательство. Представление (4.21) вытекает из (4.16). Проверим (4.22). В силу (4.20),

$$U_0'(t)\mathbf{\Gamma}_\psi^j(y) = U_0'(t)\overline{\mathbf{G}}^j(y)\psi(0) + \sum_\pm \int\limits_0^{+\infty} \Big(\sum_{\pm x>0} \Gamma_x^\pm(s)\psi(x)\Big)\, U_0'(t-s)\overline{\mathbf{G}}^j(y)\,ds.$$

Следовательно, из (4.14) и (3.6) вытекает следующая равномерная оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|U_0'(t)\mathbf{\Gamma}_\psi^j\|_0 \le C_1\psi(0) + \sum_\pm C_2 \int\limits_0^{+\infty} \|\Gamma_x^\pm(s)\|_{\alpha,\pm}' \|\psi\|_{-\alpha,\pm}\,ds < \infty. \tag{4.23}$$

Поэтому (4.22) вытекает из оценок (4.12) и (4.23). Окончательно из (4.21) и леммы 2.5 вытекает пункт (iii) следствия 4.3. ■

Введем оператор Ω' следующим образом. Для любых $\Psi = (\Psi^0, \Psi^1) \in \mathcal{S}$ определим

$$(\Omega'\Psi)(y) := \Psi(y) + \sum_{j=0,1} \langle \overline{\mathbf{\Gamma}}^j(\cdot, y), \Psi^j(\cdot)\rangle = \Psi(y) + \sum_{j=0,1} \mathbf{\Gamma}_{\Psi^j}^j(y). \tag{4.24}$$

Из оценки (4.23) имеем $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|U_0'(t)\Omega'\Psi\|_0 \le C < \infty$. Из формулы (2.2) и лемм 4.1 и 4.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть $Y_0 \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha < -3/2$. Тогда для решений $(u(\cdot,t), \dot u(\cdot,t)) \equiv (Y^0(\cdot,t), Y^1(\cdot,t))$ задачи (1.2)–(1.4) имеет место следующее представление*

$$Y^j(x,t) = (U_0(t)Y_0)^j(x) + \langle (U_0(t)Y_0)(\cdot), \overline{\mathbf{\Gamma}}^j(x,\cdot)\rangle + \delta_j(x,t), \quad j = 0{,}1,$$

где $\mathbb{E}\|\delta_j(\cdot,t)\|_\alpha^2 \le C\langle t\rangle^{-1}$. Кроме того, для любых $\Psi = (\Psi^0, \Psi^1) \in \mathcal{S}$ имеем

$$\langle Y(t), \Psi\rangle = \langle U_0(t)Y_0, \Omega'\Psi\rangle + \delta(t), \tag{4.25}$$

где $\delta(t) = \sum_{j=0}^1 \langle \delta_j(\cdot,t), \Psi^j\rangle$ и $\mathbb{E}|\delta(t)|^2 \le C\langle t\rangle^{-1}$.

Из леммы 4.3, теоремы 2.5 и формулы (2.25) вытекает теорема 2.8. Теорема 2.10 может быть доказана аналогично теореме 2.10 из [5].

5. Дополнение: Доказательство сходимости (2.22)

Для доказательства асимптотики (2.22) достаточно проверить, что для любых $\Psi\in\mathcal{S}$ справедлива сходимость

$$I_t(\Psi):=\sum_{x\geq 0,y\leq 0}(Q_t^P(x,y),\Psi(x)\otimes\Psi(y))\to 0,\quad t\to\infty. \tag{5.1}$$

Введем функцию $\Phi_\pm(y,t)$, где $\pm y\geq 0$, $t\in\mathbb{R}$, следующим образом (cf (4.4), (4.5))

$$\Phi_\pm(y,t)=\left(U'_\pm(t)\Psi\right)(y)=\sum_{\pm x>0}G^T_{t,\pm}(x,y)\Psi(x)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathcal{G}^T_{t,\pm}(x-y)\Psi_0(x), \tag{5.2}$$

