ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 247 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Тарасов Н.И., Карамзин Ю.Н.,
Кудряшова Т.А., Поляков С.В.

Моделирование потока несжимаемой вязкой жидкости с помощью метода двойного потенциала

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Моделирование потока несжимаемой вязкой жидкости с помощью метода двойного потенциала / Н.И.Тарасов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 247. 20 с. doi:10.20948/prepr-2018-247
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-247

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Н.И. Тарасов, Ю.Н. Карамзин, Т.А. Кудряшова,
С.В. Поляков

Моделирование потока несжимаемой вязкой жидкости с помощью метода двойного потенциала

Москва — 2018

Тарасов Н.И., Карамзин Ю.Н., Кудряшова Т.А., Поляков С.В.

Моделирование потока несжимаемой вязкой жидкости с помощью метода двойного потенциала

В работе рассмотрено применение метода двойного потенциала для моделирования внутреннего потока несжимаемой жидкости. Полученная система уравнений аппроксимирована с помощью метода конечных объемов по центрам ячеек с использованием экспоненциального преобразования. В качестве тестовой использована задача об установлении течения Пуазейля в трубах прямоугольного и круглого сечения.

Ключевые слова: течение жидкости, метод потенциалов, следствие уравнений Навье-Стокса, векторный потенциал, вихрь

Nikita Igorevich Tarasov, Yuri Nikolaevich Karamzin, Tatiana Alekseevna Kudryashova, Sergey Vladimirovich Polyakov

Incompressible viscous flow simulation using the dual-potential method

In this paper we discuss the application of the dual-potential method for modeling internal flow of incompressible fluid. The resulting system of equations is approximated by using the finite volume method over cell centers and the exponential transformation. As a verification, the problem of establishing the Poiseuille flow in rectangular and round tubes was implemented.

Keywords: fluid flow, dual-potential method, Navier-Stokes equations

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 18-07-00841-a, 18-07-01292-a, 18-51-18004_болг-а).

Оглавление

Введение

Моделирование внутреннего течения вязкой несжимаемой жидкости является одной из самых важных и сложных задач динамики сплошных сред. Эта проблема, кроме того, имеет большой потенциал в задачах прикладного моделирования, среди которых, например, задача очистки водной среды от примеси мелкодисперсных ионов железа с помощью метода воздействия на коллектор электромагнитного поля, рассмотренная в двумерной постановке в [1], [2]. Для получения распределения примеси сеточным методом в этом случае необходимо иметь поле скоростей в интересующей исследователя области.

При моделировании задач внутреннего течения в двумерной постановке широко используется модель Навье–Стокса в постановке функция тока–вихрь, которая позволяет избежать недостатков постановки в естественных переменных (скорость–давление), среди которых сложность дискретизации уравнения для определения поля давления, высокая неустойчивость решения данного уравнения при использовании ячеистых методов численного моделирования, а также отсутствие гарантии выполнения закона сохранения массы [3]. При этом данная методика позволяет уменьшить число зависимых переменных, где для естественной постановки две координаты скорости и давление, а для постановки функция тока–вихрь две скалярных переменных.

Несмотря на то что во многих источниках отмечается отсутствие обобщения подобного метода на трехмерный случай, как отмечается в [3], это все же возможно и достигается путем определения векторного потенциала и векторного вихря, подобно функции тока и вихрю для двумерного случая. Однако в данном случае нетривиальным становится постановка граничных условий для векторного потенциала, которые для вычислительной гидродинамики исключительно важны и, как отмечается в [3], оказывают определяющее влияние на результирующий вид потока. Для упрощения постановки граничных условий при моделировании внутреннего течения несжимаемой жидкости в работах [4-6] был разработан и успешно применен метод двойного потенциала, именованный так в соответствии с [6], который и будет рассмотрен в рамках данной работы.

Математическая модель

Для моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости будем основываться на системе уравнений Навье–Стокса и условии несжимаемости [7], в безразмерной постановке имеющих следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u} - \nabla p, \tag{1}$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{u}$ – вектор скорости, $\frac{\partial}{\partial t}$ – производная по времени, $\mathrm{Re}=\frac{u_0\rho_0 D_0}{\eta}$ – число Рейнольдса, Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона, p – давление, u_0 – характерная скорость потока, ρ_0 – плотность среды, D_0 – гидравлический диаметр, η – коэффициент динамической вязкости среды.

Кроме того, система уравнений (1), (2) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями, которые будут рассмотрены при получении системы уравнений метода двойных потенциалов в дальнейшем. Далее рассмотрим основные выкладки этого метода.

Вследствие уравнения (2) и свойства ротора $\nabla\left(rot\left[\mathbf{A}\right]\right)=0$ можем рассмотреть вектор **A**, отвечающий условию:

$$\mathbf{u}=rot\left(\mathbf{A}\right). \tag{3}$$

При выполнении условия (3) вектор **A** называют векторным потенциалом течения.

Характерной чертой движения вязкой жидкости является завихренность, которая определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}=rot\left(\mathbf{u}\right), \tag{4}$$

Опираясь на условие (3), запишем $rot\left(rot\left[\mathbf{A}\right]\right)=\boldsymbol{\omega}$, откуда, используя свойства ротора $rot\left(rot\left[\mathbf{A}\right]\right)=\nabla\left(\nabla\mathbf{A}\right)-\Delta\mathbf{A}$ и потребовав $\nabla\mathbf{A}=0$ [3], получим уравнение для определения векторного потенциала:

$$\Delta\mathbf{A}=-\boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

Уравнения для вычисления вихря получаются посредством воздействия операции *rot* на уравнения (1), откуда и получим итоговую форму:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\left(\mathbf{u},\nabla\right)\boldsymbol{\omega}-\left(\boldsymbol{\omega},\nabla\right)\mathbf{u}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{6}$$

Итак, уравнения (3)–(6) с добавлением граничных условий позволяют произвести расчет поля скорости в интересующей геометрии. Данный метод кратко описан в работе [3] и нашел свое применение при решении некоторых задач вычислительной гидродинамики. Однако при использовании данного метода возникает серьезная сложность с постановкой граничного условия на векторный потенциал, что видно из условия (3).

Для преодоления трудности постановки граничных условий в работах [4–6] предложено следующее следствие теории потенциалов. Представим скорость в виде:

$$\mathbf{u}=rot(\mathbf{A})-\nabla\varphi, \tag{7}$$

где φ – скалярный потенциал. При этом, для удовлетворения условия (2), необходимо потребовать:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{8}$$

которое и используется в качестве уравнения для вычисления скалярного потенциала. Использование представления скорости в виде (7), в соответствии с теорией потенциалов, позволяет представить граничные условия на односвязной расчетной области для векторного потенциала в виде [4]:

$$A_\tau = \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \delta\Omega, \tag{9}$$

где A_τ – касательная составляющая векторного потенциала, A_n – нормальная составляющая векторного потенциала, **n** – нормаль к границе, $\delta\Omega$ – граница расчетной области. Граничные условия для скалярного потенциала при этом определяются следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \left(\mathbf{u}\big|_{\delta\Omega}, \mathbf{n}\right) \text{ на } \delta\Omega, \tag{10}$$

где $\mathbf{u}\big|_{\delta\Omega}$ – скорость течения среды через границу области, практически представляющая собой граничные условия для скорости. Наконец, граничные и начальные условия для вихря определяются из выражения (4) следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = rot\left(\mathbf{u}\big|_{\delta\Omega}\right) \text{ на } \delta\Omega, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\omega} = rot\left(\mathbf{u}\big|_{t=0}\right) \text{ при } t=0. \tag{12}$$

Итоговая постановка задачи моделирования течения методом двойного потенциала представляется уравнениями (5)–(8) с использованием граничных условий (9)–(11) и начальными условиями (12).

