



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 163 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Пеньков В.И., Ролдугин Д.С.

Трехосная инерциальная
магнитная ориентация
спутника в гравитационном
поле

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пеньков В.И., Ролдугин Д.С. Трехосная инерциальная магнитная ориентация спутника в гравитационном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 163. 18 с. doi:[10.20948/prepr-2018-163](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-163)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-163>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин

**Трехосная инерциальная магнитная
ориентация спутника
в гравитационном поле**

Москва — 2018

Пеньков В.И., Ролдугин Д.С.

Трехосная инерциальная магнитная ориентация спутника в гравитационном поле

Рассматривается магнитная система ориентации спутника, обеспечивающая его произвольную наперед заданную ориентацию в инерциальном пространстве. Кроме управляющего, на спутник действует гравитационный момент. На примере плоского движения рассматриваются периодические движения спутника. При помощи теории Флоке изучается устойчивость системы, подбираются оптимальные по быстродействию параметры алгоритма. Определяется характер влияния гравитационного момента на устойчивость.

Ключевые слова: магнитная система ориентации, трехосная ориентация, гравитационный момент

Vladimir Penkov, Dmitry Roldugin

Active inertial magnetic attitude of a satellite in gravitational field

Active magnetic attitude control system providing arbitrary inertial attitude of the satellite is considered. Control and gravitational torques are taken into account. Planar motion is considered for the periodical solutions analysis. Stability is analyzed using the Floquet theory, optimal algorithm parameters are chosen. Overall gravity effect is assessed.

Key words: magnetic attitude control system, three-axis stabilization, gravitational torque

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Исследование плоского движения.....	4
3. Трехмерное движение	13
Заключение.....	17
Литература	17

Введение

Актуальность задачи обеспечения произвольной трехосной ориентации спутника, оснащенного только магнитными катушками в качестве исполнительных элементов, обусловлена развитием малых аппаратов, способных выполнять все больший спектр задач. Специфика магнитных катушек такова, что невозможно в каждый момент времени реализовать произвольный механический момент, а значит, и произвольную ориентацию аппарата. Однако при некоторых предположениях относительно параметров управления [1–3] или спутника [4,5] можно показать, что ляпуновское управление способно обеспечить требуемую ориентацию. Настоящая работа является продолжением [1,2], где была показана асимптотическая устойчивость требуемой ориентации в инерциальном пространстве при некоторых параметрах управления и предложен способ выбора этих параметров. При этом предполагалось, что на спутник действует только управляющий момент. Здесь на примере плоской задачи исследуется влияние гравитационного момента на инерциальную ориентацию спутника. С помощью теории Флоке исследуется степень устойчивости в зависимости от параметров управления при пространственном движении.

1. Уравнения движения

Пусть $O_a X_1 X_2 X_3$ – система, связанная с положением орбиты спутника в инерциальном пространстве. Ось $O_a X_3$ направлена по нормали к плоскости орбиты, ось $O_a X_1$ направлена в восходящий узел орбиты, $O_a X_2$ дополняет систему до правой. В случае использования модели прямого диполя [6] вектор индукции геомагнитного поля имеет вид

$$\mathbf{B}_x = B_0 \begin{pmatrix} -1.5 \sin 2u \sin i \\ -3 \sin^2 u \sin i + \sin i \\ \cos i \end{pmatrix},$$

где $B_0 = \mu_e / r^3$, μ_e – постоянная земного магнетизма, r – расстояние от центра Земли до точки расчета вектора индукции, $u = \omega_0 t$ – аргумент широты.

Будем также использовать связанную систему $Ox_1 x_2 x_3$, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника. Ориентацию системы $Ox_1 x_2 x_3$ относительно $O_a X_1 X_2 X_3$ определим матрицей направляющих косинусов \mathbf{A} . Для описания динамики спутника используем уравнения Эйлера и переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (компоненты вектора абсолютной угловой скорости

спутника в системе $Ox_1x_2x_3$) и самолетные углы α, β, γ (задают ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $O_aX_1X_2X_3$, последовательность поворотов 2-3-1). Матрица направляющих косинусов \mathbf{A} задается углами как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Уравнения движения спутника с произвольным тензором инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, B, C)$ имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= M_{1x}, & \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta}(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= M_{2x}, & \frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= M_{3x}, & \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \text{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где M_{1x}, M_{2x}, M_{3x} – компоненты вектора момента (управляющего и гравитационного) в системе $Ox_1x_2x_3$.

Управляющий дипольный момент строится на основе ляпуновского управления и имеет вид

$$\mathbf{m} = -k_\omega \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})$ [1].

