ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 216 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.

Динамика систем частиц и кинетические уравнения в пространстве с геометрией Вейля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Динамика систем частиц и кинетические уравнения в пространстве с геометрией Вейля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 216. 12 с. doi:10.20948/prepr-2018-216
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-216

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

ДИНАМИКА СИСТЕМ ЧАСТИЦ И КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ГЕОМЕТРИЕЙ ВЕЙЛЯ

Москва — 2018

Фимин Н.Н., Чечёткин В. М.

Динамика систем частиц и кинетические уравнения в пространстве с геометрией Вейля

Описаны основные свойства геометрии Вейля, обобщающей геометрию пространства–времени общей теории относительности. Показано, что динамика частиц в пространстве Вейля может быть сформулирована в терминах лагранжевой геометрии. Рассмотрена методика построения кинетических уравнений в пространстве Вейля и установлена их связь с уравнениями на лагранжевых многообразиях.

Ключевые слова: Лагранжева геометрия, геометрия Вейля, кинетические уравнения, метрический потенциал

Fimin Nikolay Nikolaevich, Chechetkin Valery Mikhailovich

Dynamics of particle systems and kinetic equations in Weyl geometry space

The basic properties of the Weyl geometry, which generalizes the space-time geometry of the General Theory of Ralativity, are described. It is shown that particle dynamics in Weyl space can be formulated in terms of Lagrangian geometry. A method for constructing kinetic equations in Weyl space is considered, and their connection with equations on Lagrangian manifolds is established.

Key words: Lagrange geometry, Weyl geometry, kinetic equations, metric potential

Оглавление

1. Введение

Возможность применения неримановых геометрий для анализа динамики статистических систем в пространстве с (обобщенной) кривизной является новым и весьма многообещающим подходом к чрезвычайно широкому классу задач как классического (топологическая теория турбулентности, описание поведения нелокальных объектов вблизи сингулярностей в теории коллапса на черные дыры и космологии), так и квантового (взаимодействия, описываемые уравнения Вигнера, некоммутативная геометрия в приложениях к физике элементарных частиц и астрофизике, квантовая теория гравитации) характера. Фактически, в настоящее время уже существует значительный теоретический базис для подобного рода изысканий: начиная с работ 20-х гг. Э. Картана [1]–[2] и П. Финслера [3]–[4] до создания в последние десятилетия теории лагранжевых и обобщенных финслеровых пространств [5]–[10]. Более того, весьма примечательно, что, начиная с 70-х гг., поток публикаций, посвященных экспериментальным и оценочным аспектам прикладной не-римановой геометрии в физике космических лучей, астрофизике черных дыр и различных обобщениях специальной теории относительности, существенно вырос и воспринимается научной общественностью как самостоятельная ветвь исследований в данных областях. Достаточно упомянуть работы [11]–[16] (посвященные вопросу обрезания энергетического спектра первичных космических протонов); [17]–[22] (в которых развивается так называемая "Double Special Relativity", то есть вариант СТО, где в качестве инвариантов участвуют как скорость света c, так и некая вторая фундаментальная величина — например, планковская длина ℓ_P или планковская энергия E_P); [23] (касающуюся углового распределения температурных флуктуаций микроволнового фонового излучения).

Однако собственно поведение статистической системы (ансамбля частиц) в пространстве с финслеровой (или более общей лагранжевой или картановской метрической функцией) до настоящего времени освещалось весьма скудно; основной причиной, по-видимому, здесь следует считать не столько усложненность математического аппарата "физической геометрии" (или отсутствие интереса к задачам динамики системы частиц в ней), сколько необходимость его специальной адаптации с введением нестандартных — существенно отличающихся по форме и содержанию от привычных "классических" — предположений в получающийся вариант статистической механики, термодинамики и гидродинамики. Тем не менее внимательное изучение этого вопроса приводит к выводу, что "принцип соответствия" здесь не нарушается — и, более того, некоторые наблюдаемые эффекты могут получить более простое и ясное обоснование.

