ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 188 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Веденяпин В. В.

Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Веденяпин В. В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 188. 20 с. doi:10.20948/prepr-2018-188
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-188

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.В.Веденяпин

Уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна

Москва — 2018

УДК 517.958

Веденяпин Виктор Валентинович

Уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна

Выводятся уравнения Власова-Эйнштейна из классического действия Шваршильда–Гильберта–Эйнштейна. На основе полученных выражений для действия анализируется лямбда Эйнштейна и вклад её в тёмную энергию. Вклад лямбды оказывается аналогичным вкладу энергии Эйнштейна mc^2.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, синхронизация времён, тёмная энергия.

Victor Valentinovich Vedenyapin

Vlasov–Maxwell–Einstein Equation

Vlasov-Einstein equations are derived from classical action of Shwarshild–Hilbert–Einstein. On the basis of obtained results we analyze Einstein’s lambda and its connection with dark energy.

Key words: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, synchronization of times, dark energy.

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности РУДН 5-100 среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016-2020 гг. и при поддержке программы Президиума РАН № 01 "Фундаментальная математика и ее приложения" (грант PRAS-18-01).

Оглавление

Введение

Уравнения типа Власова проживают удивительную жизнь. Всё время расширяются не только сферы их приложения, но и приставки, соответствующие этим приложениям: уже сейчас в обиходе уравнения Власова–Пуассона для гравитации, плазмы и электронов, уравнения Власова–Максвелла для электродинамики и уравнения Власова–Эйнштейна для сильно релятивистской гравитации. И вот теперь – уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна. Название естественное, поскольку проистекает из классических лагранжианов общей теории относительности (ОТО) и электродинамики [1-5]. При выводе уравнений типа Власова из классических лагранжианов [1-5] по схеме работ [1-13] сначала выводятся уравнения Лиувилля. В случае уравнений Власова–Эйнштейна–Максвелла возникают новые трудности: для этого требуется синхронизация времён разных частиц и сравнение разных форм лагранжианов для геодезических. Появляется при этом интеграл интервала, который обычно полагался единице [1-5], без которого невозможно синхронизовать времена разных частиц, а поэтому и выписать уравнение Власова–Эйнштейна для многих частиц. Для получения уравнений самосогласованных полей требуется преобразование классических действий от лагранжевых координат к эйлеровым с использованием функций распределения.

План работы следующий.

В первом пункте мы рассматриваем теорию геодезических с электромагнитным полем для классических лагранжианов. Во втором – многочастичная задача приводит к синхронизации времён. Мы приводим гамильтонову формулировку и выписываем уравнение Лиувилля. Третий – приложение гамильтонова формализма для не зависящих от времени полей. Четвёртый пункт – интегрирование с помощью гамильтонова формализма уравнений геодезических в полях, зависящих только от времени. Пятый пункт – вывод уравнений Власова–Эйнштейна–Максвелла.

1. Эквивалентность двух действий в ОТО и в теории геодезических

Рассмотрим действие ОТО в присутствии электромагнитного поля [1-5], описывающее движение частиц массы m и заряда e:

$$S_1 = -mc\int\sqrt{g_{ab}\frac{dx^a}{dq}\frac{dx^b}{dq}}dq - \frac{e}{c}\int A_a\frac{dx^a}{dq}dq \qquad (1)$$

Здесь $g_{ab}(x)$ – метрика в 4-мерном пространстве-времени $x \in R^4, A_a(x)$ – потенциал электромагнитного поля $(a,b=0,1,2.3)$. По повторяющимся верхним и нижним индексам здесь и далее ведётся суммирование. Такое действие неудобно для перехода к гамильтонову формализму, так как для него гамильтониан равен нулю по теореме Эйлера об однородных функциях: действительно, лагранжиан здесь есть выражение первой степени по скоростям. Переход к более удобному действию более-менее известен в литературе [1-4], так сказать, на физическом уровне строгости, но мы дадим обоснование этого перехода. Рассмотрим действие

$$S = -\frac{mc}{2\sqrt{I}}\int g_{ab}(x)\frac{dx^a}{dq}\frac{dx^b}{dq}dq - \frac{e}{c}\int A_a\frac{dx^a}{dq}dq \qquad (2)$$

Здесь $I == g_{ab}\frac{dx^a}{dq}\frac{dx^b}{dq}$ — сохраняющаяся величина, как мы увидим ниже. Связь действий (1) и (2) обосновывается с помощью следующей общей леммы. Рассмотрим следующее действие

$$k\int L(x,\frac{dx}{dq})dq + \int L_1(x,\frac{dx}{dq})dq ....(3)$$

и связанное с ним второе

$$\int h(L)(x,\frac{dx}{dq})dq + \int L_1(x,\frac{dx}{dq})dq ....(4)$$

и сравним их уравнения Эйлера–Лагранжа. Здесь h(L) – некоторая функция лагранжиана L.

