ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 20 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брушлинский К.В.,
Кондратьев И.А.

Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 20. 20 с. doi:**10.20948/prepr-2018-20**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-20**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К.В.Брушлинский, И.А.Кондратьев

Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках

Москва — 2018

Брушлинский К.В., Кондратьев И.А.

Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках

Тороидальные магнитные ловушки для удержания плазмы – распространенный объект исследований в области управляемого термоядерного синтеза. Математические модели равновесных плазменных конфигураций в ловушках часто рассматриваются для простоты в их распрямленных в цилиндр аналогах. В статье предпринят сравнительный анализ их численных исследований в обоих вариантах геометрии. Математический аппарат моделей – двумерные краевые задачи с дифференциальным уравнением Грэда-Шафранова для функции магнитного потока. Результатом работы являются количественные характеристики отличий тороидальных конфигураций от цилиндрических на примерах плазменного тора с продольным электрическим током и ловушки «Галатеи-Пояса» – тора с погруженными в плазму двумя кольцевыми проводниками с током.

Ключевые слова: магнитные ловушки, равновесные конфигурации плазмы, численные модели, сравнение конфигураций в торе и цилиндре.

Brushlinskii Konstantin Vladimirovich, Kondratyev Ilya Alexeyevich

Numerical simulation of plasma equilibrium in toroidal and cylindrical magnetic traps

Toroidal magnetic traps for plasma confinement make up an extended object of controlled nuclear fusion investigations. Mathematical simulation of equilibrium plasma configurations in the traps often deal with their straightened into cylinder analogues. This paper presents a comparative analysis of their numerical investigations in the both geometry variants. Mathematical means of models use two-dimensional boundary problems with the Grad-Shafranov differential equation for the magnetic flux function. As the investigation result, we present some quantitative characteristics of differences between toroidal and cylindrical configurations by means of two examples: a plasma torus with longitudinal electrical current and the toroidal trap "Galathea-Belt" with two ring-shaped current carrying conductors, immersed into plasma.

Key words: magnetic traps, equilibrium plasma configurations, numerical simulation, comparison of toroidal and cylindrical configurations.

Введение

В научных работах по различным программам управляемого термоядерного синтеза (УТС) значительное внимание привлечено к исследованиям удержания плотной и горячей плазмы магнитным полем. Целью исследования является выяснение физических условий, при которых плазменные конфигурации, не соприкасающиеся с ограничивающим ловушку кожухом и элементами ее конструкции, могут существовать в течение времени, необходимого для теоретически возможной реакции синтеза. Это время значительно превосходит характерные времена быстрых плазменных процессов, поэтому желаемые конфигурации плазмы и магнитного поля можно рассматривать находящимися в равновесии. Предлагаемая статья относится к циклу работ по математическому моделированию равновесных магнитоплазменных конфигураций в приближении механики сплошных сред, т.е. магнитной газодинамики.

В плазменных установках, участвующих в работах по УТС, широко распространены ловушки тороидальной формы, в которых концы плазменного шнура замыкаются друг на друга и тем самым избавлены от необходимости контактировать с какими-либо деталями. К ним относятся хорошо известные токамак и стелларатор, а также ловушки, в которых проводники с электрическим током, создающие магнитный "скелет" конфигурации, погружены внутрь плазменного объема, но не контактируют с ним. Эти ловушки предложены А.И. Морозовым и названы им "галатеями" [1].

Исследования конфигураций плазмы и поля в ловушках, строго говоря, должны учитывать их геометрию, т.е. в рассматриваемом случае — тороидальную. Однако это сильно осложняет используемый математический аппарат. Достаточно сказать, что в осесимметричных задачах в торе круглого сечения естественными координатами являются полярные координаты в плоскости (z,r) с центром на магнитной оси тора. Соответствующие вопросы обсуждаются в некоторых приближениях в [2]. Облегченные способы теоретических исследований тороидальных конфигураций основаны на их замене цилиндрическими аналогами, т.е. торами бесконечного радиуса, что допустимо для решения основных качественных вопросов о свойствах равновесных конфигураций и их устойчивости. Познакомиться с положением дел на эту тему на примерах конфигураций в Z-пинчах, цилиндрах с винтовым полем и др. можно, например, с помощью обзоров [3-6] с библиографией работ соответствующего периода. Из теоретических и расчетных работ последних лет, относящихся в основном к токамакам, можно назвать, например, статьи [7-9] и цитируемые в них источники. Простейшим примером ловушки-галатеи является «Галатея-Пояс» [10]. Численные модели и расчеты равновесных конфигураций в ней подробно исследованы в распрямленном в цилиндр аналоге [11]. Математическая модель тороидальной конфигурации в "Поясе", первые результаты расчетов и их сопоставление с цилиндрическим вариантом ловушки изложены в [12,13].

В настоящей работе модель "Пояса" несколько уточняется в сторону более наглядного толкования результатов. Кроме того сделана попытка рассмотреть вопрос о различиях равновесных конфигураций в цилиндре и торе в более общей форме, отвлекаясь от конкретных деталей "Пояса" и даже всего класса ловушек-галатей. Для этого выбран наиболее простой и хорошо известный пример ловушки — плазменный цилиндр с током (Z-пинч) и его тороидальная разновидность, которая фактически лежит в основе современных токамаков. Плазменные конфигурации в цилиндре круглого сечения одномерны, и различаются вариантами заданного распределения плотности электрического тока по радиусу. Конфигурации в торе при любом сечении могут обладать только осевой симметрией, т.е. двумерны. Их для простоты удобнее рассматривать в квадратных сечениях, чтобы оставаться в системе цилиндрических координат (z,r), не вводя упомянутых выше более сложных. По этой причине рассмотрена "промежуточная инстанция" — прямой цилиндр квадратного сечения с двумерными конфигурациями плазмы и поля в нем. В результате проведенных расчетов получены геометрические формы деформированных при сгибании в тор конфигураций для двух серий распределений тока в Z-пинче и характеризующие их количественные параметры. Все исследованные варианты конфигураций являются решением краевых задач с двумерным уравнением Грэда-Шафранова [2,14,15]. Численные решения получены итерационным методом установления и в этом смысле являются "диффузионно устойчивыми", что некоторым образом связано с традиционно понимаемой МГД-устойчивостью согласно [16-18]. Расчеты "Галатеи-Пояса" показали, что цилиндрические конфигурации более устойчивы, чем тороидальные, а именно, при одной и той же величине токов в проводниках магнитное поле в цилиндре способно удерживать плазму с более высокими значениями давления.