В настоящей работе предпринята попытка изучить динамику многочастичной системы на "многообразиях Вейля", характеризующихся отсутствием в общем случае инвариантности интервала ds, с точки зрения лагранжевой и гамильтоновой геометрии. Правомерность данного подхода определяется возможностью достаточно просто и без введения в рассмотрение дополнительных предположений связать классическую механику в фазовом пространстве со статистической механикой ансамблей в ОТО и далее перейти к построению соответствующей квантово–статистической теории, которая может рассматриваться как своеобразный базис для активно строящейся в настоящее время квантовой теории гравитации.

2. Геометрия Вейля и кинетика частиц на многообразиях Вейля

Базисом для построения общей теории относительности (ОТО), как известно, послужила риманова геометрия. В отличие от классической механики Ньютона, в основном "довольствующейся" евклидовой геометрией, пространство–время в ОТО обладает весьма широким диапазоном изменения своей внутренней структуры, определяемой римановой метрикой ${}^{[R]}g_{ij}$ (невырожденной и в общем случае индефинитной), то есть фактически коэффициентами в выражении для (квадрата) интервала $ds^2 = {}^{[R]}g_{ij}dx^i dx^j$ ($i,\ j = \overline{0,3}$). Математический аппарат общей теории относительности существенно использует аффинные многообразия, на которых справедливо утверждение о неизменности длины вектора $\xi^i(\tau)$ при параллельном переносе из точки $x^i(\tau)$ в точку $x^i(\tau) + dx^i(\tau)$ на некоторой кривой $\varpi(\tau)$ (вдоль которой — в касательном аффинном пространстве — задано векторное поле $\xi^i(\tau)$):

$d({}^{[R]}g^{ij}\xi_i\xi_j) = 0$, причем этот параллельный перенос характеризуется объектом связности Кристоффеля Γ^k_{ij} (то есть при бесконечно малом смещении по кривой координаты вектора $\xi^i(s)$ меняются по закону $d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i$). Введение связности на римановом пространстве позволяет построить содержательную теорию, развитую А. Эйнштейном [24]–[26] и Д. Гильбертом [27].

Однако практически одновременно с "классической" ОТО были предложены ее альтернативные варианты, основанные, в частности, на определенных обобщениях понятия связности — с использованием так называемой геометрии Г. Вейля [28]–[30] и дифференцирования по Э. Картану [31]–[33]. Как представляется автору, несмотря на то, что подход Г. Вейля (имевший целью объединение электромагнитных и гравитационных взаимодействий) был в последующее за их выдвижением десятилетие оттеснен с "магистрального пути" развития теории гравитации физически более прозрачной теорией Эйнштейна и не рассматривался в дальнейшем как перспективный, его математический формализм имеет значительную ценность и может быть применен — при надлежащей модификации — для создания теории динамики частиц на многообразиях, более общих, чем римановы.

Сначала рассмотрим некоторые предварительные "наводящие" вопросы. Как известно [34], изменение $\delta\xi_i$ компонент векторного поля ξ_i при параллельном переносе вдоль малого замкнутого контура σ^{ij} равно

$$\delta\xi_i = \frac{1}{2}R_{ijk\ell}\,\xi^\ell d\sigma^{jk}, \tag{1}$$

$$R_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2({}^{[R]}g_{\ell k})}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2({}^{[R]}g_{ij})}{\partial x_\ell \partial x_k} - \frac{\partial^2({}^{[R]}g_{ik})}{\partial x_\ell \partial x_j} - \frac{\partial^2({}^{[R]}g_{j\ell})}{\partial x_i \partial x_k}\right] - \Gamma^m_{ik}\Gamma_{\ell j,m} + \Gamma^m_{ij}\Gamma_{\ell k,m}$$

— тензор Римана–Кристоффеля, ${}^{[R]}g_{\ell k}$ — метрический тензор риманова многообразия, на котором рассматривается обход вектором ξ_i контура σ^{ij}. Отсюда следует, что

$$\xi^i\delta\xi_i = \frac{1}{2}R_{ijk\ell}\xi^i\xi^\ell d\sigma^{jk} = 0, \tag{2}$$

так как тензор $R_{ijk\ell}$ антисимметричен по отношению к индексам i и ℓ. Таким образом, вектор $\vec{\delta\xi}$ ортогонален вектору $\vec{\xi}$; далее, поскольку $|\xi|^2 = \xi^i\xi_i$, то

$\delta|\xi^i| = 2\delta\xi_i\, \xi^i$, откуда видно, что длина вектора $|\vec{\xi}|$ не изменяется при переносе вдоль замкнутого контура.