2. Исследование плоского движения

Решение уравнений (1.2) в случае трехмерного движения спутника представляет собой сложную задачу. Рассмотрим частный случай – движение осесимметричного спутника ($A = C$) в плоскости полярной орбиты. Уравнения (1.2) допускают плоское движение $\alpha = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Уравнения такого движения спутника

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \omega_3, \\ A \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{3}{2} \omega_0^2 (B - A) \sin(2u - 2\beta) - B_0^2 (k_\omega \omega_3 + 2k_a \sin \beta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{3(B - A)}{2A} \omega_0^2, \quad \omega^2 = \frac{2k_a B_0^2}{A \omega_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{k_\omega B_0^2}{A \omega_0}$$

и перепишем уравнения (2.1) в безразмерном виде

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \sin \beta + \varepsilon \dot{\beta} = \lambda \sin(2u - 2\beta), \quad (2.2)$$

где точкой обозначается дифференцирование по аргументу широты (безразмерное время).

Будем считать, что вклад управляющего момента в движение спутника решающий, то есть $\lambda = o(1)$, и рассмотрим порождающее уравнение

$$\ddot{\beta} + \omega^2 \sin \beta + \varepsilon \dot{\beta} = 0. \quad (2.3)$$

Простейшим случаем можно считать порождающее решение в виде стационарной точки $\beta = 0$, $\dot{\beta} = 0$ или $\beta = \pi$, $\dot{\beta} = 0$. Рассмотрим устойчивую стационарную точку. Следуя методу Пуанкаре [7], будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра λ ,

$$\beta = \beta_0 + \lambda \beta_1 + O(\lambda^2).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (2.2) и группируя слагаемые по степеням малого параметра, получаем для первого приближения уравнение

$$\ddot{\beta}_1 + \omega^2 \cos \beta_0 \beta_1 + \varepsilon \dot{\beta}_1 = \sin(2u - 2\beta_0). \quad (2.4)$$

Принимая во внимание характер порождающего решения, получаем

$$\ddot{\beta}_1 + \omega^2 \beta_1 + \varepsilon \dot{\beta}_1 = \sin 2u. \quad (2.5)$$

Общее решение данного уравнения представляет собой затухающие колебания математического маятника в линейном приближении. Основным интерес представляет вклад гравитационного момента, характеризуемый вынужденным решением

$$\beta_1 = -\frac{(4 - \omega^2) \sin 2u + 2\varepsilon \cos 2u}{(\omega^2 - 2\varepsilon - 4)(\omega^2 + 2\varepsilon - 4)}. \quad (2.6)$$

Это решение описывает колебания, вызванные действием гравитационного момента. Заметим, что в (2.6) не возникает резонанса, так как интересные с практической точки зрения значения коэффициента усиления позиционной и демпфирующей частей момента приводят к $\varepsilon < 0.3$ и $\omega^2 < 0.3$.

Перейдем к порождающему решению, соответствующему произвольному решению (2.3). Для этого разделим рассуждения на несколько этапов.

- *Этап 1.* Рассматривается уравнение (2.3). Необходимо найти его решение, которое является порождающим для (2.2). Здесь, в свою очередь, последовательно решаются две задачи.

- *Этап 1, задача 1.* Ищется порождающее решение для (2.3) в предположении отсутствия демпфирующей компоненты управления ($\varepsilon = 0$).

○ *Этап 1, задача 2.* Порождающее решение для (2.2) получается при анализе влияния слабого демпфирующего момента ($\varepsilon = o(1)$ в (2.3))¹.

• *Этап 2.* Рассматривается уравнение (2.2). Решение, полученное на этапе 1, используется в качестве порождающего. Показывается существование периодических решений на малых интервалах времени. Ищется приближенный аналитический вид этих решений.

Этап 1, задача 1. Порождающее решение уравнения (2.3)

В отсутствие демпфирующей компоненты решение (2.3) имеет вид

$$\beta = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} \varphi), \quad (2.7)$$

$$\dot{\beta} = 2\omega k \operatorname{cn} \varphi, \quad (2.8)$$

где $\varphi = \omega t + \varphi_0$, $\operatorname{sn} \varphi$ и $\operatorname{cn} \varphi$ – эллиптические синус и косинус [8], k – модуль этих функций, равный корню из интеграла энергии уравнения (2.3) при $\varepsilon = 0$. Решение (2.7)-(2.8) периодически с периодом $T = 4K(k)/\omega$.

Таким образом, (2.7)-(2.8) задает двухпараметрическое колебательное решение уравнения (2.3) при $\varepsilon = 0$. Вращательное решение не рассматривается.