Лемма об эквивалентности действий (3) и (4). Достаточные условия для эквивалентности, т.е. для совпадения уравнений Эйлера–Лагранжа действий (3) и (4) таковы:

1) лагранжиан L должен быть интегралом движения для действия (3);

2) коэффициент k в (3) должен совпадать с производной функции h(L) из действия (4): $k = \frac{dh(L)}{dL}$. Доказательство получается прямым варьированием действия (4), уравнения движения Эйлера–Лагранжа для которого таковы:

$$\frac{d^2h}{dL^2}\frac{dL}{dq}\frac{\partial L}{\partial v} + \frac{dh}{dL}\frac{d}{dq}\frac{\partial L}{\partial v} + \frac{d}{dq}\frac{\partial L_1}{\partial v} = \frac{dh}{dL}\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial x} \quad ,$$

и сравнением получающихся уравнений движения для действия (3):

$$k\frac{d}{dq}\frac{\partial L}{\partial v}+\frac{d}{dq}\frac{\partial L_1}{\partial v}=k\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial L_1}{\partial x}.$$

Следствие. Действия (1) и (2) эквивалентны, т.е. имеют одинаковые уравнения движения Эйлера–Лагранжа. Действительно, в случае лагранжианов (2) и (1) полагаем:

$$h(L)=-mc\sqrt{L}....,L=g_{ab}\frac{dx^a}{dq}\frac{dx^b}{dq}....,L_1=-\frac{e}{c}A_a\frac{dx^a}{dq}...............(5)$$

Поэтому условие 1) выполнено по той же теореме Эйлера об однородных функциях: гамильтониан для действия (2) пропорционален лагранжиану L из (5), так как лагранжиан L – второй степени по скоростям, а L_1 – первой. Условие 2): коэффициент k в (3) равен в точности производной функции h(L): $k=\frac{dh}{dL}=-\frac{mc}{2\sqrt{L}}$. Именно этот коэффициент стоит перед первым слагаемым в действии (2). Через I в (2) обозначена сохраняющаяся величина L из (5) – это величина квадрата интервала. Обычно [1-4] берут натуральный параметр s вместо произвольного параметра q. Параметры s и q связаны простой формулой: $ds=\sqrt{I}dq$, которая вытекает из сравнения ds и I.
Выпишем уравнения Эйлера–Лагранжа для действий (1) или (2) (в отличие от обычной процедуры [1-4] при варьировании (1) величину интервала полагаем не единице, а $\sqrt{I}$):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}\frac{d}{dq}(g_{ab}\frac{dx^b}{dq})+\frac{e}{c}\frac{d}{dq}A_a=\frac{mc}{2\sqrt{I}}\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a}\frac{dx^b}{dq}\frac{dx^c}{dq}+\frac{e}{c}\frac{\partial A_b}{\partial x^a}\frac{dx^b}{dq}....(6)$$

Из системы (6) видно, что при электромагнитных полях, равных нулю, величины $\frac{mc}{\sqrt{I}}$ сокращаются, и уравнения не зависят от того, какой параметр взять, интервал s или исходный параметр q. Но при наличии электромагнитных полей получаются, вообще говоря, разные уравнения. Из уравнений (6) видно, что возможен переход к натуральному параметру s. Однако в многочастичных задачах такая возможность, как мы увидим ниже, отсутствует.

2. Многочастичная задача, синхронизация времён, гамильтонова формулировка и уравнение Лиувилля

Рассмотрим многочастичную задачу о движении в гравитационном и электромагнитном поле. Рассмотрим действие, аналогичное (1) для многих частиц со своими массами и зарядами:

$$S_1 = -\sum_r m_r c \int \sqrt{g_{ab} \frac{dx_r^a}{dq} \frac{dx_r^b}{dq}} dq - \sum_r \frac{e_r}{c} \int A_a \frac{dx_r^a}{dq} dq \qquad (7)$$

Снова переходим к лагранжиану типа (2) и получаем эквивалентное действие:

$$\begin{aligned} S = -\sum_r \frac{m_r c}{2\sqrt{I_r}} \int g_{ab}(x) \frac{dx_r^a}{dq} \frac{dx_r^b}{dq} dq - \\ -\sum_r \frac{e_r}{c} \int A_a \frac{dx_r^a}{dq} dq \end{aligned} \qquad (8)$$