Существует ли возможность построить непротиворечивую теорию, не использующую последнее утверждение (сохранения нормы вектора: $|\vec{\xi}| = const$)? Рассмотрим вместо соотношения (1) следующее, понимаемое как определение:

$$\delta\xi_i = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{ijk\ell}\xi^\ell d\sigma^{jk}, \tag{3}$$

где тензор $\mathcal{R}_{ijk\ell}$ имеет более общий вид, чем обычный тензор кривизны: антисимметричность по i и ℓ уже не предполагается (но сохраняется относительно индексов j и k). Если мы введем антисимметричный ${}^{(as)}\mathcal{R}_{ijk\ell} = (1/2)(\mathcal{R}_{ijk\ell} - \mathcal{R}_{\ell jki})$ и симметричный ${}^{(s)}\mathcal{R}_{ijk\ell} = (1/2)(\mathcal{R}_{ijk\ell} + \mathcal{R}_{\ell jki})$ относительно индексов i и ℓ тензоры, то $\delta\xi_i = (1/2)({}^{(s)}\mathcal{R}_{ijk\ell} + {}^{(as)}\mathcal{R}_{ijk\ell})\xi^\ell d\sigma^{jk}$ и, соответственно, $\xi^i\delta\xi_i = (1/2){}^{(s)}\mathcal{R}_{ijk\ell}\xi^i\xi^\ell d\sigma^{jk} \neq 0$ в общем случае. Наложим на ${}^{(s)}\mathcal{R}_{ijk\ell}$ следующее ограничение: ${}^{(s)}\mathcal{R}_{ijk\ell} = {}^{[R]}g_{i\ell}{}^{(s)}\mathcal{R}_{jk}$, ${}^{(s)}\mathcal{R}_{jk} = rot\,\vec{\mathcal{T}}$, где $\vec{\mathcal{T}}$ — некоторый 4–вектор. Тем самым мы получаем, что при обходе замкнутого контура изменение длины вектора $\delta|\vec{\xi}|$ пропорционально начальной длине $|\vec{\xi}|$ (и не зависит от направления вектора):

$$\delta|\vec{\xi}| = \frac{{}^{(s)}\mathcal{R}_{jk}{}^{[R]}g_{i\ell}\xi^i\xi^\ell d\sigma^{jk}}{2|\vec{\xi}|} = \frac{1}{2}{}^{(s)}\mathcal{R}_{jk}|\vec{\xi}|d\sigma^{jk}. \tag{4}$$

Итак, в построенной геометрии перенос по замкнутому контуру векторов ненулевой длины требует конкретизации пути переноса и, как следствие, сравнение длин, относящихся к различным точкам многообразия в рассматриваемой геометрии (*геометрии Вейля*), невозможно (поскольку результат сравнения зависит от путей, по которым переносятся векторы). В этом состоит фундаментальное различие с идеологией римановой геометрии, предполагающей наличие эталонного масштаба, инвариантного относительно движений.

Сформулируем более строго базисные концепции геометрии Вейля применительно к общему N–мерному случаю. Введем N–мерное гладкое многообразие $\mathcal{M}$ и зададим на нем риманову метрику ${}^{[R]}g_{ik}$ $(i,\, k = \overline{0, N-1})$.