Этап 1, задача 2. Уравнения для параметров решения (2.7)-(2.8)

Введение демпфирующей компоненты в (2.3) приводит к уменьшению интеграла энергии, что отражается на решении (2.7)-(2.8). Определим это влияние, следуя методу ван-дер-Поля. Будем считать параметры решения (2.7)-(2.8) k и φ_0 переменными величинами и найдем уравнения, описывающие их эволюцию. Для этого вычислим производную (2.7),

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= 2 \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} \left(\dot{k} \operatorname{sn} \varphi + k \frac{\partial \operatorname{sn} \varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + k \frac{\partial \operatorname{sn} \varphi}{\partial k} \dot{k} \right) = \\ &= \frac{2}{\operatorname{dn} \varphi} \left[\dot{k} (\operatorname{sn} \varphi + f \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $f = (1-k^2)\varphi - E(\operatorname{am} \varphi) + k^2 \operatorname{cd} \varphi \operatorname{sn} \varphi$ [8]. Отсюда, с учетом (2.8), получаем

$$\frac{2}{\operatorname{dn} \varphi} \left[\dot{k} (\operatorname{sn} \varphi + f \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) + k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right] - 2\omega k \operatorname{cn} \varphi = 0. \quad (2.10)$$

Дифференцируем теперь (2.8),

¹ В [1] показано, что позиционная компонента момента не оказывает эволюционного влияния на демпфирование угловой скорости спутника. Поэтому демпфирующая часть в управлении рано или поздно окажется заметно меньше позиционной.

$$\ddot{\beta} = 2\omega \left[\dot{k} (\operatorname{cn} \varphi - f \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi) - k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right].$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (2.3), получаем

$$2\omega \left[\dot{k} (\operatorname{cn} \varphi - f \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi) - k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi} \right] + 2\omega^2 k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi + 2\varepsilon\omega k \operatorname{cn} \varphi = 0. \quad (2.11)$$

Здесь было использовано, что

$\sin \beta = 2k \operatorname{sn} \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi} = 2k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi$, так как $\operatorname{dn} \varphi > 0$. Разрешим соотношения (2.10)-(2.11) относительно старших производных. Из (2.10) получаем

$$\dot{k} = \frac{\omega k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi - k \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \dot{\varphi}}{\operatorname{sn} \varphi + f \operatorname{dn} \varphi \operatorname{cn} \varphi}. \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.11), получаем уравнение изменения фазы

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon \left(\operatorname{cd}(\varphi, k) \operatorname{sn}(\varphi, k) + f \operatorname{cn}^2(\varphi, k) \right) \quad (2.13)$$

и, возвращаясь к (2.12), уравнение для изменения модуля

$$\dot{k} = -\varepsilon k \operatorname{cn}^2(\varphi, k). \quad (2.14)$$

Система (2.13)-(2.14) описывает изменение параметров решения при добавлении демпфирующей компоненты управляющего момента.

Этап 1, задача 2. Эволюционное уравнение (2.14)

В уравнениях (2.13)-(2.14) переменные разделяются. Фаза оказывается быстрой переменной (скорость изменения порядка ω), модуль – медленной (скорость изменения порядка ε). Для получения укороченных уравнений следует провести осреднение (2.13)-(2.14) по φ за период их правых частей $T = 2K(k)$ (период $\operatorname{cn}^2(\varphi, k)$). Однако уравнение (2.13) не удается проинтегрировать в эллиптических функциях. Поэтому ограничимся рассмотрением уравнения (2.14), которое представляет наибольший интерес при оценке влияния демпфирующей части. Интегрирование (2.14) на периоде дает укороченное уравнение

$$\dot{k} = -\varepsilon \frac{1}{2k K(k)} \left[E(z) - (1 - k^2)z \right]_{z=0}^{z=2K(k)}. \quad (2.15)$$

Этап 1, задача 2. Решение уравнения (2.15)

Интегрирование этого уравнения в конечном виде представляет проблему. Его дальнейшее решение заключается в разложении полных эллиптических интегралов в ряды по степеням k (то есть движение близко к орбитальной ориентации). От выбранного числа членов в разложении зависит точность полученного решения. Раскладывая до второй степени

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right),$$

получим из (2.15)

$$\dot{k} = -\frac{\varepsilon}{\pi k \left(1 + \frac{k^2}{4} \right)} \left[E \left(\pi + \frac{k^2}{2} \right) - \pi (1 - k^2) \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \right].$$

Далее используем соотношение

$$E \left(\pi + \frac{k^2}{2} \right) = 2E(k) + E \left(\frac{k^2}{2}, k \right)$$

и разложения

$$E \left(\frac{k^2}{2}, k \right) = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{k^2}{2} \sin \frac{k^2}{2} \right) k^2,$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right).$$