Отметим здесь появление индекса ***r***, нумерующего частицы, у интеграла I_r: величины этих интегралов, обозначающих величину интервала разных частиц, не обязательно одинаковы. Этим мы синхронизовали собственное время разных частиц $ds_r = \sqrt{I_r}dq$ в следующем смысле: 1) показали, что невозможность синхронизации самих интервалов ds_r связана с различными величинами интегралов I_r; 2) показали, как различные собственные времена связаны между собой: параметр q для всех частиц один и тот же. Отметим, что интегралы I_r зависят от параметризации, а их отношение не зависит: поэтому удобно переписать действие(8) через интервал ds какой-то одной частицы:

$$\begin{aligned} S = -\sum_r \frac{m_r c\sqrt{I}}{2\sqrt{I_r}} \int g_{ab}(x) \frac{dx_r^a}{ds} \frac{dx_r^b}{ds} ds - \\ -\sum_r \frac{e_r}{c} \int A_a \frac{dx_r^a}{ds} ds. \end{aligned}$$

По обычным формулам для импульсов получаем из действий (2) или (7) или (8):

$$Q_{ra}=\frac{\partial L}{\partial v_r^a}=-\frac{m_r c}{\sqrt{I_r}}g_{ab}(x_r)\frac{dx_r^b}{dq}-\frac{e_r}{c}A_a(x_r)\text{.....................}(9)$$

Это мы получили обычные канонические [1-4] «длинные» импульсы.
Отсюда получаем обратное выражение скоростей через длинные импульсы

$$\frac{dx_r^b}{dq}=-\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c}g^{ab}(x_r)(Q_{ra}.+\frac{e_r}{c}A_a)\text{........} \qquad (10)$$

И второе уравнение

$$\frac{dQ_{ra}}{dq}=\sum_r\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c}(Q_{rd}.+\frac{e_r}{c}A_d(x_r))\frac{\partial g^{db}}{\partial x^a}(x_r)(Q_{rb}+\frac{e_r}{c}A_b(x_r))+$$

$$+.\frac{e_r\sqrt{I_r}}{m_r c^2}(Q_{rd}+\frac{e_r}{c}A_d(x_r))g^{db}\frac{\partial A_d}{\partial x_r^a}\text{..............................}(11).$$

Получаем и гамильтониан, для которого уравнения (10-11) канонические:

$$H=\sum_r\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c}(Q_{ra}.+\frac{e_r}{c}A_a(x_r))g^{ab}(x_r)(Q_{rb}+\frac{e_r}{c}A_b(x_r))\text{........}$$

Здесь интегралы $\sqrt{I_r}$ осуществляют синхронизацию времён, приводя к дифференцированию по одному и тому же параметру q. Вводя функцию распределения $f_r(x,p,Q)$, получаем соответствующее уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f_r}{\partial q}-\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c}g^{ab}(x)(Q_a+\frac{e_r}{c}A_a)\frac{\partial f_r}{\partial x^b}+..$$

$$+(\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c}(Q_d+\frac{e_r}{c}A_d(x))\frac{\partial g^{db}}{\partial x^a}(Q_b+\frac{e_r}{c}A_b(x))+.$$

$$+\frac{e_r\sqrt{I_r}}{m_r c^2}(Q_d+\frac{e_r}{c}A_d(x))g^{db}\frac{\partial A_d}{\partial x^a})\frac{\partial f_r}{\partial Q_a}=0\text{......}(12)$$

Здесь, как обычно [5-13], индексы r перекочевали из импульсов и координат в функцию распределения $f_r(x,p,q)$, а уравнения зависят от индекса r только через массы m_r, заряды e_r и квадрат интервала – интеграл I_r. Выпишем стационарную форму этого уравнения, когда $f_r(x,p,q)$ не зависит от q: именно так обычно и пишут уравнение Власова–Эйнштейна [5, 10,11].

$$-g^{ab}(x)(Q_{rb}.+\frac{e_r}{c}A_b)\frac{\partial f_r}{\partial x^a}+(\frac{\partial g^{bd}}{\partial x^a}(Q_{rd}.+\frac{e_r}{c}A_d)(Q_{rb}.+\frac{e_r}{c}A_b)$$

$$+\frac{e_r}{c}F_{ab}(x)g^{db}(Q_{rd}.+\frac{e_r}{c}A_d))\frac{\partial f_r}{\partial p_a}=0 \qquad (13)$$

Исчезли интегралы I_r и массы m_r, остались заряды e_r.