Математические модели равновесия

Математические модели плазменных конфигураций, удерживаемых магнитным полем в состоянии равновесия, имеют дело с распределением в исследуемой области пространства трех величин: давления p напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и плотности электрического тока $\mathbf{j}$. В общем случае они должны удовлетворять трем уравнениям плазмостатики [2,17,18]:

$$\nabla p = \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{H}, \quad \frac{c}{4\pi}\mathbf{j} = \mathrm{rot}\mathbf{H}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \qquad (1.1)$$

В двумерных моделях конфигураций, обладающих симметрией, они сводятся к одному скалярному уравнению для функции магнитного потока. В исследованиях осесимметричных $(\partial/\partial\varphi \equiv 0)$ конфигураций оно называется уравнением Грэда-Шафранова [2,6,7,14-18]

$$\Delta^*\Psi + 4\pi r^2 \frac{dp}{d\Psi} + \left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 I \frac{dI}{d\Psi} = 0\,, \tag{1.2}$$

где $\Delta^*\Psi = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$, $H_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}$, $H_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}$, $I = \dfrac{c}{4\pi} rH_\varphi$.

Цилиндрическим координатам с плоской симметрией $(\partial/\partial z \equiv 0)$ соответствует его плоская разновидность

$$\Delta\Psi + 4\pi \frac{dp}{d\Psi} + \left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 I \frac{dI}{d\Psi} = 0\,, \tag{1.3}$$

где $H_x = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}$, $H_y = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$, $I = \dfrac{c}{4\pi} H_z$.

Модель конкретной конфигурации создается в результате решения краевой задачи с одним из этих уравнений в заданной области с заданными граничными условиями. Кроме того, требуется задание двух функций $p(\Psi)$ и $I(\Psi)$, которые описывают распределение давления и полоидального электрического тока между магнитными поверхностями Ψ = const, соответствующее предполагаемой или желаемой информации об исследуемой конфигурации.

Наряду с тороидальными и цилиндрическими ловушками, равновесие плазмы и поля в которых описывается двумерными уравнениями (1.2), (1.3), рассматривается простейшая форма ловушки – Z-пинч, т.е. круглый цилиндр с осевым током j_z и азимутальным магнитным полем H_φ, однородный по координатам (z,φ) [4]. Конфигурации в нем одномерны, и уравнения (1.1) в полярных координатах имеют вид

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c} jH\,; \quad j = \frac{c}{4\pi}\frac{dHr}{rdr}\,, \tag{1.4}$$

где $H = H_\varphi$, $j = j_z$. Задав одну из неизвестных функций, например, $j = j(r)$, легко получить две остальные интегрированием уравнений (1.4). Необходимость в уравнении Грэда-Шафранова здесь отпадает, но формально оно справедливо в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi}{dr}\right) + 4\pi\frac{dp}{d\Psi} = 0 \tag{1.5}$$

т.к. $I(\Psi) \equiv 0$. Функция магнитного потока Ψ и зависимость $p(\Psi)$ от нее связаны с решением уравнений (1.4) очевидным соотношением (см. подробнее в п.2)

$$H = -\frac{d\Psi}{dr}; \quad \frac{dp}{d\Psi} = \frac{dp}{dr} \Big/ \frac{d\Psi}{dr} = -\frac{dp}{dr} \Big/ H(r)\ . \tag{1.6}$$

Сравнение равновесных конфигураций плазмы в Z-пинче и его тороидальном аналоге проще и удобнее провести на примере прямого шнура и тора с квадратным сечением, поскольку в круглом сечении тора было бы естественно перейти от цилиндрических координат (z,r) к полярным (ρ,ω) в плоскости φ = const:

$$z=\rho\cos\omega;\quad r=r_0+\rho\sin\omega,$$

что усложнило бы математический аппарат модели [2]. Поэтому указанные выше задачи о равновесии рассматриваются в квадратных сечениях соответственно $|x|<R$, $|y|<R$ и $|z|<R$, $|r-r_0|<R$, где r_0 – большой радиус тора, а R – радиус изначально предполагаемых круглых сечений шнура и тора. Модели в обоих случаях двумерны в отличие от круглого шнура и строятся на основе краевых задач с уравнениями типа Грэда-Шафранова (1.2) или (1.3), в которых $I(\Psi)\equiv 0$, а зависимость $p(\Psi)$ заимствована из одномерной задачи в круглом пинче, полученной из заданной одномерной плотности тока *j(r)* с помощью формул (1.4), (1.6).

Сравнительный анализ тороидальных и цилиндрических ловушек-галатей продолжает исследования «Галатеи-Пояса» с двумя параллельными проводниками, начатое в работах [12,13]. Здесь используются те же уравнения (1.2) и (1.3), в которых $I(\Psi)\equiv 0$, а функция $p(\Psi)$ немонотонна с максимумом в особой точке поля на оси цилиндра или на магнитной оси тора, например,

$$p=p_0\exp\left(-\left(\frac{\Psi-\Psi_0}{q}\right)^2\right) \tag{1.7}$$

где $\Psi_0=\Psi(0,0)$ в цилиндре и $\Psi_0=\max\limits_r\Psi(r,0)$ в торе.

Параметр Ψ_0 подбирается в процессе решения задач так, чтобы он был равен значению решения Ψ в указанной выше особой точке. Параметр q позволяет регулировать поперечный размер плазменной конфигурации вокруг этой точки [6,17,18].

Электрический ток в проводниках представлен дополнительным слагаемым $4\pi rj^{ex}/c$ в уравнении (1.2) для тора –

$$j^{ex}(z,r)=\sum_{k=1}^{2}j_0\exp\left(-\frac{(r-r_0)^2+(z-z_k)^2}{r_c^2}\right), \tag{1.8}$$

где $z_1=z_0$; $z_2=-z_0$ – координаты центров сечений проводников плоскостью $\varphi=\text{const}$, r_c – условный радиус проводников. Аналогичное слагаемое в уравнении (1.3) для цилиндра равно $4\pi j^{ex}/c$, где

$$j^{ex}(x,y)=\sum_{k=1}^{2} j_0 \exp\left(-\frac{(x-x_k)^2+y^2}{r_c^2}\right) \tag{1.9}$$

$x_1=x_0$; $x_2=-x_0$. Коэффициент j_0 выбран так, чтобы интеграл

$$\iint j^{ex} drdz = J_c, \tag{1.10}$$

взятый по окрестности каждого проводника был равен заданному значению J_c электрического тока в нем.

