ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 215 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.

Динамические свойства систем частиц в метрике Крускала-Шекереса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Динамические свойства систем частиц в метрике Крускала-Шекереса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 215. 17 с. doi:10.20948/prepr-2018-215
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-215

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ЧАСТИЦ В МЕТРИКЕ КРУСКАЛА–ШЕКЕРЕСА

Москва — 2018

Фимин Н.Н., Чечёткин В. М.

Динамические свойства систем частиц в метрике Крускала–Шекереса

Аннотация. Рассматриваются свойства динамики отдельной массивной частицы и системы массивных частиц в метрике Крускала, являющейся максимальным аналитическим расширением метрики Гильберта гравитирующей точки в вакууме. Показано, что при описании движения частиц в метрике Крускала возникают динамические особенности, которых не было при анализе движения в поле метрики Шварцшильда.

Ключевые слова: Лагранжиан, метрика Крускала–Шекереса, максимальное аналитическое расширение, особенности динамики, гессиан.

Fimin Nikolay Nikolaevich, Chechetkin Valery Mikhailovich

Dynamical properties of particle systems in Kruskal metric

Abstract. The properties of the dynamics of a single massive particle and a system of massive particles are considered in the Kruskal metric, which is the maximum analytic extension of the Hilbert metric to a gravitating point in a vacuum. It is shown that when describing the motion of particles in the Kruskal metric, dynamical features arise that were not in the analysis of motion in the Schwarzschild metric field.

Keywords: Lagrangian, Kruskal-Szekeres metric, maximal analytical extension, singularity of dynamics, Hessian.

Оглавление

1. Введение

В настоящее время в астрофизике черных дыр господствующей парадигмой является предположение о необходимости введения в рассмотрение "максимального аналитического расширения" Крускала–Шекереса [1]–[2] пространства–времени, соответствующего метрике Гильберта точечной массы (распространенное в литературе наименование данной метрики как "метрики Шварцшильда" с исторической точки зрения не вполне правомерно; кроме того — и что более важно — динамика частиц ненулевой массы в пространстве–времени с метриками, введенными Гильбертом [5] и Шварцшильдом [6], существенно отличается). При этом многие авторы утверждают, что метрика Крускала обладает глубоким физическим содержанием, позволяющим выявить новые по сравнению с описанием в терминах стандартных (гипер)сферических координат реально существующие свойства метрики черной дыры (в частности, описать существование "белых дыр", мостов Эйнштейна–Розена и др.).

Авторам настоящей работы представляется, что, помимо дифференциально–геометрического подхода к исследованию следствий решений уравнений Эйнштейна, разумно развивать также динамический подход, который основан на исследовании эволюции рассматриваемой системы в фазовом пространстве — а также, возможно, на кокасательном расслоении 2–го и более высоких порядков над многообразием с римановой метрикой (следует отметить, что впервые подобная методика анализа динамики в искривленном пространстве–времени была предложена А.А. Власовым в работе [7]). Авторы полагают, что современная астрофизика при создании моделей объектов и явлений, в частности, связанных с общей теорией относительности (ОТО), должна существенно учитывать их динамические свойства и выявлять, сообразуясь с таковыми, парадоксальные и неясные в интерпретации детали эволюции упомянутых моделей.

При этом методы математического моделирования играют, безусловно, ключевую роль, так как согласно общепринятому мнению в связи с существенной нелинейностью полевых уравнений аналитические оценки в ОТО возможны только для простейших модельных ситуаций. В действительности это не совсем так, даже более того — детальный анализ полуаналитических расчетов (в частности, выполненных методами компьютерной алгебры) в ряде случае существенно необходим для выявления свойств астрофизических объектов, атрибуты которых должны описываться с привлечением методов теории относительности.

В настоящей работе проводится детальный анализ рассматриваемых параллельно метрик Гильберта и Крускала на предмет выявления критических несоответствий при наблюдении за эволюцией материальной точки и совокупности массивных тел в гравитационном поле черной дыры. Будет показано, что для данных двух метрик описание движения отдельной частицы и системы частиц отличаются за счет присутствия критических точек динамики (точек остановки, поворота), причем данные точки — в отличие от особенностей дифференциально–геометрического типа, связанных со структурой собственно метрических тензоров, — имеют неустранимую природу. Таким образом, можно утверждать, что в некотором смысле рассматриваемые здесь метрики приводят к различным вариантам динамики частиц в гравитационном поле, и правомерность соответствующего выбора должна быть установлена путем анализа наблюдательных данных.