Сравним получающиеся уравнения с теми, когда используются «короткие» импульсы с нулевыми электромагнитными полями действия (7):

$$p_{ra}=-\frac{m_r c}{\sqrt{I_r}}g_{ab}(x_r)v_r^b.,\ \text{где}\ v_r^b=\frac{dx_r^b}{dq} \qquad (14)$$

Получаем уравнения для действий (7) (или (8)) первого порядка, негамильтоновы, но бездивергентные. Здесь для иллюстрации используем при синхронизации не аффинный параметр q, а собственное время некоторой частицы (наблюдателя) s. $ds=\sqrt{I}dq$.

$$\frac{dx_r^b}{ds}=-\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c\sqrt{I}}g^{ab}(x_r)p_{ra}$$

$$\frac{d}{ds}(p_{ra})=-\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c\sqrt{I}}\frac{\partial g^{bd}}{\partial x^a}p_{rb}p_{rd}+\frac{e_r}{c}\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c\sqrt{I}}F_{ab}(x_r)g^{db}(x_r)p_{rd} \qquad (15)$$

Напишем уравнение Лиувилля, вводя функцию распределения $f_r(x,p,s)$ частиц с массами m_r и зарядами e_r по 4-пространству x, 4-импульсу p при значении параметра s:

$$\frac{\partial f_r}{\partial s}-\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c\sqrt{I}}g^{ab}(x)p_a\frac{\partial f_r}{\partial x^b}+$$

$$+(-\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c\sqrt{I}}\frac{\partial g^{bd}}{\partial x^a}p_b p_d+\frac{e_r}{c}\frac{\sqrt{I_r}}{m_r c\sqrt{I}}F_{ab}(x)g^{db}p_d)\frac{\partial f_r}{\partial p_a}=0 \qquad (16)$$

Выпишем стационарную форму этого уравнения, когда $f_r(x,p,s)$ не зависит от s: именно так обычно и пишут уравнение Власова–Эйнштейна [5, 10,11].

$$-g^{ab}(x)p_a\frac{\partial f_r}{\partial x^b}+(-\frac{\partial g^{bd}}{\partial x^a}p_b p_d+\frac{e_r}{c}F_{ab}(x)g^{db}p_d)\frac{\partial f_r}{\partial p_a}=0.........(17)$$

Мы получили стационарное (13) или (17) относительно параметров q или s и нестационарное (12) или (16) уравнения Лиувилля. Мы видим, что при переходе к стационарному уравнению от (12) к (13) или от (16) к (17) сократились интегралы $\sqrt{I_r}$ и массы m_r, но не заряды e_r.

3. Стационарные решения и формулы для массы

Из уравнений (6) видно, что в стационарном случае, когда метрика g_{ab} и векторные потенциалы A_a не зависят от временной координаты $x_0 = ct$, правая часть в равенстве (6) исчезает при индексе $a = 0$, и мы можем проинтегрировать один раз левую часть:

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}(g_{0b}\frac{dx^b}{dq})+\frac{e}{c}A_0=Q_0..........................(18)$$

Чтобы понять, что за интеграл получился, возьмём метрику нерелятивистскую [3, формула (87.12)]:

$$g_{ab}=(1+\frac{2U}{c^2},-1,-1,-1)....................................(19)$$

Тогда (18) преобразуется в

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}(1+\frac{2U}{c^2})(\frac{dx^0}{dq})+\frac{e}{c}A_0=Q_0.$$

Остальные уравнения (6) приобретают вид:

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}\frac{d}{dq}(\frac{dx^j}{dq})+\frac{e}{c}\frac{d}{dq}A_j=\frac{mc}{c^2\sqrt{I}}\frac{\partial U}{\partial x^j}(\frac{dx^0}{dq})^2+\frac{e}{c}\frac{\partial A_b}{\partial x^j}\frac{dx^b}{dq},(j=1,2,3).(20)$$

Отсюда мы можем исключить дифференцирование по q, заменив его на обычное по нулевой координате или времени, и уравнения приобретут знакомый вид движения в электромагнитном поле с силой Лоренца и электростатикой и в гравитационном потенциале U, но с интересным выражением для массы.

$$M\frac{d^2x^j}{dt^2}=M\frac{\partial U}{\partial x^j}+\frac{e}{c}F_{bj}\frac{dx^b}{dt}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Здесь F_{ab} – обычные выражения для полей через потенциалы [1-13], интересно исчезновение интеграла I и выражение для массы M

$$M=\frac{\frac{Q_0}{c}-\frac{e}{c^2}A_0}{1+\frac{2U}{c^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

Из выражения (22) видим, как масса изменяется в релятивистских случаях в гравитационном и электрическом поле. Q_0 поэтому имеет смысл нулевой компоненты импульса или энергии вне полей $Q_0=mc$. Отметим, что при использовании лагранжиана (2) все вычисления здесь точные.