где $\Psi_0(x)$ определяется следующим образом

$$\Psi_0(x)=\begin{cases}\Psi(x), & \pm x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\Psi(-x), & \pm x<0,\end{cases}$$

и положим функцию $\Phi_\pm(y,t)$ при $\pm y<0$, равной правой части равенства (5.2). Используя преобразование Фурье и формулы (2.16), (5.2), перепишем $\Phi_+(y,t)$ в виде

$$\Phi_+(y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}e^{-iy\theta}\hat\Phi_+(\theta,t)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_\pm\int\limits_{\mathbb{T}}e^{-iy\theta}e^{\pm i\phi_+(\theta)t}a_\pm(\theta)\hat\Psi_0(\theta)\,d\theta, \tag{5.3}$$

где через $a_\pm(\theta)$ обозначаются матрицы вида

$$a_\pm(\theta)=\frac12\begin{pmatrix}1 & \pm i\phi_+(\theta)\\ \mp i\phi_+^{-1}(\theta) & 1\end{pmatrix}.$$

Здесь $\theta\in\mathbb{T}$, если $\kappa_+\neq 0$, и $\theta\in\mathbb{T}\setminus\{0\}$ в противном случае. Заметим, что $|\hat\Psi_0(\theta)|\leq C(\Psi)|\sin\theta|$ $\forall\Psi\in\mathcal{S}$. В частности, $|a_\pm(\theta)\hat\Psi_0(\theta)|\leq C(\Psi)$. В случае $\kappa_+\neq 0$ получаем, что при фиксированном $y\in\mathbb{Z}$

$$\Phi_+(y,t)\to 0,\quad t\to\infty, \tag{5.4}$$

что вытекает из формулы (5.3) и теоремы Лебега–Римана. Пусть $\kappa_+=0$. Тогда $\phi_+(\theta)=2\nu_+|\sin(\theta/2)|$. В этом случае при любом фиксированном $\varepsilon>0$ введем разбиение единицы $\zeta(\theta)+\eta(\theta)=1$, $\theta\in\mathbb{T}$, где $\zeta,\eta\in C_0^\infty(\mathbb{T})$,

$$\operatorname{supp}\zeta(\theta)\subset\{\theta\in\mathbb{T}:|\theta|<\varepsilon\},\quad \operatorname{supp}\eta(\theta)\subset\{\theta\in\mathbb{T}:|\theta|\geq\varepsilon/2\}.$$

Разобьем интеграл в правой части (5.3) на сумму двух интегралов:

$$
\begin{aligned}
\Phi_+(y,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \zeta(\theta)\left[e^{-iy\theta}e^{\pm i\phi_+(\theta)t}a_\pm(\theta)\hat{\Psi}_0(\theta)\right]\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \eta(\theta)\,[...]\,d\theta\\
&= I_1(\varepsilon,t) + I_2(\varepsilon,t).
\end{aligned}
$$

Первый интеграл $I_1(\varepsilon,t)$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, так как

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}} |I_1(\varepsilon,t)| \le C\int_{|\theta|<\varepsilon} \zeta(\theta)|a_\pm(\theta)||\hat{\Psi}_0(\theta)|\,d\theta \to 0, \quad \varepsilon\to 0.
$$

С другой стороны, при фиксированном $\varepsilon>0$ второй интеграл $I_2(\varepsilon,t)\to 0$ при $t\to\infty$ в силу теоремы Лебега–Римана. Поэтому справедлива сходимость (5.4). Аналогичное утверждение имеет место для $\Phi_-(x,t)$.

