ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 212 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

О гидродинамической неустойчивости двухфазного газопылевого слоя в центральной плоскости фрактального протопланетного диска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. О гидродинамической неустойчивости двухфазного газопылевого слоя в центральной плоскости фрактального протопланетного диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 212. 44 с. doi:10.20948/prepr-2018-212
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-212

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

О гидродинамической неустойчивости двухфазного газопылевого слоя в центральной плоскости фрактального протопланетного диска

Москва — 2018

Колесниченко А.В.

О гидродинамической неустойчивости двухфазного газопылевого слоя в центральной плоскости фрактального протопланетного диска.

Аннотация. Одной из нерешённых проблем в теории образования планет всё ещё остаётся отыскание эффективного механизма, объясняющего значительное сгущение мелкодисперсных твёрдых частиц протопланетного диска в более крупные пылевые агрегаты, объединяющиеся, в свою очередь, в прото-планетезимали с большой начальной массой. Среди механизмов, способствующих формированию планетезималей, важное место принадлежит гидродинамическим неустойчивостям, в частности, так называемой потоковой неустойчивости двухфазного газопылевого слоя из-за её способности концентрировать дисперсные частицы в плотные сгустки. В работе, вопреки большинству теоретических исследований, изначально принимающих одинаковость пылевых частиц и их компактную структуру, предложено распространить подобный анализ на случай учёта фрактальной природы и дисперсности пылевых агрегатов, образующихся в результате коагуляции. В рамках этого подхода рассмотрена неустойчивость пылевого слоя в центральной плоскости протопланетного диска при линейных осесимметричных возмущениях его параметров. Предварительный анализ позволил, в частности, сделать вывод, что присутствие пылевых фрактальных агрегатов разного размера повышает эффективность линейного роста потоковой неустойчивости, связанной с различием между скоростями пылевой и газовой фаз.

***Ключевые слова*:** Протопланетный диск, пылевые фрактальные агрегаты, потоковая неустойчивость, дисперсионное уравнение.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

On the hydrodynamic instability of the two-phase gas-dust layer in the central plane of the fractal protoplanetary disk.

Annotation. One of the key unsolved problems in the theory of the formation of planets is still search for finding an effective mechanism explaining the significant thickening of fine solid particles of a protoplanetary disk into larger dust aggregates, which in turn unite in proto-planetesimal with a large initial mass. Among the mechanisms contributing to the formation of planetesimals, an important place belongs to hydrodynamic instabilities, in particular, the so-called streaming instability of the two-phase gas-dust layer due to its ability to concentrate dispersed particles in dense clots. In the paper, despite the majority of theoretical studies, initially assuming the uniformity of dust particles and their compact structure, it was proposed to extend such an analysis to the case of taking into account the fractal nature and multi-scales of dust aggregates resulting from coagulation. In the framework of this approach, the instability of the dust layer in the central plane of the protoplanetary disk with linear axisymmetric perturbations of its parameters is considered. A preliminary analysis allowed, in particular, to conclude that the presence of dust fractal aggregates of different sizes increases the efficiency of linear growth of the flow instability associated with the difference between the velocities of the dust and gas phases.

Key words: Protoplanetary disk, streaming instability, dust fractal aggregates, dispersion equation.

ВВЕДЕНИЕ

В протопланетных дисках аэродинамическое трение между пылевыми частицами и несущим газом индуцирует различные гидродинамические неустойчивости, которые имеют, по-видимому, отношение к формированию тех или иных газопылевых структур (крупных пылевых агрегатов), что, в конечном счёте, способствуют образованию твёрдых планетезималей, являющихся предшественниками планет.

Образование планет Солнечной системы − сложный и все ещё довольно таинственный феномен. Вопросам происхождения планет посвящено несколько современных обзоров, среди которых следует выделить обзор (Johansen и др. 2014), посвящённый формированию планетезималей, обзоры (Morbidelli и др. 2012; Raymond и др. 2014), посвящённые образованию планет земной группы, и обзор (Helled и др. 2014), посвящённый планетам гигантам. Ключевая проблема происхождения планет связана с объяснением роста пылевых агрегатов в протопланетном диске. Механизм роста больших космических тел, от сантиметровых до километровых размеров, до сих пор является особенно активной областью исследования. Математическое моделирование этого явления потребовало привлечения к рассмотрению многих физических процессов, связанных, в частности, с различными неустойчивостями газопылевого облака, с гравитационным коллапсом пылевого субдиска, с аэродинамикой взаимодействия пыли и газа, с появлением разнообразных ловушек пылевых частиц (например, турбулентных вихрей, которые могут эффективно собирать большое количество пыли) (см., например, Sommeria, 1995; Youdin, Goodman, 2005; Chiang, Youdin, 2010; Armitage 2011; Barge, Lamrechts, Johansen, 2012). Однако полная достоверность этих и некоторых других механизмов роста пылевых агрегатов, по-прежнему, всё-ещё остаётся проблематичной. Возможно, это самая сложная и многогранная проблема рассматриваемого феномена.

До последнего времени большинство исследователей придерживались следующего сценария происхождения планет: Солнце, оказывая на турбулентное газопылевое облако силовое воздействие (вследствие наличия турбулентной вязкости[1)]), отдаёт ему угловой момент количества движения (см., например, Dubrulle, 1993), отодвигая тем самым вещество облака от себя к периферии, что приводит к образованию протопланетного газового диска, обладающего дифференциальным вращением. Молодой диск содержит в основном водород и гелий. После прекращения сжатия прото-солнечного облака вещество в нём быстро охлаждается, в результате чего конденсируются пылевые частицы субмикронного размера (в общем случае композитные тела, состоящие из водяного

[1)] Главным аргументом в пользу турбулентности в диске является большое число Рейнольдса $\sim 10^{14}$.

льда, силикатов, железа и других веществ[2]), которые начинают оседать сквозь газ, образуя пылевой слой (субдиск) в окрестности экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска. В классических моделях образования прото-планетезималей предполагалось, что отдельные пылинки, оседая к центральной плоскости диска, сталкиваются друг с другом и образуют пылевые агломераты (кластеры), скрепляемые силами электростатического притяжения (см., например, Dominik, Tielens 1997), причём более крупные из них опускаются и растут быстрее (Goldreich, Ward, 1973; Nakagawa и др., 1981). Далее эти пылевые кластеры уплотняются при столкновениях, формируя малые центры конденсации (Goldreich, Ward, 1973; Weidenschilling, Cuzzi, 1993; Weidenschilling, 1995; Blum, Wurm, 2008). Из-за баланса давления, гравитации и центробежной силы скорость орбитального движения газа меньше, чем у твёрдых частиц на том же расстоянии от звезды. В результате этого твёрдые тела размером более нескольких миллиметров тормозятся встречным ветром, который вынуждает их по спирали опускаться к звезде (Nakagawa и др., 1986). Приближаясь к звезде, они нагреваются и постепенно содержащиеся в них фракции с низкой температурой кипения испаряются. Интервал расстояний ~ 2-4 а.е. (так называемая «линия льда»), на котором происходит этот процесс, делит диск на внутреннюю область, лишённую летучих веществ и содержащую тугоплавкие тела, и внешнюю, богатую летучими веществами и содержащую ледяные тела. В области «линии льда», где накапливаются испарившиеся из ледяных пылинок молекулы воды, происходит разрыв в гидротермодинамических параметрах газа и возникает скачок давления, ускоряющий движение газа вокруг звезды. В результате этого происходит изменение направления силы трения, которая останавливает миграцию твёрдых частиц внутрь диска, находящихся под влиянием попутного течения. А поскольку из внешних слоёв диска твёрдые частицы всё ещё продолжают поступать, то область в окрестности «линии льда» превращается в зону их скопления и роста. Тогда как мелкие частицы ещё остаются на больших $z-$координатах, более крупные достигают окрестности экваториальной плоскости и повышают там плотность пылевой составляющей (Dubrulle и др.,1995). Резкой границы пылевого слоя нет. При сильном уплощении образовавшегося пылевого субдиска, когда плотность пыли в нём достигает некоторого критического значения, субдиск становится гравитационно неустойчивым и распадается на многочисленные пылевые сгущения (Toomre, 1964; Сафронов, 1960; 1969; Goldreich, Ward, 1973; Nakagawa и др., 1986; Nakamoto, Nakagawa, 1994; Youdin, Shu, 2002). В областях диска с

---

[2] Пылинки представляют собой мелкие <u>кристаллические</u> или аморфные образования, состоящие из <u>силикатов</u>, <u>графита</u> и, возможно, окислов металлов, покрытые сверху оболочкой из намёрзших газов, в частности, ледяные частицы состоят из тугоплавкого ядра и оболочки из лёгких элементов, а оксидные пылинки представляют собой смесь мелких частиц, состоящих из двухатомных окислов MgO, SiO, CaO, FeO.

высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения (Dominik и др., 1997), служащих основой зародышей прото-планетезималей. При дальнейшем объединении пылевых агрегатов в результате процессов коагуляции происходит их рост в крупные твёрдые тела, объединяющиеся в свою очередь в прото-планетезимали с большой начальной массой порядка массы астероидов $\sim 10^{15}$-10^{19} г и размерами в пределах 0,1-10 км (см. Weidenschilling, 1980; Сафронов, 1969; Nakagawa и др., 1983). Наконец, на заключительной стадии процесса эволюции первичного газопылевого диска, благодаря собственной гравитации, происходит формирование твёрдотельных километровых планетезималей.

К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, получении данных наблюдений околозвёздных аккреционных дисков, открытии экзопланет, совершенствовании теоретических подходов и методов математического моделирования, астрофизики всё ещё далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария. Одна из таких нерешённых проблем – поиск физического механизма объединения исходных пылевых частиц субмикронного и микронного размеров газопылевого диска в твёрдотельные тела. Известно, что вероятность агрегации (слипания) пылевых частиц при парных столкновениях понижается, когда образовавшиеся силикатные песчинки становятся больше $r\sim$ 0.1-1 см., а при увеличении их размеров до r >>10 см она быстро стремится к нулю. Ещё одним аргументом против образования планетезималей путём роста пылевых частиц при столкновениях является существование быстрого дрейфа к Солнцу твёрдых тел метрового размера, происходящего в результате потери ими момента вращения при торможении в газе. Твёрдые тела с радиусом $r\sim 1$ м. могут уменьшить своё расстояние от звезды вдвое всего за 10^3 лет. Собственно, по этой причине астрофизики уже на протяжении более чем тридцати лет не могут определиться с механизмом роста компактных частиц с размерами $\sim$5-10 см. до десятикилометровых планетезималей − путём их агрегации при взаимных столкновениях или модификации после стадии джинсовой неустойчивости пылевого субдиска (см., например, Витязев и др., 1990; Маров и др., 2008; Колесниченко, Маров, 2009).

Сегодня хорошо известно, что у классической картины роста планетезималей имеется, помимо указанных, ещё ряд серьёзных недостатков: дальнейший рост размера частицы ограничен (дросселирован) несколькими "барьерами", включающими дрожание (подпрыгивание), фрагментацию и радиальные барьеры дрейфа. Когда силикатные песчинки достигают приблизительно миллиметрового размера, они, вместо того чтобы сращиваться и далее, начинают «отскакивать» друг от друга (Zsom, Dullemond, 2008; Güttler и др., 2009). Вместе с тем в холодной (ледяной) области диска частицы могут расти в размере до нескольких дециметров прежде, чем они начинают отлетать друг от друга. Эту область называют «отскакивающим (живым)» барьером. При этих размерах пылевые частицы из-за газового сопротивления быстро мигрируют в диске по направлению к звезде. В результате этого радиального дрейфа возникают большие относительные скорости частиц разных размеров, что приводит к их разрушительным столкновениям. Даже если бы столкновения были не деструктивными, и частицы могли бы продолжать расти, то со временем образовавшиеся каменные глыбы метрового размера быстро мигрировали к звезде и были бы ею поглощены прежде, чем они смогли вырасти до ещё более крупных размеров (Weidenschilling, 1977). Это − известный метровый барьер, называемый в космогонии «дрейфовым барьером».

В последнее время в литературе предложен ряд новых механизмов роста частиц, позволяющих преодолевать возникающие затруднения. В частности, было показано, что по мере возникновения явно выраженной границы между пылевым субдиском и газом, на границе пылевого слоя развивается экмановский погранслой, в котором возникает вполне развитая турбулентность (GoldErich, Ward, 1973), что в сочетании с дифференциальным вращением космического вещества приводит к формированию собственного источника энергии, связанного с вязкой диссипацией крупномасштабного сдвигового (орбитального) течения в диске. Наличие подобного долговременного энергоисточника играет чрезвычайно важную роль в последующей самоорганизации дисковой системы, проявляющейся в поэтапном возникновении ряда пространственно-временных структур типа долгоживущих когерентных вихревых образований, колец из твёрдых мелкодисперсных частиц и т.п. (см. Горькавый, Фридман, 1994). Данный сценарий дополнительно подкрепляет концепция энергетической подпитки крупномасштабных вихревых образований (в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса немагнитного диска) механизмом вихревого динамо, изложенная в статье (Колесниченко, 2014). Благодаря этому механизму в спиральной[3)] дисковой турбулентности инверсный энергетический каскад в результате перераспределения части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов порождает в окрестности экваториальной плоскости диска иерархическую систему макроскопических энергетически ёмких когерентных вихревых структур обратно тому, что, как правило, имеет место в «обычной» зеркально-симметричной турбулентности (см. Монин, Яглом, 1996). В частности, наличие долгоживущих вихревых колец в окрестности экваториальной плоскости, служащих, по мнению ряда авторов (см. Klahr, Bodenheimer, 2003, 2006; Heng, Kenyon, 2010), питомником для формирования относительно крупных газопылевых кластеров в допланетном диске, способствует объединению мелкодисперсных частиц пыли как за счёт более тесного их сближения, роста частоты соударений и более низких скоростей столкновения, так и за счёт их механического, физико-химического и электрического слипания (Mizuno и др., 1988; Mizuno, 1989; Колесниченко, 2004, 2005;

[3)] Существование спиральной турбулентности в Солнечном допланетном диске обусловлено, в конечном счёте, фактом отсутствия отражательной симметрии анизотропного поля турбулентных скоростей относительно его экваториальной плоскости (Колесниченко, 2014).