Две римановы метрики ${}^{[R]}g_{ik}$ и ${}^{[R]}\widetilde{g}_{ik}$ назовем *эквивалентными*, если ${}^{[R]}\widetilde{g}_{ik} = \exp(\zeta){}^{[R]}g_{ik}$, $\zeta(\vec{x})$ — гладкая функция на многообразии $\mathcal{M}$. *Структура Вейля* на $\mathcal{M}$ — отображение $\widehat{\mathcal{W}} : \mathcal{R}_{\mathcal{M}} \to F^{(1)}(\mathcal{M})$, удовлетворяющих условию $\widehat{\mathcal{W}}(\exp(\zeta){}^{[R]}g_{ik}) = \phi^{(1)} - d\zeta$, где $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ — класс эквивалентности римановых метрик на $\mathcal{M}$, $\Phi^{(1)}(\mathcal{M})$ — пространство 1–форм на $\mathcal{M}$, $\phi^{(1)} \equiv \widehat{\mathcal{W}}({}^{[R]}g_{ik})$ — 1–форма, называемая *метрическим потенциалом*; многообразие $\mathcal{M}|_{\widehat{\mathcal{W}}}$ со структурой Вейля будем называть *многообразием Вейля*. Линейная связность на $\mathcal{M}|_{\widehat{\mathcal{W}}}$ *совместима* со своей структурой $\widehat{\mathcal{W}}$ при условии ${}^{[R]}g_{ik,\,m} + {}^{[R]}g_{ik}\phi^{(1)}_m = 0$; такая (совместимая со структурой) связность ${}^{[W]}\Gamma^i_{jk}$ существует на каждом многообразии Вейля (см., например, [30], [35]), и компоненты ее имеют вид:

$$ {}^{[W]}\Gamma^i_{jk} = \frac{{}^{[R]}g^{i\ell}}{2}\big({}^{[R]}g_{\ell j,\,k} + {}^{[R]}g_{k\ell,\,j} - {}^{[R]}g_{jk,\,\ell}\big) - \frac{1}{2}\big({}^{[R]}g^i_j\phi^{(1)}_k + {}^{[R]}g^i_k\phi^{(1)}_j - {}^{[R]}g_{jk}(\phi^{(1)})^i\big). \tag{5} $$

Условие эквивалентности метрик в терминах интервалов равносильно требованию $d\widetilde{s} = \exp(\zeta/2)ds$, то есть мы вводим изменение системы масштабов; при этом метрический потенциал преобразуется следующим образом:

$$ \phi^{(1)}_k \;\to\; \widetilde{\phi}^{(1)}_k = \phi^{(1)}_k + \frac{\partial\zeta}{\partial x^k}, \tag{6} $$

где $\{x^k\}$ — локальная координатная система на $\mathcal{M}_{\widehat{\mathcal{W}}}$. Уравнение движения по геодезической (для массивной частицы) вейлевского многообразия можно получить, следуя, например, методике [36]; оно имеет вид

$$ \frac{dv^i}{d\tau} + {}^{[W]}\Gamma^i_{jk}v^jv^k + \frac{1}{2}\big(\phi^{(1)}_j v^j\big)v^i = 0, \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \tag{7} $$

где τ — аффинный параметр (собственное время частицы).

Достаточно просто получить и кинетическое уравнение Лиувилля для многообразий Вейля. Для простоты обратимся вновь к случаю 4–мерного пространства–времени. Обозначив δN скорость изменения полного числа частиц в малой области $\mathcal{V}$ сферического расслоения $S\mathcal{M}$ (иначе — массовой гиперповерхности, получемой из касательного расслоения $T\mathcal{M}$ наложением ограничения ${}^{[R]}g_{ij}v^iv^j = 0$ или 1), следуя методике [36], имеем $\delta N = \int_{\mathcal{V}}(1 -$

$\Pi(g))\phi_i^{(1)}v^i f\Omega$, где $\Pi(g)$ определяется из соотношения $n^i_{,i} = (1-\Pi(g))\phi_i^{(1)}n$, $n^i = \int v^i f d\vec{v}$ — плотность числа частиц, f — функция распределения, Ω — элемент объема на $S\mathcal{M}$. С другой стороны,

$$\delta N = \int_{\mathcal{V}} \big(\mathcal{J}(f) + (\nabla\,\mathcal{J})f\big)\Omega, \quad \mathcal{J} \equiv v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dv^i}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{8}$$

