ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 197 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 197. 24 с. doi:10.20948/prepr-2018-197
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-197

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов

Москва — 2018

Попков К. А.

Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов

Установлено, что почти любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{x\&y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$, допускающей полный проверяющий тест длины не более 4 относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов. Доказаны также следующие утверждения: любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{x\&y, x\vee y, x\oplus y, 1\}$ (в базисе $\{x\&y, x\vee y, x\vee\overline{y}, x\oplus y\}$), содержащей не более одной фиктивной входной переменной и допускающей полный проверяющий тест длины не более 5 (соответственно, не более 4) относительно неисправностей такого же типа.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, произвольная константная неисправность, полный проверяющий тест

Kirill Andreevich Popkov

Short complete fault detection tests for logic networks with fan-in two

It is established that one can implement almost any Boolean function on n variables by a logic network in the basis $\{x\&y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$, allowing a complete fault detection test with length not exceeding 4 under arbitrary stuck-at faults at outputs of gates. The following assertions are also proved: one can implement any Boolean function on n variables by a logic network in the basis $\{x\&y, x\vee y, x\oplus y, 1\}$ (in the basis $\{x\&y, x\vee y, x\vee\overline{y}, x\oplus y\}$), containing not more than one dummy variable and allowing a complete fault detection test with length not exceeding 5 (not exceeding 4, respectively) under faults of the same type.

Key words: logic network, arbitrary stuck-at fault, complete fault detection test

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-21-00025 П.

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (СФЭ) (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется СФЭ S с n входами ($n \geqslant 1$), на которые подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, и одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы. Если $g \not\equiv f$, то функцию неисправности g схемы S называют *нетривиальной*.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального проверяющего теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент.

Любое множество булевых функций будем называть *(схемным) базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — полный проверяющий тест (ППТ) для некоторой СФЭ S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D_B(T)$ — длина теста T; $D_B(S) = \min D_B(T)$, где минимум берётся по всем ППТ T для схемы S; $D_B(f) = \min D_B(S)$, где минимум берётся по всем схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D_B(n) = \max D_B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_B(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ППТ.

Перечислим основные результаты, касающиеся полных проверяющих тестов для СФЭ. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D будем ставить символы «$0, 1$», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов соответственно. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа α.

Н. П. Редькин в [7, 8] для любого полного конечного базиса B_1 получил оценку $D^{0,1}_{B_1}(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$; Д. С. Романов в [9] доказал, что существует базис B_2, состоящий из не более чем сорока шести булевых функций от не более чем семи переменных, в котором $2 \leqslant D^{0,1}_{B_2}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 1$. В [10] доказано существование такого базиса B_3, состоящего из двух булевых функций от не более чем четырёх переменных, что $D^{0,1}_{B_3}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$. Для базиса $B_4 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [11] получил оценку $D^{p}_{B_4}(n) \leqslant n$ при $n \geqslant 1$, где $p = 0$ или 1. Впоследствии указанная оценка была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [12] установила, что $D^{p}_{B_4}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. Также ей удалось доказать соотношения $D^{0}_{B_5}(n) = 1$ [13] (совместно с П. А. Бородиным) и $D^{1}_{B_6}(n) \geqslant n + 1$ при $n \geqslant 2$ [14], где $B_5 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$, $B_6 = \{|\}$ (штрих Шеффера).

Всюду в настоящей работе будем предполагать, что СФЭ, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, реализует также и все булевы функции, получающиеся из $f(\tilde{x}^n)$ изъятием всех или части фиктивных переменных этой функции. Это предположение согласуется с общепринятым положением теории булевых функций о том, что две булевы функции, получающиеся друг из друга при помощи операций добавления и изъятия фиктивных переменных, считаются равными (см., например, [5, с. 12]). Будем говорить, что СФЭ *содержит k фиктивных входных переменных и реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$*, если данная схема содержит k входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и реализует булеву функцию, не зависящую существенно от этих k переменных и равную функции $f(\tilde{x}^n)$. Например, схема, изображенная на рис. 1, содержит одну фиктивную входную переменную x_0 и реализует функцию $x_1 x_2$. Условимся считать, что наборы из любого теста для схемы, содержащей k фиктивных входных переменных и реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, имеют длину $n + k$ (по общему числу переменных $x_1, \ldots, x_n$ и фиктивных входных переменных схемы). Такое предположение сделано в [6], где рассматриваются, в частности, контактные схемы, содержащие входные переменные $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и реализующие функцию $f(\tilde{x}^n)$, и тесты для этих схем, содержащие наборы длины $n+1$.

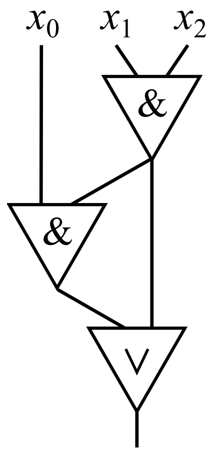

Рис. 1

По аналогии с обозначениями $D_B(f)$, $D_B(n)$ введём обозначения $D_B^{(+k)}(f) = \min D_B(S)$, где минимум берётся по всем СФЭ S в базисе B, содержащим не более k фиктивных входных переменных и реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$, и $D_B^{(+k)}(n) = \max D_B^{(+k)}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Ясно, что для любой булевой функции f и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$D_B^{(+k)}(f) \leqslant D_B^{(+0)}(f) = D_B(f). \tag{1}$$

В данной работе будут рассматриваться только произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов. Будут доказаны следующие неравенства: $D_{B_7}^{0,1}(f) \leqslant 4$ для почти всех булевых функций f от n переменных, $D_{B_7}^{0,1\,(+1)}(n) \leqslant 5$ и $D_{B_7'}^{0,1\,(+1)}(n) \leqslant 4$ (теоремы 1–3), где $B_7 = \{x\&y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$, $B_7' = \{x\&y, x \vee y, x \vee \overline{y}, x \oplus y\}$.

В дальнейшем для краткости верхние индексы $0, 1$ у величин $D_{B_7}^{0,1}(f)$, $D_{B_7}^{0,1\,(+1)}(n)$, $D_{B_7}^{0,1\,(+1)}(f)$, $D_{B_7'}^{0,1\,(+1)}(n)$ и $D_{B_7'}^{0,1\,(+1)}(f)$ будем опускать.

Введём обозначения $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}$, $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \ldots, 1}_{r}$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Назовём *цепочкой* любой блок из функциональных элементов, имеющий один выход, в котором выход любого элемента, кроме выходного (при его наличии), соединён ровно с одним входом ровно одного элемента; входами этого блока являются все незанятые входы его элементов.

Будем говорить, что элемент E' расположен в схеме S или в цепочке Z *выше* (*ниже*) элемента E, если в этой схеме (цепочке) существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E').

Вместо «вход схемы S, отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход „x_i“схемы S».

Метод построения основной схемы

Лемма 1. *Пусть S — произвольная СФЭ, некоторые элементы в которой могут быть неисправны; Z — произвольная непустая цепочка из элементов в этой схеме; $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ — такие входные наборы схемы S, что на выходе верхнего элемента цепочки Z и на всех её входах, кроме, быть может, входов её верхнего элемента, на данных двух наборах возникают одинаковые значения. Тогда значения на выходах всех элементов этой цепочки на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ одинаковы.*

Доказательство. Пусть цепочка Z состоит из d элементов; занумеруем их сверху вниз числами от 1 до d. Докажем по индукции, что на значения на выходе i-го элемента на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ совпадают, где $i = 1, \ldots, d$.