При моделировании двумерного потока ненулевым остается только *z* составляющая вихря и, как следствие, векторного потенциала. Тогда, опуская обозначение координатной составляющей, уравнения (5), (6) примут вид:

$$\Delta A = -\omega, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\mathbf{u}, \nabla\right)\omega = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega. \tag{14}$$

Выражение для вычисления скоростей покоординатно представятся в виде:

$$u_x = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$u_y = -\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \qquad (15)$$

Граничные условия (9) и (11), а также начальные условия соответственно примут вид:

$$A = 0 \text{ на } \delta\Omega, \qquad (16)$$

$$\omega = \frac{\partial u_y|_{\delta\Omega}}{\partial x} - \frac{\partial u_x|_{\delta\Omega}}{\partial y} \text{ на } \delta\Omega, \qquad (17)$$

$$\omega = \frac{\partial u_y|_{t=0}}{\partial x} - \frac{\partial u_x|_{t=0}}{\partial y} \text{ при t=0}. \qquad (18)$$

Итак, при решении задачи в двумерной постановке необходимо использовать уравнения (8), (13)–(15), в качестве граничных условий – (10), (16), (17) и в качестве начального условия – (18).

Численная методика в двумерном случае

Рассмотрим аппроксимацию задачи (8), (13)–(15). В качестве численной методики будем использовать метод конечных объемов по центрам ячеек прямоугольной декартовой расчетной сетки [8], пример которой изображен на рис. 1.

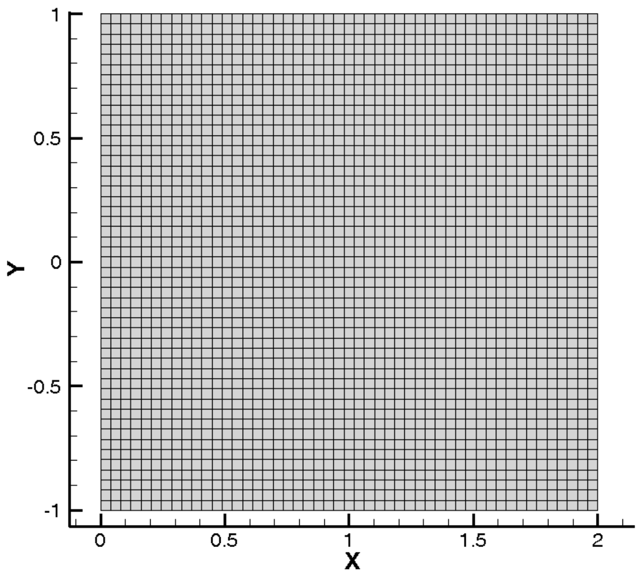

Рис. 1. Прямоугольная декартовая сетка

Сначала используем экспоненциальное интегральное преобразование в уравнении (14). Данное преобразование описано в работе [9] и хорошо зарекомендовало себя при моделировании уравнений конвекции-диффузии. Итак, приведем уравнение (14) к следующему виду:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = div\left(\mathbf{W}\omega\right), \tag{19}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla - \mathbf{u} = \left\{\frac{1}{G_k}\frac{\partial G_k}{\partial k}\right\}_{k=x,y}, \mathbf{G} = \left\{\exp\left(-\mathrm{Re}\int\limits_{k_0}^{k} u_k dk\right)\right\}_{k=x,y}, \tag{20}$$

где **W** – специальный оператор, воздействующий на ω.

Для аппроксимации потоков через границы расчетной ячейки введем следующие обозначения (см. рис. 2): V^i – площадь текущего i-го сеточного элемента, P^i – точка центра текущего i-го элемента, P^{ij} – точка центра j-соседнего к i-му элемента, l^{ij} – расстояние между центрами соседних ячеек, $\mathbf{n}^{ij} = \left\{n_x^{ij}, n_y^{ij}\right\}^T$ – единичный направляющий вектор от центра текущего элемента к центру соседнего, $\mathbf{S}^{ij} = \left\{S_x^{ij}, S_y^{ij}\right\}^T$ – длина j-ой стороны i-го элемента, помноженная на внешнюю нормаль. Количество соседних элементов прямоугольной ячейки очевидно равно четырем.

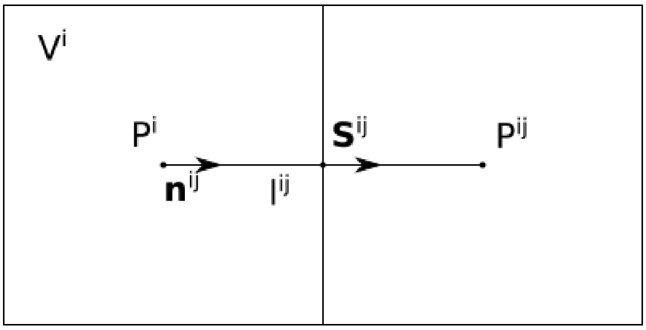

Рис. 2. Характерные сеточные величины для прямоугольных элементов

Для вычисления вихря в центрах ячеек аппроксимируем выражения (20) относительно середин граней расчетных элементов с помощью центральных разностей для дифференциального выражения и метода трапеций при аппроксимации интеграла, откуда получим:

$$\bar{W}_k^{ij} = \frac{\bar{G}_k^{ij}\omega^{ij} - \omega^i}{0.5\left(\bar{G}_k^{ij} - 1\right)l^{ij}} n_k^{ij}, \ \bar{G}_k^{ij} = \exp\left(-\mathrm{Re}\, l^{ij} n_k^{ij} \frac{u_k^{ij} + u_k^i}{2}\right), \tag{21}$$

где $k = x, y$, $\bar{W}_k^{ij}$ – аппроксимация оператора (20), подействовавшего на вихрь, на j-ую грань в i-ой ячейке, ω^{ij} – разностный аналог вихря в центре j-соседней к текущей ячейке на текущем временном слое, ω^i – разностный аналог вихря в центре текущей ячейки на текущем временном слое, u_k^{ij} – k-ая компонента разностного аналога вектора скорости в центре j-ой соседней к i-ой ячейке, u_k^{i} – k-ая компонента разностного аналога вектора скорости в центре i-ой ячейки.

Аппроксимация уравнения (19) с помощью явной по времени схемы в данном случае примет вид:

$$\hat{\omega}^i = \omega^i + \frac{\tau}{V^i}\sum_{j=1}^{4}\left(\bar{\mathbf{W}}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right), \tag{22}$$

где $\hat{\omega}^i$ – разностный аналог вихря в центре текущей ячейки на новом временном слое, $\tau \approx \min\limits_{i=1,..,N_e} \frac{\left(\sum_{j=1}^{4}\left|\mathbf{S}^{ij}\right|\right)^2}{\left(V^i\right)^2}$ – временной шаг, N_e – количество сеточных элементов, *(,)* – скалярное произведение. Кроме того, завершая обсуждение разностной схемы расчета распределения вихря, отметим, что аппроксимация граничных условий производится с первым порядком точности из условия (17) с помощью следующих разностных выражений:

$$\omega^{ij} = \frac{u_y^{border} - u_y^i}{l^{ij}} n_x^{ij} - \frac{u_x^{border} - u_x^i}{l^{ij}} n_y^{ij}, \tag{23}$$

где $\mathbf{u}^{border} = \left\{u_x^{border}, u_y^{border}\right\}^T$ – граничная скорость в середине j-ой грани, l^{ij} – в данном случае расстояние от центра текущей ячейки к середине грани. При этом полученные с помощью (23) величины подставляются в разностные формулы (21) при наличии в текущем элементе граничной стороны. Аналогичными разностными выражениями по известному начальному распределению скоростей определяется начальное распределение разностного аналога вихря.

Стоит дополнительно обсудить возможность аппроксимации граничных условий со вторым порядком точности. Как отмечается в [3], это возможно, однако не нашло широкого применения. Кроме того, в работе [6] граничная аппроксимация вихря второго порядка точности рассмотрена и реализована на практике, и, как отмечает автор, данный тип аппроксимации не привносит в схему заметного улучшения точности, но приводит к большей неустойчивости решения и увеличивает вычислительную сложность разностного метода.