2. Преобразование пространства–времени Гильберта к форме Крускала

Метрика Гильберта в окрестности точечной массы M имеет вид (в единицах $G = c = 1$):

$$ds_H^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2, \quad d\Omega^2 \equiv \big(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\big). \quad (1)$$

Преобразование к новым координатам X, T по формулам

$$\left(\frac{r}{2M}-1\right)\exp\big(\frac{r}{2M}\big) = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{2M} = \ln\left|\frac{X+T}{X-T}\right|$$

дает метрику Крускала [8]:

$$ds_K^2 = \Phi(X,T)\big(-dT^2+dX^2\big) + r^2(X,T)d\Omega^2, \quad (2)$$

$$\Phi(X,T) \equiv \frac{32M^3}{r(X,T)} \exp\biggl(- \frac{r(X,T)}{2M} \biggr).$$

Данное преобразование неоднозначно, поскольку одним и тем же значениям координат (X,T) отвечают два набора функций от “исходных” (физически очевидных) координат (r,t):

$$T = \pm \Xi(r,t) \biggl(\exp\bigl(\frac{t}{2M}\bigr) - 1 \biggr), \quad X = \pm \Xi(r,t) \biggl(\exp\bigl(\frac{t}{2M}\bigr) + 1 \biggr), \qquad (3)$$

$$\Xi(r,t) \equiv \biggl(\frac{r \exp\bigl(r/(2M)\bigr) - 2M \exp\bigl(r/(2M)\bigr)}{8M \exp\bigl(t/(2M)\bigr)} \biggr)^{1/2}.$$

Функция $r(X,T)$ при дополнительном априорном требовании аналитичности на поверхностях $X = \pm T$ (т. е., в частности, при $r = 2M$) выражается через функцию Ламберта 0–го порядка: $r(X,T) = 2M + 2M \cdot W\bigl(0; (1/e) \cdot (X^2 - T^2)\bigr)$. При отказе от этого требования функция $r(X,T)$ не является вещественнозначной; следует учитывать, что условию $r > 0$ отвечает в новых координатах неравенство $X^2 - T^2 > -1$, а $W(0;\xi) \in \mathbb{R}^1$ только при $\xi \in (-1/e; +\infty)$. Для $X^2 - T^2 \in (-1,0)$ (при $0 < r < 2M$) существует вторая вещественнозначная форма выражения $r = r(X,T)$ через функцию $W(-1; (1/e)\cdot(X^2 - T^2))$, однако она не может быть аналитически продолжена в область $r \geq 2M$.

Для исследования кинематических и динамических свойств движения частиц в поле метрики Крускала нам потребуется набор значений коэффициентов Кристоффеля данной метрики. Их вычисление может быть произведено, например, посредством использования формул Дингля [9] (приводятся только неаннулирующиеся тождественно коэффициенты, с учетом симметрии по нижним индексам):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{XW(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)}, \quad \Gamma^1_{14} = \Gamma^1_{41} = \frac{-TW(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{XW(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)}, \; \Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{-2XW^2(0,\eta)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)\sin^2\theta},$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{1}{2} X(W(0,\eta)+1)\sin^2\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{XW(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{XW(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},\ \Gamma^2_{24} = \Gamma^2_{42} = \frac{-TW(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},$$

$$\Gamma^2_{44} = \frac{1}{8}\frac{(W(0,\eta)+1)^3(T^2-X^2)\sin 2\theta}{W(0,\eta)},\ \Gamma^4_{44} = \frac{2TW^2(0,\eta)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{-2XW(0,\eta)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},\ \Gamma^3_{34} = \Gamma^3_{43} = \frac{2TW(0,\eta)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},$$

$$\Gamma^4_{11} = \frac{4TW^2(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^5(T^2-X^2)^2\sin^2\theta},\ \Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{-2XW(0,\eta)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)},$$

$$\Gamma^4_{22} = -\frac{4TW^2(0,\eta)(W(0,\eta)+2)}{(W(0,\eta)+1)^5(T^2-X^2)^2\sin^2\theta}, \quad \Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = \mathrm{ctg}\theta,$$

$$\Gamma^4_{33} = \frac{-2TW^2(0,\eta)}{(W(0,\eta)+1)^2(T^2-X^2)\sin^2\theta}, \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}X(W(0,\eta)+1),$$