где $dv^i/d\tau$ определяется из (7). Следовательно, уравнение переноса фазового объема (Лиувилля) приобретает вид

$$v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \big({}^{[W]}\Gamma^j_{ik}v^k + \frac{1}{2}\phi_i^{(1)}{}^{[R]}g^j_k v^k\big)\frac{\partial}{\partial v^j}\right)f + \big(1+\frac{\Pi(g)}{2}\big)\phi_k^{(1)}v^k f = 0, \tag{9}$$

где использовано соотношение $(\nabla\mathcal{J})_{S\mathcal{M}} = (3/2)\phi_k^{(1)}v^k$. В терминах 4–импульсов (для массивных частиц $p^i = mv^i$ при $v^i v_i = 1$) получаем

$$p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \big({}^{[W]}\Gamma^j_{ik} + \frac{1}{2}\phi_i^{(1)}{}^{[R]}g^j_k\big)p^k\frac{\partial}{\partial v^j}\right)f + \big(1+\frac{\Pi(g)}{2}\big)\phi_k^{(1)}p^k f = 0. \tag{10}$$

3. Динамика частиц в лагранжевой геометрии

Гладкий *лагранжиан на расслоении* $T\mathcal{M}$ над дифференцируемым вещественным многообразием $\mathcal{M}$ (размерности n) есть отображение $L:\ (x,y)\in T\mathcal{M}\to L(x,y)\in\mathbb{R}^1$ класса C^∞ на многообразии $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ и непрерывное на ядре $\{0\}:\ \mathcal{M}\to T\mathcal{M}$ проекционного эндоморфизма $\pi:\ \mathcal{M}\to T\mathcal{M}$. Гессиан (по отношению к y^i) лагранжиана L (на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$) ${}^{[L]}g_{ij}(x,y) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 L(x,y)}{\partial y^i\partial y^j}$ является d–тензорным полем [5], ковариантным ранга 2, и симметричным (здесь $i,j,k...$ могут относиться и к переменной y, так чтобы $y^i = \dot{x}^i = y^{i^\dagger}$). Лагранжиан *регулярен*, если для данного гессиана справедливо: $rank\ \|{}^{[L]}g_{ij}(x,y)\| = n$ на $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$.

Лагранжево пространство есть пара $L^n = (\mathcal{M}, L(x,y))$, формируемая n–мерным гладким многообразием $\mathcal{M}$ и регулярным лагранжианом $L(x,y)$, для которого d-тензор ${}^{[L]}g_{ij}(x,y)$ имеет над расслоениием $T\mathcal{M}\backslash\{0\}$ постоянную сигнатуру.

Вариационная задача для лагранжиана L приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial L}{\partial y^i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad \frac{dy^i}{d\tau} = -2^{[L]}G^i(x,y), \tag{11}$$

где $x^i(\tau)$ зависит от параметра τ, которые эквивалентны нелинейным геодезическим уравнениям, определяющим динамику частицы в лагранжевом пространстве

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + 2^{[L]}G^i\big(x^k, \frac{dx^j}{d\tau}\big) = 0, \tag{12}$$

где ${}^{[L]}G^i$ суть локальные коэффициенты *канонического квазипотока* (пространства L^n) $\mathcal{S}$ на $T\mathcal{M}$:

$${}^{[L]}G^i(x,y) = \frac{1}{4}{}^{[L]}g^{ij}\big(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial x^k}y^k - \frac{\partial L}{\partial x^j}\big), \quad {}^{[L]}g^{ij} = ({}^{[L]}g_{ij})^{-1}. \tag{13}$$

Заметим, что для риманова пространства

$${}^{[L]}G^i(x,y) = (1/2)\Gamma^i_{jk}(x)(dx^k/d\tau)(dx^j/d\tau).$$

Канонический квазипоток определяет соответственно *каноническую N–связность* на касательном расслоении $T\mathcal{M}$ (согласно теореме 3.1 [37]):

$${}^{[L]}N^i_j = \frac{\partial{}^{[L]}G^i}{\partial y^j} = \frac{1}{4}\frac{\partial{}^{[L]}g^{ip}}{\partial y^j}\big(\frac{\partial^2 L}{\partial y^p \partial x^m}y^m - \frac{\partial L^2}{\partial x^p}\big) + \tag{14}$$

$$+\frac{1}{4}{}^{[L]}g^{ip}\big(2\frac{\partial{}^{[L]}g_{jp}}{\partial x^m}y^m - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^p}\big) + \frac{1}{4}{}^{[L]}g^{ip}\frac{\partial^2 L}{\partial y^p \partial x^j}.$$