4. Однородная Вселенная: решения, зависящие только от времени

Пусть метрика и поля (гравитационное и электромагнитное) зависят только от времени (вселенная полностью однородна). В этом случае уравнения (6) интегрируются из общих соображений гамильтоновой механики, но интересно проследить и конкретные черты. Имеем три интеграла движения

$$\frac{mc}{\sqrt{I}}(g_{db}\frac{dx^b}{dq})+\frac{e}{c}A_d=Q_d\ldots\ldots(d=1,2,3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

А вместо уравнения для нулевой компоненты воспользуемся интегралом «энергии» — квадрата интервала

$$I=g_{ab}\frac{dx^a}{dq}\frac{dx^b}{dq}.$$

Отсюда получаем, что все малые импульсы определяются как функции времени из соотношений (14), (23):

$$p_d = \frac{e}{c} A_d - Q_d ....(d = 1,2,3)...(24)$$

А последняя нулевая компонента определяется как функция времени из аналога интеграла «энергии» – квадрата интервала для импульсов:

$$g^{ab} p_a p_b = m^2 c^2 ....(25)$$

Здесь мы пришли к известному соотношению, которое ведёт к методу Гамильтона–Якоби[1-12].

Тогда получаем уравнения для определения всех координат:

$$\frac{dx^a}{dq} = -\frac{\sqrt{I}}{mc} g^{da}(x^0) p_d ....(26)$$

А исключая отсюда q, т.е. деля три уравнения (23) при d=1,2,3 на уравнение для d=0, получаем:

$$\frac{dx^a}{dx^0} = \frac{g^{da}(x^0) p_d(x^0)}{g^{0d}(x^0) p_d(x^0)} = \frac{g^{da}(x^0)(\frac{e}{c} A_d(x^0) - Q_d)}{g^{0d}(x^0)(\frac{e}{c} A_d(x^0) - Q_d)} .,..a = 1,2,3......................(27)$$

Мы получили уравнения с заданными функциями только времени, которые просто интегрируются. Полученные решения – значительные обобщения вселенной де-Ситтера [12]. Такие уравнения уместно будет применить к вопросу о тёмной энергии и тёмной материи [14-15, 39-40].

5. Уравнения Власова–Максвелла–Эйнштейна

При выводе уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна по схеме работ [6-9,13] используем классическое действие [1-5]:

$$S = -\sum_{r,\lambda} m_r c \int \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a_{r,\lambda}}{dq} \frac{dx^b_{r,\lambda}}{dq}} dq -$$

$$................ - \sum_{r,\lambda} \frac{e_r}{c} \int A_a \frac{dx^a_{r,\lambda}}{dq} dq -$$

$$-\frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} \sqrt{-g} d^4 x + k \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x........(28)$$

Здесь $k = \frac{-c^3}{16\pi\gamma}$, Λ – лямбда-член[1-4], суммирование ведётся по сортам, нумеруемым параметром r с разными массами и зарядами, и по телам, нумеруемым параметром λ внутри каждого сорта. Получаем уравнение после варьирования по траекториям частиц (здесь при этом варьировании участвуют первые два слагаемые действия (28))

$$\frac{d^2x^a}{dq^2}+\Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{dq}\frac{dx^c}{dq}=\frac{e\sqrt{I}}{mc^2}F_b{}^a\frac{dx^b}{dq}\text{..............}(a=0,1,2,3)\text{..........................}(29)$$

Здесь Γ^a_{bc}- символы Кристоффеля. Мы будем выводить уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна в скоростях. В импульсах трудности возникают из-за необходимости перехода к трёхмерному интегрированию. С этим вопросом сталкиваются все, кто пытается написать уравнение Власова-Эйнштейна [10-11], [16-17]. При использовании скоростей сразу можно учесть, что нулевая компонента равна скорости света. Теперь перепишем эти уравнения, взяв за независимую переменную не параметр q, а время.

Для этого перепишем сначала уравнение (29) как систему обычным способом:

$$\begin{cases}\dfrac{dx^a}{dq}=v^a\\ \dfrac{dv^a}{dq}=-\Gamma^a_{bc}\dfrac{dx^b}{dq}\dfrac{dx^c}{dq}+\dfrac{e\sqrt{I}}{mc^2}F_b{}^a\dfrac{dx^b}{dq}\end{cases}\text{................}(a=0,1,2,3)\text{...........}(30)$$

Отметим здесь появление интеграла $\sqrt{I}$ в знаменателе второго слагаемого: его не будет при использовании натурального параметра ds вместо dq. Уравнение без корня выглядит красивее, и так оно и выписывается [1-4], но при этом исчезает однородность второго порядка по скоростям правой части, которая необходима при дальнейшем преобразовании. А именно, имеет место следующее очень общее утверждение о понижении порядка сразу на два.