где $\eta \equiv (1/e)\cdot(X^2-T^2)$. Уравнения геодезических линий выписываются стандартным образом, однако специальный интерес они представляют в основном в окрестности биссектрис $X = \pm T$ на 2–мерном (X,T)–сечении общего пространства–времени с метрикой (2): их соответствующие решения могут быть использованы для постановки квазилокальных граничных условий вблизи горизонта событий при рассмотрении, в частности, задачи о динамике многочастичной системы в “физических” координатах $(\widetilde{x}_a)|_{a=1,\dots,4} = (r,\theta,\varphi,t)$. Поскольку $\lim_{X\to T} W(0,\eta)/(X^2-T^2) = 1/e$, то значения вышеприведенных коэффициентов Кристоффеля не являются особенными при $X \to \pm T$, и поэтому существуют C^2–гладкие решения $X(T)$ дифференциальных уравнений 2–го порядка (геодезического движения) $(x^i)_{TT} + \Gamma^i_{b\ell}(x^b)_T(x^\ell)_T = 0$ (данная форма уравнений может быть обобщена на случай вырождения динамики, см. ниже). Решения $x^i(T)$ $(X(T),\theta(T),\varphi(T))$ в окрестностях биссектрис (X,T)–плоскости (при $X(T) \pm T \to 0$) по теореме о неявной функции позволяют ввести для пробной частицы понятие “псевдоскорости” (нетензорного вида) в этих окрестностях:

$$(Q^K)^2 = \Phi(X,T)X_T^2 + \big(r(X,T)\big)^2(\theta_T^2 + \sin^2\theta\cdot\varphi_T^2), \quad (Q_0^K)^2 \equiv \lim_{X\to\pm T}(Q^K)^2.$$

При учете только одной X–компоненты получаем предел "радиальной" псевдоскорости $Q_0^K(\Omega_T=0)=4M\exp(-1/2)X_T|_{X\to\pm T}$. Выражение для псевдоускорения в крускаловских координатах введем аналогично гильбертовскому случаю:

$$G^K(\Omega_T=0)\equiv\frac{dQ^K}{dT}(\Omega_T=0)= \tag{4}$$

$$=\frac{4MTW\big(1/e\cdot(X^2-T^2)\big)^{3/2}\big(2+W\big(1/e\cdot(X^2-T^2)\big)\big)}{(X^2-T^2)^{1/2}(T^2-X^2)\big(1+W\big(1/e\cdot(X^2-T^2)\big)\big)^{5/2}}X_T+\sqrt{\Phi(X,T)}X_{TT}.$$

На горизонте в метрике Гильберта скорость $Q^H(\Omega_T=0)$ и ускорение $G^H(\Omega_T=0)$ аннулируются. Что происходит в метрике Крускала? Поскольку, как будет видно из дальнейшего, в определениях величин X_T и X_{TT} задействована (как независимая переменная) гильбертовская скорость, для единообразности представления необходимо получить искомые значения в терминах "старых" координат. Для этого, используя формулы перехода (3), выразим квазирадиальную псевдоскорость частицы в метрике Крускала через радиальную скорость частицы в физических координатах dr/dt:

$$\frac{dX}{dT}=\frac{X_rdr+X_tdt}{T_rdr+T_tdt}=-\Bigg(\exp\Big(\frac{t+r}{2M}\Big)(vr+r-2M)+\exp\Big(\frac{r}{2M}\Big)(vr-r+2M)\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\exp\Big(\frac{t+r}{2M}\Big)(-vr-r+2M)+\exp\Big(\frac{r}{2M}\Big)(vr-r+2M)\Bigg)^{-1},\quad v\equiv\frac{dr}{dt}. \tag{5}$$

Очевидно, можно получить и обратное соотношение $v=v(X,T;X_T)$, выражая $X_r,...,T_t$ через переменные X,T:

$$v=\frac{X_TT_t-X_t}{X_r-X_TT_r}=\frac{W\big(1/e(X^2-T^2)\big)(T-XX_T)}{\big(W\big(1/e(X^2-T^2)\big)+1\big)(X_TT-X)},\quad \lim_{X\to T}v(X,T;X_T)=0.$$

"Формальная точка остановки" квазирадиального ($\Omega_T\equiv0$) движения частицы в крускаловской системе координат характеризуется условием $Q^K\to0$. Величина $\Phi\neq0$ (всюду в интересной для анализа области); числитель выражения для X_T равен нулю при

$$r=r_s(v,t)\equiv2M\big(\exp(t/[2M])-1\big)/\big(v+\exp(t/[2M])+v\exp(t/[2M])-1\big).$$

При $v=0$ (остановка частицы в координатах Гильберта) получаем $r_s(0,t) = 2M$. Однако в этом случае в правой части выражения (5) возникает неопределенность типа $0/0$; ее регуляризация (по переменным r и v последовательно) дает $X_T \neq 0$ при $r > -2M$. То есть, “остановка” в крускаловских координатах возможна только при $v \neq 0$!