База индукции. Пусть $i = 1$. На выходе первого элемента (т. е. верхнего элемента цепочки Z) по условию леммы возникают одинаковые значения на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $i = j < d$; докажем его для $i = j+1$. На тех входах $(j+1)$-го элемента, которые соединены в цепочке Z с выходом j-го элемента, на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ возникнут одинаковые значения по предположению индукции. На всех остальных входах $(j + 1)$-го элемента, т. е. на тех его входах, которые являются входами цепочки Z, значения на данных двух наборах также совпадают в силу условия леммы. Тогда значения на выходе $(j + 1)$-го элемента на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, очевидно, будут совпадать как в случае исправности, так и в случае неисправности этого элемента (когда на его выходе реализуется некоторая булева константа). Шаг индукции доказан. Лемма 1 доказана. $\square$

Рассмотрим базис $B_7 = \{x\&y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ (вида $x \vee y$, $x \oplus y$, 1), будем называть *конъюнктором* (соответственно *дизъюнктором*, *сумматором*, *элементом «константа* 1»).

Лемма 2. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^t)$, где $t \geqslant 3$, для которой выполнены соотношения $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$, можно реализовать СФЭ в базисе B_7, допускающей ППТ $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$.*

Доказательство. Пусть

$$f'(\tilde{x}^t) = (x_1 \vee \ldots \vee x_t) \oplus (x_1 \& \ldots \& x_t) \oplus f(\tilde{x}^t). \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{gathered} f'(\tilde{0}^t) = 0 \oplus 0 \oplus f(\tilde{0}^t) = f(\tilde{0}^t), \\ f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = 1 \oplus 0 \oplus f(1, \tilde{0}^{t-1}) = \overline{f}(1, \tilde{0}^{t-1}) = f(\tilde{0}^t), \\ f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = 1 \oplus 0 \oplus f(0, \tilde{1}^{t-1}) = \overline{f}(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(\tilde{1}^t), \\ f'(\tilde{1}^t) = 1 \oplus 1 \oplus f(\tilde{1}^t) = f(\tilde{1}^t), \end{gathered}$$

откуда

$$f'(\tilde{0}^t) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}), \tag{3}$$

$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f'(\tilde{1}^t). \tag{4}$$

Представим функцию f' полиномом Жегалкина:

$$f'(\tilde{x}^t) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{5}$$

где $c \in \{0, 1\}$, а $K_1, \ldots, K_m$ — попарно различные конъюнкции переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_t\}$ (в случае $m = 0$ полагаем $K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus \oplus c = c$). Из соотношений (3), (5) следует, что

$$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = f'(\tilde{0}^t) = \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m} \oplus c = c. \tag{6}$$

Если среди конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ присутствует слагаемое x_1, то на наборе $(1, \tilde{0}^t)$ каждая из этих конъюнкций, кроме x_1, обратится в нуль, а слагаемое x_1 — в единицу, поэтому $f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = 1 \oplus c$ в силу (5), однако это противоречит соотношению (6). Поэтому ни одна из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ не равна x_1. Далее, пусть переменная x_1 входит в m_1 конъюнкций из числа $K_1, \ldots, K_m$ и не входит в остальные $m - m_1$ конъюнкций. Тогда из соотношения (5) следует, что

$$\begin{gathered} f'(\tilde{1}^t) = \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m} \oplus c, \\ f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m_1} \oplus \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m-m_1} \oplus c = \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m-m_1} \oplus c, \end{gathered}$$

а отсюда и из соотношения (4) — что числа m и $m - m_1$ одной чётности, т. е. число m_1 чётно.

Пусть $i_2, \ldots, i_t$ — попарно различные индексы от 2 до t, причём $i_2 < \ldots < i_k$ и $i_{k+1} < \ldots < i_t$, где $k \in \{2, \ldots, t-1\}$. Докажем тождество

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \equiv (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \vee x_{i_{k+2}}) \oplus \\ \oplus \ldots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \vee x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus x_{i_t}. \quad (7)$$

Преобразуем его правую часть, используя очевидное тождество $x \vee y \equiv x \oplus y \oplus xy$ для $x, y \in \{0,1\}$. Имеем:

$$(x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \vee x_{i_{k+2}}) \oplus \ldots \oplus \\ \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \vee x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus x_{i_t} \equiv \\ \equiv (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus x_{i_{k+1}} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \oplus x_{i_{k+2}} \oplus \\ \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}}) \oplus \ldots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \oplus x_{i_t} \oplus \\ \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus x_{i_t}.$$

Нетрудно заметить, что после раскрытия всех скобок в правой части полученного тождества каждое слагаемое, кроме $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, будет присутствовать в ней ровно два раза (с учётом того, что $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_t} \equiv x_1 x_2 \ldots x_t$), откуда следует справедливость соотношения (7).

Каждую из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ из представления (5), содержащих переменную x_1, кроме $x_1 x_2 \ldots x_t$, перепишем в соответствии с (7) (напомним, что ни одна из них не равна x_1). Тогда равенство (5) примет вид

$$f'(\tilde{x}^t) = K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c, \quad (8)$$

где каждое из слагаемых $K'_1, \ldots, K'_{m'}$ является либо конъюнкцией переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, либо конъюнкцией $x_1 x_2 \ldots x_t$, либо имеет вид $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}$, где $k \in \{2, \ldots, t-1\}$ и $i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \{2, \ldots, t\}$, причём $i_2 < \ldots < i_k$ и i_{k+1} — минимальное число из множества $\{2, \ldots, t\} \setminus \{i_2, \ldots, i_k\}$. При этом слагаемое $x_1 x_2 \ldots x_t$ входит в правую часть представления (8) по одному разу за каждую конъюнкцию из множества $\{K_1, \ldots, K_m\}$, содержащую переменную x_1 (см. правую часть тождества (7)), число которых равно m_1 и, как показано выше, чётно. Следовательно, все слагаемые $x_1 x_2 \ldots x_t$ в правой части (8) можно взаимно уничтожить. Также в ней можно избавиться от всех остальных пар одинаковых слагаемых. Поэтому можно считать, что все слагаемые $K'_1, \ldots, K'_{m'}$ попарно различны и каждое из них либо является конъюнкцией переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, либо имеет вид $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}$ (в случае $m' = 0$ полагаем $K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c = c$).

