



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гоо Пэн, Ивашкин В.В.

Оценка точности
определения параметров
движения нелинейной
динамической системы по
результатам измерений при
наличии мешающих
параметров

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гоо Пэн, Ивашкин В.В. Оценка точности определения параметров движения нелинейной динамической системы по результатам измерений при наличии мешающих параметров // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 213. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2018-213](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-213)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-213>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

П. Гуо, В.В. Ивашкин

**Оценка точности определения параметров
движения нелинейной динамической
системы по результатам измерений
при наличии мешающих параметров**

Москва — 2018

П. Гуо, В.В. Ивашкин

Оценка точности определения параметров движения нелинейной динамической системы по результатам измерений при наличии мешающих параметров

Рассмотрены алгоритмы решения задач определения параметров движения нелинейной динамической системы по результатам измерений и анализа точности оценивания и прогнозирования движения при наличии мешающих факторов. Предполагается, что существуют не только ошибки в измерениях, но также и априорная информация о начальном состоянии системы, а также мешающие параметры, включающие неточно известные параметры модели движения динамической системы и модели измерительной системы, в частности систематические ошибки измерений. В постановке задачи полагаем, что вероятностные характеристики этих факторов и ошибок измерений известны, причем они имеют нормальное распределение с заданными математическими ожиданиями и ковариационными матрицами. Построенный алгоритм применяется для анализа характеристик навигации комплекса «Небосвод».

Ключевые слова: алгоритм оценивания параметров системы, точность оценивания, мешающие факторы, априорная информация, ошибка модели, ошибки измерений

Peng Guo, Vyacheslav Vasilievich Ivashkin

Accuracy estimation for determining the motion parameters of a nonlinear dynamical system using measurement results in the presence of interfering parameters

We consider algorithms for solving the problems of determining the motion parameters of a nonlinear dynamical system using measurement results and the accuracy of estimating these parameters in the presence of interfering factors. It is assumed that there are not only random errors in the measurements, but also a priori information about the initial state of the system, as well as interfering parameters including not exactly known parameters of the dynamic system model and the measurement system model, in particular, systematic errors in the measurements. In the problem statement, we consider that the probabilistic characteristics of these factors and measurement errors are accurately known, and they have normal distributions with given mean values and covariance matrices. The constructed algorithm is used to analyze the navigation characteristics of the “Nebosvod” system.

Keywords: system’s parameters estimation algorithm, estimation accuracy, interfering factors, a priori information, model error, measurement errors

1. Постановка задачи

Основными задачами космической навигации являются определение параметров орбиты по результатам измерений и точностей, с которыми эти параметры находятся, а также прогнозирование движения.

При классической постановке задачи обработки измерений считается, что известны вероятностные характеристики всех возможных ошибок. Для решения данного круга задач часто применяются две группы методов обработки навигационных измерений. К методам первой группы – *статической фильтрации* [19] – относятся метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, метод наименьших модулей и др., для них требуется полный объем информации. Совместной обработкой информации находится оценка состояния на фиксируемый момент времени. А методы второй группы используют при оценке промежуточного вектора состояния неполный объем информации. К ним относятся методы *динамической фильтрации*, например фильтр Калмана и др. [3, 13–23].

Другое направление развития методов обработки измерений используется в случае неклассической постановки задачи, когда считается, что неизвестны точные значения вероятностных характеристик ошибок, лишь заданы их гарантированные значения, а корреляция между ошибками измерений может быть произвольной. Для данного случая следует отметить работы [3, 4, 8, 11, 12, 19] и др. В них изложены, в частности, минимаксное оценивание или гарантированное оценивание на основе метода линейного программирования [12]. Главной целью здесь является разработка эффективных способов обработки навигационных измерений, применяемых к реальному случаю. И эти методы, в принципе, позволяют получить более надежные оценки точности.

В связи с этим заметим, что в большинстве случаев при решении прикладных задач на полученные результаты оценивания влияют не только ошибки измерений, но и некоторые связанные с измерениями или с моделью движения системы плохо известные параметры. Такие параметры часто называют *мешающими*, имея в виду, что они «мешают» измерениям, и целесообразно задачу навигации при учете влияния этих мешающих параметров рассматривать *расширенной* [3, 18, 19]. Мы так же будем поступать.

Одним из основных источников возникновения ошибок мешающих параметров являются ошибки знания параметров измерительной системы. Например, при обработке навигационных измерений с борта космического аппарата (КА) может возникать необходимость учета ошибок параметров движения КА во время наблюдений, которые непосредственно влияют на расчет измеряемых параметров. Можно считать и систематические ошибки измерений мешающими параметрами. Кроме того, из-за недостаточности априорных сведений о параметрах математической модели, описывающей движение системы, принятая модель всегда отличается от реальной, в силу чего результаты, безусловно, будут ухудшаться. Эти плохо известные параметры в

модели системы тоже могут рассматриваться как мешающие.

С другой стороны, для анализа часто используется и априорная информация (а.и.) в виде совокупности ожидаемых (номинальных начальных) значений параметров движения системы и их ошибок. Эта информация, наоборот, может привести к улучшению полученных результатов обработки измерений.

Влияние этих упомянутых мешающих факторов на результаты и точность оценивания необходимо учитывать. В силу указанных обстоятельств особенное внимание в данной работе уделяется построению эффективных алгоритмов обработки измерений и анализу точности оценивания искомым параметров динамической системы при наличии мешающих факторов, в том числе ошибок в модели движения исследуемой системы и ошибок в модели измерительной системы, учитывается также априорная информация о начальном состоянии динамической системы. Предполагаем, что известны вероятностные характеристики всех ошибок, а также априорной информации.

Данные задачи можно, следуя [18, 19, 23], свести к следующей общей классической постановке задачи оценивания. Полагаем, что модели динамической системы и наблюдений являются нелинейными. При этом представляем модель реального движения системы с помощью системы дифференциальных уравнений (ДУ) в векторном виде:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, t), \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор состояния системы на момент времени t , $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, t)$ – непрерывная вектор-функция, \mathbf{C} – истинный вектор неточно известных параметров динамической системы размерности m , $\mathbf{C} \in \Omega_C$; $\Omega_C \subset \mathbb{R}^m$ – заданная в \mathbb{R}^m априорная область существования вектора параметров \mathbf{C} , \mathbf{X}_0 – начальный вектор состояния в момент времени t_0 .

Модель наблюдений. С помощью измеряемой функции описывается соотношение между измеряемыми параметрами Ψ , параметрами движения динамической системы \mathbf{X} и параметрами состояния измерительной системы \mathbf{Z} на текущий момент времени t . Измеряемую функцию можно записать в виде:

$$\Psi(t) = \Psi(\mathbf{X}(t), \mathbf{Z}(t)), \quad (1.2)$$

где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p)^T \in \mathbb{R}^p$ – p -мерный вектор-столбец измерений, верхний индекс T здесь и в дальнейшем означает транспонирование;

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{Z}^{(2)}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{Z}^{(1)}$ – вектор малой размерности $q^{(1)}$, например, за счет систематических ошибок измерений, $\mathbf{Z}^{(2)}$ – вектор большой размерности $q^{(2)}$ параметров измерительной системы, меняющихся от времени, например, ошибки знания координат телескопа комплекса «Небосвод» в момент измерений t_k ($k=1, \dots, N$).

Для системы «Небосвод» [6, 10] измерениями Ψ будут прямое восхождение

и склонение линии визирования астероида с борта КА. Определяется орбита астероида, вектор X есть вектор состояния астероида. В качестве вектора C неточно известных параметров в модели движения астероида рассмотрены средний радиус, масса и альbedo астероида, влияющие на давление солнечного света. Основное описание алгоритма дано для случая $Z = Z^{(2)}$. Случай $Z = Z^{(1)} + Z^{(2)}$ описан ниже в п. 2.4–2.6 для учета систематических ошибок.

Вектор фактических наблюдений в моменты времени t_k обозначается через $\bar{\Psi}_k$, соответственно, имеем модель измерения:

$$\bar{\Psi}_k = \Psi(X_k, Z_k) + \mathbf{v}_k, \quad (1.4)$$

где $\bar{\Psi}_k = \bar{\Psi}(t_k)$, $X_k = X(t_k)$, $Z_k = Z(t_k)$; \mathbf{v}_k – p -мерный вектор ошибок измерений, т.е. разность измеряемых и истинных значений (1.4).

Предполагаем, что на каждый момент времени измерения t_k априорно известны параметры \bar{Z}_k состояния измерительной системы, которые отклоняются от их истинных значений Z_k на ошибки ζ_{zk} . Эти параметры будем рассматривать как мешающие:

$$\bar{Z}_k = Z_k + \zeta_{zk}. \quad (1.5)$$

Аналогично полагаем, что для параметров C в модели системы (1.1) априорные значения $\bar{C} \in \Omega_C$ содержат ошибки ζ_c :

$$\bar{C} = C + \zeta_c. \quad (1.6)$$

Так как ошибки параметров C тоже влияют на результаты обработки измерений, параметры C также рассматриваются как мешающие.

В большинстве случаев ошибки измерений и мешающих параметров носят случайный характер. Согласно центральной предельной теореме вероятностей и закону больших чисел модель распределения случайных величин аппроксимируется нормальным распределением при условиях большего числа реализаций [19]. Мы здесь тоже допустим, что ошибки измерений на момент времени измерения t_k имеют нормальное распределение с математическим ожиданием $M\{\mathbf{v}_k\}$ и ковариационной матрицей \mathbf{R}_k . Ошибки измерений полагаем некоррелированными:

$$M\left\{\left(\mathbf{v}_k - M\{\mathbf{v}_k\}\right)\left(\mathbf{v}_j - M\{\mathbf{v}_j\}\right)^T\right\} = \delta_{kj}\mathbf{R}_k, \quad k, j = 1, \dots, N, \quad (1.7)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, $M\{\}$ – операция определения математического ожидания, \mathbf{R}_k – ковариационная матрица ошибок измерений размерности p на момент времени t_k . Ниже будут учтены и систематические ошибки измерений.

При анализе ошибок ζ_{zk} модели измерительной системы и ошибок ζ_c модели динамической системы полагаем, что они имеют нормальное распределение с ненулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей. Для ошибок ζ_{zk} принято:

$$M \left\{ (\zeta_{zk} - M \{ \zeta_{zk} \}) (\zeta_{zk} - M \{ \zeta_{zk} \})^T \right\} = \mathbf{Q}_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Аналогично ошибки ζ_c соответствуют ковариационной матрице \mathbf{S} :

$$M \left\{ (\zeta_c - M \{ \zeta_c \}) (\zeta_c - M \{ \zeta_c \})^T \right\} = \mathbf{S}. \quad (1.9)$$

Полагаем также, что есть априорная информация $\bar{\mathbf{X}}_0$ о случайном векторе начального состояния системы \mathbf{X}_0 с разбросом \mathbf{P}_0 :

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_0 + \zeta_{x0}, \quad M \{ \zeta_{x0} \zeta_{x0}^T \} = \mathbf{P}_0. \quad (1.10)$$

где ζ_{x0} – вектор ошибки априорного знания начального состояния системы.

Требуется найти оптимальное оценивание вектора состояния системы, а также дать оценку точности фильтрации при наличии всех вышесказанных мешающих факторов (параметров \mathbf{C} , \mathbf{Z}_k и начального вектора \mathbf{X}_0).

2. Алгоритмы оценивания с использованием метода мешающих параметров

При решении сформулированной задачи важным представляется не только построить сам алгоритм вычисления оценки по имеющейся навигационной информации, но и оценить точность разработанных алгоритмов оценки. Таким образом, в рассматриваемой проблеме можно выделить две важные задачи: задачу синтеза алгоритма оценивания и задачу определения и анализа точности оценивания, выявления свойств ошибок, в частности определения уровня этих ошибок [1, 3–8, 11–20, 23]. В данном разделе представляем алгоритмы оценивания с использованием модифицированного метода наименьших квадратов, или так называемого метода мешающих параметров [18].