Кинетическое уравнение для функции распределения $f(x,p)$ может быть получено из уравнений Гамильтона

$$m\frac{\delta x^i}{d\tau} = p^i, \qquad m\frac{\delta p_i}{d\tau} - {}^{[L]}\Gamma^k_{ij}p_k p^j = 0,$$

(поскольку на симплектическом многообразии гамильтонов фазовый поток сохраняется): $\{\mathcal{H}, f\} = 0$, где $\{\mathcal{H}, f\}$ — скобка Пуассона на кокасательном расслоении:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\delta x^i}{ds} = \frac{p^i}{m}, \quad -m\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}\right) = {}^{[L]}\Gamma^k_{ij} p_k p^j, \tag{15}$$

откуда искомое уравнение (для невзаимодействующих частиц в отсутствие внешних полей неметрического происхождения):

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\delta f}{\partial x^i}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}\right) = p^i \widehat{\mathcal{D}}_i f(x,p) = 0, \quad \widehat{\mathcal{D}}_i \equiv \frac{\delta}{\partial x^i} - {}^{[L]}\Gamma^m_{ij} p^j \frac{\partial}{\partial p^m}, \tag{16}$$

то есть

$$p^i \frac{\delta f}{\partial x^i} - {}^{[L]}\Gamma^j_{ik} p^i p^k \frac{\partial f}{\partial p^j} = 0. \tag{17}$$

Аналоги коэффициентов Кристоффеля в лагранжевой геометрии получаются тривиально, если учесть определения горизонтального лифта векторного поля $\partial/\partial x^i$ ($i = \overline{0, N-1}$):

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := (\frac{\partial}{\partial x^i})^H = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{18}$$

Таким образом, получаем для компонентов связности в лагранжевом пространстве

$${}^{[L]}\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{g^{mi}}{2}\left(\frac{{}^{[L]}g_{mj}}{\partial y^\ell} N^\ell_k + \frac{{}^{[L]}g_{km}}{\partial y^\ell} N^\ell_j - \frac{{}^{[L]}g_{jk}}{\partial y^\ell} N^\ell_m\right), \tag{19}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{mi}}{2}\left(\frac{{}^{[L]}g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{{}^{[L]}g_{km}}{\partial x^j} - \frac{{}^{[L]}g_{jk}}{\partial x^m}\right). \tag{20}$$

4. Связь динамики на многообразиях Вейля с лагранжевой геометрией

Полученные выше уравнения движения и кинетические уравнения для вейлевских и лагранжевых многообразий выглядят достаточно похожими друг на друга. Поэтому можно поставить вопрос об истолковании в терминах лагранжевой динамики величины метрического потенциала $\phi^{(1)}$ с целью идентификации его физического смысла.

Уравнения движения на многообразиях Вейля и в лагранжевом пространстве имеют форму (7) и (12) соответственно. Для установления соответствия между этими уравнениями необходимо рассмотреть соотношение

$$
{}^{[W]}\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\phi^{(1)}_j {}^{[R]}g^k_i = 2\frac{\partial^{2[L]}G^i(x,y)}{\partial y^j \partial y^k}, \tag{21}
$$