Лемма о понижении систем на два порядка. Дана система $2\mathrm{N}$ уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx^a}{dq}=f^a(x,v)\\ \dfrac{dv^a}{dq}=F^a(x,v)\end{cases}\text{..........}(a=0,1,2...,\mathrm{N}-1)\text{..}$$

Пусть функции $f^a(x,v)$ - первой степени однородности по v, $F^a(x,v)$ - второй: $f^a(x,\lambda v)=\lambda f^a(x,v)$, $F^a(x,\lambda v)=\lambda^2F^a(x,v)$. Тогда справедлива система $2\mathrm{N}-2$ уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx^a}{dx^0}=\dfrac{f^a(x,\mathrm{u})}{f^0(x,\mathrm{u})}\\ \dfrac{du^a}{dx^0}=\dfrac{F^a(x,\mathrm{u})}{(f^0(x,\mathrm{u}))^2}-u^a\dfrac{F^0(x,\mathrm{u})}{(f^0(x,\mathrm{u}))^2}\end{cases}\text{.......}\mathrm{u}^a=\frac{v^a}{v^0},\text{...}(a=1,2...,\mathrm{N}-1).,\mathrm{u}^0=1,\text{.....................}$$

Используя эту лемму, переписываем систему (30) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx^a}{dt} = u^a \\ \dfrac{du^a}{dt} = G^a(x, \mathrm{u}) \end{cases} ....(a = 1, 2, 3)..(31)$$

Здесь

$$G^a = -\left(\Gamma^a_{bc} - \frac{u^a}{c}\Gamma^0_{bc}\right)u^b u^c + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2}\left(F_b{}^a - \frac{u^a}{c}F_b{}^0\right)u^b.........$$

где $J = g_{ab}\dfrac{dx^a}{dt}\dfrac{dx^b}{dt}$

Отметим, что для $a = 0$ уравнение удовлетворяется тождественно. Такие уравнения для геодезических, когда отсутствуют электромагнитные поля, выписаны в книгах В.Фока ([2], уравнение 63.21) и С.Вейнберга ([38],уравнение 9.1.2). Теперь, написав уравнение Лиувилля для системы (31), получим первую часть уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна:

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + u^b\frac{\partial f_r}{\partial x^b} + \frac{\partial(G^b f_r)}{\partial u^b} = 0.........(32)$$

Чтобы получить уравнения для полей и связать поля с функцией распределения $f_r(\mathrm{t}, x, v)$, необходимо переписать первые два слагаемых действия (25) через эту функцию распределения, а потом проварьировать по полям. Сначала перепишем (28), заменив q на время

$$S = -\sum_{r,\lambda} m_r c\int\sqrt{g_{ab}\frac{dx^a_{r,\lambda}}{dt}\frac{dx^b_{r,\lambda}}{dt}}dt - \sum_{r,\lambda}\frac{e_r}{c}\int A_a\frac{dx^a_{r,\lambda}}{dt}dt -$$

$$-\frac{1}{16\pi c}\int F_{ab}F^{ab}\sqrt{-g}\,d^4x + k\int(R + \Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x........(33)$$

Теперь вводим функцию распределения $f_r(\mathrm{t}, x, \mathrm{u}), x \in R^3, \mathrm{u} \in R^3$ (учитывая, что все нулевые компоненты скоростей равны скорости света, можно ограничиться трёхмерным интегрированием по скоростям):

$$S = -\sum_r m_r c\int\sqrt{g_{bc}u^b u^c}\, f_r(\mathrm{t}, x, \mathrm{u})d^3x d^3u dt -$$

$$..........- \sum_r \frac{e_r}{c}\int(A_a u^a) f_r(\mathrm{t}, x, \mathrm{u})d^3x d^3u dt -$$

$$-\frac{1}{16\pi c}\int F_{ab}F^{ab}\sqrt{-g}\,d^4x + k\int(R + \Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x......(34)$$

Обратный переход от действия (34) к действию (33) производится подстановкой $f_r(\mathrm{t},x,\mathrm{u})=\sum_\lambda \mu_\lambda \delta(x-x_{r\lambda}(t))\delta(\mathrm{u}-u_{r\lambda}(t))$. Это и является проверкой. Доказательство правильности действия (34) можно получить из того, что любую функцию можно аппроксимировать такой суммой дельта-функций. Вид (34) удобен при вычислении тензора энергии-импульса, с чем сталкиваются все авторы всех монографий. Мы получили схему вывода уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна, но сначала рассмотрим выражение (34), учитывая, что лямбда-членом сейчас моделируют тёмную энергию [14-15]. Мы видим, что роль Λ- члена могут играть первые три слагаемых действия (28) в форме (34), т.к. они вносят такой же вклад в тензор энергии-импульс и в уравнение движения, как и Λ-член. Мы можем их выписать явно как аналог лямбда-члена:

$$\Lambda_s(\mathrm{t},x)=-\sum_r \frac{m_r}{\sqrt{-g}k}\int \sqrt{g_{bc}u^b u^c}\, f_r(\mathrm{t},x,\mathrm{u})d^3u-$$

$$-\sum_r \frac{e_r}{c^2\sqrt{-g}k}\int (A_a u^a)\, f_r(\mathrm{t},x,\mathrm{u})d^3u-\frac{1}{16\pi ck}F_{ab}F^{ab}$$