2.1. Критерий оптимальности

Задача определения параметров движения системы по данным измерений с учетом дополнительных разбросов мешающих параметров, т.н. расширенная задача оценивания, рассмотрена в ряде работ [3, 4, 7, 18, 19, 23 и др.]. Суть метода её решения заключается в том, что мешающие параметры рассматриваются как дополнительные параметры измерений и параметры оценивания. Теперь расширенная задача оценивания сводится к классической задаче оценивания, которая решается методом наименьших квадратов (МНК) [1, 3–6, 19, 23]. Оценка определяется из условия минимизации функции-критерия, зависящего как от невязок измерений, так и от величин возмущений, определяемых вариациями мешающих параметров. Этот метод является модифицированным методом наименьших квадратов. Иногда для этого применяется специальный термин «метод мешающих параметров» [18].

Априорная информация о начальном состоянии системы тоже может рассматриваться дополнительным измерением [3, 19, 23]. После включения

указанных мешающих параметров в число оцениваемых и измеряемых параметров решение расширенной задачи оценивания сводится к получению оценки параметров (X_0, C, Z_k) при выполнении критерия оптимальности:

$$(\hat{X}_0, \hat{C}, \hat{Z}) = \arg \min_{(X_0, C, Z)} (J), \quad (2.1)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{\Psi}_k - \Psi_k)^T R_k^{-1} (\bar{\Psi}_k - \Psi_k) + \frac{1}{2} (\bar{X}_0 - X_0)^T P_0^{-1} (\bar{X}_0 - X_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Z}_k - Z_k)^T Q_k^{-1} (\bar{Z}_k - Z_k) + \frac{1}{2} (\bar{C} - C)^T S^{-1} (\bar{C} - C). \quad (2.2)$$

Квадратичная форма в (2.2) последовательно содержит четыре члена: (а) квадраты невязок измеренных и расчётных значений вектора измерений Ψ , отнесённые к априорно известным (или рассчитанным по измерениям) среднеквадратическим отклонениям (СКО) ошибок измерений; (б) квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния \bar{X}_0 от его расчётного значения X_0 ; (в) квадраты взвешенного отклонения априорно заданного вектора мешающих параметров \bar{Z}_k от его расчётного значения Z_k ; (г) квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора параметров \bar{C} в модели движения системы от его расчётного значения C .

2.2. Линеаризация модели динамической системы и модели измерения

Основой конструкции фильтрации для нелинейной системы служит линеаризация нелинейных функций математической модели динамической системы в окрестности приближенного решения, которое называется опорным. При этом полагаем, что опорное движение системы, близкое к реальному, описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dX^*}{dt} = F(X^*, C^*, t), \\ X^*(t_0) = X_0^*, \end{cases} \quad (2.3)$$

где X^* , C^* относятся к опорному движению при начальных условиях X_0^* . Линеаризованное уравнение движения системы перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t)x + \xi(t)c, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$c = C - C^*, \quad x = X - X^*, \quad (2.5)$$

$$f(t) = \frac{\partial F(X^*, C^*, t)}{\partial X}, \quad \xi(t) = \frac{\partial F(X^*, C^*, t)}{\partial C}, \quad (2.6)$$

здесь c – ошибка модели движения системы; x – вектор состояния истинного

движения системы относительно опорного, т.е. вариация вектора состояния, часто будем для краткости называть его просто вектором состояния; \mathbf{x}_0 – начальный вектор \mathbf{x} ; $\mathbf{f}(t)$ – n -мерная квадратная матрица, $\boldsymbol{\xi}(t)$ – матрица размерностью $n \times m$. Полагаем, что ошибка в модели мала:

$$\|\boldsymbol{\xi}(t)\mathbf{c}\| \ll \|\mathbf{f}(t)\mathbf{x}\|. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.4) есть векторное линейное неоднородное ДУ первого порядка. Его общее решение можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\zeta}(t, t_0) \mathbf{c}, \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \partial \mathbf{X}(t) / \partial \mathbf{X}(t_0), \quad \boldsymbol{\zeta}(t, t_0) = \partial \mathbf{X}(t) / \partial \mathbf{C}, \quad (2.9)$$

где $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)_{n \times n}$ – матрица изохронных производных от текущего вектора состояния системы по начальному, или т.н. переходная матрица. Она является решением линейного однородного дифференциального уравнения [18, 23]:

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{f}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0), \quad (2.10)$$

при начальном условии вида $\boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{E}_{n \times n}$, где $\mathbf{E}_{n \times n}$ – n -мерная единичная матрица. Матрица $\boldsymbol{\zeta}(t, t_0)_{n \times m}$ в (2.9) – матрица частных производных от текущего вектора состояния системы по параметрам \mathbf{C} , она характеризует чувствительность вектора состояния системы \mathbf{X} к параметрам \mathbf{C} . Матрица $\boldsymbol{\zeta}(t, t_0)$ определяется интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{f}(t)\boldsymbol{\zeta}(t, t_0) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.11)$$

при начальном условии вида $\boldsymbol{\zeta}(t_0, t_0) = \mathbf{0}_{n \times m}$, где $\mathbf{0}_{n \times m}$ – $n \times m$ -мерная нулевая матрица. Решение уравнения (2.11) может выражаться в виде [18, 23]:

$$\boldsymbol{\zeta}(t, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t_0, \tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \boldsymbol{\xi}(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Дифференциальными уравнениями (2.4), (2.10–11) описываются не только движение системы, но и ее чувствительность к начальному состоянию и применённым параметрам \mathbf{C} в модели движения. Теперь линеаризуем модель измерения (1.3). При этом введем обозначения:

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \boldsymbol{\Phi}(t_k, t_0), \quad \boldsymbol{\zeta}_k = \boldsymbol{\zeta}(t_k, t_0). \quad (2.13)$$

Тогда из (2.8) получим

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\zeta}_k \mathbf{c}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.14)$$

Обозначая отличие реальных измеряемых параметров, также параметров в модели измерительной системы относительно опорных через

$$\boldsymbol{\psi}_k = \boldsymbol{\Psi}_k - \boldsymbol{\Psi}_k^*, \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{Z}_k - \mathbf{Z}_k^* \quad (2.15)$$

и линеаризируя (1.2), получим линеаризованную измеряемую функцию

$$\boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{H}_{xk} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{z}_k, k = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

$$\mathbf{H}_{xk} = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{X}_k, \mathbf{H}_{zk} = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{Z}_k. \quad (2.17)$$

Подставляя уравнение (2.14) в (2.16) и обозначая

$$\mathbf{H}_{ck} = \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\zeta}_k = (\partial \Psi_k / \partial \mathbf{X}_k)(\partial \mathbf{X}_k / \partial \mathbf{C}) = \partial \Psi_k / \partial \mathbf{C}, \quad (2.18)$$

получим

$$\boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{x}_0 + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{c} + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{z}_k, k = 1, \dots, N. \quad (2.19)$$

Обозначаем разность вектора измерения и опорного через

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_k = \bar{\boldsymbol{\Psi}}_k - \boldsymbol{\Psi}_k^*, \quad (2.20)$$

и, учитывая (1.4), получим линеаризованную модель измерения

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}_k = \boldsymbol{\psi}_k + \mathbf{v}_k, k = 1, \dots, N. \quad (2.21)$$

Пусть

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\psi}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{\psi}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{\psi}}_N \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \boldsymbol{\psi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_N \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

тогда выражаем реальные значения измеряемых параметров в виде функции от начального состояния \mathbf{x}_0 , параметров \mathbf{c} в модели движения системы и от \mathbf{z} :

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{H}_{x0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{H}_c \mathbf{c} + \mathbf{H}_z \mathbf{z}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{H}_{x0} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x1} \boldsymbol{\Phi}_1 \\ \mathbf{H}_{x2} \boldsymbol{\Phi}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{xN} \boldsymbol{\Phi}_N \end{bmatrix}, \mathbf{H}_x = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{x2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{xN} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{H}_c = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{c1} \\ \mathbf{H}_{c2} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{cN} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_z = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{z1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{z2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{zN} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Матрицы \mathbf{H}_x и \mathbf{H}_z являются блочно-диагональными матрицами. Для простоты можем представить их в виде:

$$\mathbf{H}_x = \text{diag}\{\mathbf{H}_{x1}, \mathbf{H}_{x2}, \dots, \mathbf{H}_{xN}\}, \mathbf{H}_z = \text{diag}\{\mathbf{H}_{z1}, \mathbf{H}_{z2}, \dots, \mathbf{H}_{zN}\}.$$

Пусть

$$\Phi = [\Phi_1^T \quad \Phi_2^T \quad \dots \quad \Phi_N^T]^T, \zeta = [\zeta_1^T \quad \zeta_2^T \quad \dots \quad \zeta_N^T]^T, \quad (2.26)$$

$$H_{x_0} = H_x \Phi, H_c = H_x \zeta. \quad (2.27)$$

Соответственно, вектор измерений имеет вид:

$$\bar{\psi} = H_{x_0} x_0 + H_c c + H_z z + v. \quad (2.28)$$

Исходя из допущения о законе распределения ошибок измерений в п. 1, получим ковариационную матрицу для вектора всех ошибок измерений v :

$$M \left\{ (v - M \{v\})(v - M \{v\})^T \right\} = R = \text{diag} \{R_1, R_2, \dots, R_N\}. \quad (2.29)$$

Аналогично ковариационные матрицы для случайных векторов $\bar{c} = \bar{C} - C^*$ и $\bar{z} = \bar{Z} - Z^*$ – разностей априорных значений и опорных для мешающих параметров C и Z – имеют вид:

$$M \left\{ (\bar{c} - M \{\bar{c}\})(\bar{c} - M \{\bar{c}\})^T \right\} = S, \quad (2.30)$$

$$M \left\{ (\bar{z} - M \{\bar{z}\})(\bar{z} - M \{\bar{z}\})^T \right\} = Q = \text{diag} \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}. \quad (2.31)$$

Размерности матриц R , S и Q соответственно составляют pN , m и qN .

Критерий оптимальности (2.1) и (2.2) можем переписать в следующем эквивалентном виде:

$$(\hat{x}_0, \hat{c}, \hat{z}) = \arg \min_{(x_0, c, z)} (J), \quad (2.32)$$

где

$$J = \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \psi)^T R^{-1} (\bar{\psi} - \psi) + \frac{1}{2} (\bar{x}_0 - x_0)^T P_0^{-1} (\bar{x}_0 - x_0) + \frac{1}{2} (\bar{z} - z)^T Q^{-1} (\bar{z} - z) + \frac{1}{2} (\bar{c} - c)^T S^{-1} (\bar{c} - c). \quad (2.33)$$

Отсюда следуют оценки

$$\hat{X}_0 = X_0^* + \hat{x}_0, \hat{C} = C^* + \hat{c}, \hat{Z} = Z^* + \hat{z}. \quad (2.34)$$

2.3. Алгоритмы оценивания и построения ковариационной матрицы ошибки оценки

2.3.1. Система нормальных уравнений при наличии мешающих факторов

Обозначаем расширенный вектор измеряемых параметров через $\tilde{\psi}$ и расширенный вектор оцениваемых параметров через \tilde{x} :

$$\tilde{\psi} = [\psi^T \quad x_0^T \quad c^T \quad z^T]^T, \tilde{x} = [x_0^T \quad c^T \quad z^T]^T, \quad (2.35)$$

Невязки расширенного вектора измерений $\Delta\tilde{\psi}$ имеют вид:

$$\Delta\tilde{\psi} = \tilde{\bar{\psi}} - \tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \Delta\psi \\ \Delta\bar{x}_0 \\ \Delta\bar{c} \\ \Delta\bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\psi} - \psi \\ \bar{x}_0 - x_0 \\ \bar{c} - c \\ \bar{z} - z \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

где $\tilde{\bar{\psi}}$ – расширенный вектор измерений, $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\tilde{x})$ – расчетное значение расширенного вектора измеряемых параметров.