Marov, Kolesnichenko, 2001, 2013), что, как известно, встречает известные трудности в лабораторных экспериментах (см. Barge, Sommeria, 1995; Tanga и др., 1996; Chavanis, 1999). Таким образом, турбулентные вихри, образующиеся в допланетном диске, также могут играть существенную роль в процессе роста мелкодисперсных пылевых частиц, сконденсированных из протозвёздных туманностей (Adams, Watkins, 1995; Brandenburg, Hodgson, 1998; Johansen и др., 2006ab, 2007, 2009; Heng, Kenyon, 2010). В результате возникают весьма благоприятные условия для самопроизвольного образования устойчивых пылевых образований (в общем случае фрактальных кластеров[4)]), формирующихся благодаря коагуляции движущихся по определённому закону твёрдых мономеров (Смирнов, 1986; 1991; Михайлов, Власенко, 1995). Однако и этот путь не без проблем. Во-первых, он требует изначального наличия турбулентности в пределах всего протопланетного диска, что не всегда очевидно. Во-вторых, чтобы существенно скапливаться под влиянием турбулентности, размеры частиц должны быть намного больше, чем это позволено «живым барьером», по крайней мере, во внутреннем диске. Однако механизм концентрации пылевых частиц, связанный со скоплением мелкомасштабных частиц в самых маленьких вихрях турбулентного потока, хорошо работает для хондра-размерных и других малых частиц (см. Cuzzi и др., 2001, 2016).

В работах (Okuzumi и др., 2012; Kataoka и др., 2013) было показано, что из-за тенденции ледяных частиц сформировывать очень пушистые (fluffy) пылевые кластеры режим столкновительной коагуляции может работать и вне «линии льда». Эти пушистые агрегаты, благодаря их чрезвычайно высокой пористости, являются стойкими к разрушительным столкновениям, а их радиальный дрейф в диске является очень медленным. Для типичных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с компактными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь режим движения в газовом несущем потоке, в частности, изменяются условия возникновения потоковой неустойчивости в диске из-за значительной модификации аэродинамической силы трения пыли и газа. Кроме этого могут быть обойдены как «отскакивающий/ломающий барьер», так и «дрейфовый барьер», а километровые планетезимали могут быть сформированы после финальной фазы уплотнения пылевых фрактальных образований. Однако следует заметить, что этот путь формирования планетезималей не работает эффективно в пределах линии снега, из-за клейкости силикатных зёрен.

В данной работе мы не будем касаться турбулентного механизма образования планетезималей во всей его полноте, а сосредоточимся на рассмотрении различных гидродинамических неустойчивостей двухфазного газопылевого по-

---

[4)] Под фрактальным пылевым кластером обычно понимают систему взаимодействующих частиц-мономеров, которая обладает свойством масштабного самоподобия в интервале размеров $r_0 << R$, где r_0 – масштабная единица измерения (например, радиус мономера) линейного размера кластера R.

тока, которые могут способствовать локальной концентрации «удачливых» пылевых агрегатов, преодолевающих указанные выше барьеры. Этими неустойчивостями являются, в частности, классическая гравитационная неустойчивость (*gravitational instability* (GI)) (см. Сафронов, 1969; Goldreich, Ward 1973), вековая гравитационная неустойчивость (*secular gravitational instability* (SGI), (Youdin, 2005) и потоковая неустойчивость (*streaming instability* (SI)) (Youdin, Goodman, 2005; Youdin, 2011; Takahashi, Inutsuka S.-I, 2014; Drążkowska, Dullemond, 2014; Umurhan и др. 2018), значение которой, однако, для рассматриваемой проблемы всё ещё остаётся проблематичным.

Потоковая неустойчивость дисковой двухфазной газопылевой среды является, по мнению ряда исследователей, перспективным механизмом образования планетезималей из-за её способности концентрировать твёрдые частицы в плотные глыбы, которые могут вызвать гравитационный коллапс в протопланетном диске (Bai, Stone, 2010a,b; Umurhan и др. 2018). Степень сгущения сильно зависит от интегрированного по высоте отношения массы тела к газу в протопланетных дисках. Как уже говорилось, оседание частиц является ключевым процессом их концентрации в окрестности центральной плоскости диска, благодаря которому пылевые частицы начинают играть активную роль в эволюции протопланетного облака. Получаемая при этом высокая массовая нагрузка на газ является основным фактором, необходимым для достижения высоких удельных весов пылевых агрегатов, в то время как турбулентная диффузия газовой фазы способствует выметанию подобных сгущений из пылевого субдиска (Johansen и др. 2007). Когда отношение плотности пылевой составляющей диска к плотности газа Γ приближается к единице, влияние пыли на движение несущей фазы становится достаточно сильным, для того чтобы убыстрить этот поток и вместе с ним двигаться по круговой орбите со скоростью, близкой к кеплеровской. В результате радиального дрейфа пылевых частиц возникает не связанная с силой тяжести неустойчивость газопылевого потока, вследствие которой возникают локальные флуктуации плотности частиц и формируются фрактальные пылевые агломераты в центральной плоскости диска.

Следует подчеркнуть, что до последнего времени в большинстве теоретических моделей роста пылевых частиц в допланетном диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых агрегатов. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые образования могут иметь весьма ажурную структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность (см., например, Blum 2004; Ormel и др., 2007; Suyama и др., 2008; Wada и др., 2008; Okuzumi и др., 2011; Suyama и др., 2012; Колесниченко, Маров, 2014). Эти пылевые агрегаты двигаются медленнее, чем окружающие их отдельные частицы, благодаря чему отдельные частицы пыли продолжают накапливаться, образуя более массивные пылевые нити. Плотность пылевых частиц при потоковой неустойчивости может превышать локальную плотность газа по крайней мере в несколько тысяч раз (см. Johansen и др. 2014).

В этом случае плотность превышает критическое значение для гравитационной неустойчивости, и потому происходит гравитационный коллапс пылевых сгустков, являющихся своего рода зародышами прото-планетезималей.

Для того чтобы выявить сущностное проявление потоковой неустойчивости в протопланетном диске, авторы статьи (Youdin, Goodman, 2005), положившей начало исследованиям этого механизма образования прото-планетезималей, сознательно не принимали во внимание его возможные усложнения, связанные, в частности, с вертикальной стратификацией газопылевого потока, с наличием давления в жидкостной пылевой фазе, с неодинаковостью размеров пылевых агломератов, с наличием турбулентной диффузии и силы самогравитации и, наконец, с фрактальным характером пылевых агрегатов. В данной работе нами сделана попытка учёта влияния фрактальности и многофракционности состава пылевых агрегатов на возникновение гидродинамической неустойчивости в протопланетном диске, что, несомненно, будет способствовать более углублённому пониманию тех реальных гидродинамических процессов, которые сопровождают объединение мелких пылевых частиц в крупные прото-планетезимали.

1. СТРУКТУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЫ

Перенос пыли газовым потоком и рост пылевых частиц формируют глобальную структуру протопланетного диска. Перенос пылевых частиц зависит от размера частиц (который меняется в течение долгого времени), в то время масштабная эволюция частиц в свою очередь зависит от локальных условий в диске (температуры, газовой плотности, плотности пыли и т.п.). Таким образом, рост частиц и их перенос несущим потоком происходят одновременно и, для того чтобы понять глобальные тенденции эволюции, оба эти эффекта должны быть приняты во внимание.

1.1. Основные допущения задачи

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность физико-химических и гидродинамических эффектов, происходящих в допланетном газопылевом облаке, с необходимостью требует разумной схематизации описания эволюции дисковой гетерогенной среды. В связи с этим далее будем предполагать, что эволюция газовой и пылевой составляющих протопланетного диска может быть адекватно описана при следующих допущениях:

i) первичные пылевые частицы (мономеры) – однородные по составу, твёрдые и недеформируемые, сферичные по форме и монодисперсные;

ii) предполагается несжимаемость материала мономеров, $\rho_0 = const$;

iii) истинная плотность материала мономеров много больше истинной плотности газовой составляющей дисковой системы, $\rho_0 >> \tilde{\rho}_g$;

iv) вкладом от приповерхностного слоя кластеров в динамику дисковой гетерогенной системы в целом можно пренебречь;

v) несущая фаза – сжимаемый совершенный газ;

vi) вязкостными эффектами для несущей и дисперсной фазы можно пренебречь;

vii) предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_p = T$;

viii) при исследовании гидродинамической устойчивости газопылевого слоя можно пренебречь турбулентной диффузией пыли, вызванной турбулентностью газовой фазы;

xi) предполагается, что фрактальная среда пылевых кластеров внутри элементарного (совокупного) макрообъёма $\delta\mathcal{V}$ имеет фрактальную размерность D, а размерность на его границе $\delta\mathcal{W}$ равна d (в общем случае размерность d не равна ни 2, ни $D-1$).

1.2. *Основные структурные параметры фрактальных кластеров*

Далее все первичные мелкодисперсные компактные частицы газопылевого протопланетного облака вне зависимости от их реальной формы, размера и материала будем считать твёрдыми сферами, имеющими один и тот же радиус r_0 и массу m_0, поскольку форма мономера (сферическая, эллипсоидальная и т.п.) оказывает незначительное влияние (≲2%) на фрактальную размерность образующихся кластеров (см., например, Bertini и др., 2009). На первоначальном этапе роста (на основе механизма «частица-частица») пылевые образования состоят из небольшого числа n_0 первичных мономеров и по этой причине не могут, вообще говоря, считаться фракталами. Но, по мере дальнейшего слипания мономеров в кластеры, механизмом «кластер-кластер» формируются фрактальные пылевые агрегаты относительно крупных размеров. При этом число первичных пылевых частиц (ядер), входящих в состав изотропного фрактального пылевого агрегата (ФПА), и масса кластера m^{cl} определяются следующими асимптотическими формулами (см., например, Смирнов, 2011)

$$n_0 = (R/r_0)^D, \qquad m^{cl} = m_0 n_0 = m_0 (R/r_0)^D, \quad R/r_0 >> 1, \tag{1}$$

в которых $R = \left(\dfrac{5}{6N} \sum\limits_{i,k=1}^{N} \left| \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k \right|^2 \right)^{1/2}$ – радиус гирации (характерный размер изотропного кластера), определяемый как среднеквадратичный радиус агрегата, измеряемый от его центра тяжести (Okuzumi и др., 2009); N – число мономеров, принадлежащих кластеру; $\boldsymbol{r}_i$ – радиус вектор i-го мономера, входящего в кластер;

$$D = \ln n_0 / \ln(R / r_0), \quad (1 < D < n) \tag{2}$$

– фрактальная массовая размерность кластера, являющаяся количественной характеристикой заполнения им евклидова пространства размерности $n\,(=1,2,3)$, а также характеризующая самоподобие его внутренней структуры. При этом массовая размерность D не зависит от того, является ли упаковка сфер радиуса r_0 плотной, случайной или пористой с однородным распределением пустот. Реальная структура кластеров характеризуется чрезвычайно сложной и нерегулярной геометрией. Хотя размерность D и не отражает полностью геометрические свойства фрактала, она, однако, позволяет учитывать основные свойства фрактальных структур при моделировании широкого класса явлений. Дальше мы ограничимся рассмотрением случая гомогенной фрактальной среды, когда степенной закон (1) не зависит от расположения (перемещения) кластеров в пространстве. Кроме этого, будем предполагать, что внутренняя структура всех кластеров, формирующихся в аэродисперсной дисковой среде, одинакова, поскольку они образуются приблизительно в одних и тех же условиях изучаемых областей диска. Именно по этой причине численные значения массовой размерности кластеров (при однотипном способе их сборки) будем считать одинаковыми для всего ансамбля разномасштабных ФПА в диске. Заметим, что дробная массовая размерность D пылевых кластеров в дисковой среде определяет, в конечном счёте, их аэродинамические свойства, стабильность и динамику роста (см. Wiltzius, 1987; Chen и др.,1987), а также пространственно-временную эволюцию этих рыхлых образований в диске (Смирнов, 1991).

При объединении большого числа малых пылевых кластеров (в результате процесса кластер-кластерной ассоциации) образуются обладающие самоподобными свойствами на малых расстояниях[5)] однородные ворсистые агрегаты, в которых по мере увеличения их радиуса гирации увеличиваются размеры пустот, а средняя плотность (средняя массовая плотность вещества в объёме, занимаемом кластером) убывает по закону $\bar{\rho}^{cl} = \rho_0 \left(r_0 / R\right)^{3-D}$, где $\rho_0 = 3m_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер. Отсюда следует вывод, что чем больший объём занимают части фрактального агрегата, тем больше пустот всех размеров он содержит. Таким образом, одним из характерных свойств фрактального агрегата является его способность захватывать

[5)] Для кластера со случайным расположением частиц свойство самоподобия следует понимать статистически: если в разных частях кластера вырезать большое число кусков, находящихся в одинаковом объёме, то в среднем они будут содержать одинаковое число частиц.