В силу (2), (8) имеем

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_t) \oplus (x_1 \& \ldots \& x_t) \oplus f(\tilde{x}^t) = K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c,$$

откуда

$$f(\tilde{x}^t) = (x_1 \vee \ldots \vee x_t) \oplus (x_1 \& \ldots \& x_t) \oplus K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c. \qquad (9)$$

Реализуем функцию f схемой S в базисе B_7 в соответствии с представлением (9) (см. рис. 2). Каждое слагаемое K'_j, $j \in \{1, \ldots, m'\}$, являющееся конъюнкцией каких-то переменных $x_{i_1(j)}, \ldots, x_{i_{k_j}(j)} \in \{x_2, \ldots, x_t\}$, реализуем цепочкой Z_j из $k_j - 1$ конъюнктора, на входы которой подаются все указанные переменные (в случае $k_j = 1$ эта цепочка пуста, т. е. не содержит функциональных элементов, а её выход совпадает со входом «$x_{i_1(j)}$» схемы). Далее каждое слагаемое K'_j, $j \in \{1, \ldots, m'\}$ вида $x_1 x_{i_2(j)} \ldots x_{i_{k_j}(j)} \vee x_{i_{k_j+1}(j)}$, где $k_j \in \{2, \ldots, t-1\}$ и $i_2(j), \ldots, i_{k_j}(j), i_{k_j+1}(j) \in \in \{2, \ldots, t\}$, причём $i_2(j) < \ldots < i_{k_j}(j)$ и $i_{k_j+1}(j)$ — минимальное число из множества $\{2, \ldots, t\} \setminus \{i_2(j), \ldots, i_{k_j}(j)\}$, реализуем цепочкой Z_j из $k_j - 1$ конъюнктора и одного дизъюнктора, нижним элементом в которой является дизъюнктор; на свободные входы конъюнкторов подаются переменные $x_1, x_{i_2(j)}, \ldots, x_{i_{k_j}(j)}$, а на свободный вход дизъюнктора — переменная $x_{i_{k_j+1}(j)}$, причём переменная x_1 подаётся на один из входов верхнего конъюнктора цепочки Z_j. Множество всех построенных к данному моменту функциональных элементов обозначим через M.

Выходы всех элементов из множества M и входы «x_1», …, «x_t» схемы S соединим со входами цепочки $Z_\&$ из конъюнкторов, причём входы «x_1» и «x_2» схемы соединим со входами верхнего конъюнктора этой цепочки. Затем выходы всех элементов из множества M и из цепочки $Z_\&$, а также входы «x_1», …, «x_t» схемы S соединим со входами цепочки $Z_\vee$ из дизъюнкторов, причём вход «x_1» схемы соединим с одним из входов верхнего, а вход «x_2» схемы — с одним из входов нижнего дизъюнктора этой цепочки. Наконец, выходы цепочек $Z_\vee, Z_\&, Z_1, \ldots, Z_{m'}$, а также — в случае $c = 1$ — выход элемента «константа 1» соединим со входами цепочки $Z_\oplus$ из сумматоров, причём выход цепочки $Z_\vee$ соединим с одним из входов верхнего сумматора. Выходом схемы S будем считать выход цепочки $Z_\oplus$.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$. В силу (9) достаточно доказать, что на выходах цепочек $Z_\&$ и $Z_\vee$ реализуются функции $x_1 \& \ldots \& x_t$ и $x_1 \vee \ldots \vee x_t$ соответственно. На любом входном наборе схемы S, хотя бы одна компонента которого равна 0, на соответствующий ей вход схемы, а значит, и на некоторый вход цепочки $Z_\&$ поступит нуль, поэтому на выходе этой цепочки возникнет значение 0. В то же время, на наборе $(\tilde{1}^t)$ на выходах всех элементов из множества M, как нетрудно видеть из их определения, возникнут единицы, поэтому на все входы цепочки $Z_\&$ поступят

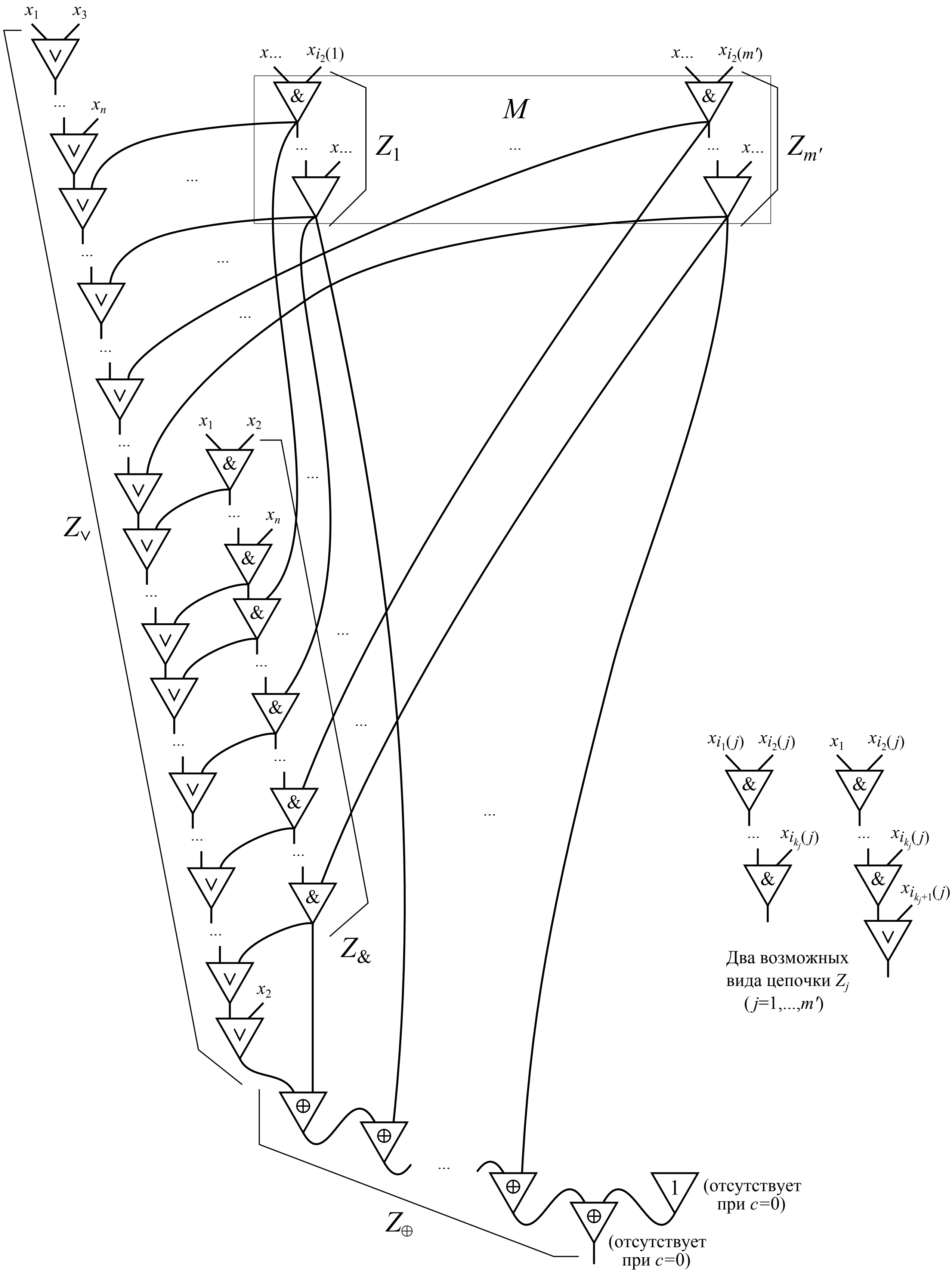
M
Z1
Zm′
Z∨
Z&
Z⊕
Два возможных
вида цепочки Zj
(j=1,...,m′)
(отсутствует
при c=0)
(отсутствует
при c=0)

Рис. 2. Схема S

значения 1 и такое же значение возникнет на её выходе. Тем самым показано, что на выходе указанной цепочки реализуется в точности функция $x_1\&\ldots\&x_t$.