Перепишем функции критерия (2.33) оценки в векторном виде:

$$J = \frac{1}{2} \Delta\tilde{\psi}^T \tilde{\mathbf{P}} \Delta\tilde{\psi}, \quad (2.37)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}$ – расширенная весовая матрица, соответствующая ковариационной матрице расширенного вектора измеряемых параметров $\tilde{\psi}$ (2.35):

$$\tilde{\mathbf{P}} = \text{diag} \{ \mathbf{R}^{-1}, \mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{S}^{-1}, \mathbf{Q}^{-1} \}. \quad (2.38)$$

Для того чтобы значение функции критерия J достигало минимума по $\hat{\tilde{x}}$ (2.35) из условия оптимизации (2.32), оценка $\hat{\tilde{x}}$ должна удовлетворять необходимым условиям минимума:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=\hat{\tilde{x}}} = - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\mathbf{P}} \left(\tilde{\bar{\psi}} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \hat{\tilde{x}} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

Отсюда следует, что справедлива *система нормальных уравнений* (СНУ)

$$\tilde{\mathbf{A}} \hat{\tilde{x}} = \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\bar{\psi}}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\mathbf{P}} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\mathbf{P}}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x_0} & \mathbf{H}_c & \mathbf{H}_z \\ \mathbf{E}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{qN} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{P}_0^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_c & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Отметим, что здесь через \mathbf{E} и $\mathbf{0}$ обозначаются единичная матрица и нулевой блок. Матрицы \mathbf{B}_0 , \mathbf{B}_c и \mathbf{B}_z в (2.42) имеют вид:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{H}_c^T \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{B}_z = \mathbf{H}_z^T \mathbf{R}^{-1}. \quad (2.43)$$

Условия невырожденности матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ соответствуют условиям наблюдаемости системы [13]. Здесь полагаем, что матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ обратима, при этом она положительно определенная и симметричная. Тогда систему нормальных уравнений можем записать в виде:

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\boldsymbol{\psi}}. \quad (2.44)$$

Ошибка оценки $\delta \hat{\mathbf{x}}$ представляет собой разность оценки и реальных значений:

$$\delta \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2.45)$$

Согласно *теореме Гаусса-Маркова* [3, 19] ковариационная матрица оценки $\hat{\mathbf{x}}$ имеет

$$\tilde{\mathbf{K}} = M \left\{ (\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}})^T \right\} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (2.46)$$

Нетрудно заметить, что учет мешающих параметров в расширенной задаче оценивания приводит к существенному увеличению размерности вектора определенных параметров и количества нормальных уравнений. Основной сложностью решения этих уравнений, как правило, является обращение расширенной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ системы нормальных уравнений. Матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ имеет размерность $qN+m+n$, пропорциональную числу моментов измерений N . На практике число N может быть очень большим при полном объеме навигационной информации. Как известно, численное обращение матриц столь высокого порядка сопряжено со значительными вычислительными трудностями, которые сохраняются даже при использовании современных вычислительных технологий. Для преодоления этой трудности в данной работе представлены два способа вычисления обратной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ с использованием леммы обращения блочной матрицы [2].

2.3.2. Обращение матрицы системы нормальных уравнений

Лемма обращения блочной матрицы. Пусть дана неособенная квадратная матрица, она разбита на блоки размером 2×2 :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{D} – квадратные матрицы. Если матрица \mathbf{A} обратима, т.е. определитель $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, то обращение блочной матрицы \mathbf{P} можно записать в виде:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E}^{-1} \\ -\mathbf{E}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ называется *шуровским дополнением*, или *дополнением Шура*, к подматрице \mathbf{A} матрицы \mathbf{P} . Аналогично, если матрица \mathbf{D} обратима, то

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{-1} & -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}$ – шуровское дополнение к подматрице \mathbf{D} матрицы \mathbf{P} .

Формулы (2.48) и (2.49) называются *формулами Фробениуса для обращения*

блочной матрицы, они позволяют свести обращение матрицы большого размера \mathbf{P} к обращению матриц \mathbf{A} , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F} меньших размеров и операциям их умножения и сложения [2]. Кроме того, согласно лемме Шура [2], в случае, когда матрица \mathbf{P} определено положительная, дополнения Шура \mathbf{E} и \mathbf{F} тоже являются определено положительными, т.е.

$$\mathbf{E} > 0 \text{ и } \mathbf{F} > 0, \text{ при } \mathbf{P} > 0. \quad (2.50)$$

Если обе матрицы \mathbf{A} и \mathbf{D} невырождены, соответственно, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ и $\det(\mathbf{D}) \neq 0$, то формулы (2.48) и (2.49) эквивалентны друг другу. Сравнивая их блоки, получим важную формулу для обращения матрицы (формула Шермана-Моррисона):

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}. \quad (2.51)$$

Формула (2.51) дает возможность упростить обращение матрицы высокого порядка, например, в случае определения обратной матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, когда размерность матрицы \mathbf{A} больше размерности \mathbf{D} и задана \mathbf{A}^{-1} .

Таким образом, для обращения матрицы большого размера можем разбить матрицу на блоки и применять лемму обращения матрицы. Ниже представляем два способа для вычисления обратной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$.

Способ 1 обращения матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$. Из (2.42) матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ частных производных $\partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{\mathbf{x}}$ имеет блоки размером 4×3 . Подставляя её в матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ (2.41), можем представить матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ в виде блочной матрицы размером 3×3 :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda & \beta_c & \beta_z \\ \beta_c^T & \lambda_c & \beta_{cz} \\ \beta_z^T & \beta_{cz}^T & \lambda_z \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mathbf{P}_0^{-1}, \lambda_c = \mathbf{H}_c^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_c + \mathbf{S}^{-1}, \lambda_z = \mathbf{H}_z^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_z + \mathbf{Q}^{-1}, \quad (2.53)$$

$$\lambda_0 = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0}. \quad (2.54)$$

Очевидно, что матрицы λ_0 ($n \times n$), λ ($n \times n$), λ_c ($m \times m$) и λ_z ($qN \times qN$) в (2.53)-(2.54) являются положительно определенными и симметричными. Если рассматривается первый вариант вектора \mathbf{Z} , т.е. берется постоянный вектор \mathbf{Z} размерности $q^{(1)}$ ($q^{(1)} = 4$ для двух КА в «Небосводе»), то получим матрицу λ_z ($q^{(1)} \times q^{(1)}$), и размерность матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ также резко уменьшится. Данные матрицы определяются следующим образом:

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^N \Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{xk} \Phi_k, \quad (2.55)$$

$$\lambda_c = S^{-1} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_{ck}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{ck}, \quad (2.56)$$

$$\lambda_z = \text{diag} \{ \lambda_{z1}, \lambda_{z2}, \dots, \lambda_{zN} \}, \quad (2.57)$$

$$\lambda_{zk} = \mathbf{H}_{zk}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{zk} + \mathbf{Q}_k^{-1}, \quad k=1, \dots, N. \quad (2.58)$$

Заметим, что матрица λ_z является блочно-диагональной матрицей, т.е. все блоки λ_{zk} размерности q последовательно расположены на главной диагонали.

Остальные блочные матрицы β_c , β_z и β_{cz} в матрице $\tilde{\mathbf{A}}$ (2.52) имеют вид:

$$\beta_c = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_c, \quad \beta_z = \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_z, \quad \beta_{cz} = \mathbf{H}_c^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_z, \quad (2.59)$$

$$\beta_c = \sum_{k=1}^N \Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{ck}, \quad (2.60)$$

$$\beta_z = [\beta_{z1} \quad \beta_{z2} \quad \dots \quad \beta_{zN}], \quad \beta_{zk} = \Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{zk}, \quad (2.61)$$

$$\beta_{cz} = [\beta_{cz1} \quad \beta_{cz2} \quad \dots \quad \beta_{czN}], \quad \beta_{czk} = \mathbf{H}_{ck}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{zk}, \quad (2.62)$$

матрицы β_c , β_z и β_{cz} имеют размеры $n \times m$, $n \times qN$ и $m \times qN$ соответственно.

Ковариационная матрица вектора оценки \hat{x} , т.е. обращение матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, также представлена в блочной матрице размером 3×3 :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} & \tilde{\mathbf{K}}_{13} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{22} & \tilde{\mathbf{K}}_{23} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{13}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Для применения леммы обращения блочной матрицы разобьем матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ на блоки (2×2) следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\beta = [\beta_c \quad \beta_z], \quad \gamma = \begin{bmatrix} \lambda_c & \beta_{cz} \\ \beta_{cz}^T & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Применяя к матрице $\tilde{\mathbf{A}}$ (2.64) лемму обращения блочной матрицы и сравнивая с (2.63), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{11} &= (\lambda - \beta \gamma^{-1} \beta^T)^{-1} = \lambda^{-1} + \lambda^{-1} \beta (\gamma - \beta^T \lambda^{-1} \beta)^{-1} \beta^T \lambda^{-1}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{12} & \tilde{\mathbf{K}}_{13} \end{bmatrix} &= -\tilde{\mathbf{K}}_{11} \beta \gamma^{-1}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{22} & \tilde{\mathbf{K}}_{23} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T & \tilde{\mathbf{K}}_{33} \end{bmatrix} &= (\gamma - \beta^T \lambda^{-1} \beta)^{-1} = \gamma^{-1} + \gamma^{-1} \beta^T (\lambda - \beta \gamma^{-1} \beta^T)^{-1} \beta \gamma^{-1}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Здесь матрицы $\lambda - \beta \gamma^{-1} \beta^T$ и $\gamma - \beta^T \lambda^{-1} \beta$ соответствуют шуровским дополнениям к подматрицам γ и λ матрицы \tilde{A} . Согласно лемме Шура (2.50) они должны быть определенно положительными и симметричными, так как матрица \tilde{A} определенно положительная, симметричная. Кроме того, для их обращения по (2.66) возникает необходимость упрощения вычислительной процедуры при обращении матрицы γ , поскольку её размерность велика ($m+qN$). При этом опять применяем формулы Фробениуса для обращения блочной матрицы. Заметим, что матрица γ положительно определенная и симметричная. Тогда можем представить её обращение в блочном виде:

$$\kappa = \gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12}^T & \kappa_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

$$\begin{cases} \kappa_{11} = (\lambda_c - \beta_{cz} \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T)^{-1} = \lambda_c^{-1} + \lambda_c^{-1} \beta_{cz} (\lambda_z - \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1} \beta_{cz})^{-1} \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1}, \\ \kappa_{12} = -\lambda_c^{-1} \beta_{cz} \kappa_{22} = -\kappa_{11} \beta_{cz} \lambda_z^{-1}, \\ \kappa_{22} = (\lambda_z - \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1} \beta_{cz})^{-1} = \lambda_z^{-1} + \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T (\lambda_c - \beta_{cz} \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T)^{-1} \beta_{cz} \lambda_z^{-1}. \end{cases} \quad (2.68a)$$

Отсюда следует соотношение

$$\begin{cases} \kappa_{11} = \lambda_c^{-1} - \kappa_{12} \beta_{cz}^T \lambda_c^{-1}, \\ \kappa_{22} = \lambda_z^{-1} - \lambda_z^{-1} \beta_{cz}^T \kappa_{12}. \end{cases} \quad (2.68b)$$

Формулы (2.68a) имеют вид, аналогичный (2.66). Матрица λ_c имеет значительно меньшую размерность m , чем матрица λ_z с размерностью qN . При вычислении блоков κ_{11} , κ_{12} и κ_{22} в (2.68) достаточно определить обращение матрицы λ_z . Поскольку матрица λ_z (2.57) является блочно-диагональной, то, следовательно, её обратная тоже будет блочно-диагональной и имеет вид:

$$\lambda_z^{-1} = \text{diag} \{ \lambda_{z1}^{-1}, \lambda_{z2}^{-1}, \dots, \lambda_{zN}^{-1} \}, \quad (2.69)$$

$$\lambda_{zk}^{-1} = (H_{zk}^T R_k^{-1} H_{zk} + Q_k^{-1})^{-1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.70)$$

Таким образом, представлен первый фундаментальный способ для определения обратной матрицы \tilde{A}^{-1} путем разбиения матрицы \tilde{A} на блоки и применения формул Фробениуса.