большое пространство (за счёт создания ажурной, сильно разветвлённой структуры) при использовании меньшего по сравнению с плотным (компактным) агрегатом количества вещества, необходимого для его образования. Компактность и физические свойства отдельного кластера зависят как от характера движения первичных мономеров и кластеров (прямолинейное или броуновское) до столкновения, так и от вероятности слипания мономеров и кластеров при их соприкосновении. В зависимости от числовой плотности $N_1(\boldsymbol{r},t)$ мономеров (не входящих в состав кластеров) в единице объёма $\delta\mathcal{V} \equiv \delta\boldsymbol{r}\ (= \delta x \delta y \delta z)$ дисковой среды возможны два механизма роста кластеров с фрактальной структурой: в результате прилипания к кластеру мономеров или благодаря процессу кластер-кластерной агрегации. При этом в первом случае процесс роста кластера может происходить либо в результате присоединения к нему единичных ядер, двигающихся прямолинейно (*кинетический режим*), либо когда много первичных пылевых мономеров, двигающихся диффузионно, одновременно объединяются с кластером (*диффузионный или гидродинамический режим*).

Далее эволюционирующее газопылевое протопланетное ламинарное облако будем рассматривать как гетерогенный термодинамический комплекс, состоящий из двух взаимопроникающих континуумов, которые заполняют одновременно один и тот же объём евклидова пространства непрерывно – газовой фазы солнечного состава и полидисперсной фазы пылевых частиц (фрактальная среда с нецелой массовой размерностью D, меньшей размерности n координатного пространства задачи), которые находятся при общей абсолютной температуре $T(\boldsymbol{r},t)$ и давлении $P(\boldsymbol{r},t)$. Газовую фазу, являющуюся несущей средой, будем описывать моделью идеальной жидкости. В свою очередь, полидисперсную пылевую фазу будем считать фрактальной средой, состоящей из нескольких фракций: фракции первичных пылевых конденсированных мономеров и внедрённого в них большого числа фракций фрактальных агрегатов, отличающихся друг от друга размерами. Другими словами, элементарный макрообъём $\delta\mathcal{V}$ дисковой среды содержит, помимо несущей газовой фазы, описываемой обычными структурными параметрами (такими как числовая $n_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ и массовая $\rho_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) = n_{\mathrm{g}} m_{\mathrm{g}}$ плотности («размазанными» по совокупному элементарному объёму смеси), давление $P_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$, температура $T_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$, гидродинамическая скорость $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ и т.п.), ещё множество пылевых фрактальных образований (кластеров), которое можно разбить на j ($j = 1,2,\ldots,Q$) фракций с разными размерами кластеров[6)]. Если пронумеровать эти фракции в порядке возрастания размеров кластеров, то 1-фракция будет содержать первичные мономеры, 2-

[6)] Число фракций задаётся *apriori*, т.е. определяется моделью протопланетного диска.

фракция содержит ассоциации двух мономеров и т.д. В результате мы получим Q фракций, характеризуемых следующими характеристиками:

$$m_j^{cl} = n_{0j} m_0 , \quad R_j = r_0 n_{0j}^{\ 1/D} , \quad V_j^{cl} = \tfrac{4}{3} \pi R_j^3 , \quad N_j^{cl}(\boldsymbol{r}, t) ,$$

$$\rho_j^{cl}(\boldsymbol{r}, t) = m_0 n_{0j} N_j^{cl} , \quad \tilde{\rho}_j^{cl} = m_j^{cl} / V_j^{cl} , \ n_{0j} = (R_j / r_0)^D . \qquad (3)$$

Здесь D – фрактальная размерность отдельного кластера и фрактальной среды в целом; r_0 и m_0 – радиус и масса первичных мономеров, из которых составлен фрактальный кластер; $\rho_0 = 3 m_0 / 4 \pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер; – число первичных мономеров, входящих в состав j-го ФПА; R_j, $V_j^{cl} = \tfrac{4}{3} \pi r_0^3 n_{0j}^{\ 3/D}$, $m_j^{cl} = m_0 (R_j / r_0)^D$, $\boldsymbol{v}_{pj}(\boldsymbol{r}, t)$ – соответственно радиус гирации, объём, масса и гидродинамическая скорость ФПА j-го сорта; $\rho_j^{cl}(\boldsymbol{r}, t) = m_j^{cl} N_j^{cl}$, $\tilde{\rho}_j^{cl}(\boldsymbol{r}, t) = \rho_0 \left(R_j / r_0 \right)^{D-3}$ – соответственно массовая плотность и истинная массовая плотность ФПА j-го сорта. $N_j^{cl}(\boldsymbol{r}, t)$ – числовая плотность ФПА j-го сорта (число кластеров в единице объёма дисковой среды.

В табл. 1 приведены характерные структурные параметры газовой составляющей диска.

Таблица 1.

r	– расстояние до центра звезды
$\Sigma_g = 152 (r / 5 a.e.)^{-3/2}$ г см$^{-2}$	– поверхностная плотность газа
$T = 125 (r / 5 a.e.)^{-1/2}$ K	– температура
$\alpha_g = \nu \Omega_K / c_g^2 , \quad \alpha_g \simeq 1.4 \times 10^{-1} (r / 100 a.e.)^{9/14}$	– коэффициент турбулентной интенсивности диска
$r \,.\, \rho_g = \Sigma_g / \sqrt{2\pi} H_g$	– массовая плотность газа
$H_g = c_g / \Omega_K , \quad H_g / r = 0.05 (r / 5 a.e.)^{1/4}$	– газовая шкала высот
$c_g = \sqrt{kT / m_g} = 1.0 \times 10^5 (r / 1 a.e.)^{-1/4}$ см сек$^{-1}$	– изотермическая скорость звука
$m_g = 3.9 \times 10^{-24}$ г	– средняя молекулярная масса
$\Omega_K = \sqrt{G M_{star} / r^3} = 1.8 \times 10^{-8} (r / 5 a.e.)^{-3/2}$ рад сек$^{-1}$	– Кеплеровская частота
$Q_g = c_g \Omega_K / \pi G \Sigma_g , \quad Q_g \sim 56 (r / 1 a.e.)^{-1/4}$	– параметр Тумре

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ФРАКТАЛЬНОГО ГАЗОПЫЛЕВОГО ДИСКА

Рассмотрим дисковую модель, в которой будем пренебрегать турбулентной диффузией пылевой фазы в газе[7]. Газ и пылевые фрактальные агрегаты образуют $(Q+1)$ континуумов, которые взаимодействуют друг с другом через аэродинамическое сопротивление. В общем случае пылевые кластеры разных сортов двигаются с разными скоростями, что приводит к столкновительной фрагментации, сопровождаемой взаимным обменом массой, импульсом, моментом импульса и энергией. Однако далее мы будем пренебрегать процессами фрагментации (предполагая малыми относительные скорости $(\boldsymbol{v}_{pj}-\boldsymbol{v}_{pk})$ столкновения пылевых кластеров) и их воздействие на неустойчивость диска. Тогда система уравнений гетерогенной механики (в системе координат, связанной с центральной плоскостью диска, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_K=\Omega_K\boldsymbol{i}_z$ вокруг прото-Солнца), описывающая ламинарное движение газа и разномасштабных фрактальных агрегатов пыли в протопланетном диске, имеет вид:

$$\frac{d_g\rho_g}{dt}+\rho_g\nabla\cdot\boldsymbol{v}_g=0, \tag{4}$$

$$\frac{d_j\rho_{pj}}{dt}+\rho_{pj}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{pj}=0, \quad (j=1,2,\ldots,Q), \tag{5}$$

$$\frac{d_g\boldsymbol{v}_g}{dt}+2\Omega_K(\boldsymbol{i}_z\times\boldsymbol{v}_g)-\Omega_k^2\boldsymbol{r}=-\frac{1}{\rho_g}\nabla P_g+\nabla\left(\Phi-\frac{GM_{star}}{|\boldsymbol{r}|}\right)-\frac{1}{\rho_g}\boldsymbol{F}_{gp}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d_j\boldsymbol{v}_{pj}}{dt}+2\Omega_K(\boldsymbol{i}_z\times\boldsymbol{v}_{pj})-\Omega_K^2\boldsymbol{r}=\\&=-\frac{1}{\rho_{pj}}\nabla P_{pj}+\nabla\left(\Phi-\frac{GM_{star}}{|\boldsymbol{r}|}\right)+\frac{1}{\rho_{pj}}\boldsymbol{F}_{g,pj},\ (j=1,2,\ldots,Q),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\nabla^2\Phi=4\pi G(\rho_g+\sum_{j=1}^{Q}\rho_{pj}). \tag{8}$$

---

[7] Хотя в работе рассматривается модель ламинарного диска, турбулентность всё же учитывается косвенно через её влияние (через коэффициент турбулентной интенсивности α) на некоторые исходные параметры задачи (см. ниже).

Здесь $d_l(..)/dt = \partial(..)/\partial t + \boldsymbol{v}_l \cdot \nabla(..)$ − субстанциональная производная для континуума l; Φ − потенциал самогравитации для газопылевого диска, удовлетворяющий уравнению Пуассона (8); G и M_{star} − гравитационная постоянная и масса прото-звезды; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_x x + \boldsymbol{i}_y y + \boldsymbol{i}_z z$; через x, y и z обозначены соответственно локальные радиальные, азимутальные и высотные координаты;

$$\boldsymbol{F}_{g,p} = \sum_{j=1}^{Q} \boldsymbol{F}_{g,j} \cong -k_B T_g \left[\sum_{j=1}^{Q} \frac{N_j^{cl}}{D_{g,j}} \right] (\boldsymbol{v}_d - \boldsymbol{v}_g) \qquad (9)$$

– сила лобового сопротивления движению пылевых агрегатов в газе; $D_{g,pj}$ – коэффициент бинарной диффузии ФПА j-го сорта в газе; $P_{p_j} = c_{pj} \rho_{pj}$, c_{pj} – соответственно давление и дисперсия скорости j-ой пылевой фракции; k – постоянная Больцмана. Отметим, что хотя система уравнений (4)-(8) непосредственно не учитывает эффекты столкновения фрактальных[8)] пылевых фракций между собой, фракции, тем не менее, связаны друг с другом из-за их силового взаимодействия с газовой фазой.

2.1. Диффузия пылевых фрактальных агрегатов в газе

Перенос ФПА в газопылевом диске определяется их взаимодействием с молекулами несущего газа и двигающимися вместе с ними мелкодисперсными пылевыми частицами, и это взаимодействие имеет различный характер в зависимости от радиуса гирации кластеров и массовой плотности ρ_g газа. В разреженной аэродисперсной среде, когда $l_g >> R_j$ (где l_g – длина свободного пробега атомов или молекул в газе), сила торможения движущегося пылевого агрегата создается в результате однократных столкновений с ним газовых частиц, что *соответствует кинетическому режиму* переноса этого агрегата в газовом потоке. В плотном газе, когда $l_g << R_j$, в каждый момент времени большое число частиц газа одновременно взаимодействует с кластером, и дви-

[8)] Следует заметить, что фрактальные среды не могут, вообще говоря, рассматриваться как сплошные среды, поскольку существуют области пространства, не заполненные частицами среды. Для адекватного описания фрактальной пылевой дисковой среды с нецелой массовой размерностью необходимо в общем случае основываться на дробно-интегральной модели, в рамках которой интегралы дробного порядка используются для получения обобщений уравнений законов сохранения на фрактальные среды (см. Прил., а также статью (Kolesnichenko, Marov, 2013)).

жение кластера соответствует диффузионному (гидродинамическому) режиму. В случае кинетического режима движения коэффициент диффузии $D^{kin}_{g,pj}$ фрактальных кластеров в газе определяется формулой

$$D^{kin}_{g,pj} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{kT_g m_g}}{\rho_g} \frac{1}{R_j^2} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{c_{gs}}{n_g} \frac{1}{R_j^2}, \quad l_g > R_j, \tag{10}$$

а сила сопротивления (9) движению совокупности пылевых агрегатов в результате их взаимодействия с разреженной газовой фазой описывается обобщённым законом Эпстейна

$$\boldsymbol{F}^{kin}_{g,p} = \sum_{j=1}^{Q} \boldsymbol{F}^{kin}_{g,pj} \cong -\frac{8\sqrt{2\pi}}{3} c_{gs}\rho_g \sum_{j=1}^{Q} \left[R_j^2 N_j^{cl} (\boldsymbol{v}_{pj} - \boldsymbol{v}_g) \right], \quad l_g > R_j \tag{11}$$

для агрегатов с размерами, меньшими или сравнимыми со средней длиной свободного пробега l_g молекул газа. Здесь $c_{gs} = \sqrt{kT_g / m_g}$ – изотермическая скорость звука в газе.