В этом выражении значок $\Lambda_s(x)$ означает аналог Λ-члена, который связан с действием. Второе и третье слагаемое связаны с электромагнетизмом и не определены по знаку. Однако первое слагаемое строго положительно, т.к. k отрицательно. Для слаборелятивистской метрики (19) получаем $\sqrt{g_{ab}v^a v^b}=\sqrt{(c^2+2U)-v^2}=c\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}$. Поэтому основной вклад, аналогичный Λ-члену, который даёт первое слагаемое, имеет вид:

$$\Lambda_{s1}(x)=-\sum_r \frac{m_r c}{\sqrt{-g}k}\int f_r(x,\mathrm{u},t)\sqrt{g_{ab}u^a u^b}\,d^3u=-\sum_r \frac{m_r c^2}{\sqrt{-g}k}\int f_r(x,\mathrm{u},t)\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}}d^3u=$$

$$=\sum_r \frac{16\pi\gamma m_r}{c\sqrt{-g}}\int f_r(x,\mathrm{u},t)\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}}d^3u$$

Мы видим, что основной вклад вносит в наш аналог Λ-члена энергия Эйнштейна mc^2: мы отождествили тёмную энергию с энергией Эйнштейна mc^2. У неё все признаки те же: так мы её не чувствуем, но на больших масштабах она вносит вклад именно как лямбда Эйнштейна, т.к. её вклад определяющий. Мы снова имеем шанс положить лямбду Эйнштейна равной нулю: Эйнштейн считал её введение главной ошибкой своей жизни.

Уравнения Власова–Эйнштейна–Максвелла для метрики и электрических полей получаются варьированием действия (34) по ним. Сначала варьируем по метрике. Получаем уравнение

$$k(R_{ab}-\frac{1}{2}(R+\Lambda)g_{ab})\sqrt{-g} =$$

$$=\sum_r m_r c\int \frac{1}{\sqrt{g_{ab}u^a u^b}} f_r(\mathrm{t},x,\mathrm{u})u^a u^b d^3u +$$

$$+\frac{1}{16\pi c}F_{dc}F^{dc}(-\frac{1}{2}\sqrt{-g})g_{ab} \qquad (35)$$

Варьируем электромагнитные потенциалы. Получаем уравнение Максвелла в гравитационном поле:

$$\frac{2}{16\pi}\frac{\partial(\sqrt{-g}F^{ab})}{\partial x^b}=\sum_r e_r\int u^a f_r(\mathrm{t},x,\mathrm{u})d^3u \qquad (36)$$

Итак, мы получили систему уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна (32, 35, 36).

6. Заключение

Итак, мы вывели уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна. Для этого потребовалось синхронизовать собственные времена различных частиц. Мы это сделали двумя способами – через собственное время одной частицы и через произвольный параметр. Такие параметры в разных руководствах называются по-разному: иногда аффинными [12, 36], иногда каноническими [37]. Мы вывели уравнения и получили выражение для массы в стационарных гравитационном и электромагнитном полях. Мы получили решения, зависящие только от времени. Интересно сравнить полученную форму уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна с другими версиями и классифицировать их. Как правило, они выписываются только для уравнений Власова–Эйнштейна (без Максвелла) и не выводятся[10-11], [16-17]. Вообще удивительно, что уравнения типа Власова не выводятся, а пишутся сразу – это приводит к неточностям. Когда речь идёт об уравнениях Власова–Эйнштена, вывод представляется необходимым для обеих частей уравнения Власова: уравнения Лиувилля и уравнения для полей. При выводе уравнения Лиувилля это привело к синхронизации времён. В уравнениях для полей без вывода тензор энергии импульса приходится брать произвольно. Мы получили выражения при переходе к функциям распределения в действии от (33) к (34), которые формально оказывают такое же воздействие, как и лямбда-член Эйнштейна. Мы получили отождествление тёмной энергии с энергией Эйнштейна mc^2.