допускающее значительный произвол выбора канонического квазипотока для корректного определения метрического потенциала. Для римановой структуры потока ($2G^i_{,j,k}(x,y) = {}^{[R]}\Gamma^i_{jk}$) имеем тогда для $\phi^{(1)}$ систему уравнений ${}^{[R]}g^i_j\phi^{(1)}_k + {}^{[R]}g^i_k\phi^{(1)}_j - {}^{[R]}g_{jk}(\phi^{(1)})^i = {}^{[R]}g^k_i\phi^{(1)}_j$. Для квазипотока более общего вида с $2G^i_{,j,k}(x,y) = {}^{[L]}\Gamma^i_{jk}$ получаем

$$
\Gamma^i_{jk} - \frac{g^{mi}}{2}\left(\frac{{}^{[L]}g_{mj}}{\partial y^\ell}N^\ell_k + \frac{{}^{[L]}g_{km}}{\partial y^\ell}N^\ell_j - \frac{{}^{[L]}g_{jk}}{\partial y^\ell}N^\ell_m\right) = {}^{[W]}\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\phi^{(1)}_j {}^{[R]}g^k_i,
$$

где коэффициенты связности Γ^i_{jk} в последней формуле определены в (20). Мы вновь получили систему линейных уравнений для метрического потенциала.

Аналогично можно рассмотреть сравнение кинетических уравнений (10) и (17). Однако здесь имеет место определенная тонкость — дело в том, что уравнение Лиувилля для вейлевского многообразия является фактически самосогласованным (за счет определения коэффициента $\Pi(g)$). Тем не менее, структура уравнения переноса в обоих случаях является одной и той же, а если добавить в (17) член, учитывающий метрическое взаимодействие частиц в системе, то решения обоих упомянутых уравнений будут вести себя идентично. В частности, полагая $\phi^{(1)}$ параметром, мы получаем ветвление решений кинетического уравнения (типа Гаммерштейна) в окрестности критического значения $\phi^{(1)}_0 = 0$ (по всей видимости, существуют и другие точки бифуркации, определяемые нетривиальными $\phi^{(1)}$, и их следует интерпретировать как структурные масштабные переходы в системе частиц).

Таким образом, динамика частиц и кинетика многочастичных систем на многообразиях Вейля может рассматриваться как соответствующие динамика и кинетика систем с соответствующими лагранжианами. Тем самым, масштабная ковариантность величин должна рассматриваться не как экзотическая особенность теории Вейля, а как следствие применяемого математического формализма.

5. Заключение

В качестве заключения необходимо сказать следующее: лагранжева геометрия и механика систем на вейлевских многообразиях оказываются тесно связанными. Следствием этой связи является объединение мощного математического аппарата этих подходов, с помощью которых получаются весьма нетривиальные выводы, касающиеся, в частности, основ специальной и общей теории относительности (введение в рассмотрение наряду с преобразованием Лоренца также и преобразования Каратеодори, развитие теории обобщенной кривизны) и некоторых астрофизических задач (прохождение системой частиц горизонта событий черной дыры, коллапс и образование сингулярностей).

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН №28 “Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей” (В.М. Чечеткин) и гранта РФФИ № 16-02-00656-А (Н.Н. Фимин).

Список литературы

[1] *Cartan E.* Sur une generalisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces a torsion, Comptes Rendus (Paris), V.174, pp.593–595, 1922.

[2] *Cartan E.* Les espaces de Finsler, Hermann, Paris, 1934.

[3] *Finsler P.* Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen: Dissertation, Göttingen, 1918.

[4] *Finsler P.* Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Meusnier, Vierteljschr. natur. Ges. Zürich, V.85, pp.155–164, 1940.

[5] *Miron R., Anastaiei M.* The geometry of Lagrange spaces: theory and applications, Kluwer Academic Publishers, New York – Boston – London,

1994.

[6] *Miron, R.* The geometry of higher order Lagrange spaces: applications to mechanics and physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London, 1997.

[7] *Matsumoto M.* Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces, Kaisisha, Shingaken, 1986.

[8] *Bejancu A.* Finsler geometry and applications, Ellis Horwood, Chichester, England, 1990.

[9] *Szenthe J.* Symmetries of Lagrangian fields are homoteties in the homogeneous case, Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Applications, Brno, pp.321–328, 1996.

[10] *Vacaru S.* Interactions, strings and isotopies in higher order anisotropic superspaces, Hadronic Press, Palm Harbor, FL, USA, 1998.