Систему нормальных уравнений (2.44) перепишем в виде:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & \tilde{K}_{13} \\ \tilde{K}_{12}^T & \tilde{K}_{22} & \tilde{K}_{23} \\ \tilde{K}_{13}^T & \tilde{K}_{23}^T & \tilde{K}_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} B_0 \\ B_c \\ B_z \end{bmatrix} \bar{\psi} + \begin{bmatrix} P_0^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{c} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \right). \quad (2.71)$$

Отсюда получим оценку вектора состояния системы в начальный момент времени и вектора мешающих параметров с учетом всех информации:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = (\tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{13}\mathbf{B}_z)\bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{P}_0^{-1}\bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{S}^{-1}\bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{13}\mathbf{Q}^{-1}\bar{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{c}} = (\tilde{\mathbf{K}}_{12}^T\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{23}\mathbf{B}_z)\bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{12}^T\mathbf{P}_0^{-1}\bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{S}^{-1}\bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{23}\mathbf{Q}^{-1}\bar{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{z}} = (\tilde{\mathbf{K}}_{13}^T\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T\mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{33}\mathbf{B}_z)\bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{13}^T\mathbf{P}_0^{-1}\bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{23}^T\mathbf{S}^{-1}\bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{33}\mathbf{Q}^{-1}\bar{\mathbf{z}}. \end{cases} \quad (2.72)$$

Для простоты обозначается

$$\tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{B}_c + \tilde{\mathbf{K}}_{13}\mathbf{B}_z = \tilde{\mathbf{K}}_{11}\boldsymbol{\chi}, \quad (2.73)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_0 - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_z \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Тогда можем переписать уравнение (2.72) для оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ в виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{K}}_{11}\boldsymbol{\chi}\bar{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\mathbf{K}}_{11}\mathbf{P}_0^{-1}\bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{S}^{-1}\bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{K}}_{13}\mathbf{Q}^{-1}\bar{\mathbf{z}}. \quad (2.75)$$

Рассмотрим точности полученных оценок. Диагональные блочные матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_{11}$, $\tilde{\mathbf{K}}_{22}$ и $\tilde{\mathbf{K}}_{33}$ в (2.63) соответствуют ковариационным матрицам оценки $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}})$, которые обозначаются соответственно через \mathbf{K}_{x_0} , \mathbf{K}_c и \mathbf{K}_z :

$$\mathbf{K}_{x_0} = \tilde{\mathbf{K}}_{11}, \mathbf{K}_c = \tilde{\mathbf{K}}_{22}, \mathbf{K}_z = \tilde{\mathbf{K}}_{33}, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{K}_{x_0} = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\beta}^T)^{-1} = \boldsymbol{\lambda}^{-1} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\lambda}^{-1}. \quad (2.77)$$

Аналогично имеем

$$\mathbf{K}_c = \left(\boldsymbol{\lambda}_c - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\beta}_z \\ \boldsymbol{\beta}_z^T & \boldsymbol{\lambda}_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \boldsymbol{\lambda}_c^{-1} + \quad (2.78)$$

$$+ \boldsymbol{\lambda}_c^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\beta}_c\boldsymbol{\lambda}_c^{-1}\boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\beta}_z - \boldsymbol{\beta}_c\boldsymbol{\lambda}_c^{-1}\boldsymbol{\beta}_{cz} \\ \boldsymbol{\beta}_z^T - \boldsymbol{\beta}_{cz}^T\boldsymbol{\lambda}_c^{-1}\boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\lambda}_z - \boldsymbol{\beta}_{cz}^T\boldsymbol{\lambda}_c^{-1}\boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\lambda}_c^{-1},$$

$$\mathbf{K}_z = \left(\boldsymbol{\lambda}_z - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_z \\ \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\beta}_c \\ \boldsymbol{\beta}_c^T & \boldsymbol{\lambda}_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_z \\ \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \boldsymbol{\lambda}_z^{-1} + \quad (2.79)$$

$$+ \boldsymbol{\lambda}_z^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_z \\ \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\beta}_z\boldsymbol{\lambda}_z^{-1}\boldsymbol{\beta}_z^T & \boldsymbol{\beta}_c - \boldsymbol{\beta}_z\boldsymbol{\lambda}_z^{-1}\boldsymbol{\beta}_c^T \\ \boldsymbol{\beta}_c^T - \boldsymbol{\beta}_{cz}\boldsymbol{\lambda}_z^{-1}\boldsymbol{\beta}_z^T & \boldsymbol{\lambda}_c - \boldsymbol{\beta}_{cz}\boldsymbol{\lambda}_z^{-1}\boldsymbol{\beta}_{cz}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_z \\ \boldsymbol{\beta}_{cz} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\lambda}_z^{-1}.$$

Ковариационные матрицы \mathbf{K}_{x_0} , \mathbf{K}_c и \mathbf{K}_z для оценок $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}})$ в (2.77)-(2.79) выражены в форме, содержащей два члена. Первые члены представляют собой обращения матриц $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}_c$ и $\boldsymbol{\lambda}_z$ (2.53), они характеризуют влияние априорной информации об этих оцениваемых параметрах и влияние ошибок измерений. А вторые члены матриц \mathbf{K}_{x_0} , \mathbf{K}_c и \mathbf{K}_z являются поправками к ним при учете

остальных дополнительных мешающих факторов. Они увеличивают ковариационные матрицы, т.е. ухудшают точность оценки, так как эти поправки положительно определены.

Способ 2 обращения матрицы \tilde{A} . На основе (2.41)-(2.42) матрицу \tilde{A} можем записать в виде:

$$\tilde{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \text{diag} \{ \mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{S}^{-1}, \mathbf{Q}^{-1} \}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_{x_0}, \mathbf{H}_c, \mathbf{H}_z], \quad (2.81)$$

здесь через \mathbf{H} обозначаются частные производные от вектора измерений по расширенному вектору оцениваемых параметров (2.24-2.25).

Использование матричного тождества (2.51) для матрицы \tilde{A} в (2.80) позволяет получить следующие выражения:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{A}^{-1} = \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \} - \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \} \cdot \mathbf{H}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H} \cdot \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \}, \quad (2.82)$$

$$\mathfrak{R} = \mathbf{R} + \mathbf{H} \cdot \text{diag} \{ \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T, \quad (2.83)$$

\mathfrak{R} является совместной ковариационной матрицей ошибок всей информации, включающих ошибки измерений, ошибки априорной информации о начальном состоянии, а также ошибки мешающих параметров \mathbf{C} и \mathbf{Z} .

Раскрывая правую часть выражения (2.82), получим упрощенное выражение для расширенной ковариационной матрицы:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 & -\mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} & -\mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \\ -\mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 & \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} & -\mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 & -\mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} & \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Подставляя матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ для вектора оценки в систему нормальных уравнений (2.71) или (2.72), после преобразования получим СЧУ в виде:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{k}_{x_0} (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}), \\ \hat{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{k}_c (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}), \\ \hat{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{k}_z (\bar{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}}), \end{cases} \quad (2.85)$$

где \mathbf{k}_{x_0} , \mathbf{k}_c и \mathbf{k}_z – матричные коэффициенты усиления фильтрации:

$$\mathbf{k}_{x_0} = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1}, \mathbf{k}_c = \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1}, \mathbf{k}_z = \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1}. \quad (2.86)$$

Как видно в (2.85), оценки $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}})$ строятся как взвешенное среднее по двум группам информации: *априорная* $(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{z}})$ и *измерительная*. Коэффициенты усиления фильтрации характеризуют показателем ценности измерительной информации. Если они близки к нулевым, то эта информация не

несет нового по сравнению с априорной информацией об оцениваемых параметрах. Диагональные блоки матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ в (2.84), соответствующие ковариационным матрицам векторов оценок $(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}})$, тоже содержат такие две группы информации: их первые члены представляют собой заданные априорные значения, а вторые, являющиеся отрицательно определенными, за счет всей измерительной информации позволяют уменьшить значения ковариационных матриц оцениваемых параметров, т.е. при учете дополнительной навигационной информации точность оценивания улучшится.

Очевидно, что значительной сложностью при определении вектора оценки и ковариационной матрицы в данном способе по формулам (2.84–2.85) является обращение матрицы \mathfrak{R} , размерность которой велика – pN . Опишем последовательную вычислительную процедуру для определения обратной матрицы \mathfrak{R}^{-1} с помощью формулы обращения матрицы (2.51).

Сначала из выражения (2.83) заметим, что матрица \mathfrak{R} содержит четыре слагаемых из неотрицательно определённых матриц. Члены \mathbf{R} и $\mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T$ являются блочно-диагональными матрицами:

$$\mathfrak{R}_z = \mathbf{R} + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T, \quad (2.87)$$

$$\mathfrak{R}_z = \text{diag} \{ \mathfrak{R}_{z1}, \mathfrak{R}_{z2}, \dots, \mathfrak{R}_{zN} \}, \quad (2.88)$$

$$\mathfrak{R}_{zk} = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.89)$$

\mathfrak{R}_{zk} – квадратная матрица размерности p . Обращаем ее:

$$\mathfrak{R}_z^{-1} = \text{diag} \{ \mathfrak{R}_{z1}^{-1}, \mathfrak{R}_{z2}^{-1}, \dots, \mathfrak{R}_{zN}^{-1} \}, \quad (2.90)$$

$$\mathfrak{R}_{zk}^{-1} = (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T)^{-1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.91)$$

Этот шаг позволяет свести обращение матрицы \mathfrak{R}_z размерности pN к обращению N матриц размерности p , что существенно упрощает вычисление.

Затем дважды используем формулу обращения матрицы (2.51). Пусть

$$\mathfrak{R}_{cz} = \mathbf{R} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T, \quad (2.92)$$

то имеем её обращение

$$\mathfrak{R}_{cz}^{-1} = (\mathfrak{R}_z + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T)^{-1} = \mathfrak{R}_z^{-1} - \mathfrak{R}_z^{-1} \mathbf{H}_c (\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_z^{-1} \mathbf{H}_c)^{-1} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_z^{-1}. \quad (2.93)$$

Далее, матрица \mathfrak{R} имеет вид:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{cz} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T, \quad (2.94)$$

её обращение определяется соотношением

$$\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}_{cz}^{-1} - \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} (\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_{x_0})^{-1} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1}. \quad (2.95)$$

В результате обращение матрицы \mathfrak{R} высокого порядка pN сводится к

решению значительно более простой задачи обращения нескольких матриц более низкого порядка. Кроме того, матрицы \mathfrak{R}_z и \mathfrak{R}_{cz} имеют практическое значение, они являются совместными ковариационными матрицами ошибок измерений при учете соответственных дополнительных мешающих факторов. Матрица \mathfrak{R}_z – совместная ковариационная матрица ошибок измерений при учете влияния дополнительных мешающих параметров z , а матрица \mathfrak{R}_{cz} учитывает влияние мешающих параметров z и ошибок модели c .

Теперь обратим внимание на вычислительные особенности при определении ковариационных матриц векторов оценки $(\hat{x}_0, \hat{c}, \hat{z})$, т.е. диагональных блоков матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$. Для ковариационной матрицы оценки \hat{x}_0 имеем:

$$\mathbf{K}_{x_0} = \tilde{\mathbf{K}}_{11} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_{x_0} \mathbf{H}_{x_0}) \mathbf{P}_0. \quad (2.96)$$

Она представляется в виде вычитания двух положительно определенных матриц и должна быть положительно определенной. Однако из-за ошибки округления при её численном вычислении, в частности, когда определитель $\det(\mathbf{P}_0)$ стремится к нулю или к бесконечности, соответственно, правая часть формулы (2.96) имеет вид $0 - 0$ или $\infty - \infty$, или матрица \mathbf{P}_0 плохо обусловлена, ковариационная матрица, возможно, будет терять положительную определенность или её диагональные элементы будут отрицательными. Это приводит к катастрофически неверным результатам.

В этом случае для уменьшения вычислительной ошибки и обеспечения положительно определённости ковариационной матрицы, используя матричное тождество (2.51), рассмотрим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{x_0} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T (\mathfrak{R} - \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T)^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T)^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

она содержит только сложения неотрицательно определенных матриц.