В другом предельном случае (в диффузионном режиме движения) коэффициент диффузии фрактальных агрегатов в плотном газе определяется формулой

$$D^{dif}_{g,pj} = \frac{2kT_g}{\pi R_j^2 \rho_g C_{g,j} \left| \boldsymbol{w}_{gp} \right|} = \frac{4kT_g}{\pi R_j \eta_g C_{g,j} \boldsymbol{Re}_{g,j}}, \quad l_g << R_j, \tag{12}$$

где $\eta_g = \rho_g \nu_g$, $\nu_g = (\sqrt{8/\pi}/3) l_g c_{gs}$ – соответственно коэффициент сдвиговой и кинематической вязкости (см. Чепмен, Каулинг, 1960); $l_g = 1/\sigma_g n_g$; $\sigma_g = 2 \times 10^{-15}$ см^2 – газокинетическое сечение столкновения частиц в газе; $\left|\boldsymbol{w}_{gp}\right| = \left|\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_p\right|$; $C_{g,j}(\boldsymbol{Re}_{g,j})$ – эффективный коэффициент аэродинамического сопротивления движению пылевого кластера j-го сорта (сферы радиуса R_j) в газе, который в общем случае достаточно сложным образом зависит от числа Рейнольдса $\boldsymbol{Re}_{g,j} = 2R_j \left|\boldsymbol{w}_{gp}\right| / \nu_g$. В последнее время в астрофизической литературе получило достаточно широкое распространение следующее выражение для коэффициента $C_{g,j}$ (Perets, Murray-Clay, 2011):

$$C_{g,j}(\boldsymbol{Re}_{g,j}) = \frac{24}{\boldsymbol{Re}_{g,j}} (1 + 0.27\boldsymbol{Re}_{g,j})^{0.43} + 0.47\left[1 - \exp(-0.04\boldsymbol{Re}_{g,j}^{0.38})\right]. \tag{13}$$

В данной работе, как указывалось выше, мы не будем учитывать процессы фрагментации ФПА при столкновениях, поэтому вполне естественно предположить, что относительные скорости $\boldsymbol{w}_{gj}$ столкновения малы (столкновения кластеров с большими относительными скоростями сопровождаются, как известно, их разрушением). Тогда, при малых числах Рейнольдса $C_{g,j}(Re_{g,j}) \cong 24 / \boldsymbol{Re}_{g,j}$, коэффициент диффузии кластеров (при гидродинамическом режиме движения) принимает вид:

$$D_{g,pj}^{dif} = \frac{kT_g}{6\pi R_j \eta_g} = \left(\frac{kT_g m_0^{1/D}}{6\pi r_0 \eta_g} \right) (m_j^{cl})^{-1/D}, \quad l_g << R_j, \tag{14}$$

а соответствующая сила лобового сопротивления $\boldsymbol{F}_{g,d}^{dif}$ (9) задаётся законом Стокса

$$\boldsymbol{F}_{g,p}^{dif} = \sum_{j=1}^{Q} \boldsymbol{F}_{g,pj}^{dif} = 6\pi\eta_g \sum_{j=1}^{Q} \left[N_j^{cl} R_{gj} (\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_{pj}) \right] = \frac{6\pi\,\eta_g r_0}{m_0^{1/D}} \sum_{j=1}^{Q} \left[N_j^{cl} (m_j^{cl})^{1/D} (\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_{pj}) \right]. \tag{15}$$

Заметим, что в протопланетном диске на расстоянии $r = 1 а.е.$ длина свободного пробега частиц газа $l_g \approx 1 см$, а на расстоянии $r = 10 а.е.$ $l_g \approx 1 м$. По этой причине пылевые агрегаты с размерами $1 - 100 см$ находятся в стоксовом режиме торможения на $1 а.е.$ и в режиме Эпстейна на $10 а.е.$

Формулы (10) и (12) для коэффициентов диффузии кластеров в диффузионном и кинетическом режимах удобно объединить, и использовать для коэффициента диффузии пылевых образований в газовом потоке следующее соотношение:

$$D_{g,pj} = D_{g,pj}^{dif} + D_{g,pj}^{kin} = \frac{kT_g}{6\pi\eta_g R_j} \left(1 + \frac{15\pi}{32\sqrt{2}} \frac{l_g}{R_j} \right) \cong \frac{kT_g}{4\sqrt{2\pi} c_{sg} \rho_g R_j^2} \left(\frac{1}{\boldsymbol{Kn}_j} + 1{,}5 \right), \tag{16}$$

которое переходит в (10) или (12) в пределе малых или больших чисел Кнудсена $\boldsymbol{Kn}_j = l_g / R_j \simeq 10^{15} / 2n_g R_j$ соответственно. При этом сила взаимодействия (9) между совокупностью ФПА и газовой фазой диска принимает вид:

$$\boldsymbol{F}_{g,p} = \sum_{j=1}^{Q} \boldsymbol{F}_{g,pj} \cong -kT_g \sum_{j=1}^{Q} \left[\frac{N_j^{cl}}{D_{g,pj}} (\boldsymbol{v}_{pj} - \boldsymbol{v}_g) \right] \cong$$

$$\simeq -4\sqrt{2\pi}c_{gs}\rho_g \sum_{j=1}^{Q}\left[\frac{R_j^2 N_j^{cl}}{\left(1/\boldsymbol{Kn}_j + 1,5\right)}(\boldsymbol{v}_{pj} - \boldsymbol{v}_g)\right]. \quad (17)$$

Важно отметить, что формула (17) при численном моделировании эволюции протопланетного облака позволяет учитывать плавный переход от кинетического режима к диффузионному режиму взаимодействия пылевых агрегатов с газом по мере увеличения как плотности газовых частиц n_{g}, так и радиусов гирации R_j ФПА при их оседании к центральной плоскости диска, причём этот переход управляется параметром $n_{\mathrm{g}} R_j$.

2.2. Ограничения на размеры пылевых фрактальных агрегатов, при которых справедлив закон Стокса

При написании формул (12) и (13) мы предположили, что соответствующие числа Рейнольдса малы. Выясним, при каких максимальных размерах пылевых агрегатов это допущение справедливо, на примере их свободного квазистационарного оседания в газе к центральной плоскости диска под влиянием z-компоненты силы тяготения Солнца $g_z = \Omega_k^2 z$ (здесь Ω_k – кеплеровская угловая скорость на экваториальной плоскости диска). При указанных условиях уравнение движение j-кластера (7) сводится к виду

$$6\pi R_j \eta_{\mathrm{g}} \, \boldsymbol{w}_{gp}\big|_z = g_z m_j^{cl} = g_z\left(\tfrac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^{3-D}\right)R_j^D. \quad (18)$$

Отсюда для скорости гравитационного оседания (вдоль оси z) одиночного ФПА j-го сорта в неограниченном газопылевом диске будем иметь

$$w_{gj}\big|_z \equiv -u_{zj} = \Omega_k^2 z\left(\frac{2\rho_0}{9\eta_g} r_0^{3-D}\right)R_j^{D-1} = \Omega_K^2 z\left(\frac{m_0^{1/D}}{6\pi r_0 \eta_g}\right)(m_j^{cl})^{1-1/D}. \quad (19)$$

Определим число Рейнольдса формулой $\boldsymbol{Re}_{g,j} = 2R_j u_{zj}/\nu_g$; тогда условие на радиус гирации ФПА, при выполнении которого число Рейнольдса мало ($\boldsymbol{Re}_{g,j} \ll 1$), имеет вид: $1 \gg Re_{g,j} = g_z\left(4\rho_0 r_0^{3-D}/9\eta_g^2\right)R_j^D$, откуда

$$R_j \ll r_0^{1-3/D}\left(9\eta_{\mathrm{g}}^2 / 4\rho_0 g_z \rho_{\mathrm{g}}\right)^{1/D}. \quad (20)$$

Это неравенство позволяет оценить максимальный размер стоксовских пылевых агрегатов. Из этой оценки (менее жёсткой по сравнению с оценкой

$R_j << \left(9\eta_g^2 / 4g_z\rho_g\rho_0\right)^{1/3}$ для компактных тел) следует, в частности, что в гравитационном поле пушистые фрактальные агрегаты оседают значительно медленнее, чем компактные частицы той же массы.

Следует отметить, что в силу структурных особенностей кластеров сила сопротивления газовой среды более точно определяется рассеянием её частиц на первичных ядрах фрактальных агрегатов (см. Михайлов, Власенко, 1995). Соответственно этому механизму рассеяния длина свободного пробега мономеров λ_0 внутри кластера (при средней плотности числа мономеров, входящих в кластер $\langle n\rangle_{0,j} = n_{0,j} / V_j^{cl} = 3R_j^{D-3} / 4\pi r_0^D$), определяется соотношением

$$l_{j0} = 1/\pi r_0^2 n_{0,j} = \tfrac{4}{3} R_j \left(r_0/R_j\right)^{D-2}, \qquad (21)$$

согласно которому для кластеров с фрактальной размерностью $D < 2$ выполняется условие $l_{j0} > R_j$. Поскольку при таком способе описания условие применимости формулы Стокса для силы сопротивления движению фрактального агрегата имеет вид $l_g << R_j$ и $l_{j0} << R_j$, то из формулы (21) видно, что для фрактальных агрегатов с $D < 2$ это условие не выполняется, в силу чего формула Стокса для таких кластеров неприменима.

Таблица 2. Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации твёрдых частиц (Смирнов, 1991)

Модель агрегации	Вероятность прилипания, κ^P	Фрактальная размерность
Прямолинейная траектория, кластер-частица	1	$2{,}97 \pm 0{,}08$
Броуновское движение, кластер-частица	1 0,25	$2{,}51 \pm 0{,}06$ $2{,}48 \pm 0{,}12$
Прямолинейная траектория, кластер-кластер	1	$2{,}00 \pm 0{,}05$
Броуновское движение, кластер-кластер	1	$1{,}78 \pm 0{,}05$
Кластер-кластер,малая вероятность прилипания (RLCA-модель)	$\kappa^P < 1$	$2{,}11 \pm 0{,}03$

Массовую размерность D определяют, как правило, на основе численного моделирования поведения кластера в гравитационном (или электрическом) поле с помощью “*in-situ*”-методов процесса его сборки. Эти методы различаются специфическими деталями кластер-кластерной агрегации, к которым, в частности, относятся: характер движения кластеров (прямолинейное или броуновское), характер объединения кластеров в зависимости от вероятности слипания κ^{P} при их взаимном касании, наличие или отсутствие полного реструктуринга (при котором кластеры связываются в трёх точках), нарушение изотропии объединяемых кластеров, связанное с наведённым электрическим диполем во внешнем электрическом поле или наведённым магнитным моментом во внешнем магнитном поле, несферичность сталкивающихся кластеров, наличие вращательной диффузии ФПА, приводящей к захвату налетающего кластера краями образуемого пылевого агрегата (что способствует уменьшению его фрактальной размерности) и т.п. В Табл. 2 представлены значения фрактальной размерности кластеров, образующихся в трёхмерном пространстве при различных механизмах роста.

Итак, с учётом формулы (15), уравнения движения (6) и (7) для газа и совокупности пылевых гранул могут быть переписаны следующим образом:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_g}{\partial t} + \boldsymbol{v}_g \cdot \nabla \boldsymbol{v}_g + 2\Omega_K (\boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{v}_g) - \Omega_k^2 \boldsymbol{r} =$$

$$= -\frac{\nabla P_g}{\rho_g} + \frac{1}{\rho_g}\sum_{j=1}^{Q} \frac{\rho_{pj}(\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_{pj})}{\tau_{stop,j}} + \nabla\left(\Phi - \frac{GM_{star}}{|\boldsymbol{r}|}\right), \qquad (22)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{pj}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{pj} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{pj} + 2\boldsymbol{v}_{pj} \times \boldsymbol{\Omega}_K - \Omega_K^2 \boldsymbol{r} =$$

$$= -\frac{\nabla P_{pj}}{\rho_{pj}} + \frac{\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_{pj}}{\tau_{stop,j}} + \nabla\left(\Phi - \frac{GM_{star}}{|\boldsymbol{r}|}\right), \quad (j = 1, 2, \ldots, Q). \qquad (23)$$

Здесь

$$\tau_{stop,j} \equiv \frac{\rho_p |\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_{pj}|}{|\boldsymbol{F}_{g,pj}|} = \frac{\rho_{pj}}{6\pi\eta_g}\left[N_j^{cl} R_j\right]^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} c_{sg}} \frac{\rho_{pj}}{\rho_g}\left[\frac{R_j^2 N_j^{cl}}{\left(1/\boldsymbol{Kn}_j + 1,5\right)}\right]^{-1} \qquad (24)$$

– время торможения пылевых гранул j-фракции в газовом потоке. Система уравнений (4), (5), (22) и (23) может быть использована для моделирования гидродинамической трёхмерной неустойчивости во фрактальной газопылевой дисковой среде.

На основе этой системы уравнений проанализируем далее дисперсионные свойства осесимметричных возмущений в плоскости тонкого газопылевого слоя протопланетного диска.

3. ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКОСТИ ДИСКА

3.1. Основные безразмерные параметры гидродинамической неустойчивости в плоском газопылевом слое

Гидродинамическая неустойчивость газопылевой среды в плоскости диска и способность твёрдых пылевых образований (кластеров, гранул, комков) гравитационно уплотняться управляются некоторым числом безразмерных параметров, среди которых ключевое значение имеет параметр металличности $\Gamma = \sum_{j=1}^{Q} \Gamma_j = \sum_{j=1}^{Q} \Sigma_{pj} / \Sigma_g = \Sigma_p / \Sigma_g$, являющийся суммой отношений поверхностных плотностей пылевых фракций $\Sigma_{pj/g} = \sqrt{2\pi} \rho_{pj/g} H_{pj/g}$ и газовой Σ_g компоненты дисковой среды. Когда значение параметра Γ в протопланетном диске порядка 10^{-2}, то совокупная пылевая фаза динамически не влияет на движение газовой фазы, в то время как газ сильно воздействует на гидродинамику пыли. Здесь $H_{pj/g} = c_{pj/g} / \Omega_K$ − высоты однородной атмосферы для отдельных пылевых фракций и газовой фазы, причём согласно (Yudin, Lithwick, 2007)

$$H_{dj} = H_g \Big/ \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha_g \boldsymbol{St}_j} \cdot \frac{\boldsymbol{St}_j + 2}{\boldsymbol{St}_j + 1}}.$$

В случае если число Стокса для j-ой пылевой фракции $1 \ll \boldsymbol{St}_j \ll \alpha_g^{-1}$, то

$$H_{dj} \cong H_g / \sqrt{1 + 1/\alpha_g \boldsymbol{St}_j} \cong \sqrt{\alpha_g \boldsymbol{St}_j} H_g.$$

Здесь

$$\alpha_g = \nu_g^{turb} / c_{sg} H_g = \nu_g^{turb} \Omega_K / c_{sg}^2$$

− безразмерный коэффициент турбулентной интенсивности (см. Shakura, Sunyaev, 1973), учитывающий турбулизацию газового потока; ν_g^{turb} − коэффициент турбулентной вязкости газа. Аналогично $\alpha_{pj} = \nu_{pj}^{turb} / c_{sg} H_{pj}$, где ν_{pj}^{turb} − коэффициент вязкости для j-ой фракции пыли в турбулентном потоке газа, причём параметры α_{pj} и α_g связаны соотношением:

$$\alpha_{pj} = \frac{\boldsymbol{St}_j^2 + \boldsymbol{St}_j + 4}{(\boldsymbol{St}_j + \boldsymbol{St}_j^{-1})^2} \alpha_g.$$

В работе (Pinte и др., 2016) показано, что численное значение параметра α_p для пылевого слоя, вычисленное с учётом шкалы высот для пыли в субдиске, отличается от стандартной альфа-параметризации (когда $\alpha_g \cong 10^{-2}$) глобальной турбулентности, имеющей место во всём протопланетном диске, и должно рассчитываться по формуле $\alpha_p = 3\times 10^{-4}(r/100\,a.e.)^2$.