Формальная сингуляризация ($X_T \to \infty$) происходит при

$$r = r_\infty = 2M\big(\exp(t/[2M]) + 1\big)/\big(-v + \exp(t/[2M]) + v\exp(t/[2M]) + 1\big).$$

При этом должно выполняться условие $v \neq 0$ (иначе мы вновь получаем вышеуказанную неопределенность). Определим значение X_T при $r \to 2M$ (горизонт событий Гильберта): $\lim_{X\to T} X_T = \big(\exp(t/[2M]) - 1\big)/\big(\exp(t/[2M]) + 1\big)$ $(\forall v)$, откуда с учетом формулы перехода $t/(2M) = \ln\big((X+T)/(X-T)\big)$ получаем, что $\lim_{X\to T} X_T = \lim_{X\to T} T/X = 1$; при этом, как легко можно видеть из (5) (приравнивая правую часть единице), имеем $v \to v_s = 1 - 2M/r \xrightarrow[r\to 2M]{} 0$ (что согласуется с известной асимптотикой $Q^H = (1-2M/r)^{-1/2} v \xrightarrow[r\to 2M]{} 0$). Скорость в координатах Крускала полностью самосогласованно определяется в (X,T)–координатах при условии фиксации скорости в координатах Гильберта (локальной — в конкретной точке пространства–времени, или при априорной известности поведения функции $v = v(r,t)$, причем в качестве “внутренних” координат, безусловно, может быть задействована произвольная система отсчета, не только гильбертовская). В принципе, можно рассмотреть вопрос об экстремумах функции $X_T(r,t|v)$, для чего перейдем к следующему этапу анализа крускаловской динамики.

Весьма существенную роль в динамике частицы в окрестности горизонта должно играть значение псевдоускорения $G^K(\Omega_T = 0)$, представляющего комбинацию X_T и X_{TT} с функциональными множителями. Для детального выявления физических характеристик движения частиц в крускаловском пространстве–времени нам необходимо установить связь не только геометрических координат, но и динамических переменных в обеих сравниваемых здесь метриках. Поэтому рассмотрим свойства пары слагаемых в выражении (4) для G^K. Неизвестным до сих пор оставалось лишь поведение величины

$X_{TT}(r,t|v)$. Приведем ее явное значение:

$$X_{TT} = \Big(-\mathrm{e}^{1/2\,\frac{3r-z}{M}} r^3\sqrt{2}v + \mathrm{e}^{1/2\,\frac{3r+z}{M}} r^3\sqrt{2}v - 8\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r-z}{M}} M^{3/2}\sqrt{2\,M-r}r +$$
$$+2\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r+z}{M}} v^2\sqrt{2\,M-r}\sqrt{M}r^2 - 16\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r+z}{M}} v^2 M^{5/2}\sqrt{2\,M-r} +$$
$$+8\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r+z}{M}} M^{5/2}\sqrt{2\,M-r} + 4\,\mathrm{e}^{1/2\,\frac{3r+z}{M}} r\sqrt{2}vM^2 - 4\,\mathrm{e}^{1/2\,\frac{3r+z}{M}} r^2 \times$$
$$\times\sqrt{2}vM - 8\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r+z}{M}} M^{3/2}\sqrt{2\,M-r}r + 2\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r-z}{M}} v^2\sqrt{2\,M-r}\sqrt{M}r^2 - 4\times$$
$$\times\mathrm{e}^{1/2\,\frac{3r-z}{M}} r\sqrt{2}vM^2 + 4\,\mathrm{e}^{1/2\,\frac{3r-z}{M}} r^2\sqrt{2}vM + 2\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r-z}{M}}\sqrt{2\,M-r}\times$$
$$\times\sqrt{M}r^2 - 16\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r-z}{M}} v^2 M^{5/2}\sqrt{2\,M-r} + 8\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r-z}{M}} M^{5/2}\sqrt{2\,M-r} +$$
$$+2\,i\mathrm{e}^{1/4\,\frac{5r+z}{M}}\sqrt{2\,M-r}\sqrt{M}r^2\Big)\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2\,\frac{r-z}{M}} \times \Big(\big(r-2M\big)\big(-v\mathrm{e}^{1/2\,\frac{r+z}{M}} r +$$
$$+v\mathrm{e}^{1/2\,\frac{r}{M}} r + 2\,\mathrm{e}^{1/2\,\frac{r+z}{M}} M - \mathrm{e}^{1/2\,\frac{r+z}{M}} r + 2\,\mathrm{e}^{1/2\,\frac{r}{M}} M - \mathrm{e}^{1/2\,\frac{r}{M}} r\big)^2\Big)^{-1}.$$

Простой анализ возможности аннуляции и наличия особенностей полученного выражения приводит к следующим заключениям: сингулярными точками (нулями знаменателя) являются

$$r = r_{\infty;1} = 2M,$$

$$r = r_{\infty;2} = \frac{2M\big(1+\exp(t/[2M])\big)}{1+\exp(t/[2M]) - v + v\exp(t/[2M])}$$