[11] *Киржниц Д.А., Чечин В.А.* Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории, Ядерная физика, Т.15, вып. 5, сс. 1051–1059.

[12] *Khristiansen G.B.* Energy spectrum, chemical composition, anisotropy of primary C.R. with E $> 10^{12}$ eV, 20th International Cosmic Ray Conference, Proceedings, M., Nauka, pp.54–64, 1988.

[13] *Христиансен Г.Б.* Космические лучи сверхвысоких энергий, М., МГУ, 1984.

[14] *Лонгейр М.* Астрофизика высоких энергий, М., Мир, 1984.

[15] *Coleman S., Glashow S.L.* High–energy tests of Lorenz invariance // Phys. Rev. D, V. 59, p. 116008, 1999.

[16] *Stecker F.W., Scully S.T.* Lorenz invariance violation and the spectrum and source power of ultrahigh energy cosmic rays // Preprint astro-ph/0412495, Jan. 2005.

[17] *Amelino-Camelia G.* Testable scenario for relativity with minimumlength, Phys. Lett. B, V.510, p.255, 2001 (arXiv: hep-th/0012238).

[18] *Amelino-Camelia G., Piran T.* Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV-gamma paradoxes // Phys. Rev. D, V. 64, p.036005, 2001 (arXiv: astro-ph/0008107).

[19] *Lukierski J., Nowicki A.* Doubly Special Relativity versus κ–deformation of relativistic kinematics // arXiv: hep-th/0203065.

[20] *Lukierski J.* Proceedings of Quantum Group Symposium at Group 21, (July 1996, Goslar) Eds. H.-D. Doebner and V.K. Dobrev, Heron Press, Sofia, 1997, p. 173.

[21] *Kostelecky V.A., Potting R.* CPT, strings and meson factories // Phys. Rev. D, V.51, p.3923, 1995.

[22] *Lammerzahl C.* Special Relativity and Lorentz Invariance // Ann. Phys. (Leipzig) V.14, No.1-3, pp.71–102, 2005.

[23] *Luminet J.P., Weeks J., Riazielo A., Lehoucq R., Uzan J.P.* Dodecahedral space topology as an explanation for weak wise-angle temperature correlations in the cosmic microwave background // Nature, V.425, p.593, 2003.

[24] *Einstein A.* Geometrie und Erfahrung // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Bd. 5, S.123–130, 1921.

[25] *Einstein A.* Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begris des Fernparallelismus // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Bd. 17, S.217–221, 1928.

[26] *Einstein A.* Zur Theorie der Räume mit Riemann-Metrik und Fernparallelismus // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Bd. 6, S.1–2, 1930.

[27] *Hilbert D.* Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung) // Nachr. Koenigl. Gesellsch. Wiss. Goettingen, Math. Phys. Kl., S. 395–407, 1915.

[28] *Weyl H.* Reine Infinitesimalgeometrie (1918). – In: Weyl, H.: Ges. Ab. B. etc.: Spr., 1968, Bd. 2, S. 1-28.

[29] *Weyl H.* Gravitation und Electricitaet (1918). – In: Weyl, H.: Ges. Ab. B. etc.: Spr, 1968, Bd. 2, S. 29-42.

[30] *Weyl H.* Space, Time and Matter, London: Methuen, 1922.

[31] *Cartan E.* Sur les equations de structure des espaces generalises et l'Univers optique // C.R. Acad. Sci., V. 174, pp. 857–859, 1922.

[32] *Cartan E.* Sur les espaces generalises et la theorie de la relativite // C. R. Acad. Sci., V. 174, pp. 734–737, 1922.

[33] *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., V. 40, pp. 325–412, 1923.

[34] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля, М., Наука, 1988.

[35] *Eisenhart L.P.* Non–Riemannian geometry, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 8, 1927.

[36] *Canuto V., Adams P.J., Hsieh P.J., Tsiang E.* Scale–covariant theory of gravitation and astrophysical applications // Phys. Rev. D, V. 16, N 6, pp. 1643–1663, 1977.

[37] *Bucataru I.* Metric nonlinear connections // arXiv: math.DG/0412109, 2004.