Границы указанных выше квадратов предполагаются непрозрачными для магнитного поля: $H_n=0$, где n – направление нормали к границе. Отсюда следует граничное условие $\Psi=\mathrm{const}$, причем эту константу можно положить равной нулю, т.е.

$$\Psi_\Gamma=0. \tag{1.11}$$

Численное решение поставленных задач проведено в безразмерных переменных, т.е. все переменные отнесены к единицам измерения, составленным из размерных параметров задачи. В задачах о пинче это радиус круглого пинча или половина стороны квадрата R и электрический ток J, протекающий через поперечное сечение шнура. В плоских задачах с уравнением (1.3) единицами измерения являются

$$(x,y)_u=r_u=R;\quad H_u=\frac{2J}{cr_u};\quad \Psi_u=H_u r_u;\quad j_u=\frac{c}{4\pi}\frac{H_u}{r_u};\quad p_u=\frac{H_u^2}{4\pi}. \tag{1.12}$$

Параметр q в формуле (1.7) следует, очевидно, отнести к единице Ψ_u. В тороидальных задачах функция Ψ отличается от азимутальной компоненты вектор-потенциала **H** множителем r, следовательно, единица Ψ_u должна содержать дополнительный по сравнению с (1.12) множитель размерности длины. Сопоставляя уравнения (1.2) и (1.3), нетрудно заметить, что функции Ψ и I в тороидальных задачах возрастают при удалении от оси симметрии вместе с радиусом r, поэтому их единицы должны содержать дополнительный множитель размерности длины. Здесь две очевидных возможности. Если $\Psi_u=H_u r_u^2$, безразмерное значение Ψ будет возрастать пропорционально большому радиусу r_0/r_u, и это следует иметь ввиду при обсуждении физического смысла результатов расчета [12]. Более удачным выбором упомянутого множителя является значение большого радиуса тора r_0, при котором безразмерные значения Ψ не растут с радиусом и при больших значениях r_0 приближаются к своим плоским аналогам. В настоящей работе положено

$$\Psi_u = H_u r_u r_0 \qquad (1.13)$$

а остальные единицы совпадают с (1.12).

В задачах о «Галатее-Поясе» в цилиндре или торе квадратного сечения единицей длины служит половина расстояния между центрами проводников

$$r_u = x_0 = z_0\,, \qquad (1.14)$$

а остальные единицы составлены из r_u и J согласно (1.12) и (1.13), где $J = J_c$ – заданная величина тока в каждом из погруженных в плазму проводников.

В рассматриваемых в данной работе задачах ($I(\Psi) \equiv 0$) уравнение Грэда-Шафранова в безразмерных переменных имеет вид

$$\Delta^*\Psi + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{dp}{d\Psi} + \frac{r}{r_0} j^{ex}(r,z) = 0\,. \qquad (1.15)$$

Краевая задача в торе ставится в области $|r - r_0| < R$, $|z| < R$ с граничным условием $\Psi_\Gamma = 0$.

В задачах о тороидальном шнуре R = 1, j^{ex} = 0, а $p(\Psi)$ определяется решением одномерной задачи о Z-пинче в круге (1.6).

В задачах о «Галатее-Поясе» $z_0 = 1$, R = 2, функции $p(\Psi)$ и j^{ex} заданы формулами (1.7), (1.8). Параметр Ψ_0 определяется дополнительным условием: он равен значению искомой функции Ψ на магнитной оси тора, т.е. в особой точке на оси z = 0, где она имеет локальный максимум:

$$\Psi_0 = \max_r \Psi(r,0)\,. \qquad (1.16)$$

В цилиндрических аналогах тех же задач роль уравнения (1.15) играет

$$\Delta\Psi + \frac{dp}{d\Psi} + j^{ex}(x,y) = 0\,, \qquad (1.17)$$

область решения $|x| < R$, $|y| < R$, j^{ex} задано формулой (1.9), $p(\Psi)$ и граничные условия – те же.

В распрямленной «Галатее-Поясе» $x_0 = 1$, $p(\Psi)$ определяется, как и выше, с той разницей, что упомянутая особая точка находится в центре квадрата, т.е.

$$\Psi_0 = \Psi(0,0)\,. \qquad (1.18)$$

В задаче о плазменном цилиндре R = 1, j^{ex} = 0, а $p(\Psi)$ заимствовано из одномерной задачи о Z-пинче.

Заметим, что задачи в плоскости (x,y) симметричны относительно осей координат, а в сечении тора плоскостью (z,r) – относительно оси r, следовательно, их достаточно решать соответственно в четверти $x>0$, $y>0$ и в половине $z>0$ рассматриваемых областей, поставив на осях граничные условия симметрии.

Задачи решаются численно итерационным методом установления: в разностных аналогах уравнений типа

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Delta\Psi + g(\Psi)\,. \tag{1.19}$$

Нелинейное слагаемое $g(\Psi)$ берется с предыдущей итерации (слоя по «времени»), а к линейному уравнению на следующем слое применен метод продольно-поперечной прогонки [18-20]. Сходимость к равновесному решению при определенных условиях имеет место, поскольку коэффициенты уравнения и граничные условия не зависят от «времени» t.

Равновесные конфигурации в плазменных торе и цилиндре

Одномерные задачи о равновесных магнитоплазменных конфигурациях в прямом шнуре круглого сечения с током осевого направления используют безразмерные разновидности уравнений (1.4):

$$\frac{dp}{dr} = -jH\,; \quad j = \frac{dHr}{rdr} \tag{2.1}$$

в круге радиуса $R = 1$. Конкретная конфигурация определяется распределением электрического тока $j(r)$. Зададим его в виде