Второй параметр $\zeta_j = c_{pj}^2 / c_{sg}^2$ − отношение дисперсий скоростей пылевой и газовой составляющих гетерогенного потока. Заметим, что в первом приближении, пульсации скоростей пылевых частиц связаны со свойствами турбулентности несущей газовой фазы, а не с межагрегатными столкновениями.

$$\zeta_j = \frac{\boldsymbol{St}_j^{\,2} + 2\boldsymbol{St}_j + 5/4}{(\boldsymbol{St}_j + \boldsymbol{St}_j^{\,-1})^2}\alpha_g \ .$$

Третий наиболее важный параметр – это безразмерное число Стокса пылевой фазы

$$\boldsymbol{St}_j = 1/\Omega_k \tau_{stop,j},$$

где $\Omega_k = \sqrt{GM_{star}/|\boldsymbol{r}|^3}$ − кеплеровская угловая скорость (равная характерной частоте колебаний звезды поперёк плоскости диска), $\boldsymbol{r}$ − центральный радиус-вектор, $\tau_{stop,j}$ − время торможения пылевых агрегатов j-ой фракции в газовом потоке. Точное значение параметра $\boldsymbol{St}_j$ зависит как от размеров пылевых агрегатов, так и от их радиального местоположения (Chiang, Youdin, 2010). Время торможения $\tau_{stop,j}$ пылевых агрегатов определяется формулой (24), а для плоского слоя (см. (29)).

$$\boldsymbol{St}_j \equiv \frac{1}{\tau_{stop,j}^{2d}\Omega_k} = \frac{2\Sigma_g}{\pi\rho_{pj}} \frac{R_j^2 N_j^{cl}}{\left(1/\boldsymbol{Kn}_j + 1{,}5\right)}.$$

Четвёртый параметр

$$Q_g = c_{sg}\Omega_k / \pi G\Sigma_g$$

− параметр Тумре (Toomre, 1964) для газовой компоненты, который определяет классическую гравитационную неустойчивость (GI) газового диска в отсутствие пылевых частиц. При значении этого параметра ниже критического $Q_g^{cr} = 2$ возникает нестабильный диск, а при значении параметра Q_g ниже единицы происходит фрагментация диска. Аналогичный параметр может быть введён и для пыли, причём $Q_p = \Gamma^{-1}\zeta^{1/2}Q_g$.

3.2. Базовые уравнения гетерогенной механики в плоскости тонкого диска

Будем далее считать, что исходные уравнения двухфазной газопылевой гидродинамики осреднены по вертикальной толщине газопылевого диска. Будем также пренебрегать возможными осложнениями (например, сдвиговой неустойчивостью и турбулентностью) возникающими на масштабах меньших шкалы высот для пыли $H_{pj}=c_{pj}/\Omega_K$. Кроме этого будем предполагать, что дисперсия скорости газа c_g и соответствующая шкала высот $H_g=c_{sg}/\Omega_K$ конечны, а слои пылевых фракций в субдиске находятся внутри газовой оболочки, так что $c_{pj} < c_{sg}$ и $H_{pj} < H_g$.

Принимая локальную модель «обрезанной» коробки для диска (см. Goldreich, Lynden-Bell, 1965), мы сосредоточимся на рассмотрении окрестности точки $(r,\theta)=(r_0,\Omega_K t)$ в цилиндрических координатах. При этом радиальная и азимутальная координаты имеют вид: $(x,y)=(r-r_0,\ r_0(\theta-\Omega_K t)$, а кеплеровская частота $\Omega_K = \sqrt{GM_{\odot}/r_0^3}$. Для простоты ограничимся также осевой симметрией задачи и стационарным фоном газопылевой среды с равномерным распределением плотностей пыли и газа ($\Sigma_{pj0} = const, \Sigma_{g0} = const$). Тогда осреднённые по высоте z уравнения гетерогенной механики (5), (6), (22) и (23), используемые далее для изучения дисперсионных свойств возмущений в плоскости тонкого диска, принимают вид:

$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot (\Sigma_g \boldsymbol{v}_g) = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_g}{\partial t} + \boldsymbol{v}_g \cdot \nabla_\perp \boldsymbol{v}_g + 2\Omega_K(\boldsymbol{v}_g \times \boldsymbol{i}_z) - \Omega_K^2 \boldsymbol{r} =$$

$$= -\frac{c_{sg}^2}{\Sigma_g}\nabla_\perp \Sigma_g + \nabla_\perp\left(\Phi - \frac{GM_{star}}{|\boldsymbol{r}|}\right) + \sum_{j=1}^{Q}\frac{\Gamma_{pj}(\boldsymbol{v}_{pj}-\boldsymbol{v}_g)}{\tau_{stop,j}^{2d}}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \Sigma_p}{\partial t} + \nabla_\perp \cdot (\Sigma_p \boldsymbol{v}_p) = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{pj}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{pj} \cdot \nabla_\perp)\boldsymbol{v}_{pj} + 2\Omega_K(\boldsymbol{v}_{pj} \times \boldsymbol{i}_z) - \Omega_k^2 \boldsymbol{r} =$$

$$= -\frac{c_{pj}^2}{\Sigma_{pj}} \nabla_\perp \Sigma_{pj} + \nabla_\perp \left(\Phi - \frac{GM_{star}}{|\boldsymbol{r}|} \right) + \frac{(\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_{pj})}{\tau_{stop,j}^{2d}}, \qquad (28)$$

где $\nabla_\perp \equiv \boldsymbol{i}_x \partial/\partial x + \boldsymbol{i}_y \partial/\partial y$; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_x x + \boldsymbol{i}_y y$ – центральный радиус-вектор; $\Sigma_{pj/g} = \sqrt{2\pi}\, H_{pj/g} \rho_{pj/g}$, $p_{pj/sg} = c^2_{pj/sg} \Sigma_{pj/g}$ – соответственно поверхностные плотность и плоское давление отдельных пылевых фракций и газа в тонком диске;

$$\tau_{stop,j}^{2d} = \frac{\pi}{2\Sigma_g \Omega_K} \left[\frac{\rho_{pj} R_j^2 N_j^{cl}}{\left(1/\boldsymbol{Kn}_j + 1,5\right)} \right]^{-1} \qquad (29)$$

– время торможения пылевых гранул j-го сорта в газовой компоненте плоского диска.

Система уравнений (25)-(28) должна быть дополнена осреднённым по высоте уравнением Пуассона

$$\nabla_\perp^2 \Phi = 4\pi G \left(\Sigma_g + \sum_{j=1}^{Q} \Sigma_{pj} \right) \delta z. \qquad (30)$$

Здесь δz – дельта-функция.

3.3. Линейные возмущения движения дисковой газопылевой среды

Для изучения динамики малых возмущений линеаризуем систему (25)-(28), для чего представим входящие в неё переменные в виде сумм равновесных и возмущённых величин:

$$\Sigma_{pj/\mathrm{g}} = \Sigma_{(pj/\mathrm{g})0} + \delta\Sigma_{pj/\mathrm{g}}, \quad \boldsymbol{v}_{pj/\mathrm{g}} = \boldsymbol{v}_{(pj/\mathrm{g})0} + \delta\boldsymbol{v}_{pj/\mathrm{g}}, \quad \Phi = \Phi_0 + \delta\Phi,$$

слабо нарушающих невозмущённый однородный фон гидродинамических параметров ($|\delta\chi| \ll |\chi_0|$ для всех переменных $\chi = \chi_0 + \delta\chi$). При этом по предположению пылевые агрегаты считаются захваченными газовым потоком и обе фазы, согласно закону Кеплера, двигаются с одинаковой скоростью $\boldsymbol{v}_{(pj/\mathrm{g})0} = -{}^3\!/_2\, \Omega_K\, x\boldsymbol{e}_y$.

В случае пренебрежения квадратичными по амплитуде нелинейными членами и всеми пространственными производными от стационарных величин (малыми по сравнению с производными от возмущённых величин) в системе

(25)-(28), можно получить систему линеаризованных уравнений гетерогенной механики для описания малых колебаний вращающегося газопылевого диска. Будем далее считать, что радиальные возмущения осесимметричного газопылевого слоя имеют вид монохроматической волны, т.е. зависимость возмущённых величин $\delta\chi$ от радиальной координаты x и времени t пропорциональна $\exp(-i\omega t + i\,\mathrm{k}\,x)$, где ω − круговая частота монохроматической волны с длиной волны $\lambda = 2\pi/|\mathrm{k}|$; k − волновое число; $|\mathrm{k}| = \sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2}$ (частота ω и волновое число k могут быть комплексными величинами). В этом случае линеаризованная указанным выше способом система дифференциальных уравнений (25)-(30) перейдёт в следующую систему алгебраических уравнений:

$$-i\omega\,\delta\Sigma_g + i\,\mathrm{k}\,\Sigma_{g0}\,\delta v_{gx} = 0, \tag{31}$$

$$-i\omega\delta v_{gx} - 2\Omega_K \delta v_{gy} = -c_{sg}^2 \frac{i\,\mathrm{k}\,\delta\Sigma_g}{\Sigma_{g0}} - i\,\mathrm{k}\,\delta\Phi + \sum_{j=1}^{Q} \Gamma_{j0} \frac{\delta v_{px} - \delta v'_{gx}}{\tau_{stop,j}^{2d}}, \tag{32}$$

$$-i\omega\delta v_{gy} + \frac{1}{2}\Omega_K \delta v_{gx} = \sum_{j=1}^{Q} \Gamma_{j0} \frac{\delta v_{gx} - \delta v_{px}}{\tau_{stop,j}^{2d}}, \tag{33}$$

$$-i\omega\,\delta\Sigma_{pj} + i\,\mathrm{k}\,\Sigma_{pj0}\delta v_{pjx} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots Q), \tag{34}$$

$$-i\omega\delta v_{pj,x} - 2\Omega_K \delta v_{pj,y} = -c_{pj}^2 \frac{i\mathrm{k}\,\delta\Sigma_{pj}}{\Sigma_{pj,0}} - i\,\mathrm{k}\,\delta\Phi + \frac{\delta v_{gx} - \delta v_{pj,x}}{\tau_{stop,j}^{2d}}, \quad (j = 1, 2, \ldots Q), \tag{35}$$

$$-i\omega\delta v_{pj,y} + \frac{\Omega_K}{2}\delta v_{pj,x} = \frac{\delta v_{gx} - \delta v_{pj,x}}{\tau_{stop,j}^{2d}}, \quad (j = 1, 2, \ldots Q), \tag{36}$$

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi G}{|\mathrm{k}|}\left(\delta\Sigma_g + \sum_{j=1}^{Q} \delta\Sigma_{pj}\right). \tag{37}$$

Заметим, что если учитывать влияние на гравитационный потенциал Φ толщин пылевого и газового слоёв, то уравнение (37) следует переписать в виде (Shu, 1984):

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi G}{|\mathrm{k}|}\left(\frac{\delta\Sigma_g}{1 + |\mathrm{k}| H_g} + \sum_{j=1}^{Q} \frac{\delta\Sigma_{pj}}{1 + |\mathrm{k}| H_{pj}}\right), \tag{37*}$$

где поправочный множитель $\mathcal{F}(|\mathrm{k}|H) = 1/(1+|\mathrm{k}|H) < 1$ учитывает уменьшение самогравитации газопылевого слоя с ростом толщины диска для вертикально осреднённой модели, причём в пределе тонкого диска для длинных волн, $|\mathrm{k}|H \ll 1$.

Алгебраическая система (31)-(37) для возмущённых величин является исходной для дальнейшего анализа динамики малых линейных возмущений в рассматриваемой модели газопылевого диска с произвольным распределением параметров $\Sigma_{pj,0}$, Σ_{g0}, $c_{pj/g}$, Φ_0. На основе этой системы уравнений возможно, вообще говоря, получить в явном виде дисперсионное соотношение для изучения неустойчивости тонкого слоя. Однако вывод этого соотношения в общем случае – процедура чрезвычайно трудоёмкая. По этой причине ограничимся здесь (для простоты) рассмотрением двухжидкостной дисковой среды, состоящей из газа и совокупной пылевой фазы, полагая, что все пылевые фракции двигаются с одинаковой скоростью, $\boldsymbol{v}_{pj} = \boldsymbol{v}_p$.