Теперь вернемся к доказательству утверждения (5.1). Перепишем $I_t(\Psi)$ в виде

$$
\begin{aligned}
I_t(\Psi) &= \mathbb{E}_0\left(\langle U_+(t)Y_0,\Psi\rangle_+ \langle U_-(t)Y_0,\Psi\rangle_-\right)\\
&= \mathbb{E}_0\left(\langle Y_0,\Phi_+(\cdot,t)\rangle_+ \langle Y_0,\Phi_-(\cdot,t)\rangle_-\right) = \sum_{x\ge 0, y\le 0} \Phi_+(x,t)Q_0(x,y)\Phi_-^T(y,t).
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\Phi_\pm(0,t)=0$. Более того,

$$
I_t(\Psi) = \sum_{z\ge 0}\sum_{z\le y\le 0} \Phi_+(y+z,t)Q_0(y+z,y)\Phi_-^T(y,t) = \sum_{z\in\mathbb{Z}} F_t(z), \tag{5.5}
$$

где

$$
F_t(z) := \sum_{z\le y\le 0} \Phi_+(y+z,t)Q_0(y+z,y)\Phi_-^T(y,t).
$$

В силу условия (2.10) и формулы (5.3) имеем

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{y\in\mathbb{Z}} |\Phi_+(y+z,t)Q_0(y+z,y)\Phi_-^T(y,t)| \le C(\Psi)h(|z|), \ \text{ где } \ h\in L^1(0,+\infty).
$$

Поэтому ряд в правой части (5.5) сходится равномерно. Следовательно, достаточно доказать, что $F_t(z)\to 0$ при $t\to\infty$ при фиксированном значении z. Так как при фиксированной точке z точка y пробегает конечное число значений, то достаточно проверить, что при фиксированных значениях y,z

$$
\Phi_+(y+z,t)Q_0(y+z,y)\Phi_-^T(y,t)\to 0, \quad t\to\infty.
$$

Последнее утверждение вытекает из сходимости (5.4). ■

Список литературы

[1] C. Boldrighini, A. Pellegrinotti, and L. Triolo, Convergence to stationary states for infinite harmonic systems, *J. Stat. Phys.* **30**:123–155 (1983).

[2] T.V. Dudnikova, A.I. Komech, and H. Spohn, On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals, *J. Math. Phys.* **44**:2596–2620 (2003). ArXiv: math-ph/0210039.

[3] T. Dudnikova, A. Komech, and N. Mauser, Two-temperature problem for harmonic crystal, *J. Stat. Phys.* **114** (3/4):1035–1083 (2004). ArXiv: math-ph/0508048.

[4] T.V. Dudnikova, On the asymptotical normality of statistical solutions for harmonic crystals in half-space, *Russian J. Math. Phys.* **15** (4):460–472 (2008).

[5] T.V. Dudnikova, On convergence to equilibrium for one-dimensional chain of harmonic oscillators on the half-line, *J. Math. Phys.* **58** (4):043301 (2017). ArXiv:1504.05132.

[6] T.V. Dudnikova, Infinite non homogeneous chain of harmonic oscillators: Large-time behavior of solutions, *Keldysh Institute Preprints*, No. 109 (2017), 35 pp.

[7] Т.В. Дудникова, О неравновесных состояниях кристаллической решетки, *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*, No. 15 (2018), 26 с.

[8] T.V. Dudnikova, Behavior for large time of a two-component chain of harmonic oscillators, *Russian J. Math. Phys.* **25** (4):478–499 (2018).

[9] A.I. Komech, E.A. Kopylova, M. Kunze, Dispersive estimates for 1D discrete Schrodinger and Klein–Gordon equations, *Applicable Anal.* **85** (12):1487–1508 (2006).

[10] H. Spohn, J. Lebowitz, Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems, *Comm. Math. Phys.* **54** (2):97–120 (1977).

Оглавление

1 Введение 3
2 Главные результаты 5
  2.1 Условия на начальную меру 6
  2.2 Задача с нулевым граничным условием 7
  2.3 Результаты 10
3 Преобразование Фурье–Лапласа 12
4 Асимптотическое поведение решений в среднем 15
5 Дополнение: Доказательство сходимости (2.22) 21
Список литературы 23