$$j = j_0 f(r), \quad j_0 = \left(\int_0^1 f(r)dr\right)^{-1}, \tag{2.2}$$

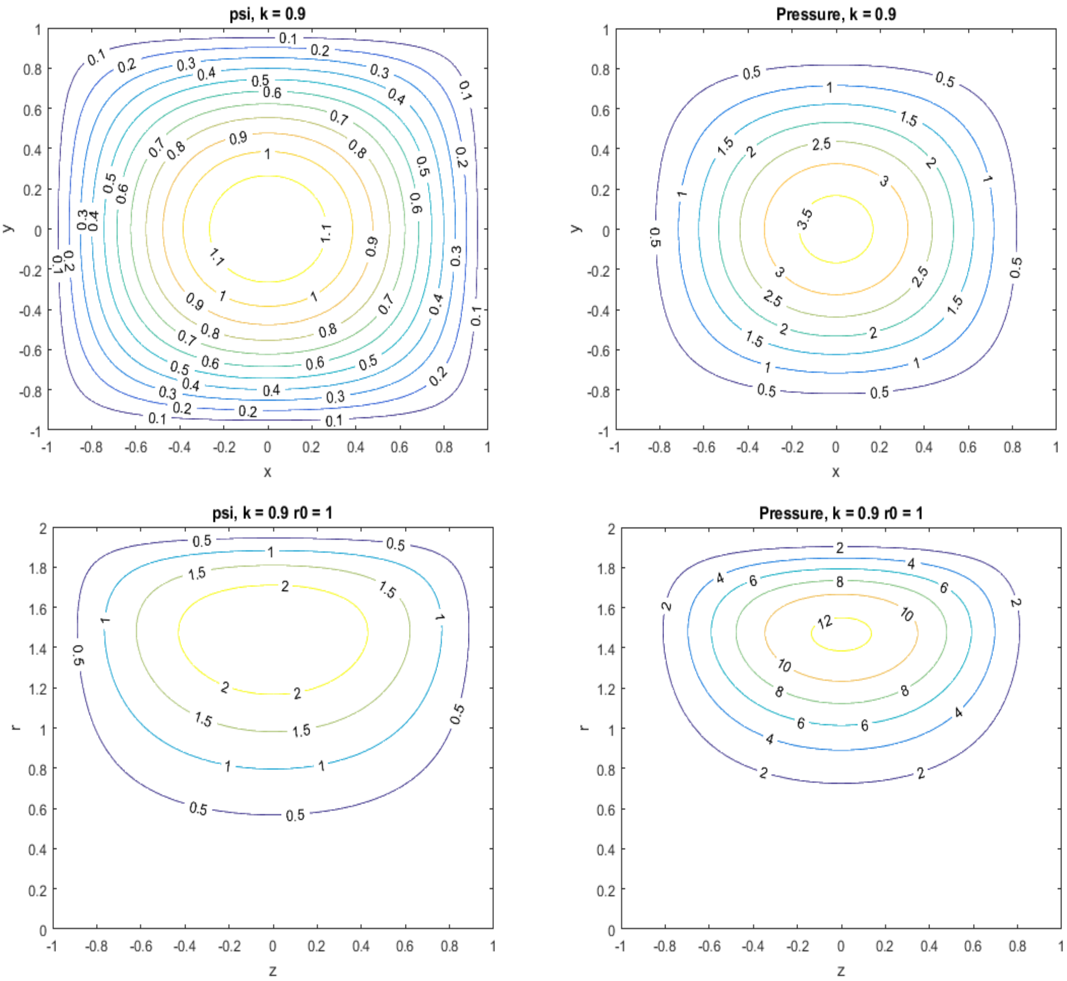
где безразмерный параметр j_0 обеспечивает в размерных величинах равенство

$$\iint_{|r|<R} j(r)rdrd\varphi = J \tag{2.3}$$

с заданными значениями радиуса шнура R и величины J тока в нем. Магнитное поле $H(r)$ и давление $p(r)$ определяются интегрированием из (2.1):

$$H(r) = \frac{j_0}{r}\int_0^r f(\xi)\xi d\xi\,; \quad p(r) = p_\Gamma + \int_r^1 j(\xi)H(\xi)d\xi\,, \tag{2.4}$$

где константа интегрирования p_Γ – давление на границе шнура – не оказывает влияния на решение задачи. В дальнейшем положено $p_\Gamma = 0$, т.е. фактически результаты расчетов следует относить к разности $p - p_\Gamma$.



(а) (б)

Рис. 1. Магнитное поле и давление в цилиндрическом (а) и тороидальном (б) плазменных шнурах с электрическим током, максимальным в центре: $r_0 = 1$; k=0.9.

Введя функцию магнитного потока Ψ посредством $H = -d\Psi/dr$, получим из (2.1), (2.4) одномерный вариант уравнения типа Грэда-Шафранова (1.5)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi}{dr}\right) + \frac{dp}{d\Psi} = 0, \tag{2.5}$$

в котором

$$p(\Psi) = p(r(\Psi)); \quad \frac{dp}{d\Psi} = \frac{dp}{dr}\Big/\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{dp}{dr}\Big/H = j(r(\Psi)). \tag{2.6}$$

Здесь $r = r(\Psi)$ – обратная функция по отношению к $\Psi(r) = -\int_1^r H(\xi)d\xi$.

Рассматриваются две серии задач. В первой из них $f(r) = 1 - kr^2$, т.е.

$$j(r)=\frac{4}{2-k}(1-kr^2),\quad 0\le k\le 1 \tag{2.7}$$

– «параболический» ток с максимумом на оси шнура. При изменении параметра k от 0 до 1 ток изменяется от постоянного до максимально выпуклого по координате r. В этой серии

$$H(r)=\frac{2r}{2-k}\left(1-\frac{k}{2}r^2\right);\quad \Psi(r)=\frac{1-r^2}{2-k}\left(1-\frac{k}{4}(1+r^2)\right);$$

$$p(r)=\frac{4(1-r^2)}{(2-k)^2}\left(1-k\left(\frac{3}{4}-\frac{k}{6}\right)(1+r^2)+\frac{k^2}{6}r^4\right).$$

Отсюда следует зависимость $p(\Psi)$

$$\begin{aligned} p(\Psi)&=\frac{2(2-k)}{3k}\left(\frac{4k\Psi}{2-k}+1\right)^{3/2}-\frac{1}{k}\left(\frac{4k\Psi}{2-k}+1\right)+\frac{2k-1}{3k};\\ \frac{dp}{d\Psi}&=j=4\left(\sqrt{\frac{4k\Psi}{2-k}+1}-\frac{1}{2-k}\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

которую естественно использовать в двумерных задачах о прямом и тороидальном шнурах квадратного сечения.