3.4. Дисперсионное соотношение

Далее будем использовать обозначение $n = -i\omega$. Очевидно, что неустойчивость возникает (возмущения растут), если величина $\mathrm{Re}[n]$ становится положительной. Приравнивая к нулю определитель системы алгебраических уравнений (31)-(37), после несложных преобразований получим следующее дисперсионное уравнение 5-го порядка по n:

$$n^5 + \sum_{k=0}^{4} A_k n^k = 0, \tag{38}$$

которое описывает линейные возмущения гидродинамических параметров в плоскости вращающегося газопылевого диска с учётом влияния на его структуру давлений в фазах и эффекта аэродинамического трения. Здесь

$$A_4 = 2\Omega_K \boldsymbol{St}(1+\Gamma_0), \tag{39}$$

$$A_3 = \frac{A_4^2}{4} + 2\left[\Omega_K^2 + \mathrm{k}\, c_{sg}^2 - \pi G(2\Sigma_{g0} + \Sigma_p)|\mathrm{k}|\right], \tag{40}$$

$$A_2 = \frac{A_4}{2}\left\{2\left[\Omega_K^2 - 2\pi\Gamma_0 G(\Sigma_{g0} + \Sigma_{p0})|\mathrm{k}| + \mathrm{k}^2(c_{sg}^2 + c_p^2)\right] - c_p^2\,\mathrm{k}^2\right\}, \tag{41}$$

$$A_1 = \mathrm{k}^2 c_p^2(\Omega_K^2 + c_{sg}^2\mathrm{k}^2) + \Omega_K(\Omega_K^2 - 2\pi G\Sigma_{g0}|\mathrm{k}| + c_{sg}^2\,\mathrm{k}^2) - 2(c_{sg}^2 + c_p^2)\,\mathrm{k}^2\pi G\Sigma_{g0}|\mathrm{k}| +$$

$$+\frac{A_4^2}{4(1+\gamma_0)}\Big[(1+\Gamma_0)(\Omega_K^2-2\pi G\Sigma_{g0}\left|\mathrm{k}\right|+c_{sg}^2\mathrm{k}^2)+\Gamma_0\,\mathrm{k}^2(c_p^2-c_{sg}^2)\Big], \quad (42)$$

$$A_0=\mathrm{k}^2\,\Omega_K\boldsymbol{St}\Big\{\Gamma_0\Big[\,c_{sg}^2\Omega_K^2-2\pi G(\Sigma_{g0}+\Sigma_{p0})\left|\mathrm{k}\right|\Big]+$$

$$+c_p^2\Big[\,\Omega_K^2-2\pi G(\Sigma_{g0}+\Sigma_{p0})\left|\mathrm{k}\right|+(1+\Gamma_0)c_{sg}^2\mathrm{k}^2\Big]\Big\}, \quad (43)$$

где

$$\Sigma_p=\sum\nolimits_j\Sigma_{pj}\,,\quad \Gamma_0=\Sigma_{p0}/\Sigma_{g0}\,,\quad \boldsymbol{St}=\frac{2\Sigma_g}{\pi}\sum_{j=1}^{Q}\frac{1}{\rho_{pj}}\frac{R_j^2N_j^{cl}}{\left(1/\boldsymbol{Kn}_j+1{,}5\right)}.$$

На основе системы уравнений (38)-(43) возможно изучение как классических неустойчивостей (таких как гравитационная неустойчивость (GI), вековая гравитационная неустойчивость (SGI), потоковая неустойчивость (SI)), так и ряда новых неустойчивостей двухфазного газопылевого потока (например, резонансной неустойчивости сопротивления (Resonant Drag Instability), имеющих важное значение для образования планетозималей (см. Squire, Hopkins, 2018a,b). При этом нахождение критериев возникновения тех или других гидродинамических неустойчивостей в газопылевом слое основано на существенном упрощении дисперсионного уравнения (38), возможного при конкретизации численных значений безразмерных параметров (таких как $\boldsymbol{St}, \Gamma_0, \zeta, Q_{p/g}, \alpha_{p/g}, H_{p/g}$ и др.), характерных для той или иной области протопланетного диска (см., например, Youdin, 2005, 2011;Youdin, Lithwick 2007; Takahashi, Inutsuka, 2014;2016; Carrera и др., 2015, 2017; Зиглина, Макалкин, 2016).

Оставляя строгий количественный анализ системы (38)-(43) на будущее численное моделирование, проиллюстрируем возможности этого подхода на простом примере аналитического определения условий возникновения гидродинамических неустойчивостей в тонком субдиске в случае, когда нет заметного обратного влияния пыли на орбитальное движение газа.

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО ГАЗОПЫЛЕВОГО СЛОЯ

По современным представлениям потоковая неустойчивость двухфазной газопылевой дисковой среды, связанная с ростом возмущений плотности макроскопических пылевых агрегатов является естественным механизмом формирования планетезималей в областях протопланетного диска с высокой металличностью Γ (Youdin, Goodman 2005). Эта неустойчивость вызвана различием в скоростях пылевой и газовой фаз в диске, благодаря чему пылевые частицы быстро концентрируются в умеренно плотном пылевом слое (субдиске) в виде локализованных плотных глыб, перестающих дрейфовать к Солнцу. В результате возникающей неустойчивости в субдиске создаются необходимые условия для генерации растущих возмущений плотности макроскопических пылевых агрегатов (и последующего разрушения субдиска), в отличие от более мелких пылевых частиц ($\boldsymbol{St} \gg 1$) (с плохой обратной связью с газом по аэродинамическому сопротивлению ($\Gamma \ll 1$)), для которых характерны низкие темпы роста линейных возмущений[9]. В ряде работ (см., например, Youdin, 2005, 2011; Youdin, Lithwick 2007; Chiang, Youdin, 2010; Shariff, Cuzzi, 2011; Carrera и др., 2015, 2017) для случая компактности и одинаковости пылевых агрегатов найдены зависящие от параметров Γ и $\boldsymbol{St}$ условия возникновения потоковой неустойчивости и указана область значений этих параметров, где она особенно активна.

4.1. Линейные возмущения движения пыли в субдиске

Рассмотрим плоский пылевой субдиск, в котором возникает гидродинамическая неустойчивость. Характерная шкала расстояний в субдиске составляет приблизительно 5% от газовой шкалы высот H_g. Будем далее предполагать, что $H_p / H_g < 1$ и газ движется устойчивым образом по круговой орбите с кеплеровой скоростью $\boldsymbol{v}_g = -\frac{3}{2}\Omega_K x \boldsymbol{i}_y$. Заметим, что в реальных дисках из-за турбулентности газовой компоненты имеется пульсирующая компонента скорости газа, которая приводит к дисперсии скорости пыли c_p. Поскольку целью этого пункта является качественное объяснение гидродинамической неустойчивости, скорее, чем подробное моделирование динамики возмущений пылевой фазы в плоскости субдиска, будем для простоты предполагать, что жидкостной пылевой континуум является изотермическим, и, таким образом, для пылевого давления справедливо соотношение $p_p = c_p^2 \Sigma_p$, где дисперсия скорости пыли c_p постоянна. В принятых предположениях система уравнений, описывающая возмущение гидродинамических параметров пылевого континуума, включает в себя линеаризованные указанным выше способом уравнения (26), (28) и (29):

$$n \delta\Sigma_p + i \Sigma_{p0} \mathrm{k}\, \delta v_{px} = 0, \tag{44}$$

---

[9] В недавней работе (Yang и др., 2017) было получено, что небольшие твёрдые частицы также могут спонтанно сконцентрироваться за достаточно большое время в агрегаты высокой плотности в результате потоковой неустойчивости. Авторы показали, что для частиц с $\boldsymbol{St} = 10^2$ и $\boldsymbol{St} = 10^3$ значительная концентрация твёрдых частиц может происходить при числах Γ, находящихся в диапазонах $0.01 < \Gamma < 0.02$ и $0.03 < \Gamma < 0.04$ соответственно.

$$(n+\boldsymbol{St}\Omega_K)\delta v_{px} - 2\Omega_K\,\delta v_{py} = -c_p^2\frac{i\mathrm{k}\,\delta\Sigma_p}{\Sigma_{p0}} - i\,\mathrm{k}\,\delta\Phi\,, \tag{45}$$

$$(n+\boldsymbol{St}\,\Omega_K)\,\delta v_{py} + \frac{\Omega_K\,\delta v_{px}}{2} = 0\,, \tag{46}$$

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi G\,\delta\Sigma_p}{\mathrm{k}}\mathscr{T}(\mathrm{k}\,H_p), \tag{47}$$

где k − радиальное волновое число. Условие существования нетривиальных решений для системы (44)-(47) приводит к следующему дисперсионному уравнению 3-го порядка относительно комплексной величины $n(\mathrm{k})$:

$$n^3 + 2\boldsymbol{St}\,\Omega_K\,n^2 + \Omega_K^2\left[\boldsymbol{St}^2 + F_W(\mathrm{k})\right]n + \boldsymbol{St}\,\Omega_K^3\left[F_W(\mathrm{k}) - 1\right] = 0, \tag{48}$$

где

$$F_W(\mathrm{k}) \equiv \left[\Omega_K^2 - 2\pi G\Sigma_p\,\mathrm{k}\,\mathscr{T}(\mathrm{k}\,H_p) + \mathrm{k}^2 c_p^2\right]/\,\Omega_K^2 \tag{49}$$

− функция Варда (Ward, 2000).

Методом Кардана возможно получение точного решения этого алгебраического кубического уравнения. Однако это решение, к сожалению, не приводит к наглядным формулам для различных показателей роста. Вместе с тем качественный анализ соотношения (48) возможен на основе рациональной аппроксимации отдельных его членов с учётом их предварительной оценки.

Вводя с этой целью безразмерные переменные (см. Youdin, 2005a)

$$s = n/\Omega_K, \quad \kappa = \pi G\Sigma_p\,\mathrm{k}/\,\Omega_K^2\,, \quad Q_p = c_p\Omega_K\,/\,\pi G\Sigma_p, \;\; Q_R = H_p\Omega_K^2\,/\,\pi G\Sigma_p, \tag{49}$$

перепишем соотношение (48) в следующем классическом виде:

$$s^3 + 2\boldsymbol{St}\,s^2 + (\boldsymbol{St}^2 + F_W)s + \boldsymbol{St}(F_W - 1) = 0, \tag{50}$$

где

$$F_W(\kappa) \equiv 1 - 2\kappa\,/\,(1+\kappa Q_R) + Q_p^2\kappa^2. \tag{51}$$

Ясно, что в случае $s^2 < 0$ имеет место устойчивость решения (если частота ω − действительное число, то это означает, что волна распространяется по диску − система устойчива); в случае $s^2 = 0$ имеет место нейтральность; для случая $s^2 > 0$ имеем неустойчивость, если $\mathrm{Re}\left[s\right] > 0$.

Анализ корней дисперсионного уравнения (50) (особенно определение его неустойчивых мод) в случае компактности и одноразмерности пылевых агрегатов был выполнен для всей области образования планетезималей в целом ряде работ (см., например, Youdin, 2005, 2011; Youdin, Lithwick 2007; Chiang, Youdin, 2010; Shariff, Cuzzi, 2011; Takahashi, Inutsuka, 2014;2016; Carrera и др., 2015, 2017; Lin, Youdin, 2017). На основании этих исследований можно сделать следующий вывод: при массовом разнообразии параметров c_p, α_p, Γ и St всегда существует волновое число к такое, что система (44)-(47) будет неустойчива.

Вместе с тем, предварительный анализ точного решения (найденного методом Кардана) кубического дисперсионного уравнения (50), выполненный нами для ряда комбинаций параметров кольцевых областей околосолнечного протопланетного диска (с радиальными расстояниями $r \in \{0.1 а.е., 1 а.е., 10 а.е.\}$, значениями параметров металличности $\Gamma \in \{0.01,\ 0.05,\ 10\}$ и турбулентной интенсивности $\alpha \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$), показал, что учёт фрактальной размерности ($D \in \{2,\ 2.11,\ 2.9\}$) и неодинаковости геометрических размеров (радиусов гирации $R \in \{0.1$ см, 10 см, 100 см$\}$) пылевых агрегатов оказывает существенное влияние на условия, при которых возникают различные гидродинамические неустойчивости в газопылевом диске. В последующих публикациях предполагается найти комбинации критических значений параметров (при которых возникает неустойчивость) на основе численной реализации уравнений (38)-(43) для линейных возмущений течения в плоском слое фрактального газопылевого диска.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среди перспективных механизмов, способствующих формированию планетезималей, важное место принадлежит различным гидродинамическим неустойчивостям пылевого слоя в центральной плоскости протопланетного диска из-за их способности концентрировать пылевые частицы в плотные сгустки, которые могут вызвать гравитационный коллапс пылевых агрегатов, являющихся зародышами прото-планетезималей. В статье предложен новый подход к изучению ряда гидродинамических неустойчивостей двухфазного газопылевого слоя, учитывающий фрактальную природу и многомасштабность образующихся в результате процессов коагуляции пылевых агрегатов.

Долгое время возможность образования планетезималей связывали с самогравитацией, объединяющей обширные ансамбли мелких частиц в протопланетном диске. При этом гравитационная неустойчивость считалась основным механизмом, ответственным за начало роста пылевых частиц, поскольку она обеспечивает их быстрый рост. Её значение для понимания процесса возникновения планетезималей все ещё активно обсуждается в литературе, главным образом потому, что роль турбулентности (как глобальной, действующей по всей толщине диска, так и локальной, связанной с неустойчивостью Кельвина−Гельмгольца), препятствующей осаждению мелких пылевых частиц в гравитационно неустойчивый слой, до конца все ещё не понята (см., например, Макалкин, Зиглина, 2019). Вместе с тем, существуют и другие механизмы роста возмущений плотности макроскопических пылевых агрегатов в диске. В частности, имеющее место различие между скоростями пылевой и газовой фаз стимулирует так называемую потоковую неустойчивость, при которой частицы пыли быстро концентрируются в плотные глыбы, вызывая коллапс плотного пылевого слоя в средней плоскости диска даже тогда, когда самогравитация слаба. Эффективность механизма потоковой неустойчивости сильно зависит от численного значения параметра металличности (интегрированного по высоте отношения масс пыли и газа) и от числа Стокса пылевых частиц, определяющих критические условия её возникновения. Очевидно, что эти условия в слое относительно крупных многомасштабных агрегатов могут значительно отличаться от того, что имеет место в слое одинаковых частиц (пылевых агрегатов).