Аналогичные преобразования можем проводить для ковариационных матриц векторов оценки (\hat{c}, \hat{z}) , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \tilde{\mathbf{K}}_{22} = \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_c \mathbf{S} \\ &= \left(\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T (\mathfrak{R} - \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{H}_c^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_z &= \tilde{\mathbf{K}}_{33} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \\
&= \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T (\mathfrak{R} - \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Рассмотрим связь между ковариационной матрицей \mathbf{K}_{x_0} вектора оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ и коэффициентом k_{x_0} (2.86) усиления фильтрации. Умножая на матрицу \mathbf{K}_{x_0} (2.96) справа на обратную матрицу \mathbf{P}_0^{-1} , получим

$$\mathbf{K}_{x_0} \mathbf{P}_0^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0}. \tag{2.100}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{x_0} \mathbf{P}_0^{-1}) (\mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0})^{-1}. \tag{2.101}$$

Поставляя её в матрицу k_{x_0} , получим

$$k_{x_0} = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{x_0} \mathbf{P}_0^{-1}) (\mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0})^{-1} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1}. \tag{2.102}$$

Кроме того, сравнивая формулы (2.75) и (2.85) для оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ в обоих способах получения алгоритмов оценивания, получим

$$k_{x_0} = \mathbf{K}_{x_0} \boldsymbol{\chi}, \tag{2.103}$$

где матрица $\boldsymbol{\chi}$ имеет вид (2.74).

В связи с вторым способом можем представить иной путь обращения матрицы $\boldsymbol{\gamma}$ в первом способе:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \lambda_c & \beta_{cz} \\ \beta_{cz}^T & \lambda_z \end{bmatrix} = [\mathbf{H}_c, \mathbf{H}_z]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{H}_c, \mathbf{H}_z] + \text{diag}\{S^{-1}, \mathbf{Q}^{-1}\}, \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}^{-1} &= \text{diag}\{S, \mathbf{Q}\} - \text{diag}\{S, \mathbf{Q}\} \cdot [\mathbf{H}_c, \mathbf{H}_z]^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} [\mathbf{H}_c, \mathbf{H}_z] \cdot \text{diag}\{S, \mathbf{Q}\} \\
&= \begin{bmatrix} S - \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_c S & -\mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_c S & \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Так как $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\gamma}^{-1}$ (2.67), её компоненты имеют вид:

$$\boldsymbol{\kappa}_{12} = -\mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q}, \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa}_{11} &= S - \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_c S = \left(S^{-1} + \mathbf{H}_c^T (\mathfrak{R}_{cz} - \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1} \\
&= \left(S^{-1} + \mathbf{H}_c^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T)^{-1} \mathbf{H}_c \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{22} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \mathfrak{R}_{cz}^{-1} \mathbf{H}_z \mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \left(\mathfrak{R}_{cz} - \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{H}_z^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \right)^{-1} \mathbf{H}_z \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Таким образом, построены два способа решения системы нормальных уравнений фильтрации для совместной обработки измерений с учетом мешающих параметров. Разработаны две соответствующие вычислительные процедуры для получения оценок и ковариационных матриц. Выполнены численные контрольные тестовые расчеты для этих двух способов. Они показали эквивалентные результаты. Отметим, что второй способ представляется более простым, наглядным и удобным для численной реализации и применения в конкретном анализе.

Для уменьшения ошибки из-за линеаризации для нелинейной системы итоговую оценку часто получают итерационно. Кратко опишем соответствующий итерационный процесс. Для простоты формулы для определения оценки начального состояния системы можем соответственно выразить через некоторую функцию от параметров $\bar{\psi}, \bar{x}_0, \bar{c}, \bar{z}$, а для ковариационных матриц – через функцию от матриц $\mathbf{R}, \mathbf{P}_0, \mathbf{S}$ и \mathbf{Q} :

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = g(\bar{\psi}, \bar{x}_0, \bar{c}, \bar{z}), \\ \mathbf{K}_{x_0} = \mathbf{K}_{x_0}(\mathbf{R}, \mathbf{P}_0, \mathbf{S}, \mathbf{Q}). \end{cases} \quad (2.109)$$

Итерационный процесс определения оценки \hat{x}_0 имеет вид:

$$\hat{x}_0^{(i)} = g(\bar{\psi}, \hat{x}_0^{(i-1)}, \bar{c}, \bar{z}), i = 1, 2, \dots \quad (2.110)$$

при начальном условии $\hat{x}_0^{(0)} = \bar{x}_0$ и заканчивается, когда выполняется условие:

$$\left| \hat{x}_0^{(i)} - \hat{x}_0^{(i-1)} \right| < \varepsilon, \quad (2.111)$$

где ε – заданная малая положительная величина. В конце ковариационная матрица \mathbf{K}_{x_0} определяется при уточнённых начальных условиях $\hat{x}_0^{(i)}$.

Из уравнений (2.85), (2.97) и (2.102) получаются алгоритмы оценивания для ряда частных случаев учета мешающих факторов и ошибок измерений.

2.3.3. Случай наличия только ошибок измерений

В случае наличия только ошибок измерений оценка \hat{x}_0 , матричный коэффициент $k_{(x_0|\bar{\psi})}$ и ковариационная матрица $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})}$ вектора оценки \hat{x}_0 определяются в виде:

$$\hat{x}_0 = k_{(x_0|\bar{\psi})} \bar{\psi}, \quad k_{(x_0|\bar{\psi})} = \left(\mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1}, \quad (2.112)$$

$$\mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})} = \left(\mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1}. \quad (2.113)$$

Имеем алгоритм классического МНК [1].

2.3.4. Случай наличия ошибок измерений и ошибок мешающих параметров z , но нет уточнения z

В этом случае, учитывая (2.23) и (2.25) при $\mathbf{c}=0$, получим

$$J = \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \psi)^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{\psi} - \psi) + \frac{1}{2} (\bar{z} - z)^T \mathbf{Q}^{-1} (\bar{z} - z), \quad (2.114)$$

$$\hat{x}_0 = \arg \min_{(x_0)} (J). \quad (2.115)$$

Поскольку второй член в J не зависит от x_0 , поставляя J в необходимое условие минимума, получим СНУ так же, как в (2.112). Но здесь, в отличие от случая 2.3.3, ковариационная матрица ошибок оценки \hat{x}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})}^{(2)} &= M \left\{ (\hat{x}_0 - x_0)(\hat{x}_0 - x_0)^T \right\} = \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})} M \left\{ \bar{\psi} \bar{\psi}^T \right\} \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})}^T \\ &= \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})} \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right) \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})}^T \\ &= \left(\mathbf{H}_{x_0}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} + \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})} \left(\mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right) \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})}^T. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Разность между $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})}^{(2)}$ и $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})}$ (2.113) составляет

$$\mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})}^{(2)} - \mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi})} = \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})} \left(\mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right) \mathbf{k}_{(x_0|\bar{\psi})}^T. \quad (2.117)$$

2.4. Случай наличия и оценивания систематических ошибок измерений

В качестве модели систематических ошибок рассмотрим случай, в котором приняты постоянными на всем мерном интервале, а их значения являются случайными [9, 18]. Модель ошибки измерений имеет

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{сист}} + \mathbf{v}_{\text{сл}}, \quad (2.118)$$

где $\mathbf{v}_{\text{сист}}$, $\mathbf{v}_{\text{сл}}$ – векторы систематических и случайных ошибок измерений.

$$\mathbf{v}_{\text{сист}} = \left[\mathbf{v}_{\text{сист}1}^T \quad \mathbf{v}_{\text{сист}2}^T \quad \dots \quad \mathbf{v}_{\text{сист}N}^T \right]^T, \quad \mathbf{v}_{\text{сл}} = \left[\mathbf{v}_{\text{сл}1}^T \quad \mathbf{v}_{\text{сл}2}^T \quad \dots \quad \mathbf{v}_{\text{сл}N}^T \right]^T, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{v}_{\text{сист}1} = \dots = \mathbf{v}_{\text{сист}k} = \dots = \mathbf{v}_{\text{сист}N}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.120)$$

Введя обозначение (\mathbf{E}_p – p -мерная единичная матрица):

$$\mathbf{I} = \left[\mathbf{E}_p \quad \mathbf{E}_p \quad \dots \quad \mathbf{E}_p \right]^T, \quad (2.121)$$

получим

$$\mathbf{v}_{\text{сист}} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v}_{\text{сист}k}. \quad (2.122)$$

Модель измерений (2.28) в этом случае имеет вид:

$$\bar{\psi} = \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{H}_c \mathbf{c} + \mathbf{H}_z \mathbf{z} + \mathbf{v}_{\text{сист}} + \mathbf{v}_{\text{сл}}. \quad (2.123)$$

Предполагаем, что известны вероятностные характеристики их значений $\mathbf{v}_{\text{сист } k}$, т.е. заданы математическое ожидание $M\{\mathbf{v}_{\text{сист } k}\} = \text{const}$ и ковариационная матрица $\mathbf{R}_{\text{сист } k} = \text{const}$. При этом математическое ожидание $M\{\mathbf{v}_{\text{сист}}\}$ и ковариационная матрица $\mathbf{R}_{\text{сист}}$ вектора $\mathbf{v}_{\text{сист}}$ систематических ошибок измерений имеют вид:

$$\begin{cases} M\{\mathbf{v}_{\text{сист}}\} = \mathbf{I} \cdot M\{\mathbf{v}_{\text{сист } k}\}, \\ M\left\{\left(\mathbf{v}_{\text{сист}} - M\{\mathbf{v}_{\text{сист}}\}\right)\left(\mathbf{v}_{\text{сист}} - M\{\mathbf{v}_{\text{сист}}\}\right)^T\right\} = \mathbf{R}_{\text{сист}} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_{\text{сист } k} \cdot \mathbf{I}^T. \end{cases} \quad (2.124)$$

Как предполагалось в п. 1, математическое ожидание и ковариационная матрица вектора $\mathbf{v}_{\text{сл}}$ случайных ошибок измерений приняты:

$$M\{\mathbf{v}_{\text{сл}}\} = \mathbf{0}, M\{\mathbf{v}_{\text{сл}} \mathbf{v}_{\text{сл}}^T\} = \mathbf{R}. \quad (2.125)$$

При решении задачи оценивания рассматриваются постоянные на мерном интервале систематические ошибки $\mathbf{v}_{\text{сист}}$ как мешающие параметры. И они включаются в состав измеряемых и оцениваемых параметров.

$$\left(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{v}}_{\text{сист}}\right) = \arg \min_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\text{сист}})} (J), \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} (\bar{\psi} - \psi)^T \mathbf{R}^{-1} (\bar{\psi} - \psi) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{P}_0^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0) + \\ & + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c})^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{c}} - \mathbf{c}) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \mathbf{Q}^{-1} (\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) + \\ & + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} - \mathbf{v}_{\text{сист}})^T \mathbf{R}_{\text{сист}}^{-1} (\bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} - \mathbf{v}_{\text{сист}}), \end{aligned} \quad (2.127)$$

здесь $\bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}}$ – априорное значение вектора систематических ошибок измерений, $\mathbf{v}_{\text{сист}}, \mathbf{z}$ соответствуют $\mathbf{Z}^{(1)}$ и $\mathbf{Z}^{(2)}$ (1.3), расчетные измерения ψ включают оценку систематических ошибок $\mathbf{v}_{\text{сист}}$. Поскольку $\partial\psi/\partial\mathbf{v}_{\text{сист}} = \mathbf{E}$, то аналогично прежнему получим алгоритм оценивания:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \tilde{\mathbf{k}}_{x_0} \left(\bar{\psi} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} \right), \\ \hat{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{k}}_c \left(\bar{\psi} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} \right), \\ \hat{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{k}}_z \left(\bar{\psi} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} \right), \\ \hat{\mathbf{v}}_{\text{сист}} = \bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} + \tilde{\mathbf{k}}_{\text{сист}} \left(\bar{\psi} - \mathbf{H}_{x_0} \bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{H}_c \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_z \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{v}}_{\text{сист}} \right), \end{cases} \quad (2.128)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_{x_0} = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{\mathbf{k}}_c = \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{\mathbf{k}}_z = \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{\mathbf{k}}_{\text{сист}} = \mathbf{R}_{\text{сист}} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \quad (2.129)$$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_{\text{сист}} + \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T = \mathfrak{R} + \mathbf{R}_{\text{сист}}. \quad (2.130)$$