Представляется перспективным исследовать это отождествление в связи с интересом к тёмной энергии и лямбда-члену [14-15, 39-40]. Мы получили снова шанс не вводить лямбда член. Представляется перспективным исследовать для полученного уравнения все классические подстановки, которые известны в уравнении Власова: энергетические и гидродинамические [6-9]. Интересно исследовать стационарные решения [18-25]. Представляется актуальной и интересной задачей классифицировать все решения, зависящие от времени, – пространственно-однородные решения. Это ведёт к космологическим решениям, которые сейчас активно изучаются. Здесь полезны были бы методы уравнения Гамильтона–Якоби [26-32]. Очень важной является задача получить для уравнений типа Власова утверждение типа «Временные средние совпадают с экстремалями Больцмана» [33-35]. Автор выражает благодарности Н.Н. Фимину, В.М. Чечёткину, А.А.Старобинскому, А.Д. Чернину, К.А. Бронникову, С.О. Алексееву за полезные обсуждения.

Литература

1. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983.
2. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
5. Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
6. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. –2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
7. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
8. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.
9. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations. Elsevier Insights. Amsterdam:, 304 p. (2011).
10. Choquet-Bruhat Yvonne. General Relativity and the Einstein Equations, Oxford University Press, 2009.
11. Cercigniani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
12. Narlikar Jayant V. Introduction to cosmology. Cambridge University press, 1993.

13. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
14. Чернин А.Д. Тёмная энергия и всемирное антитяготение. УФН, 2008, т.178, №3, 267-300.
15. Валиев К.Х., Крайко А.Н. Разлёт идеального газа из точки в пустоту. Новая модель большого взрыва и расширения вселенной. ПММ, т.79, № 6, 793-807.
16. Rein G., Rendall A.D. Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data, Commun. Math. Phys. 150, 561-583, (1992).
17. Игнатьев Ю.Г. Неравновесная вселенная: кинетические модели космологической эволюции. Казань: Казанский университет, 2013.
18. Веденяпин В.В. Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Доклады АН СССР, 290:4 (1986), 777–780. англ. пер.: V.V. Vedenyapin, “Boundary value problems for a stationary Vlasov equation”,Soviet Math. Dokl., 34:2 (1987), 335–338.
19. Веденяпин В.В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // Докл. РАН, 323:6 (1992), 1004–1006; англ. пер.: V.V. Vedenyapin, “Classification of stationary solutions of the Vlasov equation on a torus and a boundary value problem”,Russian Acad. Sci. Dokl. Math.45:2 (1993), 459–462.
20. Козлов В.В. Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН,63,4(382), (2008), 93–130.
21. Козлов В.В. Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность // Нелинейная динам., 6:3 (2010), 489–512.
22. Скубачевский А. Л., Тсузуки Ю. Уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в полупространстве // Докл. РАН, 471:5 (2016), 528–530.
23. Скубачевский А.Л. Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи математических наук. 2014. Т. 69. № 2. С. 107-148.
24. Беляева Ю. О. Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двукомпонентной плазмы // Труды семинара по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям в РУДН под руководством А.Л. Скубачевского, СМФН, 62, РУДН, М., 2016, 19–31.
25. Batt J., Berestycky H., Degond P., Perthame B. Some families of solutions of the Vlasov–Poisson system // Arch. Rational Mech. Anal.104:1 (1988), 79–103.
26. Козлов В.В. Общая теория вихрей. М.-Ижевск, 2013.
27. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии гидродинамических и вихревых следствий уравнений Власова и метод Гамильтона-Якоби, Доклады РАН, 449:5 (2013), С. 521-526.

28. Веденяпин В.В. Фимин Н.Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона-Якоби. Доклады РАН, 446:2 (2012), С. 142-144.
29. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А. Уравнения типа Власова и Лиувилля и их микроскопические и гидродинамические следствия. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 51с.
30. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем // Нелинейная динам.,11:2 (2015), 279–286.
31. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Докл. РАН, 461:2 (2015), 136–139.
32. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 13. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-13&lg=r
33. Веденяпин В. В., Аджиев С. З. Энтропия по Больцману и Пуанкаре // УМН, 69:6(420) (2014), 45–80.
34. Аджиев С. З., Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 51:11 (2011), 2063–2074.
35. Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали по Больцману // Докл. РАН, 422:2 (2008), 161–163.
36. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.
37. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. — М.: Иностранная литература, 1963. 432 с.
38. С.Вейнберг. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 стр.
39. Лукаш В.Н., Рубаков В.А. Темная энергия: мифы и реальность // УФН. 2008. Т. 178.No 3. с. 301–308.
40. Munoz J.B., Loeb A. A small amount of mini–charged dark matter could cool the baryonsin the early Universe // Nature. 2018. V. 557. P. 684–686.

Веденяпин Виктор Валентинович. E-mail: vicveden@yahoo.com

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

125047, Москва, Миусская пл., д.4

Российский Университет дружбы народов

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6