С другой стороны, возникающие в процессе коагуляции мелких мономеров, пылевые агрегаты могут иметь ажурную структуру, причём их фрактальный рост при низкой скорости прилипания пылевых частиц приводит к тому, что они имеют гораздо меньшую плотность, чем компактные образования. Подобные пушистые агрегаты имеют также низкие относительные скорости, что позволяет им, в частности, преодолевать барьер радиального дрейфа (при котором частицы дрейфуют по направлению к прото-солнцу быстрее, чем они могут расти) особенно вне линии снега и потенциально перерасти в более крупные тела. Кроме этого, фрактальные агрегаты двигаются медленнее, чем окружающие их мелкие частицы, благодаря чему на них продолжают накапливаться мономеры пыли, образуя всё более массивные пылевые нити. Плотность подобных пылевых образований при потоковой неустойчивости может превышать локальную плотность газа, по крайней мере, в несколько сот раз, что превышает критическое значение для гравитационной неустойчивости, и потому потоковая неустойчивость может наступить раньше гравитационной неустойчивости и подменить её.

С учётом устойчивого интереса к проблеме гидродинамической неустойчивости протопланетного диска и её важности для понимания процессов роста крупных планетозималей, как в нашей солнечной системе и в других местах космического пространства, в данной работе предлагается наиболее адекватный подход к изучению гидродинамической неустойчивости двухфазного газопылевого слоя, учитывающий как фрактальную природу, так и многомасштабность коагулированных пылевых агрегатов. Этот подход позволяет выйти за рамки классического аналитического исследования линейных возмущений движения пылевой и газовой фаз, когда принимается компактная структура возникающих пылевых агрегатов и их одинаковость по размерам.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ГИДРОДИНАМИКА ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕД

Плотность состояний и обобщённые дифференциальные операторы для фрактальных сред.

В общем случае фрактальные среды не могут рассматриваться как сплошные среды. Поскольку в любой фрактальной среде существуют пустоты, которые не заполнены веществом, то и дисковая среда пылевых фрактальных агрегатов не может в общем случае описываться как традиционная сплошная среда, но должна рассматриваться как особый тип сплошной среды, для моделирования которой необходимо привлекать модели, использующие интегрирование дробного порядка по области евклидового пространства, вместо интегрирования по фрактальному множеству (см. Roy, Ray, 2009).

Для описания фрактальных сред с помощью дробно-интегральных моделей обычно используется так называемая функция плотности разрешённых состояний[10] $c_n(D,\boldsymbol{R})$,описывающая, как плотно упакованы разрешённые состояния в n-мерном ($n=1,2,3$) евклидовом пространстве (см., например, Tarasov, 2005, 2010). При этом выражение $c_n(D,\boldsymbol{R})d\mathcal{V}_n$ представляет собой число разрешённых мест в элементарном объёме $d\mathcal{V}_n$. Здесь $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}/L_{hydr}$ – безразмерная координата. Вид и свойства функции $c_n(D,\boldsymbol{R})$ определяются свойствами и симметриями фрактального распределения. Далее мы будем предполагать, что дисковая фрактальная среда обладает сферически симметричным распределением вещества в ней; в этом случае можно использовать следующие выражения для плотности состояний:

$$c_3(D,\boldsymbol{R})=\frac{2^{2-D}\sqrt{\pi}}{\Gamma(D/2)}|\boldsymbol{R}|^{D-3},\quad c_2(d,\boldsymbol{R})=\frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)}|\boldsymbol{R}|^{d-2},\quad c_1(D,\boldsymbol{R})=\frac{|\boldsymbol{R}|^{D-1}}{\Gamma(D)},\qquad (\text{П}.1)$$

являющиеся ядром интеграла дробного порядка D (см. Tarasov, 2005), задающего интегрирование Рисса с точностью до числового множителя (Самко и др.,

---

[10] Функция плотности разрешённых состояний определяет (с точностью до числового множителя) ядро интеграла дробного порядка, равного D. Существует множество различных определений дробного интегрирования, ядра которых интерпретируются как плотности разрешённых состояний. В данной работе используется дробное интегрирование по Риссу (см. Самко и др., 1987).

1987). Отметим, что если $D=3$, а $d=2$, то $c_3(3,2,\boldsymbol{R})=1$, если $d=2$, то $c_2(2,\boldsymbol{R})=1$.

Отметим также, что в случае иных симметрий среды с дробной размерностью, для функции плотности разрешённых состояний $c_{\mathrm{n}}(D,\boldsymbol{R})$ нужно использовать выражения для ядер интегралов дробного порядка, отвечающих этой симметрии, т.е. фигурирующих в дробно-интегральной модели данной фрактальной среды (в частности, в случае распределения вещества с фрактальной размерностью, соответствующей симметрии параллелепипеда, нужно использовать плотность состояний по Риману−Лиувиллю) (см., например, Самко и др., 1987).

Введём обобщённый дифференциальный оператор набла ∇^D, с помощью которого удобно записать обобщённые гидродинамические уравнения для фрактальных сред. Используемый далее обобщённый оператор ∇^D в форме Рисса (см. Самко и др., 1987) имеет вид

$$\nabla^D a \equiv c_3^{-1}(D,\boldsymbol{R})\nabla\left\{c_2(d,\boldsymbol{R})a\right\} = \frac{2^{D-d}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(d/2)}\left|\boldsymbol{R}\right|^{3-D}\nabla\left\{\left|\boldsymbol{R}\right|^{d-2}a\right\}. \qquad (\text{П.2})$$

Заметим, что правило почленного дифференцирования $\nabla^D(ab)=a\nabla^D b+b\nabla^D a$ для оператора набла ∇^D не справедливо; этот оператор удовлетворяет следующему правилу:

$$\nabla^D(ab)=a\nabla^D b+\Theta(D,d,\boldsymbol{R})b\nabla a, \qquad (\text{П.3})$$

где

$$\Theta(D,d,\boldsymbol{R})\equiv c_3^{-1}(D,\boldsymbol{R})c_2(d,\boldsymbol{R}) = \frac{2^{D-d}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(d/2)}\left|\boldsymbol{R}\right|^{1-D+d}. \qquad (\text{П.4})$$

С помощью оператора ∇^D обобщённая дивергенция записывается в виде

$$\nabla^D\cdot\boldsymbol{a} \equiv c_3^{-1}(D,\boldsymbol{R})\nabla\cdot\left\{c_2(d,\boldsymbol{R})\boldsymbol{a}\right\} = \frac{2^{D-d}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(d/2)}\left|\boldsymbol{R}\right|^{3-D}\nabla\cdot\left\{\left|\boldsymbol{R}\right|^{d-2}\boldsymbol{a}\right\}, \qquad (\text{П.5})$$

а обобщённая (на пылевую фрактальную среду) полная производная по времени принимает вид

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_D \equiv \frac{\partial a}{\partial t} + c(D,d,\boldsymbol{R})\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} \cdot \nabla a. \qquad (\text{П.6})$$

Если обозначить $\Xi(D,d) \equiv \frac{2^{D-d}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(d/2)}$ и учесть, что $\nabla|\boldsymbol{R}|^{d-2} = (d-2)|\boldsymbol{R}|^{d-4}\boldsymbol{R}$,

то

$$\nabla^D a \equiv \Xi|\boldsymbol{R}|^{3-D} \nabla\left\{|\boldsymbol{R}|^{d-2} a\right\} = \left(\Xi|\boldsymbol{R}|^{1-D+d}\right)^2 \nabla a + \Xi a(d-2)|\boldsymbol{R}|^{d-1-D} \boldsymbol{R}. \qquad (\text{П.7})$$

Базовые уравнения для моделирования эволюции фрактального газопылевого диска

Пусть газ и твёрдые частицы образуют два континуума, которые взаимодействуют друг с другом через аэродинамическое сопротивление. В общем случае необходимо вводить в рассмотрение объёмные содержания отдельных фаз s, поскольку в отличие от гомогенной смеси, где каждый компонент может рассматриваться как занимающий весь элементарный объём пространства непрерывно и равномерно с другими компонентами, в гетерогенной системе каждая фракция занимает лишь часть элементарного объёма. В частности, $s_g \equiv \rho_g / \tilde{\rho}_g$, где $\tilde{\rho}_g$ − истинная плотность газа, равная отношению массы газа в элементарном объёме $\delta\mathcal{V}$ к части этого объёма $\delta\mathcal{V}_g$, которую занимает масса газа. Объёмное содержание ФПА j-го сорта определяется аналогично: $s_j^{cl}(\boldsymbol{r},t) = \rho_j^{cl} / \tilde{\rho}_j^{cl}$, где ρ_j^{cl} / $\tilde{\rho}_j^{cl}$ – соответственно массовая плотность и истинная массовая плотность. Тогда объёмное содержание s_{g} несущей фазы выражается в виде $s_g = 1 - s_p^{cl}$, $\quad s \equiv s_p^{cl} = \sum_{j=1}^{Q} s_j^{cl} = \sum_{j=1}^{Q} V_j^{cl} N_j^{cl}$.

В случае если суммарный гетерогенный континуум рассматривать в однодавленческом приближении, $P_{\mathrm{g}} = P_p = P(\rho_{\mathrm{g}}, T)$, то система уравнений Эйлера, описывающая движение газа и фрактальной пылевой среды имеет вид (см. Нигматулин, 1987; Tarasov, 2010):

$$\frac{d\rho_{\mathrm{g}}}{dt} + \rho_{\mathrm{g}} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} = 0, \quad \rho_{\mathrm{g}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{g}} s, \qquad (\text{П.8})$$

$$\left(\frac{d\rho_p}{dt}\right)_D + \rho_p \nabla^D \cdot \boldsymbol{v}_d = 0\,, \qquad \rho_d = \tilde{\rho}_d(1-s)\,, \tag{П.9}$$

$$\rho_g \frac{d\boldsymbol{v}_g}{dt} = -\rho_g \Omega_k^2 \boldsymbol{r} + 2\rho_g \boldsymbol{v}_g \times \boldsymbol{\Omega}_K - (1-s)\nabla P + \nabla \Phi_{gr} - \boldsymbol{F}_{gp}\,, \tag{П.10}$$

$$\rho_p \left(\frac{d\boldsymbol{v}_p}{dt}\right)_D = -\rho_p \Omega_K^2 \boldsymbol{r} + 2\rho_p \boldsymbol{v}_p \times \boldsymbol{\Omega}_K - s\nabla^D P + \nabla^D \Phi_{gr} + \boldsymbol{F}_{g,p}\,. \tag{П.11}$$

Важно при этом отметить, что для исчерпывающего решения заявленной в этой статье проблемы необходимо в общем случае моделировать процессы коагуляции пылевых частиц и потоковую неустойчивость одновременно. Поэтому строгое решение задачи образования прото-планетозималей в рамках рассматриваемого механизма включает, наряду с оценкой скоростей газопылевых кластеров, также и нахождение функции распределения (спектра) кластеров по размерам (массам) в произвольный момент времени t в точке $\boldsymbol{r}$. Другими словами, необходимо совместное решение уравнений движения для фрактальной пылевой среды и обобщённого кинетического уравнения Смолуховского для пространственно неоднородной коагуляции. Заметим, что указанный подход использовался ранее в работе (*Kolesnichenko, Marov*, 2013; Колесниченко, 2017), в которой моделирование эволюции допланетного облака проводилось в рамках фрактальной газопылевой среды, использующей для учёта фрактальности пылевого континуума дробные интегралы, порядок которых определялся массовой размерностью D пылевых кластеров.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша при частичной поддержке грантов РФФИ № 17-02-00507, 18-01-00064 и Программы Президиума РАН № 28.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Витязев А.В., Печерникова Г.Н., Сафронов В.С. Планеты земной группы. Происхождение и ранняя эволюция. М.: Наука. 1990. 296 с.

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды. М.: Наука. 1994. 348 с.

Зиглина И.Н., Макалкин А.Б. Гравитационная неустойчивость в пылевом слое протопланетного диска: взаимодействие твёрдых частиц с турбулентным газом в слое // Астрон. вестн. 2016. Т.50. № 6. С. 431-449.

Колесниченко А.В. О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности// Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.

Колесниченко А.В. О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности// Астрон. вестн. 2005. Т. 39. № 3. С. 243-262.

Колесниченко А.В. К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического диска// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. №70. 36 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. №75. 44 с.

Колесниченко А.В. Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред: Моделирование аккреционных протопланетных дисков. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. 372 с.

Макалкин А.Б., Зиглина И.Н. Гравитационная неустойчивость в пылевом слое протопланетного диска с учетом взаимодействия слоя и окружающего газа в диске // Астроном. Вест. 2019. Т.53. (в печати).

Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н., Чернов А.А. От прото-солнечного облака к планетной системе: Модель ранней эволюции газопылевого диска // Проблемы зарождения и эволюции биосферы /Ред. акад. Галимов Э.М., М.: URSS, 2008. С. 223-273.

Михайлов Е.Ф., Власенко С.С. *Образование фрактальных структур в газовой фазе// УФН. 1995. Т. 165. № 3. С. 263-283.*

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. СПб.: Гидрометеоиздат. 1996. 742 с.

Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.I. М.: Наука. 1987. 464 с.

Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

Сафронов В.С. О гравитационной неустойчивости в плоских вращающихся системах с осевой симметрией // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 53-56.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Смирнов Б.М. Фрактальные кластеры// УФН. 1986. Т.149. № 2. С. 177-219.

Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука. 1991. 134 с.

Смирнов Б.М. Процессы с участием кластеров и малых частиц в буферном газе// УФН. 2011. Т. 181. № 7. С. 713-745.

Adams F.C., Watkins R. Vortices in circumstellar disks // Astrophys. J. 1995. V. 451. P. 314-327.