(при $v \to 0$ оба выражения совпадают); обращение в нуль числителя ускорения происходит при $r = r_{0;1} = 2M$. Однако непосредственный интерес представляет лишь анализ особых точек G^K, каковой дает следующее: $G^K(\Omega_T = 0) \to \infty$ при $r = 2\pi i M$, $G^K(\Omega_T = 0) \to 0$ при $r = r_{0;1} = 2M$ и $r = r_{0;2} = 2M \cdot \mathfrak{F}(X,T;t)$, где величина $\mathfrak{F}(X,T;t) \gtrless 0$ (явный вид не приводим из–за чрезмерной громоздкости) имеет сингулярности при $X = \pm T$ и $X = \pm e^{-2}\sqrt{T^2e^4 - 2e^3}$. Отсюда можно, в принципе, получить экстремумы скорости радиального движения частицы.

Рассмотрим вопрос о динамике частиц, используя аппарат лагранжевой и гамильтоновой геометрии.

3. Лагранжев и гамильтонов формализм для движения частиц в метрике Крускала

Динамика частицы в лагранжевом формализме определяется вариацией действия с интегральным ядром, представляющим собой кинетический потенциал данной частицы в рассматриваемой метрике: $\delta S = \int \big(\partial L_K/\partial x^i - d(\partial L_K/\partial x^i_\lambda)/d\lambda\big)\delta x^i d\lambda$. Лагранжева плотность для частицы массы m в метрике Крускала имеет следующий вид:

$$L = L_K \equiv \sqrt{m\Phi(X,T)\big(-T_\lambda^2 + X_\lambda^2\big) + mr^2(X,T)\big(\theta_\lambda^2 + \sin^2\theta\cdot\varphi_\lambda^2\big)},$$

где нижний индекс λ означает дифференцирование по аффинному параметру. Выберем параметризацию вдоль геодезической посредством введения собственного времени частицы: $\tau \propto \lambda$ (согласно общему определению $ds^2 = g_{ab}x^a x^b = c^2 d\tau^2$, $(x^a)\big|_{a=\overline{1,4}} = (X,\theta,\varphi,T)$), приведем существенные компоненты гессиана $\mathrm{Hess}(L)_\tau = \partial^2 L/\partial x^a_\tau \partial x^b_\tau$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X_\tau \partial X_\tau} = -m^2\Phi^2(X,T)(X_\tau)^2 L^{-3} + m\Phi(X,T)L^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T_\tau \partial T_\tau} = -m^2\Phi^2(X,T)(T_\tau)^2 L^{-3} - m\Phi(X,T)L^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^b_\tau \partial x^b_\tau}\bigg|_{b=2,3} = -m^2 r^4 \psi_{b,1} L^{-3} + mr^2\psi_{b,2}L^{-1} \equiv f_{bb}(X,T;\, x^b_\tau)\big|_{b=2,3},$$

$$\psi_{2,1} = \theta_\tau^2,\ \psi_{2,2} = 1;\quad \psi_{3,1} = \sin^4\theta\cdot\varphi_\tau^2,\ \psi_{3,2} = \sin^2\theta;\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^a_\tau \partial x^b_\tau}\bigg|_{a\neq b} = 0.$$

В сопутствующей системе отсчета детерминант гессиана $\det\mathrm{Hess}(L)$ определяется произведением его диагональных компонент, так что особенности динамики (при квазирадиальном движении, $\Omega_\tau \equiv 0$) частицы определяются возможностью обращения в нуль сомножителей (X_τ, f_{bb}, L) в правой части.

Если полагать $\lambda = T$ (или произвольной допустимой функцией переменной $\lambda = \lambda(T)$), то лагранжиан становится неавтономным, и уравнения Эйлера–Лагранжа принимают следующий вид:

$$2\mathrm{Hess}(L)_T\cdot\frac{d^2x^j}{dT^2} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i_T}x^j_T - \frac{\partial^2 L}{\partial T \partial x^i_T},\qquad \mathrm{Hess}(L)_T \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x^i_T \partial x^j_T}.$$

Левая часть выражения с ускорением заведомо не сингулярна только при $i = j$ (внедиагональные компоненты гессиана равны нулю). Однако, в соответствии с вышеизложенным, сомножитель при ускорении (при квазирадиальном движении) все же имеет особенности при $X_T = 0$ (при этом имеем сложную зависимость между r, dr/dt, t, приведенную в п. 2) и $X_T = \pm 1 (= \pm T_T)$: динамика частицы при этом вырождается.

В наиболее общем случае необходимо выявить связь параметра λ/длины интервала s и времени T путем решения системы уравнений характеристик: при описании эволюции многочастичной системы существенна величина $ds_j/dT = c/V_j^4$, V^4 — "временная" компонента 4–скорости j–ой частицы.