Ковариационные матрицы оценок \hat{x}_0 и $\hat{v}_{\text{сист}}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{x_0} &= P_0 - P_0 H_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} H_{x_0} P_0 = \left(P_0^{-1} + H_{x_0}^T (\tilde{\mathfrak{R}} - H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T)^{-1} H_{x_0} \right)^{-1}, \\ \tilde{K}_{v_{\text{сист}}} &= R_{\text{сист}} - R_{\text{сист}} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} R_{\text{сист}} = \left(R_{\text{сист}}^{-1} + (\tilde{\mathfrak{R}} - R_{\text{сист}})^{-1} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (2.131)$$

При возникновении необходимости обращения матриц $\tilde{\mathfrak{R}}$ аналогично применяем лемму обращения матрицы (2.51) и получим

$$\tilde{\mathfrak{R}}^{-1} = \left(\mathfrak{R} + I \cdot R_{\text{сист}k} \cdot I^T \right)^{-1} = \mathfrak{R}^{-1} - \mathfrak{R}^{-1} I \left(R_{\text{сист}k}^{-1} + I^T \mathfrak{R}^{-1} I \right)^{-1} I^T \mathfrak{R}^{-1}. \quad (2.132)$$

2.5. Случай, когда есть оценивание систематических ошибок, нет оценивания мешающего вектора z

В этом случае не уточняем векторы $z(t_k)$, $k=1, \dots, N$, и алгоритм упрощается. Аналогично прошлому, получаем:

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = \bar{x}_0 + \tilde{k}_{x_0} \left(\bar{\psi} - H_{x_0} \bar{x}_0 - H_c \bar{c} - \bar{v}_{\text{сист}} \right), \\ \hat{c} = \bar{c} + \tilde{k}_c \left(\bar{\psi} - H_{x_0} \bar{x}_0 - H_c \bar{c} - \bar{v}_{\text{сист}} \right), \\ \hat{v}_{\text{сист}} = \bar{v}_{\text{сист}} + \tilde{k}_{\text{сист}} \left(\bar{\psi} - H_{x_0} \bar{x}_0 - H_c \bar{c} - \bar{v}_{\text{сист}} \right), \end{cases} \quad (2.133)$$

$$\tilde{k}_{x_0} = P_0 H_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{k}_c = S H_c^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \tilde{k}_{\text{сист}} = R_{\text{сист}} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}, \quad (2.134)$$

$$\tilde{\mathfrak{R}} = R + R_{\text{сист}} + H_{x_0} P_0 H_{x_0}^T + H_c S H_c^T = \tilde{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T. \quad (2.135)$$

Ковариационная матрица оценки \hat{x}_0 имеет вид:

$$\tilde{K}_{x_0} = P_0 - P_0 H_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \left(\tilde{\mathfrak{R}} - H_z Q H_z^T \right) \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} H_{x_0} P_0. \quad (2.136)$$

В (2.135) $\tilde{\mathfrak{R}}$ – ковариационная матрица суммарных ошибок всех возмущающих факторов (2.130).

2.6. Случай, когда нет оценивания систематических ошибок

В этом случае, наоборот, оцениваются все мешающие параметры, кроме систематических ошибок, которые присутствуют и влияют на измерения. Алгоритм оценивания приведен выше (2.85). Ковариационная матрица оценки \hat{x}_0 при учете дополнительных систематических ошибок имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{x_0}^{(2)} &= P_0 - P_0 H_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - R_{\text{сист}}) \mathfrak{R}^{-1} H_{x_0} P_0 \\ &= P_0 - P_0 H_{x_0}^T \left(\tilde{\mathfrak{R}} - R_{\text{сист}} \right)^{-1} (\mathfrak{R} - R_{\text{сист}}) \left(\tilde{\mathfrak{R}} - R_{\text{сист}} \right)^{-1} H_{x_0} P_0.\end{aligned}\quad (2.137)$$

Разность между ковариационными матрицами оценки \hat{x}_0 в (2.137) и (2.131),

характеризующая ухудшение точности измерительной системы:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}_{x_0}^{(2)} - \tilde{\mathbf{K}}_{x_0} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - \mathbf{R}_{\text{сист}}) \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 - (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0) \\ &= \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_{x_0}^T \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{R} - \mathbf{R}_{\text{сист}}) \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \mathbf{P}_0.\end{aligned}\quad (2.138)$$

2.7. Рекуррентные алгоритмы оценивания

Разработанные выше методы совместной обработки навигационных измерений с учетом мешающих параметров, как, например, метод наименьших квадратов, довольно надежны для получения оценок. Их основной недостаток заключается в том, что при достаточно большом объеме измерений требуется большая оперативная память из-за большой размерности матриц. В силу этого вычисления по этим методам оказываются длительными по быстродействию [19]. Этого недостатка нет в рекуррентных алгоритмах нахождения оценок и соответствующей ковариационной матрицы.

Предполагаем, что после обработки всей измерительной информации, поступившей до момента времени t_{k-1} включительно, получены оценка начального состояния $\hat{\mathbf{x}}_{0|k-1}$ и соответствующая ковариационная матрица $\mathbf{P}_{0|k-1}$. Далее к следующему времени t_k дополнена измерительная информация $\bar{\boldsymbol{\psi}}_k$ и $\bar{\mathbf{z}}_k$, при их обработке оценка $\hat{\mathbf{x}}_{0|k-1}$ и её ковариационная матрица $\mathbf{P}_{0|k-1}$ могут рассматриваться как априорные данные. Обозначаем оценку и ковариационную матрицу после обработки информации до t_k включительно через $\hat{\mathbf{x}}_{0k}$ и \mathbf{P}_{0k} . Применяя выше разработанные алгоритмы оценивания (2.83)-(2.97) с помощью метода мешающих параметров, получим в линейном приближении эквивалентные рекуррентные алгоритмы оценивания:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{0k} = \hat{\mathbf{x}}_{0|k-1} + \mathbf{k}_{x_0k} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_k - \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_{0|k-1} - \mathbf{H}_{ck} \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_{zk} \bar{\mathbf{z}}_k), \\ \mathbf{P}_{0k} = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_{x_0k} \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\Phi}_k) \mathbf{P}_{0|k-1}, \\ \mathbf{k}_{x_0k} = \mathbf{P}_{0|k-1} \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \mathfrak{R}_k = \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_{0|k-1} \boldsymbol{\Phi}_k^T \mathbf{H}_{xk}^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T, \end{cases}\quad (2.139)$$

с начальными условиями

$$\hat{\mathbf{x}}_{00} = \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{00} = \mathbf{P}_0, \quad (2.140)$$

где \mathbf{k}_{x_0k} и \mathfrak{R}_k – коэффициент усиления и совместная ковариационная матрица ошибок при учете всей информации на момент времени t_k , $k=1, \dots, N$. Здесь $\mathbf{H}_{ck} = \mathbf{H}_{xk} \boldsymbol{\zeta}_k$ (2.18), где матрица $\boldsymbol{\zeta}_k$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \boldsymbol{\zeta}_{k|k-1} + \boldsymbol{\Phi}_{k|k-1} \boldsymbol{\zeta}_{k-1}, \quad (2.141)$$

где $\boldsymbol{\zeta}_{k|k-1} = \boldsymbol{\zeta}(t_k, t_{k-1})$, $\boldsymbol{\Phi}_{k|k-1} = \boldsymbol{\Phi}(t_k, t_{k-1})$ – переходные матрицы с момент времени t_{k-1}

на t_k . Отметим, что $\zeta(t_k, t_k) = \mathbf{0}_{n \times m}$, а $\Phi(t_k, t_k) = \mathbf{E}_{n \times n}$.

Очевидно, что при использовании рекуррентного алгоритма (2.139) операции проводятся лишь над матрицами меньшей размерности, что существенно ускоряет скорость вычислений. Итерационно после обработки всех измерений, т.е. при $k = N$, получим оценку начального состояния системы и ковариационную матрицу

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_{0|N}, \mathbf{K}_{x_0} = \mathbf{P}_{0|N}. \quad (2.142)$$

Если введем обозначения:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{0|k}, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{0|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_k \mathbf{P}_{0|k-1} \Phi_k^T, \quad (2.143)$$

то можно использовать (2.139) для получения оценки текущего вектора состояния и его ковариационной матрицы:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{k}_k (\bar{\psi}_k - \mathbf{H}_{xk} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{H}_{ck} \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_{zk} \bar{\mathbf{z}}_k), \\ \mathbf{P}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_k \mathbf{H}_{xk}) \mathbf{P}_{k|k-1}, \\ \mathbf{k}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_{xk}^T \mathfrak{R}_k^{-1}, \\ \mathfrak{R}_k = \mathbf{H}_{xk} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_{xk}^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T, \end{cases} \quad (2.144)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \\ \mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k|k-1}^T. \end{cases} \quad (2.145)$$

Здесь рекуррентные алгоритмы оценивания (2.139) сведены к динамической фильтрации для нелинейной системы при учете влияния мешающих параметров. Иногда этот алгоритм называется *расширенным фильтром Калмана* (РФК). Уравнения (2.144) и (2.145) соответствуют этапам корректировки (или обновления состояния) и прогноза [3, 13–23].

Для уменьшения ошибки из-за линеаризации нелинейной системы на каждом шаге обновления состояния (2.144) также можем построить итерационную процедуру для уточнения оценки, например:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)} + \mathbf{k}_k^{(i-1)} (\bar{\psi}_k - \mathbf{H}_{xk}^{(i-1)} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)} - \mathbf{H}_{ck}^{(i-1)} \bar{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_{zk}^{(i-1)} \bar{\mathbf{z}}_k), \\ \mathbf{P}_k^{(i)} = (\mathbf{E} - \mathbf{k}_k^{(i-1)} \mathbf{H}_{xk}^{(i-1)}) \mathbf{P}_k^{(i-1)}, \\ \mathbf{k}_k^{(i-1)} = \mathbf{P}_k^{(i-1)} (\mathbf{H}_{xk}^{(i-1)})^T (\mathfrak{R}_k^{(i-1)})^{-1}, \\ \mathfrak{R}_k^{(i-1)} = \mathbf{H}_{xk}^{(i-1)} \mathbf{P}_k^{(i-1)} (\mathbf{H}_{xk}^{(i-1)})^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{ck}^{(i-1)} \mathbf{S} (\mathbf{H}_{ck}^{(i-1)})^T + \mathbf{H}_{zk}^{(i-1)} \mathbf{Q}_k (\mathbf{H}_{zk}^{(i-1)})^T, \end{cases} \quad (2.146)$$

при начальных условиях

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_k^{(0)} = \mathbf{P}_{k|k-1}. \quad (2.147)$$

Параметры $\mathbf{H}_{xk}^{(i-1)}$, $\mathbf{H}_{ck}^{(i-1)}$, $\mathbf{H}_{zk}^{(i-1)}$, $\mathfrak{R}_k^{(i-1)}$ и $\mathbf{k}_k^{(i-1)}$ в i -итерации (2.146) с

верхними индексами $(i-1)$ соответствуют значениям при условиях $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}$ и $\mathbf{P}_k^{(i-1)}$. Окончательное условие итерации на шаге обработки измерений в момент времени t_k имеет вид:

$$|\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots \quad (2.148)$$

Таким образом, последовательные итерации дают возможность на каждом шаге получать все более точные значения определяемых параметров.

3. Анализ точности оценивания и прогнозирования

При оценке точности определения и прогнозирования параметров движения системы вычисляются вероятностные навигационные характеристики параметров, т.е. их отклонение из-за постоянных систематических ошибок измерений, а также их разброс из-за случайных ошибок измерений. Для этого часто применяются два способа: аналитически – методом ковариационного анализа или численно – методом статистических испытаний, т.е. методом Монте-Карло [1, 18]. В данном разделе рассмотрены задачи оценки точности оценивания и прогнозирования с помощью аналитического способа. Качественно проанализировано влияние ошибок измерений и мешающих факторов на точность оценивания.