Далее с помощью метода конечного объема по центрам ячеек и итерационного метода Якоби, аппроксимируя выражения (8) и (13), получим разностные выражения для скалярного и векторного потенциалов, которые примут вид:

$$\hat{\varphi}^{i} = \frac{\sum_{j=1}^{4} \frac{\varphi^{ij}}{l^{ij}} \left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij} \right)}{\sum_{j=1}^{4} \frac{\left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij} \right)}{l^{ij}}} , \tag{24}$$

$$\hat{A}^{i} = \frac{\sum_{j=1}^{4} \frac{A^{ij}}{l^{ij}} \left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij} \right) + \hat{\omega}^{i} V^{i}}{\sum_{j=1}^{4} \frac{\left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij} \right)}{l^{ij}}} , \tag{25}$$

где $\hat{\varphi}^{i}$ – разностный аналог скалярного потенциала в центре текущей ячейки на новом временном слое, φ^{ij} – разностный аналог скалярного потенциала в центре соседней к текущей ячейки на предыдущем временном слое, $\hat{A}^{i}$ – разностный аналог векторного потенциала в центре текущей ячейки на новом временном слое, A^{ij} – разностный аналог векторного потенциала в центре соседней к текущей ячейки на предыдущем временном слое. Граничные условия (10) и (16) реализуются путем подстановки заданных величин в качестве слагаемых в выражения (24) и (25) соответственно.

И, наконец, расчет поля скоростей осуществляется с помощью следующего разностного уравнения, полученного посредством применения метода конечного объема по центрам ячеек на выражений (15):

$$\begin{aligned} \hat{u}_{x}^{i} &= \frac{0.5}{V^{i}} \left[\sum_{j=1}^{4} \left(\hat{A}^{i} + \hat{A}^{ij} \right) S_{y}^{ij} - \sum_{j=1}^{4} \left(\hat{\varphi}^{i} + \hat{\varphi}^{ij} \right) S_{x}^{ij} \right], \\ \hat{u}_{y}^{i} &= \frac{0.5}{V^{i}} \left[-\sum_{j=1}^{4} \left(\hat{A}^{i} + \hat{A}^{ij} \right) S_{x}^{ij} - \sum_{j=1}^{4} \left(\hat{\varphi}^{i} + \hat{\varphi}^{ij} \right) S_{y}^{ij} \right], \end{aligned} \tag{26}$$

где $\hat{u}_{x}^{i}$ – разностный аналог x-координаты скорости в центре текущей ячейки на следующем временном шаге, $\hat{u}_{y}^{i}$ – разностный аналог y-координаты скорости в центре текущей ячейки на следующем временном шаге. Граничные условия (10) реализуются подстановкой в выражения (26) в качестве граничного $\hat{A}^{ij}$ нулевого значения. Значение на границе разностного аналога скалярного потенциала рассчитывается с помощью представления $\hat{\varphi}^{ij} = \hat{\varphi}^{i} - \left(u^{i}, \frac{\mathbf{S}^{ij}}{\left| \mathbf{S}^{ij} \right|} \right) l^{ij}$ и подставляется в выражения (26).

Итак, алгоритм вычисления распределения скорости на двумерной декартовой прямоугольной расчетной сетке заключается в последовательном выполнении разностных выражений (21), (22), (24)–(26).

Численная методика в трехмерном случае

В случае трехмерной постановки будем использовать расчетную сетку, состоящую из треугольных призм, пример которой изображен на рис. 3. Аналогично двумерному случаю для аппроксимации уравнений метода двойного потенциала (5)–(8) будет использоваться метод конечного объема по центрам призматических ячеек. Отметим при этом, что в отличие от случая двумерной постановки при постановке трехмерной x и y компоненты вихря не равны нулю, и, как следствие, не равны нулю компоненты векторного потенциала.

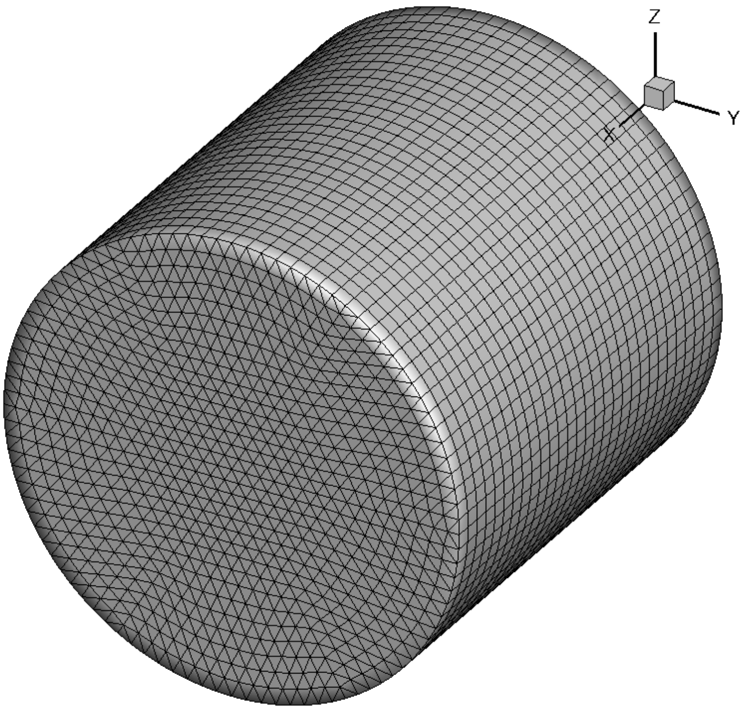

Рис. 3. Сетка, состоящая из треугольных призм

Для аппроксимации потоков через границы расчетной ячейки введем следующие обозначения (см. рис. 4): V^i – объем текущего i-го сеточного элемента, P^i – точка центра текущего i-го элемента, P^{ij} – точка центра j-соседнего к i-му элемента, l^{ij} – расстояние между центрами соседних ячеек, $\mathbf{n}^{ij} = \left\{ n_x^{ij}, n_y^{ij}, n_z^{ij} \right\}^T$ – единичный направляющий вектор от центра текущего элемента к центру соседнего, $\mathbf{S}^{ij} = \left\{ S_x^{ij}, S_y^{ij}, S_z^{ij} \right\}^T$ – направленная площадь j-го ребра i-го элемента. Количество соседних элементов призматической ячейки равно пяти.

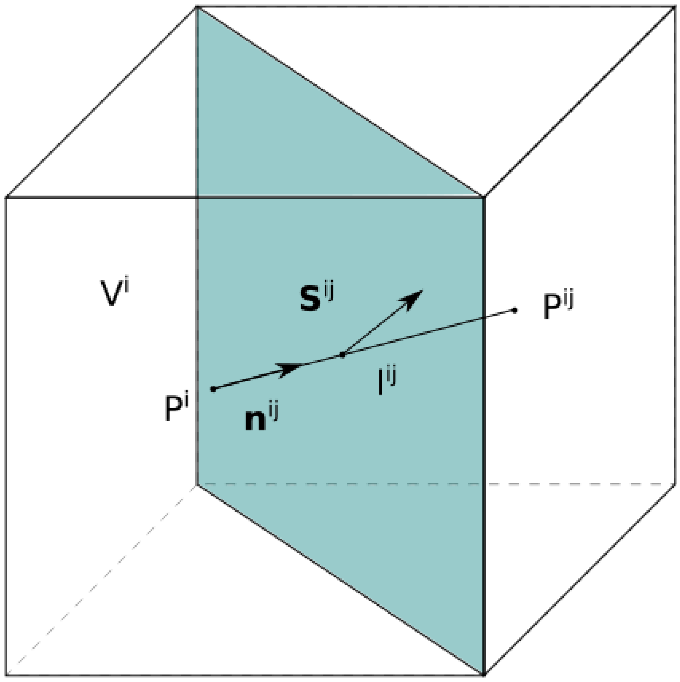

Рис. 4. Характерные сеточные величины для призматических элементов

Для аппроксимации векторного уравнения (6) применим экспоненциальное преобразование, аналогично двумерному случаю, и запишем результирующие разностные выражения:

$$\bar{W}_{kp}^{ij} = \frac{\bar{G}_k^{ij}\omega_p^{ij} - \omega_p^i}{0.5\left(\bar{G}_k^{ij} - 1\right)l^{ij}} n_k^{ij}, \; \bar{G}_k^{ij} = \exp\left(-\mathrm{Re}\, l^{ij} n_k^{ij} \frac{u_k^{ij} + u_k^i}{2}\right), \tag{27}$$

$$\hat{\omega}_p^i = \omega_p^i + \frac{\tau}{V^i}\left[\sum_{j=1}^{5}\left(\bar{\mathbf{W}}_p^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right) + \sum_{j=1}^{5}\left(\bar{\boldsymbol{\omega}}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right)\bar{u}_p^{ij}\right], \; \bar{\boldsymbol{\omega}}^{ij} = 0.5\left(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\omega}^i\right), \; \bar{u}_p^{ij} = 0.5\left(u_p^{ij} + u_p^i\right), \tag{28}$$

где k, p = x, y, z, $\bar{W}_{kp}{}^{ij}$ – аппроксимация специального оператора, подействововавшего на вихрь, на j-ую грань в i-ой ячейке, представляющее из себя матрицу размерности 3x3, $\hat{\omega}_p^i$ – разностный аналог p-ой составляющей вихря в центре текущей ячейки на следующем временном слое, $\omega_p{}^{ij}$ – разностный аналог p-ой составляющей вихря в центре j-соседней к текущей ячейке на текущем временном слое, $\omega_p{}^i$ – разностный аналог p-ой составляющей вихря в центре текущей ячейки на текущем временном слое, $\bar{\boldsymbol{\omega}}^{ij}$ – линейная интерполяция вихря на середину грани, $\bar{u}_p^{ij}$ – линейная интерполяция p-ой координаты скорости на середину грани. Граничные условия на вихрь реализуются аналогично двумерному случаю дискретизацией ротора скорости с первым порядком точности.