Переход к гамильтонову виду описания динамики может быть произведен формальным путем определения канонического псевдоимпульса и преобразования Лежандра для функции Гамильтона $H(\{x^a\},\{P_a\})$ ("нестационарной", т. к. она зависит от $x^4 = T$):

$$P_a = \frac{\partial L_K}{\partial x^a_\tau}, \quad H(\{x^a\},\{P_a\}) = P_a x^a_\tau(\{P_a\}) - L_K\big(\{x^a\}, x^a_\tau(\{P_a\})\big). \qquad (6)$$

При данном преобразовании возникает новый тип особенности динамики, связанный с переходом к описанию на кокасательном расслоении над крускаловским многообразием, характер которой очевиден из следующего явного представления псевдоскорости через псевдоимпульс: $X_\tau = \pm P_1\sqrt{(P_1^2 - m\Phi)\Phi(\Phi T_\tau^2 - r^2[\theta_\tau^2 + \sin^2\theta\cdot\varphi_\tau^2])}(m\Phi^2 - P_1^2\Phi)^{-1}$ (следующего из первой формулы (6)); аналогичные представления справедливы также для $a = \overline{2,4}$. Канонические уравнения Гамильтона в исследуемом случае формально принимают следующий вид:

$$X_\tau = \frac{\partial H}{\partial P_1} = \frac{\pm P_1\sqrt{r^2[\theta_\tau^2(P_a) + \sin^2\theta\cdot\varphi_\tau^2(P_a)] - \Phi T_\tau^2(P_a)}}{m\Phi^2 - P_1^2\Phi},$$

$$(P_1)_\tau = -\frac{\partial H}{\partial X} = \big(2(m\Phi - P_1^2)^{3/2}\sqrt{\Phi}\sqrt{-\Phi T_\tau^2(P_a) + r^2\Omega_\tau^2(P_a)}\big)^{-1}\times$$
$$\times\big(m\big(-\Phi_X P_1^2\Omega_\tau^2(P_a) r^2(X,T) + 2\Phi_X P_1^2\Phi T_\tau^2(P_a) -$$
$$-m\Phi_X\Phi^2 T_\tau^2 - 2\Phi\Omega_\tau^2 r r_X P_1^2 + 2\Omega_\tau^2 r r_X m\Phi^2\big)\big), \quad \text{и аналогично для } a = 2,3,4.$$

Для расчетов эти уравнения целесообразно представить в 3–мерной форме (для пространственных компонент импульсов, см. п. 4).

Представляет интерес рассмотрение возможности в крускаловской системе координат рассмотреть "обращение" динамики $X_T \to -X_T$ при наличии внешней силы $\mathbf{F}_{ext}$ (дополнительное слагаемое в правой части (6)), действующей на частицу. В этом случае уравнение Эйлера–Лагранжа и уравнения Гамильтона допускают движения, в частности, из квадранта II в квадрант I (т. е. "из–под горизонта событий", не переходя в "белую дыру") без возникновения каких–либо парадоксальных проблем в динамике (в отличие от случая метрики Гильберта, в которой на горизонте происходит переход к нестационарной форме, и "радиальное" движение в подгоризонтной области физически возможно только "в направлении истинной сингулярности"). Интерпретация движения такого рода в гильбертовских координатах, очевидно, противоречит самой концепции "черной дыры".

4. Многочастичная динамика в метрике Крускала

Ситуация определенно усложняется, если мы переходим от одной частицы к системе N частиц. В этом случае необходимо учитывать, что движение каждой частицы происходит в своем собственном времени $\tau_{A=\overline{1,N}}$, причем реализация синхронизации собственных времен в общем случае не представляется возможной [11]–[13]. Поэтому для описания эволюции N–частичной системы необходимо либо решать мультивременную систему уравнений динамики (иначе, соответствующий набор кинетических уравнений для многовременных функций распределения), либо ограничиться выделенным "одновременным" описанием (например, по времени наблюдателя в ЛСО). Безусловно, последний подход требует специальной верификации, однако его можно принять в качестве априори возможного (т. е. в некотором смысле существенно огрубляя ситуацию с неизбежной потерей учета ряда нелинейных эффектов), опираясь на использование гидродинамического (одновременного по свой сути) приближения для релятивистских систем типа Эккарта или Ландау–Лифшица [11]. При этом, помимо прочего, необходимо учитывать возможность возникновения особенностей в преобразованиях Лежандра, являющихся переходным этапом к гамильтонову описанию.