3.1. Оценка точности прогнозирования

Пусть оцениваемый вектор состояния системы \mathbf{X}_0 определяет вектор параметров системы $\mathbf{W}=\mathbf{W}(\mathbf{X}_0)$. В линейном приближении вектор искомых параметров $\mathbf{w}(w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ является некоторой функцией от оцениваемых параметров \mathbf{x}_0 : $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$. Полагаем, что задана также матрица частных производных $\partial\mathbf{w}/\partial\mathbf{x}_0$. Оцениваемое значение вариации вектора \mathbf{w} из-за суммарных ошибок измерений в линейном приближении имеет вид:

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}_0} \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (3.1)$$

Среднеквадратическое отклонение оцениваемых параметров \mathbf{x}_0 из-за суммарных ошибок измерений при учете мешающих факторов соответствует их математическому ожиданию $M(\hat{\mathbf{x}}_0)$, согласно алгоритмам оценивания (2.109), оно имеет вид:

$$M(\hat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{g}(M(\bar{\psi}), M(\bar{\mathbf{x}}_0), M(\bar{\mathbf{c}}), M(\bar{\mathbf{z}})). \quad (3.2)$$

Отсюда следует математическое ожидание искомого вектора \mathbf{w} и его разброс:

$$M(\hat{\mathbf{w}}) = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}_0} M(\hat{\mathbf{x}}_0), \quad \mathbf{K}_w = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}_0} \mathbf{K}_{x_0} \left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}_0} \right)^T. \quad (3.3)$$

Они определяют эллипсоид рассеивания искомого вектора \mathbf{w} с центром $M(\hat{\mathbf{w}})$ в ℓ -мерном фазовом пространстве. При $\ell=2$ имеем эллипс на плоскости. Главная

диагональ ковариационной матрицы \mathbf{K}_w даёт выражения для средних квадратичных отклонений (СКО) составляющих вектора \mathbf{w} :

$$\sigma_{w_i} = \sqrt{(\mathbf{K}_w)_{ii}}, \quad i=1, 2, \dots, \ell, \quad (3.4)$$

где ℓ – размерность вектора \mathbf{w} .

Предполагаем, что максимальное отклонение из-за всех случайных возмущающих факторов составляет $3\sigma_{w_i}$ с вероятностью 0.997. В рассмотренной модели полагаем также, что максимальное отклонение $\delta w_{i \max}$ от всех возмущающих факторов для компонента w_i принимает вид:

$$\delta w_{i \max} = |M(\hat{w}_i)| + 3\sigma_{w_i}, \quad i=1, 2, \dots, \ell. \quad (3.5)$$

3.2. Анализ влияния ошибок измерений и априорного знания начального состояния на точность оценивания

Проведем ковариационный анализ за счет ошибок измерений и мешающих параметров, а также априорной информации (а.и.) о начальном состоянии системы. Для начала рассмотрим частный случай только учета влияния случайных ошибок измерений на точность оценки вектора начального состояния $\hat{\mathbf{x}}_0$, которая характеризуется условной ковариационной матрицей:

$$\mathbf{K}_{(x_0|\bar{y})} = \lambda_0^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{xk} \Phi_k \right)^{-1}. \quad (3.6)$$

Для произвольного k член $\Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{xk} \Phi_k$ в (3.6) является неотрицательно определенным слагаемым. С ростом числа моментов измерений N их сумма, ковариационная матрица $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{y})}$, уменьшается, т.е. точность оценивания увеличивается.

Пусть на заданном мерном интервале ковариационная матрица \mathbf{R}_k ошибок измерений в момент времени t_k может записана в виде:

$$\mathbf{R}_k = \sigma_{\text{и}}^2 \mathbf{R}_{0k}, \quad k=1, \dots, N, \quad (3.7)$$

где $\sigma_{\text{и}}^2$ – дисперсия ошибки измерений, \mathbf{R}_{0k} не зависит от СКО $\sigma_{\text{и}}$.

Подставив \mathbf{R}_k (3.7) в ковариационную матрицу $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{y})}$ (3.6), получим:

$$\mathbf{K}_{(x_0|\bar{y})} = \frac{\sigma_{\text{и}}^2}{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_{0k}^{-1} \mathbf{H}_{xk} \Phi_k \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Видно, что элементы матрицы $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{y})}$ пропорциональны дисперсии $\sigma_{\text{и}}^2$ ошибки измерений. Кроме того, так как элементы матрицы $\Phi_k^T \mathbf{H}_{xk}^T \mathbf{R}_{0k}^{-1} \mathbf{H}_{xk} \Phi_k$ лишь зависят от момента времени наблюдения, они, вообще говоря, ограничены для выбранного мерного интервала. При большом числе измерений N , следовательно, их среднее арифметическое асимптотически сходится к некоторой постоянной $\mathbf{D}_0 = \text{const}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi_k^T H_{xk}^T R_{0k}^{-1} H_{xk} \Phi_k \rightarrow D_0, \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

При этом ковариационная матрица $K_{(x_0|\bar{\psi})}$ стремится к отношению, обратно зависящему от числа измерений N , т.е. асимптотически следует отношение:

$$K_{(x_0|\bar{\psi})} \rightarrow \frac{\sigma_u^2}{N} D_0^{-1}, \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Матрица D_0 характеризует средний уровень качества проведения наблюдений в данном мерном интервале. Чем больше D_0 , тем выше полученная точность оценивания. При этом можем представить изменение ковариационной матрицы $K_{(x_0|\bar{\psi})}$ с ростом числа измерений N в виде кривой 1 на рис. 1.

Далее при учете дополнительной априорной информации (а.и.) о начальном состоянии ковариационная матрица оценки имеет вид:

$$K_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)} = \lambda^{-1} = (\lambda_0 + P_0^{-1})^{-1}. \quad (3.11)$$

Матрица P_0 определено-положительная, отсюда следует [19]:

$$K_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)} \leq \min(P_0, \lambda_0^{-1}). \quad (3.12)$$

При $N=0$ (еще нет измерений, прямая 2, рис. 1):

$$K_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)}(N=0) = P_0. \quad (3.13)$$

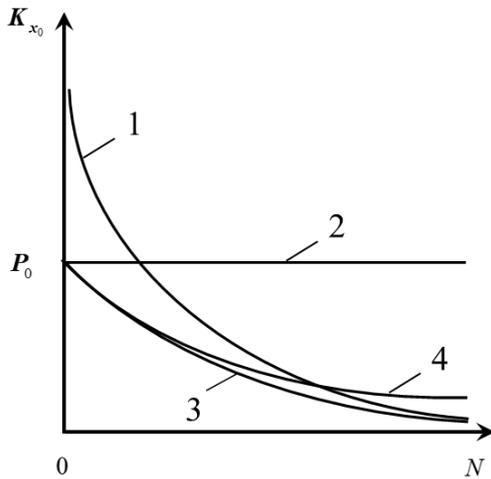


Рис. 1. Ковариационная матрица в зависимости от числа измерений N :
1 – только с учетом случайных ошибок основных измерений;
2 – заданная а.и.;
3 – с учетом а.и.;
4 – при учете всей измерительной информации и ошибок мешающих параметров.

При увеличении числа измерений N матрица λ_0 возрастает, следовательно, матрица $K_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)}$ уменьшается. В предельном случае учета априорной информации ($N \rightarrow \infty$):

$$N \rightarrow \infty, \lambda_0 \gg P_0^{-1}, K_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)} \rightarrow \lambda_0^{-1} = K_{(x_0|\bar{\psi})}, \quad (3.14)$$

при достаточно большом числе измерений результаты приближаются к случаю отсутствия априорной информации, т.е. повышение точности навигации за счет начальной априорной информации становится несущественным. В связи с

полученными свойствами влияния а.и. на точность оценивания можем качественно представить изменение ковариационной матрицы оценивания от числа измерений N на кривой 3, рис. 1.

3.3. Анализ влияния мешающих параметров на точность оценивания

При дополнении еще ошибок мешающих параметров, в том числе систематических ошибок измерений, на каждый момент измерений ковариационная матрица $\tilde{\mathbf{R}}$ (2.130) суммарных воздействий составляет:

$$\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T + \mathbf{R}_{\text{сист}k} > \mathbf{R}_k. \quad (3.15)$$

При учете всей информации ковариационная матрица оценки в (2.131) не меньше, чем в случае без учета ошибок мешающих параметров $\mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)}$ (3.11):

$$\tilde{\mathbf{K}}_{x_0} = \left(\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}_{x_0}^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{R}_{\text{сист}} + \mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T \right)^{-1} \mathbf{H}_{x_0} \right)^{-1} \geq \mathbf{K}_{(x_0|\bar{\psi}, \bar{x}_0)}. \quad (3.16)$$

Эволюция параметров ковариационной матрицы в зависимости от числа измерений для этого случая наличия ошибок мешающих параметров, в том числе систематических ошибок измерений, соответствует кривой 4 на рис. 1.

Степень увеличения ковариационной матрицы оценки из-за влияния мешающих параметров (\mathbf{c} , \mathbf{z}) зависит от их интенсивности $\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T$ относительно точности измерений, характеризующейся матрицей \mathbf{R}_k . На практике для оценки мощности сигнала относительно шума, часто используют коэффициент «отношения сигнала к шуму» (ОСШ). Аналогично, если рассмотрим мешающие параметры как шум для измерительной системы, можем ввести безразмерный коэффициент ОСШ для оценки отношения мощности измерений \mathbf{R}_k к мощности случайных мешающих параметров $\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T$.

Как известно, ковариационная матрица является обобщением дисперсии для многомерной случайной величины, а её след – скалярным выражением дисперсии многомерной случайной величины, через который можем обозначить мощность или интенсивность сигнала или шума. При этом на момент времени измерения t_k коэффициент ОСШ для нашей задачи определим отношением следа ковариационной матрицы ошибок измерений к следу ковариационной матрицы случайных ошибок мешающих параметров (\mathbf{c} , \mathbf{z}):

$$\eta_{\text{осш}}(t_k) \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}{\text{tr}(\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T)} \right), \quad (3.17)$$

где tr (от англ. *trace*) – операция взятия следа матрицы, т.е. сумма элементов главной диагонали матрицы. $\eta_{\text{осш}}(t_k) = \eta_{\text{осш}k}$ – коэффициент ОСШ в децибелах (дБ) на момент времени t_k .

Средний уровень ОСШ $\bar{\eta}_{\text{осш}}$ на заданном мерном интервале определим в виде:

$$\bar{\eta}_{\text{осш}} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R})}{\text{tr}(\mathbf{H}_c \mathbf{S} \mathbf{H}_c^T + \mathbf{H}_z \mathbf{Q} \mathbf{H}_z^T)} \right). \quad (3.18)$$

Этот коэффициент ОСШ очень важен для анализа степени влияния мешающих параметров на точность оценивания. Чем больше этот коэффициент, тем высшее качество измерения и меньше влияние мешающих параметров. При стремлении $\eta_{\text{осш}}$ к бесконечности ∞ , мешающие параметры оказывают слабое действие на результаты оценивания, и можно пренебречь их влиянием. В противном случае, $\eta_{\text{осш}}$ стремится к $-\infty$, основные измерения можно считать точными и для анализа точности навигации надо учитывать лишь ошибки мешающих параметров. В критическом случае, когда $\eta_{\text{осш}}$ близок к нулю, влияния ошибок измерений и мешающих параметров примерно равносильны.

Для повышения точности оценивания точность определения мешающих параметров надо выбирать настолько высокой, насколько это практически возможно. Однако из-за технических и других практических трудностей нельзя бесконечно её улучшать. Поэтому с точки зрения практических соображений в отношении требований к точности определения мешающих параметров этот коэффициент ОСШ даёт возможность выбирать эту точность более разумно. Например, можем выбирать её, чтобы коэффициент ОСШ был не меньше какой-то предельной величины. Так, будет $\eta_{\text{осш } k} \geq 20$ дБ, если $\text{tr}(\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T + \mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T) \leq 1\% \text{tr}(\mathbf{R}_k)$. Можем считать тогда, что влияние мешающих параметров уже незначительно.