Следующим шагом запишем разностные аналоги для уравнения скалярного потенциала (8) и векторного потенциала (5), полученных аналогично двумерному случаю:

$$\hat{\varphi}^i = \frac{\sum_{j=1}^{5} \frac{\varphi^{ij}}{l^{ij}} \left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right)}{\sum_{j=1}^{5} \frac{\left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right)}{l^{ij}}}\,, \tag{29}$$

$$\hat{A}_k^i = \frac{\sum_{j=1}^{5} \frac{A_k^{ij}}{l^{ij}} \left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right) + \hat{\omega}_k^i V^i}{\sum_{j=1}^{5} \frac{\left(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}\right)}{l^{ij}}}\,, \tag{30}$$

где k=x, y, z, $\hat{A}_k^i$ – разностный аналог k-ой компоненты векторного потенциала в центре текущей ячейки на новом временном слое, A_k^{ij} – разностный аналог k-ой компоненты векторного потенциала в центре соседней к текущей ячейки на предыдущем временном слое.

Итак, разностный аналог трехмерного вектора скорости в этом случае представится следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_x^i &= \frac{0.5}{V^i}\left[\sum_{j=1}^{5}\left(\hat{A}_z^i + \hat{A}_z^{ij}\right)S_y^{ij} - \sum_{j=1}^{5}\left(\hat{A}_y^i + \hat{A}_y^{ij}\right)S_z^{ij} - \sum_{j=1}^{5}\left(\hat{\varphi}^i + \hat{\varphi}^{ij}\right)S_x^{ij}\right],\\
\hat{u}_y^i &= \frac{0.5}{V^i}\left[\sum_{j=1}^{5}\left(\hat{A}_x^i + \hat{A}_x^{ij}\right)S_z^{ij} - \sum_{j=1}^{5}\left(\hat{A}_z^i + \hat{A}_z^{ij}\right)S_x^{ij} - \sum_{j=1}^{5}\left(\hat{\varphi}^i + \hat{\varphi}^{ij}\right)S_y^{ij}\right],\\
\hat{u}_z^i &= \frac{0.5}{V^i}\left[\sum_{j=1}^{5}\left(\hat{A}_y^i + \hat{A}_y^{ij}\right)S_x^{ij} - \sum_{j=1}^{5}\left(\hat{A}_x^i + \hat{A}_x^{ij}\right)S_y^{ij} - \sum_{j=1}^{5}\left(\hat{\varphi}^i + \hat{\varphi}^{ij}\right)S_z^{ij}\right],
\end{aligned} \tag{31}$$

где $\hat{\mathbf{u}}^i = \left\{\hat{u}_x^i, \hat{u}_y^i, \hat{u}_z^i\right\}$ – разностный аналог вектора скорости в центре текущей ячейки. Граничные значения скалярного потенциала получаются аналогично двумерному случаю. В выражениях (30) и (31) в случае наличия граничного слагаемого у элемента производится учет условий (9).

В результате итоговой алгоритм расчета поля скорости на трехмерной призматической сетке состоит в последовательном вычислении разностных выражений (27)–(31).

Тестовая задача и результаты моделирования

В качестве тестовой задачи рассмотрим известную задачу об установлении течения Пуазейля [7] в двумерной прямоугольной области, а также в трехмерной цилиндрической. На рис. 5 изображена двумерная геометрия расчетной области, длина которой составляет 6, а ширина 2. Течение жидкости схематично изображено стрелками.

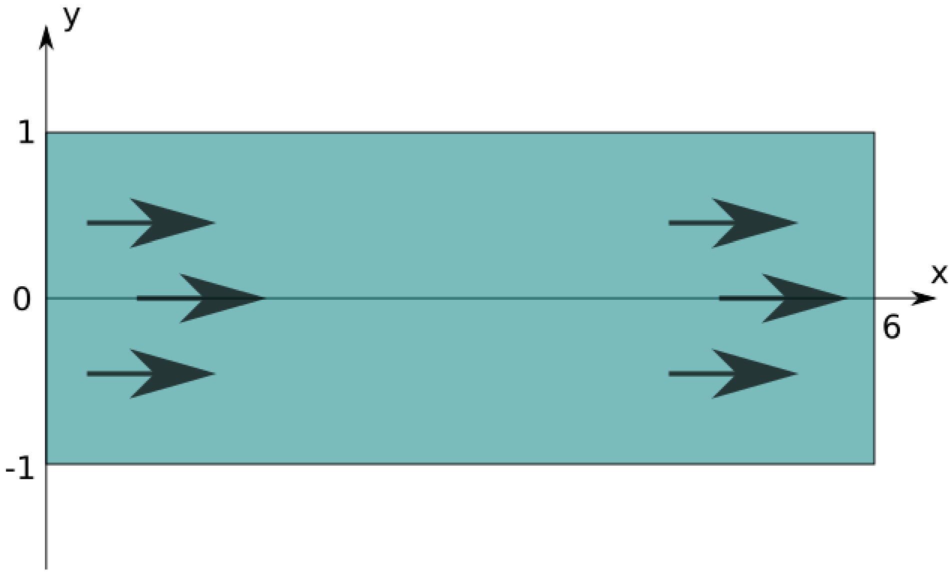

Рис. 5. Двумерная геометрия расчетной области

Граничные и начальные условия в данном случае представятся следующим образом:

$$\mathbf{u}\big|_{x=0} = \left\{1 - y^2, 0\right\}^T, \quad \mathbf{u}\big|_{|y|=1} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right|_{x=6} \equiv 0,$$

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} \equiv 0.$$

Численное моделирование проводилось на сетке, содержащей 20 750 элементов – 250 шагов вдоль оси X, 83 шага по оси Y. Принятое значение числа Рейнольдса Re=100. Результаты расчета представлены на рис. 6– 8. Как видно из рис. 6, удалось получить течение Пуазейля во всей прямоугольной области.

Дополнительно по вычисленному распределению скоростей было полученно распределение функции тока в исследуемой геометрии, которое изображено на рис. 10. На рис. 11 представленно теоретическое распределение функции тока для течения Пуазейля, рассчитанное с помощью следующего выражения:

$$\psi(y) = \int_{-1}^{y} 1 - y'^2 dy' = \left(y - \frac{y^3}{3}\right) + \frac{2}{3}.$$

Из представленных изображений видно, что функция тока, рассчитанная по вычисленному распределению скоростей, соответствует теоретической. При этом максимальная ошибка численного решения на указанной выше сетке составляет не более 1%.