Рассмотрим движение системы N частиц массами m_A во внешнем гравитационном поле. Их динамику следует описывать, исходя из принципа Гамильтона: $\delta\int_{t_1}^{t_2} L^{[N]}d\lambda=0$, $L^{[N]}=\sum_A m_A(ds/d\lambda)_A$ — лагранжева плотность кинетического потенциала (лагранжиан) действия для N–частичной системы (ds_A — локальный элемент общерелятивистского интервала для A–ой частицы).

Лагранжиан многочастичной системы для исследуемого в настоящей работе случая может быть записан в следующем виде:

$$L^{[N]}{}_K=-\sum_A m_A c\big(g_{\alpha\beta}(x_A)^\alpha_\lambda(x_A)^\alpha_\lambda\big)^{1/2}=-\sum_A m_A c^2\big(g_{00}+g_{ii}c^{-2}(x_A)^i_\lambda(x_A)^i_\lambda\big)^{1/2}, \tag{7}$$

$$(x_A)^k_\lambda\equiv\frac{dx^k_A}{d\lambda}=v^k_A\big|_{\lambda=T},\quad \alpha,\beta,...=0,1,2,3;\quad i,j,k,...=1,2,3.$$

Определим 3–импульсы стандартным образом:

$$(P_A)_i=\frac{\partial L^{[N]}_K}{\partial(x_A)^i_T}=-\widetilde{m}_A g_{ii}v^i_A,\quad \widetilde{m}_A=m_A\big(g_{00}+g_{jj}c^{-2}(x_A)^j_T(x_A)^j_T\big)^{-1/2},$$

$$g_{00}=-\Phi(X,T),\quad g_{11}=\Phi(X,T),\quad g_{22}=r^2(X,T),\quad g_{33}=r^2(X,T)\sin^2\theta.$$

Мы обращаемся к разделенному "пространственно–временному" описанию, поскольку компоненты 4–импульса любой частицы не являются независимыми: движение частицы m происходит на фазовой поверхности "массового гиперболоида" [14], что эквивалентно ограничению $g^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta=m^2c^2$.

Обратимся к отысканию зависимости $v^i_A=v^i_A(\{P_k\})$. Из вышеприведенного определения 3–импульса имеем:

$$v^i_A\big((P_1)_A,(P_2)_A,(P_3)_A\big)=\pm\frac{(P_i)_A c}{g_{ii}}\big(-\Phi^2(X,T)r^4(X,T)\sin^2\theta\big)^{1/2}\times$$

$$\big(-(P_3)^2_A\Phi r^2-(P_1)^2_A r^4\sin^2\theta-(P_2)^2_A\Phi r^2\sin^2\theta+m^4_A c^2\Phi r^4\sin^2\theta\big)^{-1/2}.$$

Введем посредством преобразования Лежандра функцию Гамильтона системы:

$$H^{[N]}{}_K\equiv\sum_A(H_A)_K=\sum_A(P_A)_i v^i_A-L^{[N]}{}_K,\quad (H_A)_K=$$

$$= \frac{-((P_3)^2_A\Phi r^2 + (P_1)^2_A r^4\sin^2\theta + (P_2)^2_A\Phi r^2\sin^2\theta - m^3_A c^2\Phi r^4\sin^2\theta)c\sqrt{-\Phi}}{\sqrt{-(P_3)^2_A\Phi r^2 - (P_1)^2_A r^4\sin^2\theta - (P_2)^2_A\Phi r^2\sin^2\theta + m^4_A c^2\Phi r^4\sin^2\theta}\sqrt{\Phi r^4\sin^2\theta}}.$$

Таким образом, выписывая канонические уравнения для парциальной гамильтоновой функции $(H_A)_K$ и вводя парциальную функцию распределения $f_A(x^i, P_i, T)$ (полная функция распределения $f(x^i, P_i, T) = \sum_A f_A(x^i, P_i, T)$),

$$\frac{d}{dT}(x^i)_A = \frac{\partial(H_A)_K}{\partial(P_i)_A}, \quad \frac{d}{dT}(P_i)_A = -\frac{\partial(H_A)_K}{\partial(x^i)_A},$$

мы формируем скобку Пуассона $[(H_A)_K, f_A] \equiv (\partial(H_A)_K/\partial(P_i)_A)(\partial f_A/\partial(x^i)_A) - (\partial f_A/\partial(P_i)_A)(\partial(H_A)_K/\partial(x^i)_A)$. Формально ввести уравнение Лиувилля для переноса частиц в метрике Крускала можно, приравняв отрицательное изменение функции распределения по "временной" координате введенному коммутатору: $\partial f_A/\partial T + [(H_A)_K, f_A] = 0$.