Пример расчета конфигураций поля и плазмы в цилиндре и торе и их сравнения между собой представлены на рис.1. Параметр k = 0.9 выбран близким к правому концу рассматриваемого диапазона, а большой радиус тора (безразмерный) $r_0=1$ – минимально возможный, чтобы неоднородность тока и тороидальность ловушки проявились наиболее заметным образом. Здесь, во-первых, видно, что как и следовало ожидать, конфигурации в квадратном и круглом цилиндре топологически одинаковы. Они отличаются значениями полоидального магнитного потока $\Psi_{\max}$, давления $p_{\max}$ и электрического тока $j_{\max}$, которые в квадрате выше, чем в круге в соответствии с различием их площадей. Во-вторых, тороидальные конфигурации деформированы по сравнению с цилиндрическими: магнитная ось смещена от центра на величину $\delta r=0.48$. Максимальные значения $\Psi_{\max}$ и $p_{\max}$ в торе выше, чем в цилиндре, что согласуется с тем, что конфигурация стала компактнее в результате упомянутой деформации.

Зависимость характеристик равновесных магнитоплазменных конфигураций от параметра r_0 представлена таблицей 1 для двух значений параметра k. Из них следует, что при возрастании большого радиуса тора конфигурации приближаются по своим свойствам к цилиндрическим. В результате проведенных расчетов этот качественно очевидный результат приобретает количественные оценки. Сравнение таблиц 1а и 1б показывает, что на смещение магнитной оси δr влияет в основном только радиус тора r_0, а магнитный поток $\Psi_{\max}$ и давление $p_{\max}$ зависят также от неоднородности тока по радиусу.

Вторая серия расчетов проведена с токами, максимальными у границы плазменного шнура, а именно $f(r) = r^N$:

$$j(r) = (N+2)r^N, \quad N \geq 0. \qquad (2.9)$$

При возрастании показателя степени N плотность тока перераспределяется от постоянной при $N = 0$ в сторону границы шнура и в пределе при $N \to \infty$ становится «скинированной», т.е. сосредоточенной только на границе. Из (2.9) следует

$$\begin{gathered} H(r) = r^{N+1}; \quad \Psi(r) = \frac{1 - r^{N+2}}{N+2}; \\ p(r) = \frac{N+2}{2(N+1)}\left(1 - r^{2(N+1)}\right); \\ p(\Psi) = \frac{N+2}{2(N+1)}\left(1 - (1-(N+2)\Psi)^{\frac{2(N+1)}{N+2}}\right); \\ \frac{dp}{d\Psi} = (N+2)\left(1-(N+2)\Psi\right)^{\frac{N}{N+2}}. \end{gathered} \qquad (2.10)$$

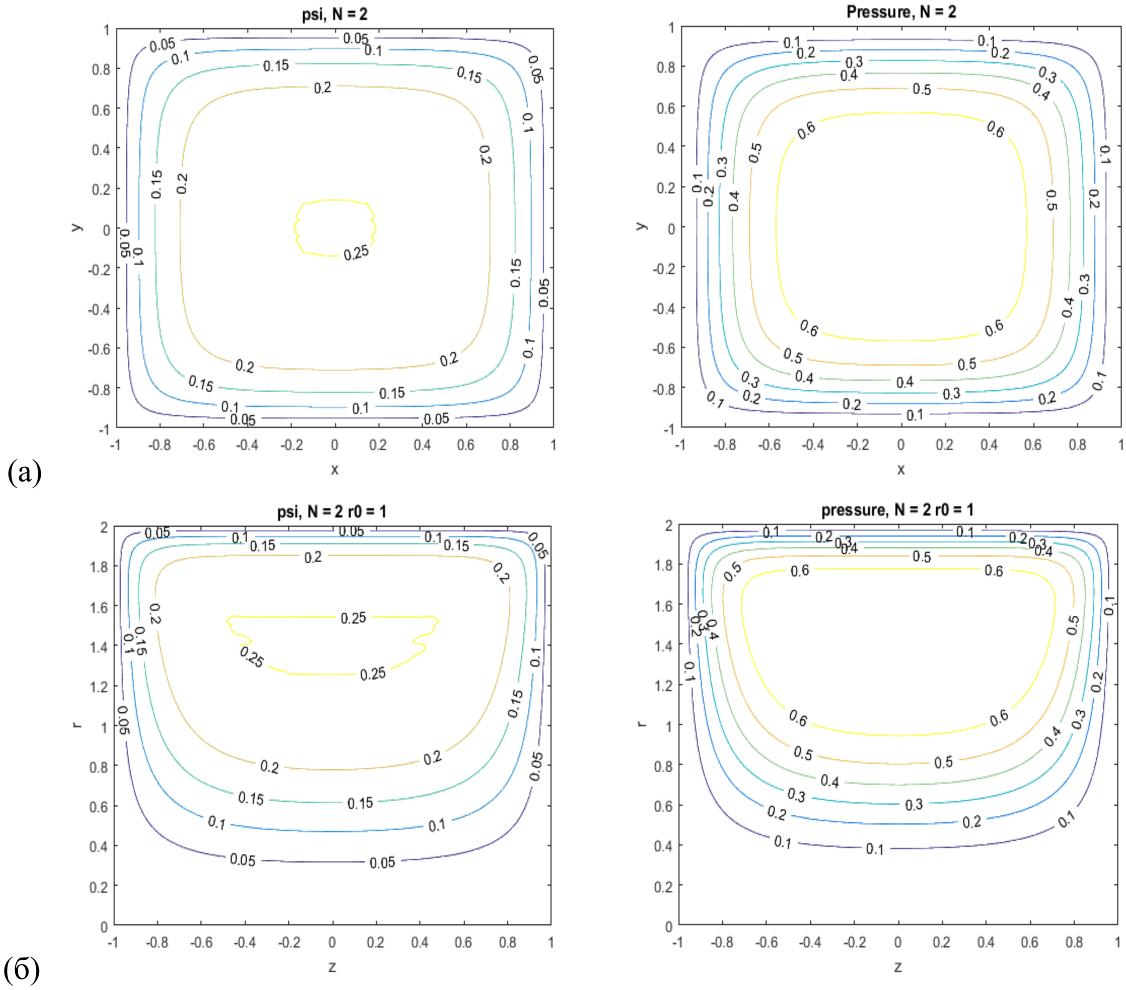


Рис. 2. Магнитное поле и давление в цилиндрическом (а) и тороидальном (б) плазменных шнурах с электрическим током, максимальным на границе: $r_0 = 1$; N=2.