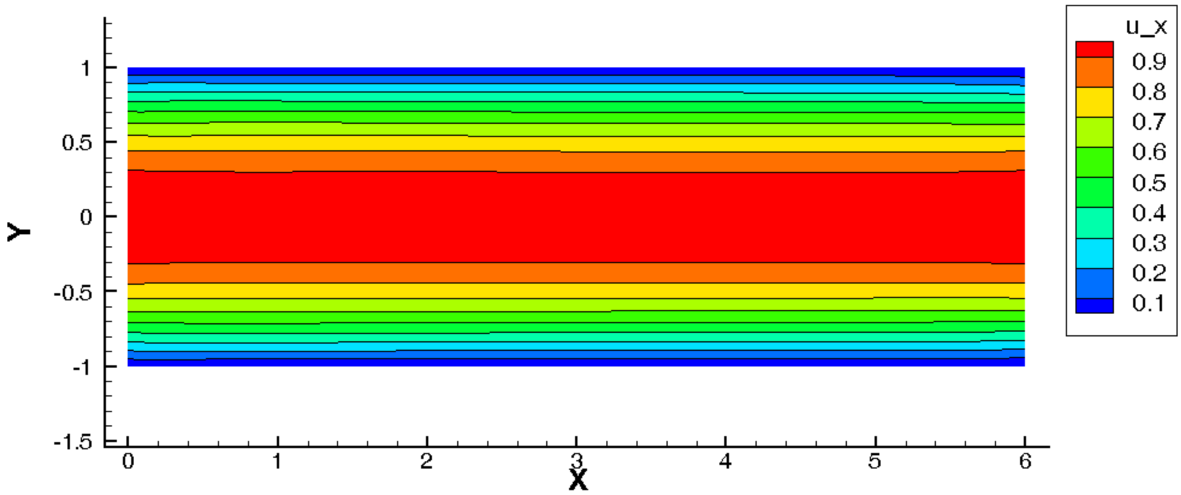

Рис. 6. Распределение продольной скорости

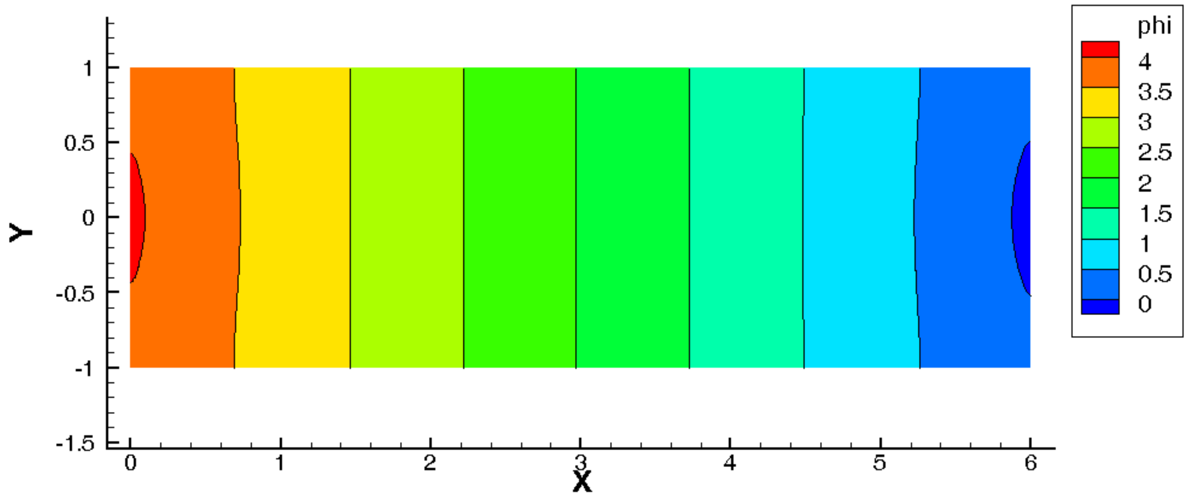

Рис. 7. Распределение скалярного потенциала

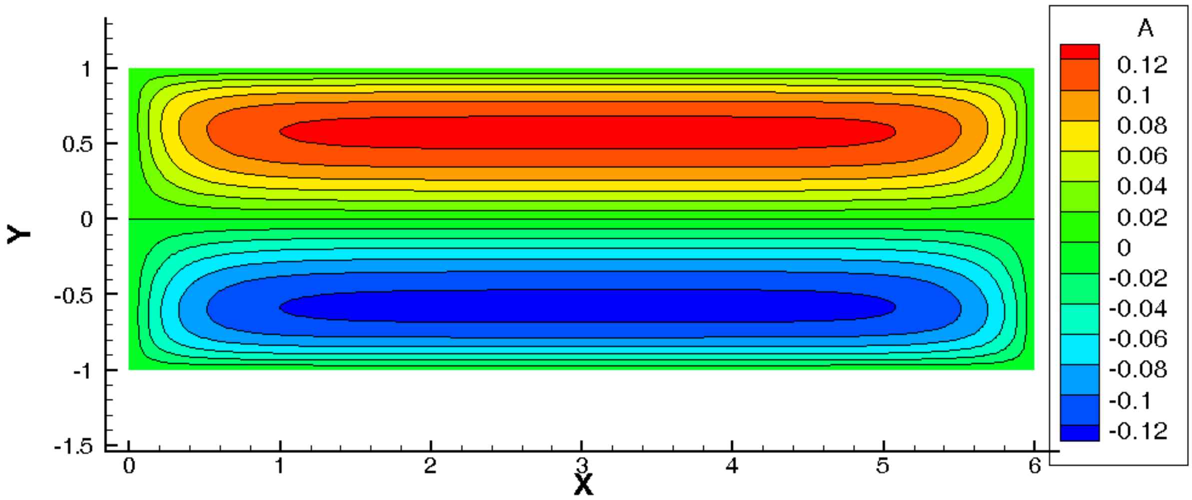

Рис. 8. Распределение z-компоненты векторного потенциала

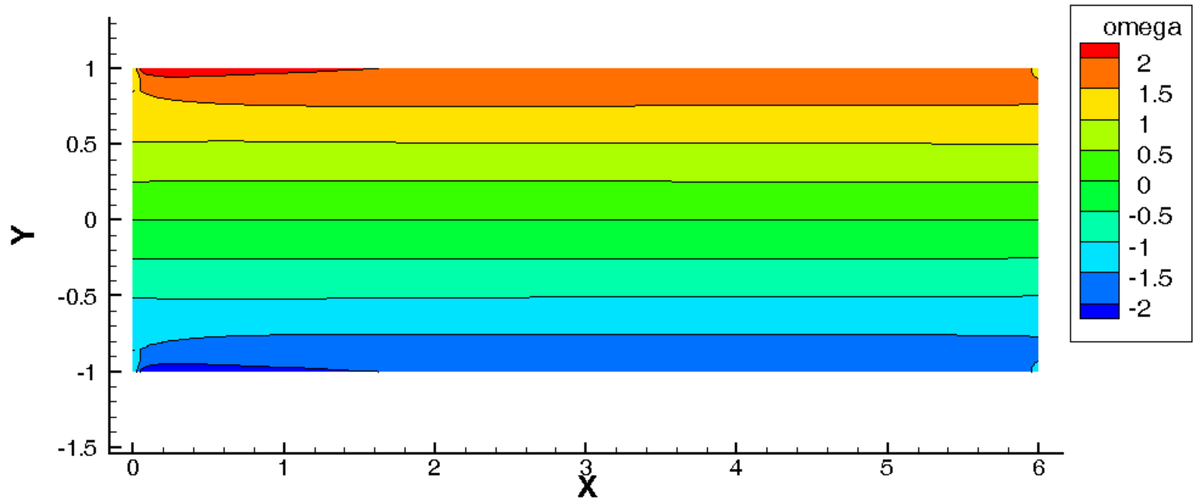

Рис. 9. Распределение вихря

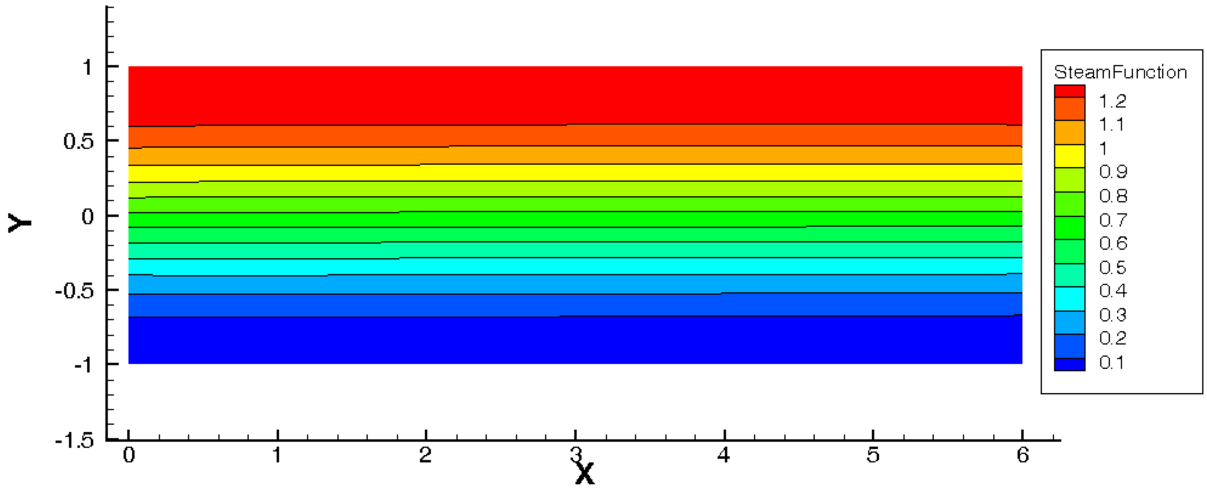

Рис. 10. Приближенное распределение функции тока

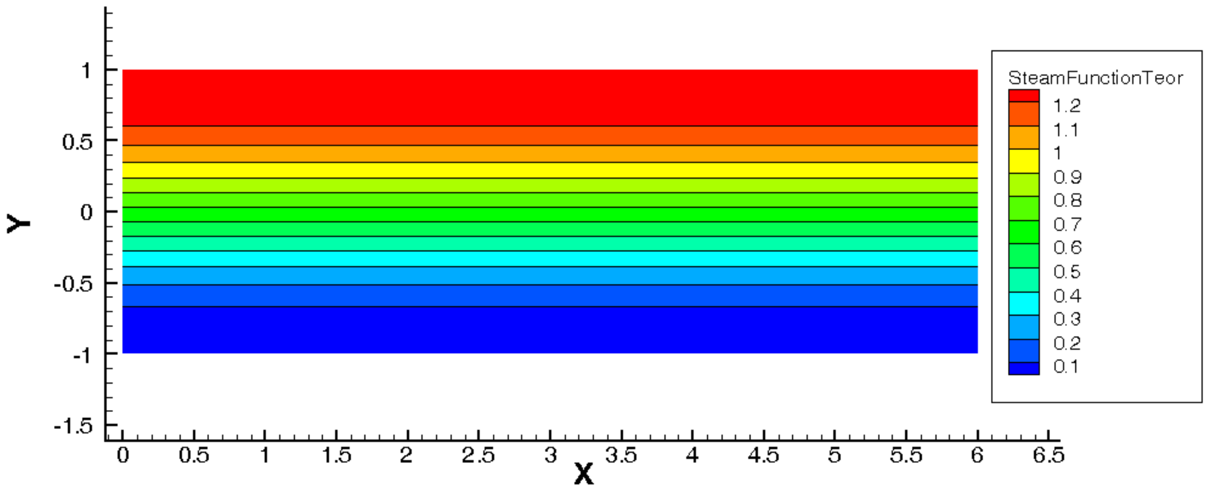

Рис. 11. Теоретическое распределение функции тока

Аналогично двумерной задаче рассмотрим установление течения Пуазейля в трехмерной цилиндрической расчетной области, изображенной на рис. 12.

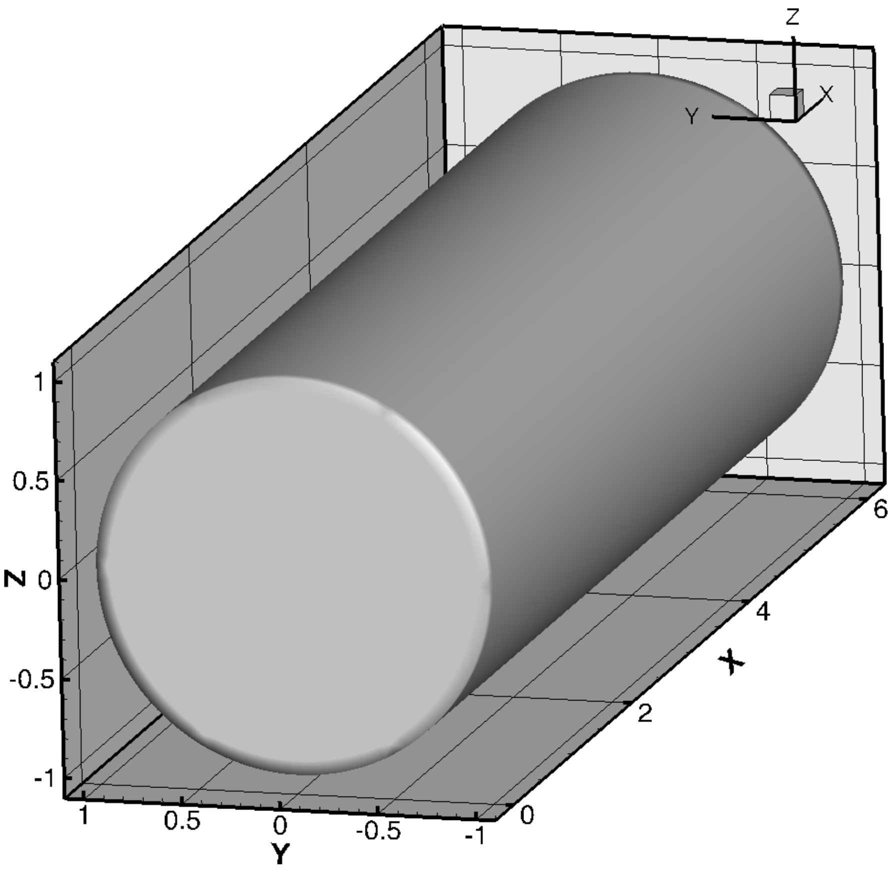

Рис. 12. Трехмерная геометрия расчетной области

Граничные и начальные условия представятся следующим образом:

$$\mathbf{u}\big|_{x=0} = \left\{1 - y^2 - z^2, 0, 0\right\}^T,$$

$$\mathbf{u}\big|_{|y^2+z^2|=1} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right|_{x=6} \equiv 0,$$

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} \equiv 0.$$

Тестовый расчет проводился на призматической расчетной сетке, состоящей из 133 632 элементов – 87 шагов вдоль оси X, 1 536 треугольника в основании в плоскости YZ. Использованное в процессе расчета число Рейнольдса Re=100. На рис. 13–19 изображены результаты моделирования течения. Как видно из рис. 13 и рис. 14, удалось качественно получить установившееся течение Пуазейля по всему объему цилиндра.