Далее, на любом входном наборе схемы S, хотя бы одна компонента которого равна 1, на соответствующий ей вход схемы, а значит, и на некоторый вход цепочки $Z_\vee$ поступит единица, поэтому на выходе этой цепочки возникнет значение 1. В то же время, на наборе $(\tilde{0}^t)$ на выходах всех элементов из множества M и из цепочки $Z_\&$, как нетрудно видеть из их определения, возникнут нули, поэтому на все входы цепочки $Z_\vee$ поступят значения 0 и такое же значение возникнет на её выходе. Тем самым показано, что на выходе указанной цепочки реализуется в точности функция $x_1\vee\ldots\vee x_t$. Следовательно, схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$.

Докажем, что множество $\{(\tilde{0}^t), (1,\tilde{0}^{t-1}), (0,\tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является для данной схемы ППТ. Цепочку, представляющую собой объединение цепочек $Z_\vee$ и $Z_\oplus$, для удобства обозначим через $Z_{\vee,\oplus}$. Рассмотрим три случая.

1. Имеет место либо неисправность хотя бы одного элемента цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, либо неисправность типа 1 хотя бы одного элемента из множества M или из цепочки $Z_\&$. Нетрудно заметить, что для любого такого $j\in\{1,\ldots,m'\}$, что цепочка Z_j непуста, на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1,\tilde{0}^{t-1})$ на всех входах этой цепочки, кроме, быть может, одного из входов её верхнего элемента, возникнут нули. По построению верхний элемент цепочки Z_j является конъюнктором и хотя бы на один из его входов подаётся одна из переменных $x_2,\ldots,x_t$, равная 0 на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1,\tilde{0}^{t-1})$. Поэтому на выходе данного элемента на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (нуль, если он исправен, либо некоторая булева константа, если он неисправен). Тогда по лемме 1 на выходах всех элементов цепочки Z_j на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1,\tilde{0}^{t-1})$ возникнут одинаковые значения.

Получаем, что при рассматриваемой неисправности элементов схемы S значения на выходе каждого элемента из множества M совпадают на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1,\tilde{0}^{t-1})$. Отсюда следует, что на данных двух наборах на все входы цепочки $Z_\&$, кроме того входа её верхнего конъюнктора, который соединён со входом «x_1» схемы, поступят одинаковые значения. При этом на другой вход указанного конъюнктора подаётся переменная x_2, равная 0 на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1,\tilde{0}^{t-1})$. Поэтому на выходе данного конъюнктора на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (нуль, если он исправен, либо некоторая булева константа, если он неисправен). Тогда по лемме 1 на выходах всех элементов цепочки $Z_\&$ на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1,\tilde{0}^{t-1})$ возникнут одинаковые значения.

Из сказанного выше и определения цепочек $Z_\vee$, $Z_\oplus$ следует, что на рассматриваемых двух наборах на все входы цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, кроме того входа её верхнего дизъюнктора, который соединён со входом «x_1» схемы S, поступят одинаковые значения (отметим, что при $c = 1$ указанное свойство справедливо и для того входа цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, который соединён с выходом элемента «константа 1», вне зависимости от исправности или неисправности этого элемента). Рассмотрим два подслучая.

1.1. Неисправен хотя бы один элемент E из цепочки $Z_{\vee,\oplus}$. Пусть Z — нижняя часть этой цепочки, верхним элементом которой является E. Тогда на выходе (неисправного) верхнего элемента цепочки Z на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$, очевидно, возникнет одно и то же значение, поэтому по лемме 1 значения на выходах всех элементов этой цепочки, в том числе выходного, совпадающего с выходным элементом цепочек $Z_{\vee,\oplus}$, $Z_{\oplus}$ и, следовательно, с выходом схемы S, на данных двух наборах одинаковы. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, поскольку $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ по условию леммы 2.

1.2. Все элементы цепочки $Z_{\vee,\oplus}$ исправны, но имеет место неисправность типа 1 хотя бы одного элемента E' из множества M или из цепочки $Z_{\&}$. По определению цепочки $Z_{\vee}$ выход элемента E' соединён со входов одного из её дизъюнкторов E. На каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ на указанный вход поступит значение 1, поэтому на выходе дизъюнктора E на этих двух наборах возникнет единица. Пусть Z — нижняя часть цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, верхним элементом которой является E. Тогда по лемме 1 значения на выходах всех элементов цепочки Z, в том числе выходного, совпадающего с выходом схемы S, на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ одинаковы. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из этих двух наборов, поскольку $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$. Случай 1 разобран.

2. Случай 1 не выполнен, но при этом имеет место неисправность типа 0 хотя бы одного элемента из множества M или из цепочки $Z_{\&}$. Нетрудно заметить, что для любого такого $j \in \{1, \ldots, m'\}$, что слагаемое K'_j является конъюнкцией каких-то переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, на каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ при отсутствии неисправностей в цепочке Z_j на её выходе возникнет значение 1, а при наличии в ней неисправности типа 0 хотя бы одного элемента — значение 0 (отметим, что при указанном условии на j данная цепочка состоит только из конъюнкторов, а неисправности типа 1 элементов в ней невозможны в силу невыполнения случая 1). Для всех остальных $j \in \{1, \ldots, m'\}$ нижним элементом цепочки Z_j по построению является дизъюнктор, на один из входов которого подаётся переменная $x_{i_{k_j+1}(j)} \in \{x_2, \ldots, x_t\}$. На каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ на указанный вход поступит значение 1, поэтому на выходе цепочки Z_j на этих двух наборах возникнет одно и

то же значение (единица, если выходной дизъюнктор данной цепочки исправен, либо нуль, если он неисправен).

На один из входов нижнего дизъюнктора цепочки $Z_{\vee}$ по построению подаётся переменная x_2, равная 1 на каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$. Поэтому на выходе данной цепочки на обоих этих наборах возникнет значение 1. Наконец, в силу предположения случая 2 и определения цепочки $Z_{\&}$ либо один из её входов соединён с выходом неисправного и выдающего 0 элемента из множества M, либо имеет место неисправность типа 0 хотя бы одного элемента самой этой цепочки (либо и то, и другое), при этом в ней не может быть неисправности типа 1 ни одного элемента. Отсюда получаем, что на выходе цепочки $Z_{\&}$ реализуется тождественный нуль.

Из сказанного выше и определения цепочки $Z_{\oplus}$ следует, что на наборах $(0, \tilde{1}^{t-1})$ и $(\tilde{1}^t)$ на все входы цепочки $Z_{\oplus}$ поступят одинаковые значения. Тогда и значения на выходе схемы S на этих двух наборах совпадают, поскольку все элементы цепочки $Z_{\oplus}$ исправны в силу невыполнения случая 1. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ с учётом того, что $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$ по условию леммы 2. Случай 2 разобран.

3. Случаи 1 и 2 не выполнены, но при этом $c = 1$ и имеет место неисправность типа 0 элемента «константа 1». Тогда все остальные элементы в схеме S исправны и указанную неисправность можно обнаружить на любом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$. Случай 3 разобран.