Расчеты конфигураций этой серии иллюстрированы примером на рис.2 с относительно умеренным (N = 2) ростом тока от центра к границе и минимально возможным радиусом тора $r_0 = 1$. Здесь конфигурации занимают участок, окружающий магнитную ось, с почти постоянными значениями функции магнитного потока и давления и почти без электрического тока, окруженный поясом их интенсивного перехода к заданным значениям на границе. Конфигурация в торе деформирована и смещена в сторону внешней границы. В отличие от предыдущей серии магнитный поток $\Psi_{\max}$ и максимальное значение давления $p_{\max}$ в обеих конфигурациях практически совпадают со своими значениями в круглом цилиндре, т.е. совпадает их характерный объем. С ростом показателя степени N этот объем возрастает. Значения $\Psi_{\max}$ и $p_{\max}$ в нем убывают согласно формулам (2.10), а переходный пояс у границы сужается. Смещение магнитной оси δr убывает, очевидно, с ростом радиуса r_0, а также с ростом показателя N, что иллюстрировано таблицей 2.

Таблица 1

Параметры тороидальных и цилиндрических конфигураций с максимальным током в центре при а) k = 0.9 и б) k = 0.5

а)

r_0	1	1.5	3	6	9	∞
δr	0.48	0.38	0.24	0.12	0.08	0
$\Psi_{\max}$	2.417	1.712	1.328	1.256	1.211	1.192
$p_{\max}$	12.06	6.785	4.428	4.031	3.791	3.692

б)

r_0	1	1.5	3	6	9	∞
δr	0.46	0.38	0.24	0.12	0.08	0
$\Psi_{\max}$	1.173	0.955	0.845	0.777	0.771	0.765
$p_{\max}$	3.083	2.309	1.949	1.738	1.720	1.702

Решения всех вариантов задач обеих упомянутых серий получены в расчетах методом установления. Отсюда следует, что рассмотренные равновесные конфигурации устойчивы относительно возмущений той же размерности, т.е. двумерных возмущений магнитного потока. Эта устойчивость, названная «диффузионной», очевидна в задачах второй серии, где $g'(\Psi) < 0$ и дифференциальный оператор линеаризованной задачи с уравнением типа Грэда-Шафранова (1.19)

$$L[u] \equiv -\Delta u - g'(\Psi)u; \quad u\big|_{\Gamma} = 0 \qquad (2.11)$$

положительно определен [6,17,18]. В задачах первой серии результат нетривиален, поскольку в них $g'(\Psi) > 0$ при всех $k > 0$. Более того, при $k = 1$, как и в любых других задачах о пинче, в которых $j = dp/d\Psi = 0$ на границе r = 1, решение, полученное в расчетах, не является единственным: наряду с найденным решением задача имеет тривиальное решение $\Psi \equiv 0$. «Диффузионно устойчивым» оказалось нетривиальное решение, к которому в процессе установления притягивается любое «начальное» распределение Ψ, хоть сколько-нибудь отличное от нуля.

Полученный результат представляет интерес, поскольку он является необходимым условием традиционной МГД-устойчивости рассмотренных равновесных конфигураций: последняя требует «диффузионной устойчивости» семейства двумерных задач, которые в совокупности охватывают все возможные трехмерные возмущения [16-18].

Таблица 2

Смещение магнитной оси δr в тороидальных и цилиндрических конфигурациях с максимальным током на границе при а) N = 2 и б) N = 5

а)

r_0	1	1.5	3	6	9	∞
δr	0.54	0.44	0.22	0.10	0.07	0

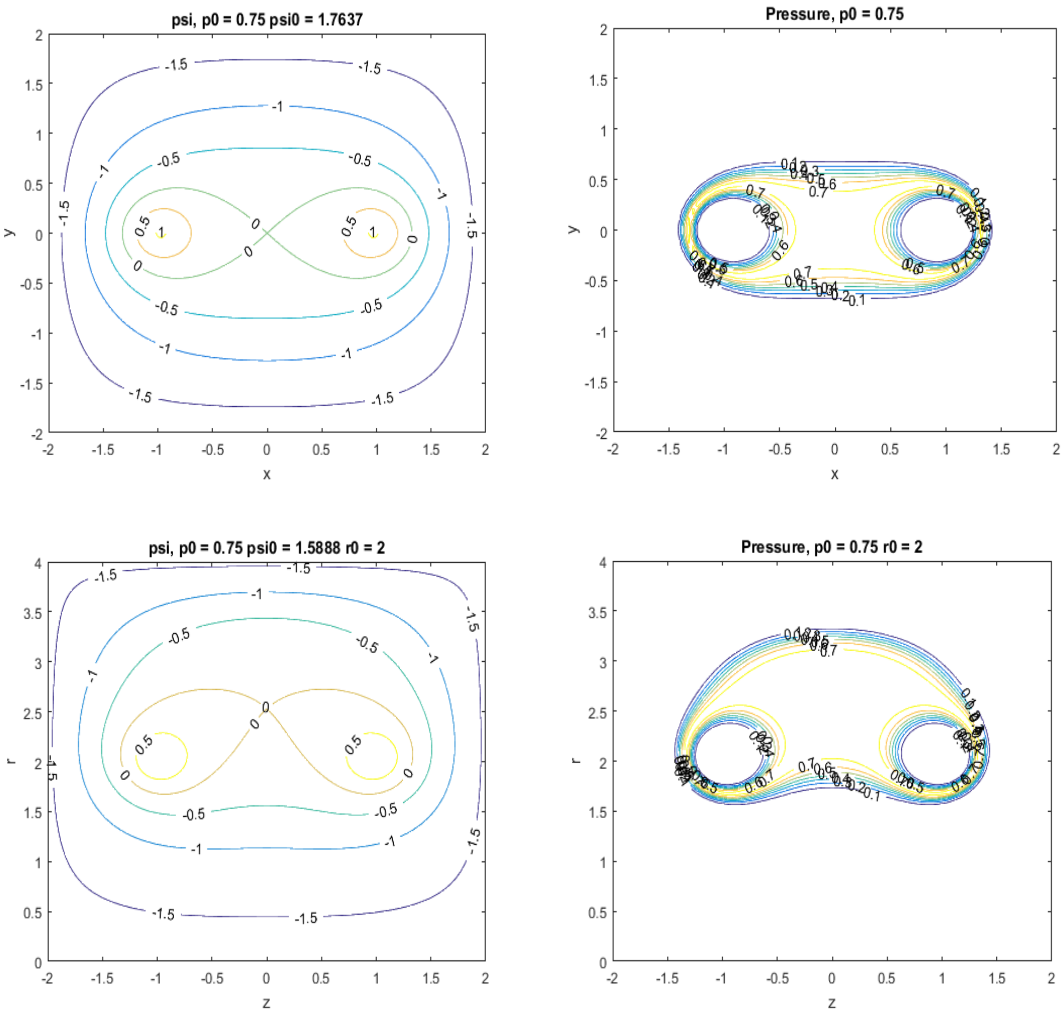
б)

r_0	1	1.5	3	6	9	∞
δr	0.48	0.40	0.26	0.20	0.17	0

Равновесные конфигурации в «Галатее-Поясе»