Рассмотрим сначала упрощенный случай, когда $\text{tr}(\mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T) \ll \text{tr}(\mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T)$, ошибку модели можно игнорировать. Полагаем, что ошибки мешающих параметров \mathbf{Z} являются некоррелированными равноточными, т.е. ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathbf{Q}_k = \sigma_{zk}^2 \mathbf{E}_q, \quad (3.19)$$

тогда коэффициент ОСШ имеет

$$\eta_{\text{осш } k} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}{\text{tr}(\mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T)} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}{\sigma_{zk}^2 \|\mathbf{H}_{zk}\|_F^2} \right) = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\sigma_{zk} \|\mathbf{H}_{zk}\|_F}, \quad (3.20)$$

где $\|\mathbf{H}_{zk}\|_F$ – евклидова норма матрицы \mathbf{H}_{zk} размером $p \times q$, которая характеризует чувствительность измеряемых параметров к параметрам \mathbf{Z} (2.17). Чем больше значение $\|\mathbf{H}_{zk}\|_F$, тем высшее чувствительность и меньше коэффициент ОСШ.

В общем случае при учете ошибки модели, т.е. ошибки мешающих параметров \mathbf{C} , проводится осреднение

$$\text{tr}(\mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T) = \bar{\sigma}_{zk}^2 \cdot \text{tr}(\mathbf{H}_{zk} \mathbf{H}_{zk}^T) = \bar{\sigma}_{zk}^2 \cdot \|\mathbf{H}_{zk}\|_F^2, \quad (3.21)$$

при этом

$$\bar{\sigma}_{zk}^2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{H}_{zk} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{zk}^T + \mathbf{H}_{ck} \mathbf{S} \mathbf{H}_{ck}^T)}{\|\mathbf{H}_{zk}\|_F^2}, \quad (3.22)$$

где $\bar{\sigma}_{zk}^2$ – эквивалентная средняя дисперсия случайного вектора \mathbf{z}_k .

Поставляя (3.21–3.22) в уравнение (3.17), получим

$$\eta_{\text{осш}k} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\bar{\sigma}_{zk} \|\mathbf{H}_{zk}\|_F}, \quad (3.23)$$

тогда формула (3.23) для вычисления коэффициента ОСШ в общем случае имеет формально такой же вид, как и в упрощенном случае (3.20).

Рассмотрим первый критический случай при СКО $\bar{\sigma}_{zk} = 1$. В этом случае критическое значение коэффициента ОСШ имеет

$$\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zk}=1} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\|\mathbf{H}_{zk}\|_F}, \quad (3.24)$$

тогда коэффициент ОСШ $\eta_{\text{осш}k}$ можем представить в виде:

$$\eta_{\text{осш}k} = \eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zk}=1} - 20 \log_{10} (\bar{\sigma}_{zk}). \quad (3.25)$$

Делаем преобразование из (3.23)–(3.25), получим:

$$\bar{\sigma}_{zk} = 10^{(\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zk}=1} - \eta_{\text{осш}k})/20}, \quad (3.26)$$

или

$$\bar{\sigma}_{zk} = 10^{-\eta_{\text{осш}k}/20} \cdot \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\|\mathbf{H}_{zk}\|_F}. \quad (3.27)$$

Рассмотрим второй критический случай при ОСШ $\eta_{\text{осш}k} = 0$ дБ, т.е. интенсивности ошибок измерений и ошибок мешающих параметров на данный момент времени равносильны. Из (3.27) критическое значение СКО $\bar{\sigma}_{zk(0)}$ составляет

$$\bar{\sigma}_{zk(0)} = \bar{\sigma}_{zk|\eta_{\text{осш}k}=0} = \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}_k)}}{\|\mathbf{H}_{zk}\|_F}. \quad (3.28)$$

Поставляя (3.28) в (3.27), получим

$$\bar{\sigma}_{zk} = 10^{-\eta_{\text{осш}k}/20} \cdot \bar{\sigma}_{zk(0)}, \quad \eta_{\text{осш}k} = 20 \log_{10} \left(\frac{\bar{\sigma}_{zk(0)}}{\bar{\sigma}_{zk}} \right). \quad (3.29)$$

Видно, что для того, чтобы коэффициент ОСШ был положительным, т.е. $\eta_{\text{осш}k} \geq 0$ дБ, необходимо, чтобы эквивалентное СКО $\bar{\sigma}_{zk}$ было меньше его критического значения, т.е. $\bar{\sigma}_{zk} \leq \bar{\sigma}_{zk(0)}$.

Связь между критическими значениями (3.24) и (3.28) имеет форму:

$$\eta_{\text{осш}k|\bar{\sigma}_{zk}=1} = 20 \log_{10} (\bar{\sigma}_{zk(0)}). \quad (3.30)$$

Если точность мешающих параметров разумно выбирается так, чтобы

обеспечить наихудший уровень качества информации $\eta_{\text{осш } k} \geq \eta_{\text{min}}$, тогда необходимо, чтобы эквивалентное СКО $\bar{\sigma}_{zk}$ не превышало ограничения $\bar{\sigma}_{zk} \leq \bar{\sigma}_{zk \text{ max}}$, где:

$$\bar{\sigma}_{zk \text{ max}} = 10^{-\eta_{\text{min}}/20} \cdot \bar{\sigma}_{zk(0)} = 10^{(\eta_{\text{осш } k|\bar{\sigma}_{zk}=1} - \eta_{\text{min}})/20}. \quad (3.31)$$

Например,

$$\eta_{\text{осш } k} \geq \eta_{\text{min}} = 0 \text{ дБ}, \quad \bar{\sigma}_{zk} \leq \bar{\sigma}_{zk \text{ max}} = \bar{\sigma}_{zk(0)},$$

$$\eta_{\text{осш } k} \geq \eta_{\text{min}} = 20 \text{ дБ}, \quad \bar{\sigma}_{zk} \leq \bar{\sigma}_{zk \text{ max}} = 0.1 \cdot \bar{\sigma}_{zk(0)},$$

$$\eta_{\text{осш } k} \geq \eta_{\text{min}} = 40 \text{ дБ}, \quad \bar{\sigma}_{zk} \leq \bar{\sigma}_{zk \text{ max}} = 0.01 \cdot \bar{\sigma}_{zk(0)}.$$

Отсюда следует, что чем больше критическое значение СКО $\bar{\sigma}_{zk(0)}$ или коэффициента ОСШ $\eta_{\text{осш } k|\bar{\sigma}_{zk}=1}$, тем больше будет предельное максимальное СКО $\bar{\sigma}_{zk \text{ max}}$. При ограничении коэффициента ОСШ значением 20 дБ точность мешающих параметров должна выбраться так, чтобы эквивалентное СКО $\bar{\sigma}_{zk}$ было меньше $0.1 \bar{\sigma}_{zk(0)}$.

4. Выводы

На основе метода мешающих параметров разработаны алгоритмы обработки всей измерительной информации для классической постановки задачи оценивания состояния нелинейной динамической системы при знании вероятностных характеристик ошибок измерений и мешающих факторов. В качестве мешающих факторов рассмотрены неточность знания параметров исходной динамической системы, параметров измерительной системы, в частности систематические ошибки измерений, и априорная информация о начальном векторе состояния. Построены два способа решения системы нормальных уравнений задачи оценивания при совместной обработке измерений и мешающих параметров. Исходя из этого, построен также рекуррентный алгоритм фильтрации, а также расширенный фильтр Калмана для случая наличия рассмотренных мешающих параметров. Разработаны алгоритмы приближенной оценки точности оценивания с помощью метода ковариационного анализа с учетом данных мешающих параметров. Качественно проанализировано влияние ошибок измерений и мешающих факторов на точность полученных результатов оценивания. При анализе влияния ошибок мешающих параметров на результаты обработки измерений введен аналог коэффициента «отношение сигнал-шум» для оценки влияния отношения интенсивности ошибок мешающих параметров к ошибкам основных измерений. Этот коэффициент даёт возможность более разумно, с точки зрения практических соображений, выбрать точность мешающих параметров по

отношению к точности измерений при анализе точности оценки параметров рассматриваемой динамической системы. Построенный алгоритм использован для анализа навигационных характеристик комплекса «Небосвод».

Авторы признательны д.ф.-м.н. А.Г. Тучину, а также участникам семинаров ИНАСАН РАН, ИКИ РАН за обсуждение работы и ряд полезных советов.

5. Литература

1. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1. Вып. 1. С. 5–50.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. Учебно-методические материалы по специальному курсу “Управление колебаниями динамических систем”. Нижний Новгород, 2010. 93 с.
3. Бахшиян Б.Ц. Оценивание и коррекция параметров движущихся систем: Курс Лекций. М., Серия «Механика, управление и информатика», 2012. 72 с.
4. Белоусов Л.Ю. Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 216 с.
5. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб.: Наука, 1997. 318 с.
6. Ивашкин В.В., Гуо П. Оценка точности определения параметров орбиты опасного астероида по оптическим измерениям комплекса "Небосвод" // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 10/2. С. 51–56.
7. Игнатович Е.И., Каплев С.А., Можаров И.В., Почукаев В.Н., Щекутьев А.Ф. особенности задачи эфемеридного обеспечения навигационных космических аппаратов "ГЛОНАСС" с использованием межспутниковых измерений, методы и алгоритмы её решения. Часть I. // Космонавтика и ракетостроение, 2016. 6(91). С. 78–93.
8. Квашнин А.Г., Тучин А.Г. Априорная гарантированная оценка точности определения параметров динамической системы. Препринт № 104. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1991.
9. Клаус А. О систематических ошибках в задачах определения траектории // сб. Автоматическое управление космическими летательными аппаратами. М.: Наука. 1968. С. 296–308.
10. Кулешов Ю.П., Егоров В.Л., Мисник В.П. и др. Принципы и основные технические решения создания астрономического космического комплекса обнаружения и определения параметров движения опасных для Земли астероидов и комет (комплекс «Небосвод») // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. № 4. Т. 2. С. 89–97.
11. Лидов М.Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. 1964. Т.2. №5.
12. Лидов М.Л. Минимаксные методы оценивания // Препринты ИПМ им. М.В.

- Келдыша. 2010. № 71. 87 с.
13. Лысенко Л.Н., Бетанов В.В., Звягин Ф.В. Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 518 с.
 14. Назаренко А.И. Погрешности прогнозирования движения спутников в гравитационном поле Земли // под ред. Р.Р. Назирова, М.: ИКИ РАН, Серия «Механика, управление и информатика», 2010, 226 с.
 15. Назаренко А.И., Маркова Л.Г. Методы определения и прогнозирования орбит ИСЗ при наличии погрешностей в математическом описании движения. Сб. Прикладные задачи космической баллистики. М.: Наука, 1973. С. 36–67.
 16. Платонов А.К., Иванов Д.С. Методы обработки измерений: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2013. 107 с.
 17. Степанов О.А. Методы обработки навигационной измерительной информации. СПб: Университет ИТМО, 2017. 196 с.
 18. Тучин А.Т. Баллистико-навигационное проектирование полётов к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы // Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010, 238 с.
 19. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976, 416 с.
 20. Battin, R., An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 1999.
 21. Crassidis, John L. and Junkins, John L. Optimal estimation of dynamic systems, CRC Press LLC, 2004, 586 p.
 22. Kalman, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Theory, J. Basic Eng., Vol. 82, Series E, No. 1, pp. 35–45, March, 1960.
 23. Tapley B., Schutz B., Born G. Statistical orbit determination. Elsevier Academic Press, 2004, 563 p.

Оглавление

| | |
|---|----|
| 1. Постановка задачи | 3 |
| 2. Алгоритмы оценивания с использованием метода мешающих параметров.. | 6 |
| 2.1. Критерий оптимальности..... | 6 |
| 2.2. Линеаризация модели динамической системы и модели измерения | 7 |
| 2.3. Алгоритмы оценивания и построения ковариационной матрицы ошибки оценки | 10 |
| 2.4. Случай наличия и оценивания систематических ошибок измерений..... | 22 |
| 2.5. Случай, когда есть оценивание систематических ошибок, нет оценивания мешающего вектора z | 24 |
| 2.6. Случай, когда нет оценивания систематических ошибок | 24 |
| 2.7. Рекуррентные алгоритмы оценивания | 25 |
| 3. Анализ точности оценивания и прогнозирования | 27 |
| 3.1. Оценка точности прогнозирования..... | 27 |
| 3.2. Анализ влияния ошибок измерений и априорного знания начального состояния на точность оценивания | 28 |
| 3.3. Анализ влияния мешающих параметров на точность оценивания | 30 |
| 4. Выводы | 33 |
| 5. Литература..... | 34 |