Получаем, что любую неисправность схемы S можно обнаружить хотя бы на одном из этих четырёх наборов. Поэтому множество $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является для данной схемы ППТ. Лемма 2 доказана. $\square$

Применение метода к доказательствам теорем

Теорема 1. *Доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D_{B_7}(f) \leqslant 4$, стремится к 1 при $n \to \infty$.*

Доказательство. Вместо $D_{B_7}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Пусть $n \geqslant 3$ и F_n — множество таких булевых функций от n переменных, каждая из которых принимает значение 1 ровно на 0, 1, 3 или 4 наборах из множества $A_i = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^i, 1, \tilde{0}^{n-i-1}), (\tilde{1}^i, 0, \tilde{1}^{n-i-1}), (\tilde{1}^n)\}$ для каждого $i = 0, \ldots, n-1$. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, не принадлежащая множеству F_n. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 4$. Существует такое $i \in \{0, \dots, n-1\}$, что функция f принимает значение 1 ровно на двух наборах из множества A_i. Без ограничения общности $i = 0$ (в противном случае можно соответствующим образом переименовать переменные функции f, для полученной функции $\hat{f}$ доказать неравенство $D(\hat{f}) \leqslant 4$, а затем воспользоваться очевидным равенством $D(f) = D(\hat{f})$). Тогда функция f принимает значение 1 ровно на двух наборах из множества $A_0 = \{(\tilde{0}^n), (1, \tilde{0}^{n-1}), (0, \tilde{1}^{n-1}), (\tilde{1}^n)\}$. Отсюда, в частности, следует соотношение

$$f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) \oplus f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 0,$$

а из него — соотношение

$$f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n).$$

Возможны два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда $f(\tilde{0}^n) \neq f(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{n-1}) \neq f(\tilde{1}^n)$, а в таком случае неравенство $D(f) \leqslant 4$ следует из леммы 2 при $t = n$.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда $f(\tilde{0}^n) = f(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(\tilde{1}^n)$. Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1$. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(\tilde{0}^n) &= f(\tilde{0}^n) \oplus 0 = f(\tilde{0}^n) = f(1, \tilde{0}^{n-1}) \neq f(1, \tilde{0}^{n-1}) \oplus 1 = f'(1, \tilde{0}^{n-1}), \\ f'(0, \tilde{1}^{n-1}) &= f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus 0 = f(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{1}^n) \oplus 1 = f'(\tilde{1}^n), \end{aligned}$$

т. е. $f'(\tilde{0}^n) \neq f'(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f'(0, \tilde{1}^{n-1}) \neq f'(\tilde{1}^n)$. В таком случае в силу леммы 2 при $t = n$ функцию $f'(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_7, для которой множество A_0 является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_1. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(\tilde{x}^n) \oplus x_1 = f(\tilde{x}^n)$.

Если элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа, которую можно отличить от функции f на наборах из множества A_0, поскольку данная функция на двух наборах из этого множества принимает значение 1, а на двух — значение 0. Если же элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся функцию неисправности g подсхемы S' при $g \not\equiv f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\tilde{\sigma} \in A_0$, так как A_0 — ППТ для S'. Поэтому $g(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет функция неисправности $g \oplus x_1$, которую можно отличить от функции $f = f' \oplus x_1$

на наборе $\tilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Тем самым доказано, что множество A_0 является ППТ для схемы S, откуда следует, что $D(f) \leqslant 4$. Случай 2 разобран. Неравенство $D(f) \leqslant 4$ полностью доказано.

Найдём мощность множества $|F_n|$. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$ обозначим через $F_n^{\alpha_1\alpha_2}$ подмножество множества F_n, состоящее из всех булевых функций, принимающих на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$ значения α_1 и α_2 соответственно. В силу определения множества F_n для любого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ на паре наборов $((\tilde{0}^i, 1, \tilde{0}^{n-i-1}), (\tilde{1}^i, 0, \tilde{1}^{n-i-1}))$ любая функция из множества F_n^{00} должна принимать одну из пар значений $(0, 0)$, $(0, 1)$ или $(1, 0)$, любая функция из каждого из множеств F_n^{01}, F_n^{10} — одну из пар значений $(0, 0)$ или $(1, 1)$, а любая функция из множества F_n^{11} — одну из пар значений $(0, 1)$, $(1, 0)$ или $(1, 1)$. При этом на $2^n - 2n - 2$ двоичных наборах длины n, не принадлежащих множеству $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, любая функция из каждого из множеств F_n^{00}, F_n^{01}, F_n^{10}, F_n^{11} может принимать произвольные значения. Отсюда следуют соотношения $|F_n^{00}| = |F_n^{11}| = 3^n \cdot 2^{2^n-2n-2}$, $|F_n^{01}| = |F_n^{10}| = 2^n \cdot 2^{2^n-2n-2}$,

$$|F_n| = |F_n^{00}| + |F_n^{01}| + |F_n^{10}| + |F_n^{11}| = (2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n) \cdot 2^{2^n-2n-2} = \\ = (3^n + 2^n) \cdot 2^{2^n-2n-1},$$

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{3^n + 2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

т. е. отношение числа булевых функций из множества F_n к общему числу булевых функций от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено неравенство $D(f) \leqslant 4$, откуда следует справедливость теоремы 1. □

Теорема 2. *Справедливо неравенство* $D_{B_7}^{(+1)}(n) \leqslant 5$.

Доказательство. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ надо доказать, что $D_{B_7}^{(+1)}(f) \leqslant 5$. В силу (1) достаточно рассмотреть случай $D_{B_7}(f) \geqslant 6$ (отметим, что по теореме 1 доля таких функций f от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$). Тогда $n \geqslant 3$, поскольку в противном случае любая СФЭ без фиктивных входных переменных, реализующая любую булеву функцию от $n \leqslant 2$ переменных, допускает тривиальный ППТ, состоящий из всех $2^n \leqslant 4$ двоичных наборов длины n. Пусть $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, не зависящая существенно от переменной x_0 и равная функции $f(\tilde{x}^n)$; $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0$. Имеем:

$$f'(\tilde{0}^{n+1}) = f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1}) \oplus 0 = f^{(+1)}(1, \tilde{0}^n) \neq f^{(+1)}(1, \tilde{0}^n) \oplus 1 = f'(1, \tilde{0}^n),$$
$$f'(0, \tilde{1}^n) = f^{(+1)}(0, \tilde{1}^n) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}) \neq f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}) \oplus 1 = f'(\tilde{1}^{n+1}),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^{n+1}) \neq f'(1, \tilde{0}^n)$ и $f'(0, \tilde{1}^n) \neq f'(\tilde{1}^{n+1})$. В таком случае в силу леммы 2 при $t = n + 1$ функцию $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_7, для которой множество $T = \{(\tilde{0}^{n+1}), (1, \tilde{0}^n), (0, \tilde{1}^n), (\tilde{1}^{n+1})\}$ является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_0. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0 = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Если элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся функцию неисправности g подсхемы S' при $g \not\equiv f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\tilde{\sigma} \in T$, так как T — ППТ для S'. Поэтому $g(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет функция неисправности $g \oplus x_0$, которую можно отличить от функции $f^{(+1)} = f' \oplus x_0$ на наборе $\tilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Если же элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{1}^n)$. Тогда

$$f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1}) = f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{1}^n) = f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}),$$

т. е. значения функции $f^{(+1)}$ на наборах $(\tilde{0}^{n+1})$ и $(\tilde{1}^{n+1})$ различаются, поэтому её можно отличить от любой из булевых констант на одном из наборов $(\tilde{0}^{n+1}), (\tilde{1}^{n+1}) \in T$. Тем самым доказано, что множество T является ППТ длины 4 для схемы S.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n)$. Функцию $f^{(+1)}$ можно отличить от константы $\overline{f^{(+1)}}(\tilde{0}^{n+1})$ на наборе $(\tilde{0}^{n+1}) \in T$, а от константы $f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})$ в случае $f^{(+1)} \not\equiv f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})$ — на любом наборе $\tilde{\pi}$ длины $n+1$, на котором функция $f^{(+1)}$ принимает значение $\overline{f^{(+1)}}(\tilde{0}^{n+1})$. Тем самым доказано, что множество $T \cup \{\tilde{\pi}\}$ является ППТ длины 5 для схемы S.