Модели равновесных магнитоплазменных конфигураций в цилиндрической и тороидальной разновидностях ловушки «Галатеи-Пояса» используют краевые задачи с уравнениями типа Грэда-Шафранова (1.17) и (1.15) в квадратных областях $|x| < R$, $|y| < R$ и $|r - r_0| < R$, $|z| < R$ соответственно с граничным условием $\Psi_\Gamma = 0$. Токи в проводниках с центрами $(x_k = \pm 1, y = 0)$ и $(r = r_0, z_k = \pm 1)$ представлены функциями (1.9) и (1.8). Зависимость $p(\Psi)$ имеет вид (1.7), где параметр Ψ_0 подбирается согласно формулам (1.18) и (1.16) так, чтобы значение искомой функции равнялось $\Psi = \Psi_0$ в особой точке магнитного поля на магнитной оси системы.

Пример одного из вариантов расчетов со значениями параметров R = 2; $r_c = 0.2$; $q = 0.2$; $p_0 = 0.75$; $r_0 = 2$ представлен на рис.3 магнитными линиями $\Psi - \Psi_0 = \mathrm{const}$ и изобарами $p = \mathrm{const}$. Конфигурация в прямом цилиндре представляет собой криволинейный четырехугольник с выпуклыми внутрь сторонами и тонкими отростками, опоясывающими проводники с током. Характерные особенности тороидальной конфигурации проявляются наиболее заметным образом в торе минимально возможного радиуса $r_0 = 2$. Как и выше, конфигурация топологически эквивалентна цилиндрической, но деформирована: она лишилась симметрии относительно центра квадрата и смещена в сторону внешней границы. Магнитная ось удалена от центра квадрата на величину $\delta r = 0.52$. Параметр Ψ_0, характеризующий полоидальный магнитный поток между сепаратрисой поля и внешней границей, уменьшился по сравнению с цилиндрической конфигурацией.



(а)

(б)

Рис. 3. Магнитное поле и давление в цилиндрической (а) и тороидальной (б) "Галатее-Поясе": $r_0 = 2$; $p_0 = 0.75$.

«Диффузионная устойчивость» рассматриваемых конфигураций, т.е. сходимость итерационного процесса решения задач, имеет место при ограничении на p_0 – максимальное безразмерное значение давления в центре конфигурации и на проходящей через него сепаратрисе магнитного поля

$$p_0 < p_0^{cr} . \tag{3.1}$$

В терминах математического аппарата задач условие (3.1) соответствует положительной определенности дифференциального оператора линеаризованной задачи (2.11). Она обеспечивает существование, единственность и «диффузионную устойчивость» решений задач с полулинейными эллиптическими дифференциальными уравнениями, которые лежат в основе широкого класса математических моделей взаимодействия процессов реакции и диффузии [11,12,17,18]. Физический смысл ограничения (3.1), по-видимому, в том, что магнитное поле заданного тока J_c в проводниках может удержать в ловушке заданного размера R плазму только с ограниченным давлением.

Таблица 3

Критические значения давления p_0^{cr} в тороидальных и цилиндрической конфигурациях "Галатеи-Пояса".

r_0	2	4	6	8	10	∞
p_0^{cr}	1.10	2.05	2.20	2.40	2.90	4.50

В тороидальных ловушках ограничение (3.1) имеет место, однако оно усиливается (p_0^{cr} уменьшается) при уменьшении радиуса тора r_0, т.е. при возрастании кривизны ловушки в азимутальном направлении. Этот результат представлен таблицей 3. Он уточняет аналогичное положение в работах [12,13], где менее удачно выбраны единицы измерения Ψ_u и q (1.12), и рост Ψ пропорционально радиусу r_0 не коррелирует с постоянным значением параметра q. Т.е. упомянутое в [12,13] убывание p_0^{cr} с ростом r_0 обязано сжатию конфигурации в поперечном магнитному полю направлении.

Зависимость количественных характеристик конфигураций – смещения δr и параметра Ψ_0, отвечающего за магнитный поток, от радиуса тора r_0 представлена в таблице 4 для трех разных значений давления p_0. Анализ этой зависимости и сравнение тороидальных конфигураций с цилиндрической ($r_0 = \infty$) позволяет сделать следующие выводы. При любых значениях $r_0 \geq 2$ могут существовать равновесные конфигурации плазмы и поля в ловушках при любых значениях максимального давления, не превосходящих p_0^{cr}, приведенных в таблице 3. Решения краевых задач при условии (3.1) единственны и являются «диффузионно устойчивыми». Из таблицы 4 следует, что при возрастании давления плазмы p_0 возрастает смещение δr магнитной оси и значение Ψ_0 магнитного потока между сепаратрисой поля и внешней границей. Различия между тороидальными и цилиндрическими конфигурациями заметно стираются при возрастании радиуса тора r_0: значения Ψ_0 почти совпадают при $r_0 \geq 6$, а смещение измеряется единицами процентов при $r_0 \geq 8$.

Таблица 4

Параметры тороидальных и цилиндрических конфигураций в "Галатее-Поясе" при а) $p_0 = 0.5$, б) $p_0 = 0.75$, в) $p_0 = 1$.

а)

r_0	2	4	6	8	10	∞
δr	0.44	0.19	0.12	0.08	0.06	0
Ψ_0	1.495	1.638	1.663	1.671	1.675	1.682

б)

r_0	2	4	6	8	10	∞
δr	0.52	0.22	0.16	0.12	0.08	0
Ψ_0	1.589	1.729	1.747	1.754	1.758	1.764

в)

r_0	2	4	6	8	10	∞
δr	0.60	0.28	0.16	0.13	0.10	0
Ψ_0	1.660	1.818	1.834	1.839	1.842	1.847

Заключение

В статье представлены математические модели МГД-равновесия плазмы в типичных примерах магнитных ловушек тороидальной формы и их распрямленных в цилиндр аналогов. Дан сравнительный анализ количественных характеристик плазменных конфигураций в торе и цилиндре.