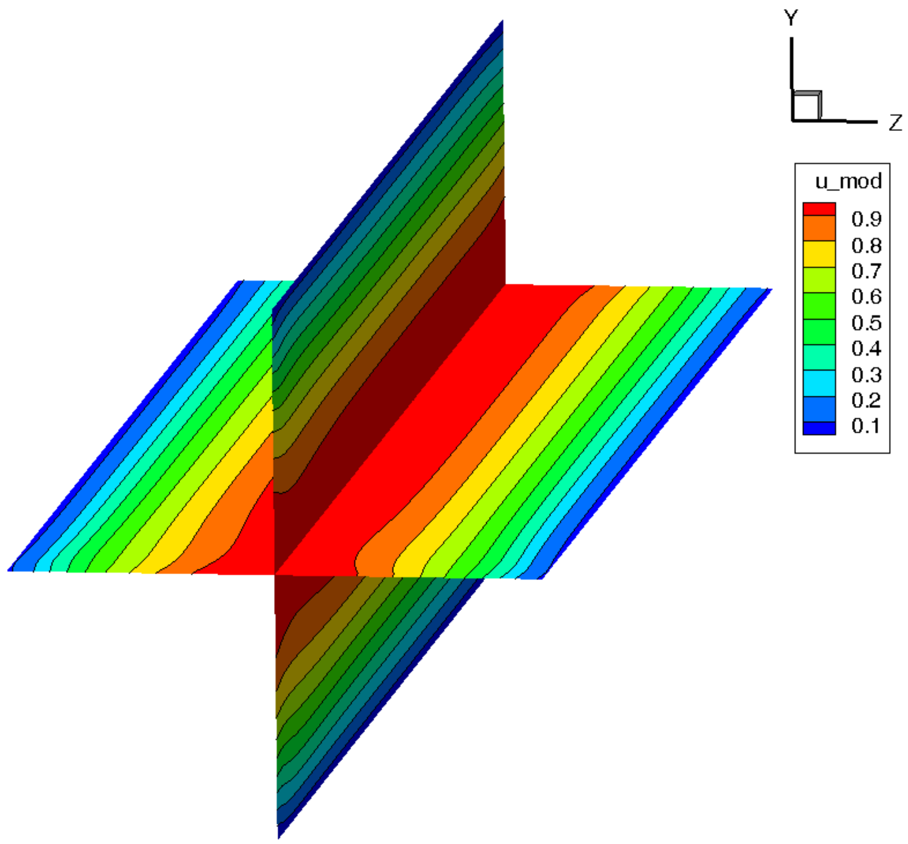

Рис. 13. Распределение модуля скорости в сечениях XY и XZ

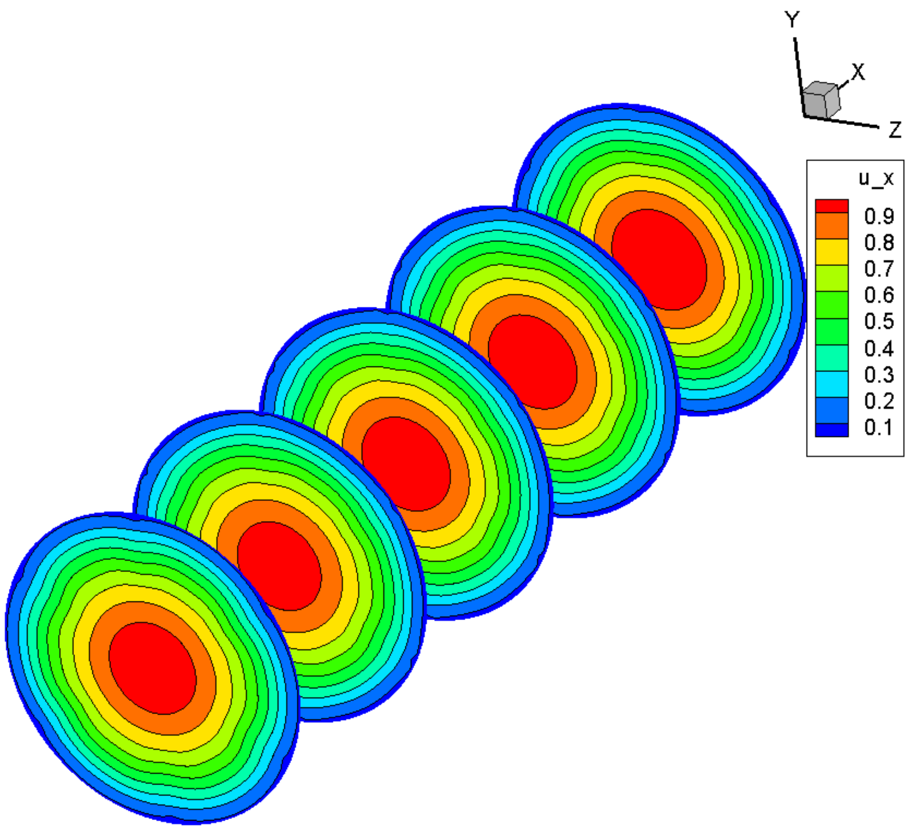

Рис. 14. Распределение модуля скорости в массиве сечений YZ

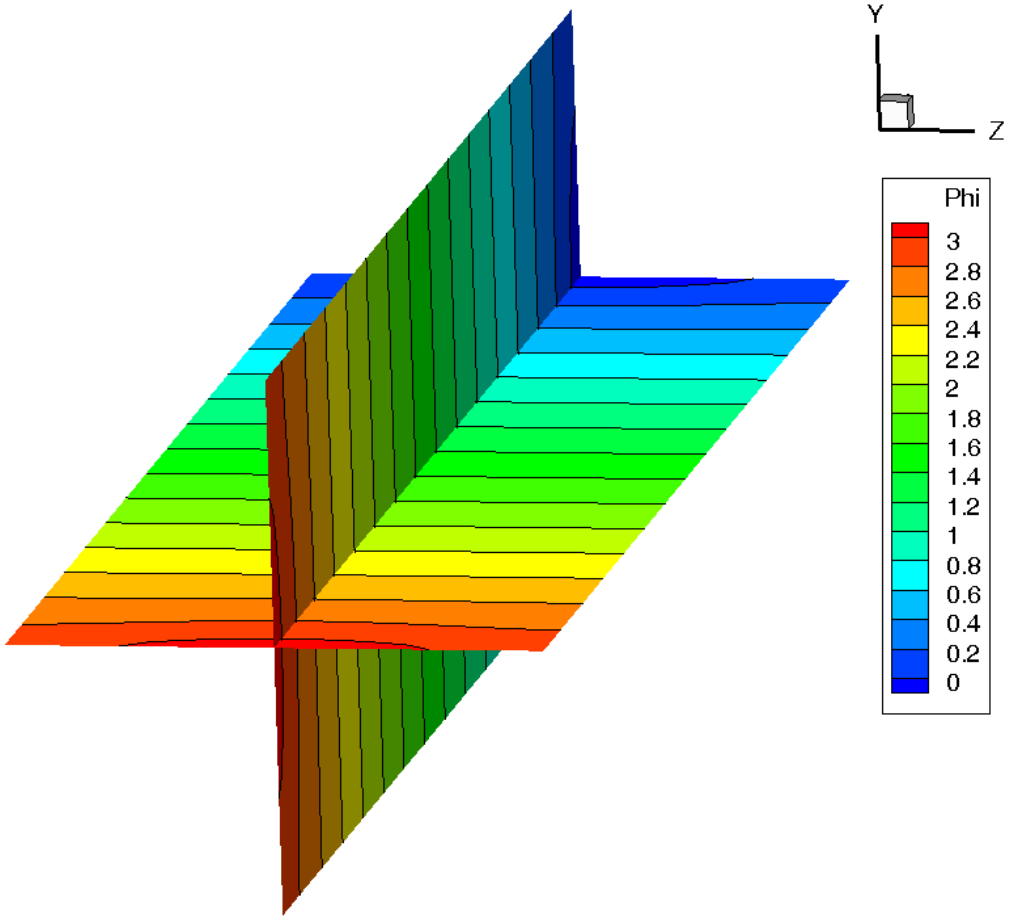

Рис. 15. Распределение скалярного потенциала в сечениях XY и XZ

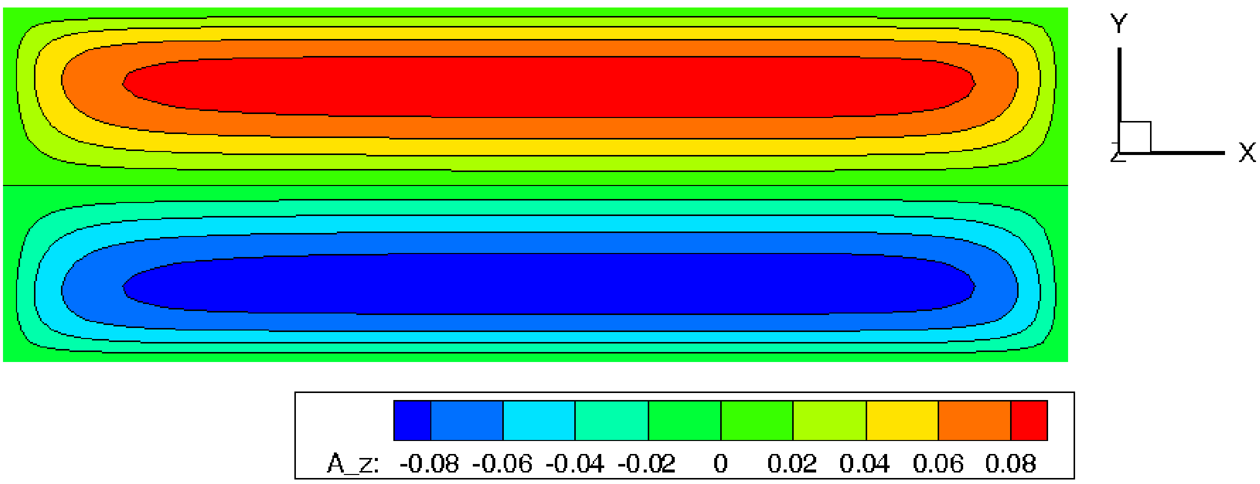

Рис. 16. Распределение z-компоненты векторного потенциала в сечении XY

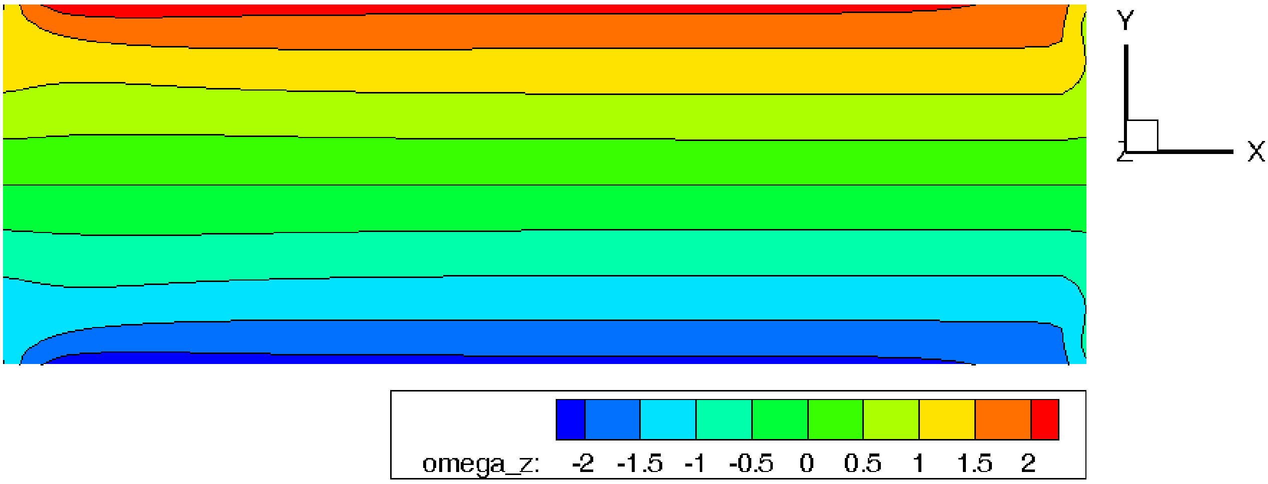

Рис. 17. Распределение z-компоненты вихря в сечении XY

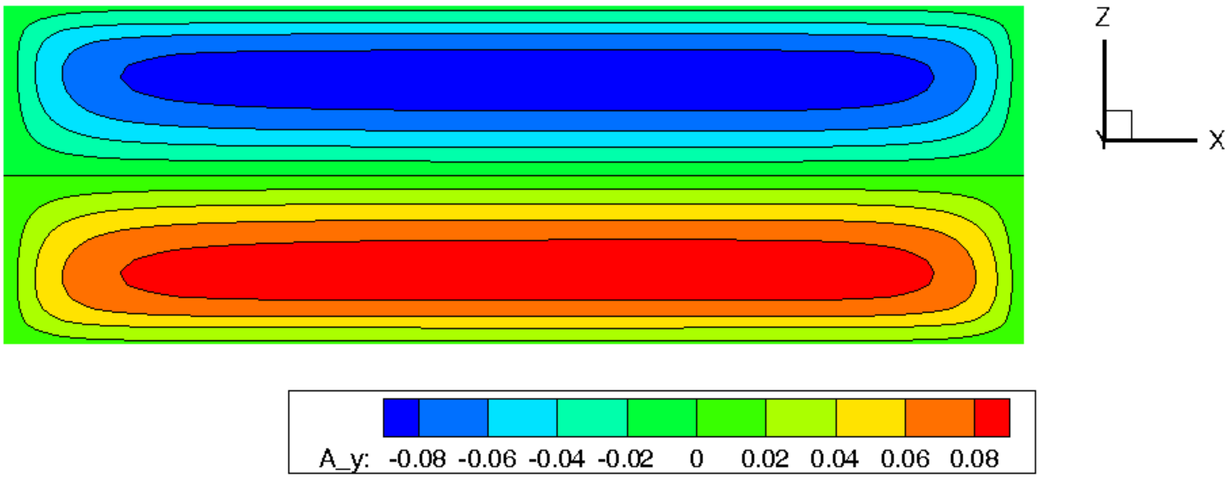

Рис 18. Распределение y-компоненты векторного потенциала в сечении XZ

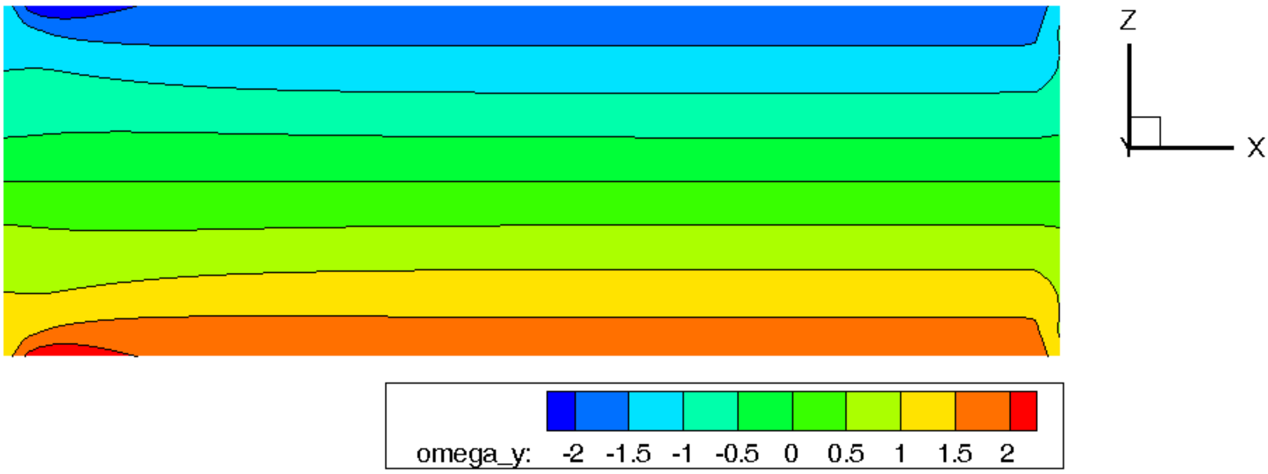

Рис. 19. Распределение y-компоненты вихря в сечении XZ

Заключение

В рамках работы был рассмотрен метод двойного потенциала для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости. Основным преимуществом данного метода является сочетание постановки уравнений Навье–Стокса в переменных векторный потенциал–векторный вихрь и задание относительно несложных граничных условий на векторный потенциал.

Для численной реализации была построена разностная схема, основанная на методе конечного объема в центрах ячеек с применением экспоненциального преобразования. Схема применяется в двумерном и трехмерном случаях.