В каждом из случаев 1, 2 установлено, что схема S в базисе B_7, реализующая функцию $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, допускает ППТ длины не более 5, а отсюда и из определений этой функции и величины $D_{B_7}^{(+1)}(f)$ следует неравенство $D_{B_7}^{(+1)}(f) \leqslant 5$. Теорема 2 доказана. $\square$

Рассмотрим базисы $B_7' = \{x\&y, x \vee y, x \vee \overline{y}, x \oplus y\}$, $B_7'' = \{x\&y, x \vee y, x\&\overline{y}, x \vee \overline{y}, \overline{x}\&\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \oplus y, x \sim y, 1\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная булева функция, будем называть ψ-элементом.

Лемма 3. *Пусть булеву функцию $f(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ S в базисе B_7'', допускающей ППТ T. Тогда эту же функцию можно реализовать СФЭ в базисе B_7', допускающей ППТ T.*

Доказательство. Если в схеме S нет выходного элемента, то её выход совпадает с одним из её входов, поэтому $f \in \{x_1, \ldots, x_t\}$. Тогда функцию f можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов; у такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому любое множество двоичных наборов длины n, в том числе и T, является для неё ППТ. Далее, если в схеме S нет ни одного φ-элемента для каждой функции $\varphi(x,y) \in \{x\&\overline{y}, \overline{x}\&\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \sim y\}$, а также ни одного элемента «константа 1», то эта схема является схемой и в базисе B_7', откуда следует утверждение леммы.

Пусть теперь в схеме S есть выходной элемент и есть хотя бы один φ-элемент, где $\varphi(x,y) \in \{x\&\overline{y}, \overline{x}\&\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \sim y\}$, либо хотя бы один элемент «константа 1». Для каждой функции φ из указанного множества заменим каждый φ-элемент схемы S на блок S_φ, состоящий из трёх функциональных элементов: $\overline{\varphi}$-элемента, $(x \vee \overline{y})$-элемента E_1 (одного и того же для каждого блока S_φ), на оба входа которого подаётся переменная x_1, и сумматора, входы которого соединяются с выходами данных двух элементов; входами этого блока являются входы указанного $\overline{\varphi}$-элемента, а выходом — выход указанного сумматора (см. рис. 3). На выходе элемента E_1 реализуется функция $x_1 \vee \overline{x}_1 = 1$, а на выходе блока S_φ — функция $\overline{\varphi} \oplus 1 = \varphi$ от его входов. Далее заменим каждый элемент «константа 1» схемы S на (один и тот же) элемент E_1. Полученную схему обозначим через S'.

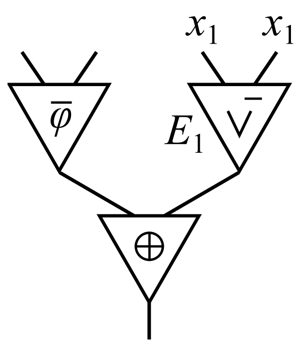

Рис. 3. Блок S_φ

Заметим, что $\overline{x\&\overline{y}} = y \vee \overline{x}$, $\overline{\overline{x}\&\overline{y}} = x \vee y$, $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = x\&y$ и $\overline{x \sim y} = x \oplus y$, поэтому $\overline{\varphi}(x,y) \in \{y \vee \overline{x}, x \vee y, x\&y, x \oplus y\}$ и S' является схемой в базисе B_7'. Каждый блок S_φ реализует ту же функцию, что и φ-элемент, а элемент E_1 — константу 1, поэтому схема S' реализует ту же функцию, что и схема S, т. е. функцию $f(\tilde{x}^t)$. Выход элемента E_1, а также выход выходного элемента схемы S' соединим со входами конъюнктора $E_\&$; выход этого конъюнктора будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S''. Очевидно, что при отсутствии неисправностей в схеме S'' она также реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$.

Докажем, что любая нетривиальная функция неисправности схемы S'' является функцией неисправности схемы S. При произвольной неисправности элемента $E_{\&}$ и/или при неисправности типа 0 элемента E_1 схема S'', очевидно, станет реализовывать некоторую булеву константу, но такая же константа возникнет на выходе схемы S при соответствующей неисправности её выходного элемента. Пусть теперь элемент $E_{\&}$ исправен, элемент E_1 реализует константу 1 (это может быть как при его исправности, так и при его неисправности типа 1), некоторые элементы в подсхеме S', возможно, неисправны и получающаяся при этом функция неисправности $g'(\tilde{x}^t)$ схемы S'' нетривиальна, т. е. отлична от $f(\tilde{x}^t)$. Тогда в подсхеме S' есть хотя бы один неисправный элемент. Легко видеть, что при произвольной неисправности $\overline{\varphi}$-элемента и/или сумматора в произвольном блоке S_φ схемы S'' на выходе этого блока реализуется некоторая булева константа. Тогда при соответствующих неисправностях φ-элементов схемы S, отсутствии неисправностей среди элементов «константа 1» и таких же неисправностях остальных элементов схемы S, как и в схеме S'', на выходе схемы S возникнет функция неисправности g, удовлетворяющая тождеству $g\&1 \equiv g'$, т. е. совпадающая с функцией g'.

Тем самым показано, что любая нетривиальная функция неисправности схемы S'' является функцией неисправности (причём нетривиальной) схемы S. Поэтому ППТ T для схемы S является ППТ и для схемы S'' в базисе B_7'. Лемма 3 доказана. □

Введём обозначение $\alpha^\beta = \alpha \oplus \beta \oplus 1$, где $\alpha, \beta \in \{0,1\}$. Очевидно, что $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = \overline{\alpha}$, $1^\beta = \beta$ и $0^\beta = \overline{\beta}$.