Однако при этом встает ранее упомянутый вопрос о правомерности использования "одновременного" приближения в описании эволюции многочастичной системы. Простейшим способом снять этот вопрос является переход к постгалилеевскому уровню описания динамики (в нем правомерно использование "единого" для всей системы времени). Компоненты фундаментального метрического тензора в этом случае примут следующий вид:

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad g_{ij}\Big|_{i,j=1,2,3} = -\delta_{ij}\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\Bigg|_{i,j=1,2,3}, \quad g_{0j}\Big|_{j>0} = -4c^{-2}U_{[j]}\Big|_{j>0},$$

где: $U(\mathbf{x}) = -\gamma\sum_A m_A/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A|$ ($\mathbf{x}_A$ — радиус–вектор A–ой частицы), величина $U_{[\mu]}$ удовлетворяет уравнению $\Delta U_{[j]} = 4\pi\gamma\rho v_j$, v_j — пространственные компоненты 4–скорости массивных частиц, ρ — их плотность. Подстановка компонент метрического тензора в данной форме в выражение (7) для L_K дает его 1-ое постньютоновское приближение (мы сразу заменяем величины $\mathbf{v}^2_A$ и $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_A$ через их значения в крускаловской системе координат):

$$L_K^{(1pN.)} = \frac{1}{2}\sum_A\left(m_A(\mathbf{v}(X,T,\theta,\varphi))^2_A + \sum_B{}' \frac{\gamma m_A m_B}{|\mathbf{x}_A(X,T,\theta,\varphi) - \mathbf{x}_B(X,T,\theta,\varphi)|}\right).$$

Построение соответствующей динамики (сопряженных к крускаловским координатам импульсов, функции Гамильтона, скобок Пуассона) не представляет теперь принципиальных трудностей.

5. Заключение

Введение в рассмотрение метрики Крускала является классическим примером создания "дополненной реальности", физическая обоснованность которой, по–видимому, не может быть установлена в сколь–нибудь обозримом будущем. Построение "многомировых интерпретаций" реального пространства–времени на основе различных дифференциально–геометрических моделей следует рассматривать только как методические упражнения. Подтверждение существования теоретически возможных концепций и объектов невозможно. Однако, помимо экспериментальной проверки умопостроений о структуре пространства–времени, существует еще один подход, на который следует обратить внимание. Сущность этого подхода — исследование не только геометрических/топологических свойств получаемого решения некоторой астрофизической или космологической задачи, но также и анализ динамических свойств соответствующих систем, приводящий к выявлению нефизической структуры предложенной модели: свойства системы и ее эволюция в фазовом пространстве тесно связаны, и поэтому рассмотрение ее динамики может в ряде случаев без дорогостоящих экспериментов дать ответ о реализуемости в действительности данной модели.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН №28 "Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей" (Н.Н. Фимин) и гранта РФФИ № 16-02-00656-А (В.М. Чечеткин).

Список литературы

[1] *Kruskal M.D.* Maximal extension of Schwarzschild metric // Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 1743.

[2] *Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.* Gravitation. – San Francisco: W.H. Freeman & Comp. 1973.

[3] *Abrams L.S.* Black holes: the legacy of Hilbert's error // Can. J. Phys. 1989. V. 67. P. 919.

[4] *Crothers S.J.* Gravitation on a spherical symmetric metric manifold // Progr. in Physics. 2007. V. 2. P. 68.

[5] *Hilbert D.* Gravitationsfield eines Massenpunktes // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 1917, V. 53. (submitted 23 Dec. 1916).

[6] *Schwarzschild K.* Über das Gravitationsfield eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.–Math. Klasse, 1916, P. 189–196.

[7] *Власов А.А.* Статистические функции распределения. – М.: Наука, 1966.

[8] *Wald R.M.* General relativity. – Chicago and London: The University of Chicago Press, 1984.

[9] *McVittie G.C.* General relativity and cosmology. – London: Chapman and Hall Ltd, 1956.

[10] *Ryder L.* Introduction to general relativity. – N.Y.: Cambridge University Press, 2009.

[11] *De Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch.G.* Relativistic kinetic theory: principles and applications. – Amsterdam – New York: Elsevier North–Holland, 1980.

[12] *Gaida R.P., Tretyak V.I.* Single–time form of the Fokker–type relativistic dynamics // Acta Phys. Polon. Ser. B. 1980. V. 11. № 7, P. 509–522.

[13] *Чечеткин В.М., Дьяченко В.Ф., Гинзбург С.Л., Орлов Ю.Н., Фимин Н.Н.* Моделирование динамики бесстолкновительной ультрарелятивистской электрон–протонной плазмы в самосогласованном электромагнитном поле // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1635–1644.

[14] *Choquet–Bruhat Y.* General relativity and Einstein's equations. – Oxford – New York: Oxford University Press, 2009.