Итоговый численный алгоритм был опробирован на модельной задаче об установлении течения Пуазейля в двумерной прямоугольной и трехмерной цилиндрической областях. Результаты расчетов продемонстрировали возможность и эффективность применения метода двойного потенциала для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости в широком диапазоне постановок задач.

Список литературы

1. Математическое моделирование процессов очистки воды от примесей железа / Т.А. Кудряшова [и др.]. М.: РАН, 2017. 17 с.
2. Mathematical modelling of water treatment processes / Polyakov S.V. [et al.] // Mathematica Montisnigri. Vol. XL (2017). p.110-126.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
4. Richardson S.M., Cornish A.R. Solution of three-dimentional incompressible flow problens // J. Fluid Mech. Vol. 82, part 2 (1977), p.309-319.
5. Richardson S.M. Numerical solution of the three-dimensional Navier—Stokes equations. Doctoral dissertation. Department of Chemical Engineering and Chemical Technology, Imperial College of Science and Technology, London, 1976.
6. Gegg S. G. A dual-potential formulation of the Navier-Stokes equations. (1989) Retrospective Theses and Dissertations. 9040. URL: https://lib.dr.iastate.edu/rtd/9040
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. 3-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 736 с.
8. Eymard R., Gallouet T.R., Herbin R., The finite volume method. Handbook of Numerical Analysis, Amsterdam, North Holland, 7, 713–1020, (2000).
9. Поляков С.В. Экспоненциальные разностные схемы для уравнения конвекции-диффузии // Mathematica Montisnigri. Vol. XXVI (2013). С. 29-44.