Лемма 4. *Пусть для булевой функции $f(\tilde{x}^t)$, $t \geqslant 3$, существуют такие булевы константы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$, что $f(\tilde{\delta}_1) \neq f(\tilde{\delta}_2)$ и $f(\tilde{\delta}_3) \neq f(\tilde{\delta}_4)$, где $\tilde{\delta}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$, $\tilde{\delta}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$, $\tilde{\delta}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t)$ и $\tilde{\delta}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t)$. Тогда функцию $f(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ в базисе B_7', допускающей ППТ $\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3, \tilde{\delta}_4\}$.*

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать такое же утверждение для базиса B_7''. Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^t) = f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t})$. Имеем:

$$f'(\tilde{0}^t) = f(0^{\sigma_1}, \ldots, 0^{\sigma_t}) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_t) = f(\tilde{\delta}_4),$$

$$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = f(1^{\sigma_1}, 0^{\sigma_2}, \ldots, 0^{\sigma_t}) = f(\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t) = f(\tilde{\delta}_3),$$

$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(0^{\sigma_1}, 1^{\sigma_2}, \ldots, 1^{\sigma_t}) = f(\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t) = f(\tilde{\delta}_2),$$

$$f'(\tilde{1}^t) = f(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_t}) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_t) = f(\tilde{\delta}_1),$$

откуда

$$f'(\tilde{0}^t) = f(\tilde{\delta}_4) \neq f(\tilde{\delta}_3) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(\tilde{\delta}_2) \neq f(\tilde{\delta}_1) = f'(\tilde{1}^t),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^t) \neq f'(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f'(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f'(\tilde{1}^t)$. Тогда в силу леммы 2 функцию $f'(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_7, для которой множество $T' = \{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ.

Предположим, что в схеме S' не содержится выходного элемента. Тогда выход этой схемы совпадает с одним из её входов, $f' \in \{x_1, \dots, x_t\}$ и $f(\tilde{x}^t) = f'(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_t^{\sigma_t}) \in \{x_1, \dots, x_t, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_t\}$. Если $f \in \{x_1, \dots, x_t\}$, то функцию f можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов; у этой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому множество $T = \{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3, \tilde{\delta}_4\}$ является для неё ППТ. Если же $f = \overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$, то функцию f можно реализовать схемой S, состоящей из элемента «константа 1» и сумматора, один вход которого соединяется с выходом этого элемента, а другой — со входом «x_i» схемы; у неё, очевидно, есть три функции неисправности — 0, 1 и x_i. Функцию $x_i = \overline{f}$ можно отличить от функции f на любом наборе из множества T, а функции 0 и 1 от функции f — на наборах $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2 \in T$ в силу соотношения $f(\tilde{\delta}_1) \neq f(\tilde{\delta}_2)$, поэтому T — ППТ для схемы S.

Далее будем считать, что в схеме S' содержится выходной элемент. Пусть X_0 — подмножество множества $\{x_1, \dots, x_t\}$ входных переменных этой схемы, состоящее из всех таких переменных x_i, что $\sigma_i = 0$. Для каждой функции $\varphi(x, y) \in \{x \& y, x \vee y, x \oplus y\}$ заменим каждый φ-элемент схемы S', хотя бы на один вход которого подаётся переменная из множества X_0, на свой φ'-элемент, где $\varphi'(x, y) = \varphi(x^{\alpha_1}, y^{\alpha_2})$, а $\alpha_1 = 0$ ($\alpha_2 = 0$) в том и только том случае, когда на вход рассматриваемого φ-элемента, отвечающий переменной x (соответственно, y), подаётся переменная из множества X_0. Полученную схему обозначим через S; легко видеть, что она является схемой в базисе B_7'' — например,

$$x^{\alpha_1} \oplus y^{\alpha_2} = x \oplus \alpha \oplus 1 \oplus y \oplus \alpha_2 \oplus 1 \in \{x \oplus y, x \oplus y \oplus 1\} = \{x \oplus y, x \sim y\} \subset B_7''.$$

Также нетрудно заметить, что на выходе каждого элемента схемы S при отсутствии в ней неисправностей реализуется та же функция, что и на выходе соответствующего элемента схемы S' при подаче на входы схемы S', отвечающие переменным из множества X_0, отрицаний этих переменных — другими словами, при подаче на входы схемы S' вместо переменных $x_1, \dots, x_t$ функций $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_t^{\sigma_t}$ соответственно. Отсюда следуют три утверждения:

1) на выходе схемы S реализуется функция $f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) = f(\tilde{x}^t)$;

2) при неисправностях некоторых элементов схемы S и таких же неисправностях соответствующих элементов схемы S' на выходе каждого (исправного или неисправного) элемента схемы S реализуется та же функция, что и на выходе соответствующего элемента схемы S' при подаче на входы схемы S' вместо переменных $x_1, \ldots, x_t$ функций $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}$ соответственно;

3) при возможном наличии неисправностей элементов в схеме S и таких же неисправностей соответствующих элементов в схеме S' при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$, $\tilde{\delta}_3$ и $\tilde{\delta}_4$ значения на выходе каждого (исправного или неисправного) элемента схемы S будут совпадать со значениями на выходе соответствующего элемента схемы S' на наборах $(\tilde{1}^t)$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $(\tilde{0}^t)$ соответственно.

(В качестве пояснения к утверждению 3) можно написать, например, равенство $(\overline{\sigma}_1^{\sigma_1}, \sigma_2^{\sigma_2}, \ldots, \sigma_t^{\sigma_t}) = (0, \tilde{1}^{t-1})$.)

В свою очередь, из утверждения 2) вытекает, что если на выходе выходного элемента схемы S, т. е. на выходе всей этой схемы, при неисправностях некоторых её элементов возникает функция неисправности $g(\tilde{x}^t)$, то при таких же неисправностях соответствующих элементов схемы S' на её выходе возникнет функция неисправности $g'(\tilde{x}^t)$, удовлетворяющая условию $g'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) = g(\tilde{x}^t)$. Докажем, что функцию g можно отличить от функции f на наборах из множества $\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3, \tilde{\delta}_4\}$, если $g \not\equiv f$. Из последнего соотношения следует, что $g'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) \not\equiv$ $\not\equiv f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t})$, значит, $g' \not\equiv f'$. Множество $T' = \{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}),$ $(\tilde{1}^t)\}$ является ППТ для схемы S', поэтому функцию неисправности g' этой схемы можно отличить от функции f' на наборах из T', т. е. выполнено хотя бы одно из неравенств

$$
\begin{gathered}
g'(\tilde{1}^t) \neq f'(\tilde{1}^t), \\
g'(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f'(0, \tilde{1}^{t-1}), \\
g'(1, \tilde{0}^{t-1}) \neq f'(1, \tilde{0}^{t-1}), \\
g'(\tilde{0}^t) \neq f'(\tilde{0}^t).
\end{gathered}
$$

Из утверждения 3) вытекают равенства

$$
\begin{gathered}
g(\tilde{\delta}_1) = g'(\tilde{1}^t), \\
g(\tilde{\delta}_2) = g'(0, \tilde{1}^{t-1}), \\
g(\tilde{\delta}_3) = g'(1, \tilde{0}^{t-1}), \\
g(\tilde{\delta}_4) = g'(\tilde{0}^t),
\end{gathered}
$$

а при отсутствии неисправностей в схемах S и S' — равенства

$$f(\tilde{\delta}_1) = f'(\tilde{1}^t),$$
$$f(\tilde{\delta}_2) = f'(0, \tilde{1}^{t-1}),$$
$$f(\tilde{\delta}_3) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$f(\tilde{\delta}_4) = f'(\tilde{0}^t).$$

Сравнивая последние двенадцать соотношений между собой, заключаем, что выполнено хотя бы одно из неравенств $g(\tilde{\delta}_1) \neq f(\tilde{\delta}_1)$, $g(\tilde{\delta}_2) \neq f(\tilde{\delta}_2)$, $g(\tilde{\delta}_3) \neq f(\tilde{\delta}_3)$, $g(\tilde{\delta}_4) \neq f(\tilde{\delta}_4)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, множество $\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3, \tilde{\delta}_4\}$ является ППТ для схемы S в базисе B_7'', реализующей функцию $f(\tilde{x}^t)$. Лемма 4 доказана. $\square$

Два двоичных набора называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах.