Список литературы

1. *Морозов А.И.* О галатеях — плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физ. плазмы, 1992, т.18, Вып.3, С.305-316; англ.пер.: *Morozov A.I.* On Galateas — plasma traps with conductors, immersed into the plasma // Sov. J. Plasma Phys., 1992, V.18, P.159-170.
2. *Шафранов В.Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича — М.: Госатомиздат, 1963, Вып.2, С.92-131; англ. пер.: *Shafranov V.D.* Plasma equilibrium in a magnetic field // Reviews of Plasma Physics Vol.2 / Ed. M.A. Leontovich, P.103-152, -NY, Consultant Bureau, 1966.
3. *Кадомцев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Там же, С.132-176; англ.пер.: *Kadomtsev B.B.* Hydromagnetic Stability of a Plasma // Ibid. P.153-206.
4. *Соловьев Л.С.* Симметричные магнитогидродинамические течения и винтовые волны в круглом плазменном цилиндре // Там же, 1963, Вып.3, С.245-289; англ.пер.: *Solov'ev L.S.* Symmetric Magnetohydrodinamic Flow and Helical Waves in a Circular Plasma Cylinder // Reviews of Plasma Physics / Ed. M.A. Leontovich, -Springer, 1967, P.277-325.
5. *Соловьев Л.С.* Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций // Там же -М.:Атомиздат, 1972, Вып.6, С.210-289; *Solov'ev L.S.* Gidromagnitnaya ustoichivost zamknutykh plasmennykh konfiguratsyi // Voprosy teorii plasmy /red. M.A.Leontovich — M.:Atomizdat, 1972, Vyp.6, S.210-289.
6. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* Магнитные ловушки для удержания плазмы // Матем. моделирование, 1999, т.11, №5, С.3-36; *Brushlinsky K.V., Savelyev V.V.* Magnitnye lovushki dlya uderjhaniya plasmy // Matem. Modelirovanie, 1999, t.11, №5, S.3-36.
7. *Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю.,* Математическое моделирование МГД-равновесия плазмы // Матем. моделирование, 2008, т.20, №5, С.3-34; англ.пер.: Kostomarov D.P., Medvedev S.Yu., Sychygov D.Yu. Methods for MHD Plasma Equilibria Mathematical Modelling // Matem. Models and Computer Simulations, 2009, V.1, №2, P.228-254.
8. *Пустовитов В.Д.* Энергетический подход к анализу устойчивости запертых и вращающихся мод, взаимодействующих с резистивной стенкой в токамаке // Физ. плазмы, 2013, Т.39, №3, С229-239; англ.пер.: *Pustovitov V.D.* Energy Approach to Stability Analysis of the Locked and Rotating Resistive Wall Modes in Tokamaks // Plasma Physics Reports, 2013, Vol.39, №3, P.199-208.

9. *Medvedev S.Yu., Martynov A.A., Drozdov V.V., Ivanov A.A., Poshekhonov Yu.Yu.* High-resolution equilibrium calculations of pedestal and SOL plasma in tokamaks. // Plasma Physics and Controlled Fusion, 2017, V.59, №2, Ar.025018, P.1-8.

10. *Морозов А.И., Франк А.Г.* Тороидальная магнитная ловушка-галатея с азимутальным током // Физ. плазмы, 1994, Т.20, №11, С.982-989;
англ.пер.: *Morozov A.I., Frank A.G.* A toroidal magnetic trap Galatea with the azimutal current // Plasma Physics Reports, 1994, V.20, P.879-886.

11. *Брушлинский К.В., Игнатов П.А.* Плазмостатическая модель магнитной ловушки "Галатея-Пояс" // ЖВМ и МФ, 2010, Т.50, №12, С.2184-2194;
англ.пер.: *Brushlinskii K.V., Ignatov P.A.* A Plasmastatic Model of the Galatea-Belt Magnetic Trap // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, V.50, №12, P.2071-2081.

12. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С.* Математическая модель тороидальной магнитной ловушки "Галатея-Пояс" // Дифференциальные уравнения, 2016, Т.52, №7, С.887-895;
англ.пер.: *Brushlinskii K.V., Gol'dich A.S.* Mathematical Model of the Galatea-Belt Toroidal Magnetic Trap // Differential Egquations, 2016, Vol.52, №7, P.845-854.

13. *Brushlinskii K.V., Goldich A.S.* Plasmastatic model of toroidal trap "Galatea-Belt" // Journal of Physics: Conf.Ser. V.788, (2017) 012008 — IOP Publishing.

14. *Шафранов В.Д.* О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ, 1957, Т.33, вып. 3(9), С.710-722;
англ.пер.: *Shafranov V.D.* On magnetohydrodinamic equilibrium configurations // Sov. Phys. JETP, 1958, V.6, P.545-556.

15. *Grad H., Rubin H.* Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. of the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, V.31, P.190-197. -N.Y.:Columbia Univ. Press, 1959;
русск.пер.: *Грэд Г., Рубин Г.* Гидромагнитные равновесия и бессиловые поля // Физика горячей плазмы и термоядерные реакции / ред. В.Ф. Калинин. Избр. докл. иностр. ученых в трудах по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958. — Изд. Гл. упр. по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1959. С.131-138.

16. *Брушлинский К.В.* Два подхода к задаче об устойчивости равновесия плазмы в цилиндре // ПММ, 2001, Т.65, Вып.2, С.235-243;
англ.пер.: *Brushlinskii K.V.* Two Approaches to the Stability Problem for Plasma Equilibrium in a Cylinder // J. Appl. Maths. Mech., 2001, V.65, №2, P.229-236.

17. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. — 200 с.;
Bruslinskii K.V. Matematicheskie i vychislitelnye zadachi magnitnoi gazodinamiki. — M.: BINOM. Laboratoriia znanii, 2009. — 200 s.

18. *Брушлинский К.В.* Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. — Долгопрудный: Изд. дом "Интеллект", 2017. — 272 с.;
Brushlinskii K.V. Matematicheskie osnovy vychislitelnoi mekhaniki jydkosti, gaza i plasmy. — Dolgoprudny:Isd. Dom "Intellekt". 2017. — 272 s.
19. *Peaceman D.N., Rachford H.H.* The Numerical Solution of parabolic and elliptic differential equations // SIAM, 1955, V.3, №1, P.28-42.
20. *Douglas J.,* On the numerical integration of $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial u/\partial t$ by implicit methods // Ibid. P.42-65.