Armitage P. J. Dynamics of Protoplanetary Disks // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2011. V. 49. P. 195-236.

Armitage P. J. Physical Processes in Protoplanetary Disks //arXiv: 1509.06382v1 [astro-ph.SR] 21 Sep.2015. P.1-127.

Bai X.-N., Stone J. M. Wind-driven Accretion in Protoplanetary Disks. I. Suppression of the Magnetorotational Instability and Launching of the Magnetocentrifugal Wind // The Astrophysical Journal. 2013. V. 769. P. 76.

Bai X.-N., Stone J. M. Dynamics of Solids in the Midplane of Protoplanetary Disks: Implications for Planetesimal Formation // The Astrophysical Journal. 2010a. V. 722. № 2. P. 1437-1459.

Bai X.-N., Stone J. M. Particle-gas Dynamics with Athena: Method and Convergence // The Astrophysical Journal Supplement. 2010. V. 190. № 2. P. 297-310.

Bai X.-N., Stone J. M. The Effect of the Radial Pressure Gradient in Protoplanetary Disks on Planetesimal Formation // The Astrophysical Journal. 2010b. V. 722. № 2. P. L220-L223.

Barge P., Sommeria J. Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? // A&A. 1995.V. 295. P. L1-L4.

Bertini I., Gutierrez P. J., Sabolo W. The influence of the monomer shape in the first stage of dust growth in the protoplanetary disk// Astron. and Astrophys. 2009. V. 504. P. 625-633.

Blum J. Grain growth and coagulation/ 2004. In ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust, ed. A.N. Witt, G.C. Clayton and B.T. Draine (San Francisco: ASP). P. 369.

Blum J., Wurm G. The Growth Mechanisms of Macroscopic Bodies in Protoplanetary Disks // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2008. V. 46. P.21-56.

Brandenburg A., Hodgson L.S. Turbulence effects in planetesimal formation // Astron. Astrophys. 1998. V. 330. P. 1169-1174.

Carrera D., Johansen A., Davies M. How to form planetesimals from mm-sized chondrules and chondrule aggregates // Astronomy and Astrophysics. 2015. V. 579. id. A43. 20 pp.

Carrera D., Gorti U., Johansen A., Davies M. Planetesimal formation by the streaming instability in a photoevaporating disk // The Astrophysical Journal. 2017. V. 839. № 1. article id. 16. 17 pp.

Chavanis P.-H. Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula// arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V. 16. P. 1-54.

Chen Z.-Y., Meakin P., Deutch J. M. Comment on «Hydrodinamic Behavior of Fractal Aggregates»// Phys. Rev. Lett. 1987. 59. № 18. P. 2121.

Chiang E., Youdin A. N. Forming Planetesimals in Solar and Extrasolar Nebulae // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. 2010. V. 38. P. 493-522.

Cuzzi J. N., Hogan R. C., Paque J. M., Dobrovolskis A. R. Size-selective Concentration of Chondrules and Other Small Particles in Protoplanetary Nebula Turbulence // The Astrophysical Journal 2001. V.546. P. 496-508.

Cuzzi J. N., Hogan R. C., Bottke W. F. Towards initial mass functions for asteroids and Kuiper Belt Objects // Icarus 2010. V.208.P. 518-538.

Cuzzi J. N., Hartlep T., Estrada P. R. Planetesimal Initial Mass Functions and Creation Rates Under Turbulent Concentration Using Scale-Dependent Cascades //Lunar and Planetary Science Conference 2016. V.47, P. 2661.

Johansen A., Klahr H., Henning T. Gravoturbulent formation of planetesimals// Astrophys. J. 2006. V. 636. P. 1121-1134.

Johansen A., Oishi J. S., Mac Low M.-M. Klahr, H. Henning, T. Youdin, A. Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks // Nature. 2007. V.448, P. 1022-1025.

Johansen A., Henning T., Klahr H. Dust Sedimentation and Self-sustained Kelvin-Helmholtz Turbulence in Protoplanetary Disk Midplanes // The Astrophysical Journal. 2006a. V. 643. P.1219-1232

Johansen A., Klahr H., Henning T. Gravoturbulent formation of planetesimals// Astrophys. J. 2006. V. 636. P. 1121-1134.

Johansen A., Blum J., Tanaka H., Ormel C., Bizzarro M., Rickman H. // The Multifaceted Planetesimal Formation Process. Protostars and Planets VI. 2014. P.547-570.

Johnson, J. A., Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Vogt, S. S., Wright, J. T., Peek, K. M. G. A New Planet around an M Dwarf: Revealing a Correlation between Exoplanets and Stellar Mas // The Astrophysical Journal. 2007. V. 670. P. 833-840.

Dubrulle B., Morfill G., Sterzik M. The dust subdisk in the protoplanetary nebula // Icarus. 1995. V. 114. P. 237-246.

Dominik C., Tielens A. G. The Physics of Dust Coagulation and the Structure of Dust Aggregates in Space // The Astrophysical Journal. 1997. V. 480. P. 647-673.

Drążkowska J., Dullemond C. P. Can dust coagulation trigger streaming instability? // Astronomy & Astrophysics. 2014. V. 572. A78. 12pp.

Dubrulle B. Differential rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula// Icarus. 1993. V. 106. P. 59-76.

Güttler C., Blum J., Zsom A., Ormel C. W., Dullemond C. P. The first phase of protoplanetary dust growth: The bouncing barrier // Geochimica et Cosmochimica Acta Supplement. 2009.V.73. P. 482

Goldrich P., Ward W.R. The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V. 183. № 3. P. 1051-1061.

Goldrich P., Lynden-Bell D. I. Gravitational stability of uniformly rotating disks // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1965. V. 130. P.97-124

Helled R., Bodenheimer P., Podolak M., Boley A., Meru F., Nayakshin S., Fortney J. J., Mayer L., Alibert Y., Boss A. P. Giant Planet Formation, Evolution, and Internal Structure // Protostars and Planets VI. 2014. P. 643-665.

Heng K., Kenyon S. J. Vortices as nurseries for planetesimal formation in protoplanetary discs// Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. V. 408. № 3. P. 1476-1493.

Kataoka A., Tanaka H., Okuzumi S., Wada K. Fluffy dust forms icy planetesimals by static compression // Astronomy and Astrophysics. 2013. V.557. P. L4.

Klahr H., Bodenheimer P. Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability// Astrophys. J. 2003. V. 582. P. 869-892.

Klahr H., Bodenheimer P. Formation of giant planets by concurrent accretion of solids and gas inside an anticyclonic vortex// Astrophys. J. 2006. V. 639. P. 432-440.

Kolesnichenko A. V., Marov M. Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P.80-98.

Lamrechts M., Johansen A. Rapid growth of gasgiant cores by pebble accretion //. A&A .2012. V. 544. P.A32.

Lin Min-Kai, Youdin A.N. A Thermodynamic View of Dusty Protoplanetary Disks //The Astrophysical Journal, 2017. V.849. . № 2. article id. 129, 20 pp.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2001. 375 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer. 2013. 657 p.

Mizuno H., Markiewicz W.J., Volk H.J. Grain growth in turbulent protoplanetary accretion disks// Astron. Astrophys. 1988. V. 195. P. 183-192.

Mizuno H. Grain growth in the turbulent accretion disk solar nebula// Icarus. 1989. V. 80. P. 189-201

Morbidelli A., Lunine J. I., O'Brien D. P., Raymond S. N., Walsh K. J. Building Terrestrial Planets // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. 2012. V. 40. P. 251-275.

Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517-528.

Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K. Accumulation of planetesimals in the solar nebula// Icarus. 1983. V. 54. P. 361-376.

Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula // Icarus. 1986. V. 67. P. 375-390.

Nakamoto T., Nakagawa Y. Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks// Astrophys. J. 1994. V. 421. P. 640-651.

Okuzumi S., Tanaka H., Sakagami M.-A. Numerical modeling of the coagulation and porosity evolution of dust aggregates// ApJ. 2009. V. 707. P 1247-1264.

Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchu T., Sakagami M.-A. Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution // ApJ. 2011. V. 731. P. 95.

Okuzumi S., Tanaka H., Kobayashi H., Wada K. Rapid Coagulation of Porous Dust Aggregates outside the Snow Line: A Pathway to Successful Icy Planetesimal Formation // The Astrophysical Journal. 2012.V.752. P.106.

Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M. Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters// Astron. Astrophys. 2007. V. 461. P. 215-236.

Perets H. B., Murray-Clay R. Wind-shearing in gaseous protoplanetary disks // The Astrophysics of Planetary Systems: Formation, Structure, and Dynamical Evolution, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, 2011. V. 276. P. 453-454.

Pinte C., Dent W. R. F., Ménard F., Hales A., Hill T., Cortes P., de Gregorio-Monsalvo I. Dust and Gas in the Disk of HL Tauri: Surface Density, Dust Settling, and Dust-to-gas Ratio // The Astrophysical Journal. 2016. V. 816. № 1. article id. 25. P. 12.

Raymond S. N., Kokubo E., Morbidelli A., Morishima R., Walsh K. J. Terrestrial Planet Formation at Home and Abroad // Protostars and Planets VI. 2014. P.595-618.

Roy N., Ray A. K. Fractal features in accretion discs // Monthly Notices of the Royal Astronomial Society. 2009. V. 397. № 3. P. 1374-1385.

Shakura N. I., Sunyaev R. A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astronomy and Astrophysics.1973. V. 24. P. 337-355.

Shariff K., Cuzzi J.N. Gravitational instability of solid assisted by gas drag: slowing by turbulent mass diffusivity // The Astrophysical Journal. 2011. V. 738, № 1. article id. 73, 9 pp.

Shu F. H. Waves in planetary rings // In: Planetary rings (A85-34401 15-88). Tucson, AZ. University of Arizona Press. 1984. P. 513-561.

Squire J., Hopkins P.F. Resonant drag instabilities in protoplanetary discs: the streaming instability and new, faster growing instabilities // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018a. V. 477. № 4. P. 5011-5040.

Squire J., Hopkins P.F. Resonant Drag Instability of Grains Streaming in Fluids // The Astrophysical Journal Letters. 2018b. V. 856. № 1. article id. L15, 5 pp.

Suyama T., Wada K., Tanaka H. Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions// Astroph. J. 2008. V. 684. P .1310-1322.

Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S. Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions // arxiv:1205.1894vl [astro-ph. EP]. 2012. 28 P.

Takahashi S. Z., Inutsuka S.-I. Two-component secular gravitational instability in a protoplanetary disk: a possible mechanism for creating ring-like structures // The Astrophysical Journal. 2014. V. 794. № 1.article id. 55. P.7.

Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Provenzale A. Forming planetosimals in vortices// Icarus. 1996. V. 121. P.158-170.

Tarasov V.E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media// Annls of Physics. 2005. V. 318. № 2. P. 286-307.

Tarasov V.E. Fractional dynamics: Applicationsof fractional calculus to dynamics of particles, fields and media// Springer. Higher Education Press. 2010. 516 p.

Takahashi S.Z., Inutsuka S. Two-component secular gravitational instability in a protoplanetary disk: A possible mechanism for creating ring-like structures // Astrophys. J. 2014. V. 794. Iss. 1. Article id. 55. 7 p.

Takahashi S.Z., Inutsuka S. An origin of multiple ring structure and hidden planets in hl tau: a unified picture вy secular gravitational instability // Arxiv: 1604.054 50v3[astro-ph.SR]. 2016.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217-1238.

Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions // Astrophys. J. 2008. V. 677. P. 1296-1308.

Ward W.R. On Planetesimal Formation: The Role of Collective Particle Behavior // In «Origin of the earth and moon», ed. R.M. Canup and K. Righter. Tucson: University of Arizona Press., 2000 P.75-84.

Weidenschilling S. J. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. V. 180, P. 57-70

Weidenschilling S. J. Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula // Icarus. 1980. V. 44. P. 172-189.

Weidenschilling S. J., Cuzzi J. N. Formation of planetesimals in the solar nebula // Protostars and Planets III. 1993. P. 1031-106.

Weidenschilling S. J. Can Gravitational Instability Form Planetesimals? // Icarus. 1995. V.116, P.433-435.

Wiltzius P. Hydrodinamic behavior of fractal aggregates// Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. № 7. P. 710-713.

Umurhan O.M., Estrada P.R., Cuzzi1 J.N., Hartlep T. Streaming instability in turbulent protoplanetary disks: Theoretical predictions // 49th Lunar and Planetary Science Conference 2018 (LPI Contrib. №. 2083.

Yang C.-C., Johansen A., Carrera D. Concentrating small particles in protoplanetary disks through the streaming instability // Astronomy and Astrophysics. 2017. V. 606. id. A80.

Youdin A.N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494-505.

Youdin A. N., Goodman J. Streaming Instabilities in Protoplanetary Disks // The Astrophysical Journal. 2005. V. 620. P. 459-469.

Youdin A.N. Planetesimal formation without thresholds. I. Dissipative gravitational instabilities and particle stirring by turbulence // arXiv:astro-ph/0508659. 2005a.

Youdin A.N. Planetesimal formation without thresholds. II. Gravitational instability of solids in turbulent protoplanetary disks // arXiv:astro-ph/0508662. 2005b.

Youdin A.N., Lithwick Y. Particle stirring in turbulent gas disks: Including orbital oscillations // ICARUS. 2007. V.192. № 2. P. 588–604.

Youdin A.N. On the formation of planetesimals via secular gravitational instabilities with turbulent stirring // The Astrophysical Journal. 2011. V. 731 P. 99-117.

Zsom A., Dullemond C. P. A representative particle approach to coagulation and fragmentation of dust aggregates and fluid droplets // Astronomy and Astrophysics. 2008. V. 489. P. 931-941.

ОГЛАВЛЕНИЕ