Теорема 3. *Справедливо неравенство* $D_{B_7'}^{(+1)}(n) \leqslant 4$.

Доказательство. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ надо доказать, что $D_{B_7'}^{(+1)}(f) \leqslant 4$. В случае $n \leqslant 2$ любая СФЭ без фиктивных входных переменных, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, допускает тривиальный ППТ, состоящий из всех $2^n \leqslant 4$ двоичных наборов длины n, откуда следует требуемое неравенство. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$. Рассмотрим два случая.

1. Существуют такие булевы константы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, что $f(\tilde{\delta}_1) \neq f(\tilde{\delta}_2)$ и $f(\tilde{\delta}_3) \neq f(\tilde{\delta}_4)$, где $\tilde{\delta}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\delta}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\delta}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ и $\tilde{\delta}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Тогда $D_{B_7'}^{(+1)}(f) \leqslant 4$ в силу леммы 4 при $t = n$ и соотношения (1), что и требовалось доказать.

2. Отрицание случая 1: для любых булевых констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ выполнено хотя бы одно из равенств $f(\tilde{\delta}_1) = f(\tilde{\delta}_2)$, $f(\tilde{\delta}_3) = f(\tilde{\delta}_4)$, где $\tilde{\delta}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\delta}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\delta}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ и $\tilde{\delta}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой, состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно, состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся переменная x_1). Очевидно, что единственной нетривиальной функцией неисправности такой схемы является константа 0 (соответственно, 1), которую можно отличить от функции f на любом наборе, поэтому $D_{B_7'}^{(+1)}(f) \leqslant 1$.

Пусть теперь $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$. Тогда существуют такие два набора $\tilde{\delta}_1'$ и $\tilde{\delta}_2'$ длины n, различающиеся ровно в одной компоненте, что $f(\tilde{\delta}_1') \neq f(\tilde{\delta}_2')$. Без ограничения общности они различаются в первой компоненте. Пусть $\tilde{\delta}_1' = (\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_n')$, тогда $\tilde{\delta}_2' = (\overline{\sigma}_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_n')$. В силу предположения случая 2 имеем $f(\tilde{\delta}_3') = f(\tilde{\delta}_4')$, где $\tilde{\delta}_3' = (\sigma_1', \overline{\sigma}_2', \ldots, \overline{\sigma}_n')$, $\tilde{\delta}_4' = (\overline{\sigma}_1',$

$\overline{\sigma}'_2, \ldots, \overline{\sigma}'_n)$. Тогда либо $f(\tilde{\delta}'_3) = f(\tilde{\delta}'_4) \neq f(\tilde{\delta}'_1)$, либо $f(\tilde{\delta}'_3) = f(\tilde{\delta}'_4) \neq f(\tilde{\delta}'_2)$, откуда либо $f(\tilde{\delta}'_4) \neq f(\tilde{\delta}'_1)$, либо $f(\tilde{\delta}'_3) \neq f(\tilde{\delta}'_2)$. Заметим, что $\tilde{\delta}'_4$ и $\tilde{\delta}'_1$, а также $\tilde{\delta}'_3$ и $\tilde{\delta}'_2$ — противоположные наборы, поэтому существуют такие противоположные наборы $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\tau}'$ длины n, что

$$f(\tilde{\tau}) \neq f(\tilde{\tau}'). \tag{10}$$

Пусть $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, тогда $\tilde{\tau}' = (\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$. Положим $\tilde{\tau}_0 = (0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tilde{\tau}_1 = (1, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tilde{\tau}'_0 = (0, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$ и $\tilde{\tau}'_1 = (1, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$.

Пусть $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, не зависящая существенно от переменной x_0 и равная функции $f(\tilde{x}^n)$; $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0$. Имеем:

$$f'(\tilde{\tau}_0) = f^{(+1)}(\tilde{\tau}_0) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{\tau}_1) \neq f^{(+1)}(\tilde{\tau}_1) \oplus 1 = f'(\tilde{\tau}_1),$$
$$f'(\tilde{\tau}'_0) = f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_0) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_1) \neq f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_1) \oplus 1 = f'(\tilde{\tau}'_1),$$

т. е. $f'(\tilde{\tau}_0) \neq f'(\tilde{\tau}_1)$ и $f'(\tilde{\tau}'_0) \neq f'(\tilde{\tau}'_1)$. В таком случае в силу леммы 4 при $t = n + 1$ функцию $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B'_7, для которой множество $T = \{\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}'_0, \tilde{\tau}'_1\}$ является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_0. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0 = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Если элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа, которую можно отличить от функции $f^{(+1)}$ на наборах $\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}'_0 \in T$, поскольку

$$f^{(+1)}(\tilde{\tau}_0) = f(\tilde{\tau}) \neq f(\tilde{\tau}') = f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_0)$$

в силу (10). Если же элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся функцию неисправности g подсхемы S' при $g \not\equiv f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\tilde{\sigma} \in T$, так как T — ППТ для S'. Поэтому $g(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет функция неисправности $g \oplus x_0$, которую можно отличить от функции $f^{(+1)} = f' \oplus x_0$ на наборе $\tilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Тем самым доказано, что множество T является ППТ длины 4 для схемы S в базисе B'_7, реализующей функцию $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Отсюда и из определений этой функции и величины $D^{(+1)}_{B_7}(f)$ следует неравенство $D^{(+1)}_{B'_7}(f) \leqslant 4$. Теорема 3 доказана. $\square$

Заключение

В работе рассмотрен случай произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^t)$, $t \geqslant 3$, удовлетворяющей условиям $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$, описан метод построения СФЭ в базисе $B_7 = \{x\&y, x\vee y, x\oplus y, 1\}$, реализующей данную функцию и допускающей ППТ из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$ и $(\tilde{1}^t)$ (лемма 2). На основании этого метода установлены следующие факты:

- почти любую булеву функцию от n переменных можно реализовать СФЭ в базисе B_7, допускающей ППТ не более чем из четырёх наборов (теорема 1);

- любую булеву функцию от n переменных можно реализовать СФЭ в базисе B_7, содержащей не более одной фиктивной входной переменной и допускающей ППТ не более чем из пяти наборов (теорема 2);

- любую булеву функцию от n переменных можно реализовать СФЭ в базисе $\{x\&y, x \vee y, x \vee \overline{y}, x \oplus y\}$, содержащей не более одной фиктивной входной переменной и допускающей ППТ не более чем из четырёх наборов (теорема 3).

В частности, впервые получена константная верхняя оценка длины минимального ППТ для почти всех булевых функций при реализации их схемами из функциональных элементов, имеющих не более двух входов. С учётом простоты таких элементов предложенные методы синтеза легкотестируемых схем могут иметь практическое применение.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

6. Романов Д. С. О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты // Учёные записки Казанского университета. Физико-математические науки. — 2014. — Т. 156, кн. 3. — С. 110–115.

7. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — № 1. — С. 72–74.

8. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

9. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

10. Попков К. А. Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2017. — № 104. — 16 с.

11. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — № 2. — С. 17–21.

12. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

13. Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

14. Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.