В результате получаем

$$\dot{k} = -\varepsilon k \frac{1 + \pi}{2\pi}$$

и экспоненциальное уменьшение корня из интеграла энергии невозмущенного уравнения (2.2)

$$k = k_0 \exp \left(-\varepsilon \frac{1 + \pi}{2\pi} u \right).$$

Ограничимся второй степенью модуля в разложениях и не будем учитывать изменение фазы колебаний. В этом случае порождающее решение для уравнения (2.2) запишется в виде

$$\beta = 2 \arcsin \left(k_0 \exp \left(-\varepsilon \frac{1 + \pi}{2\pi} u \right) \operatorname{sn} \varphi \right), \quad (2.16)$$

$$\dot{\beta} = 2\omega k_0 \exp \left(-\varepsilon \frac{1 + \pi}{2\pi} u \right) \operatorname{cn} \varphi.$$

Этап 2. Существование периодических решений уравнения (2.2)

Использование решения (2.16) в качестве порождающего в уравнении первого приближения (2.2) не позволяет получить явный вид решения первого приближения. Покажем, однако, что порождаемые (2.16) периодические решения (2.2) существуют. При этом будем рассматривать задачу на небольших интервалах изменения модуля k , используя в качестве порождающего решения

(2.7)-(2.8). Поскольку эти выражения задают двухпараметрическое семейство решений и (2.16) показывает, что параметр k убывает, необходимо выяснить, при всех ли значениях $k \in [0,1]$ существует периодическое решение. Уравнение (2.2) периодически по u и β , его вид не изменяется при заменах

$$\beta \rightarrow \beta + 2\pi,$$

$$u \rightarrow u + \pi.$$

Периодические решения (2.2) поэтому удовлетворяют условию

$$\beta(u + \pi m) = \beta(u) + 2\pi p.$$

Вместе с тем порождающее решение (2.7)-(2.8) имеет период

$$T = \frac{4K(k)}{\omega},$$

то есть

$$\beta(u + nT) = \beta(u),$$

что при $p = 0$ дает соотношение

$$T = \pi \frac{m}{n},$$

из которого определяем значение модуля k как решение уравнения

$$K(k) = \frac{\pi \omega m}{4n}. \quad (2.17)$$

Поскольку полный эллиптический интеграл монотонно возрастает от $\pi/2$ до бесконечности при росте модуля, уравнение (2.17) имеет единственное решение k^* . Выбирая числа m и n , можно получить разные интересные нас значения модуля. Как уже было замечено, при практически интересных параметрах управления и спутника $\omega < 0.5$. Поэтому, учитывая, что $K(k) \geq \pi/2$, получаем $m/n \geq 4$. Задав, например, $n = 1$, можно выбором m получить разные значения модуля. При выборе большего n можно получить более плотное разбиение интервала $[0,1]$, в котором задаются значения модуля k . Определив таким образом один из параметров решения (2.2), запишем уравнение фазового баланса [7] для $n = 1$

$$\int_0^{\pi m} \sin[2u - 2\beta_0(k, \varphi_0)] \dot{\beta}_0(k, \varphi_0) du = 0, \quad (2.18)$$

из которого можно определить значение второго параметра – фазы φ_0 . Численный анализ уравнения (2.18) показывает, что при любых значениях модуля существует периодическое решение, порождаемое добавлением

гравитационного момента в уравнения движения. При этом существует решение для фазы φ_0 , близкое к 0 при $m/n > 4$, заметно отличаясь от 0 лишь при $m/n = 4$. При уменьшении величины модуля эти решения переходят в (2.6). Чтобы убедиться в этом, будем считать, что k_0 мало, и эллиптические функции Якоби переходят в тригонометрические. В этом случае для поиска первого приближения уравнения (2.4) принимают вид

$$\ddot{\beta}_1 + \omega^2 \beta_1 + \varepsilon \dot{\beta}_1 = \sin 2u - 4k_0 \exp\left(-\varepsilon \frac{1+\pi}{2\pi} u\right) \sin(\omega u + \varphi_0) \cos 2u. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) представляет собой (2.5) с добавлением дополнительной малой и убывающей со временем вынуждающей силы.

Этап 2. Численный поиск периодических решений

Показав существование периодических решений (2.2), проведем их поиск численно, исходя из соотношения

$$\beta(\pi) = \beta(0) = \beta^*.$$

Отдельно рассмотрим численное решение краевой задачи при значениях β^* , близких к нулю, опираясь при этом на решения (2.18), дающие нулевые значения φ_0 . При $u = 0$, $\varphi_0 = 0$ из порождающего решения (2.7) получаем $\beta(0) = 0$. Аналогично из (2.8) получаем

$$\dot{\beta}(0) = 2\omega k. \quad (2.20)$$

Однако для $\beta(0) = 0$ уже найдено периодическое решение (2.6), которым, таким образом, можно пользоваться для характеристики амплитуды периодического решения. На рис. 1 приведена амплитуда периодического решения (максимальное отклонение β от нуля на интервале $u \in [0, \pi]$).

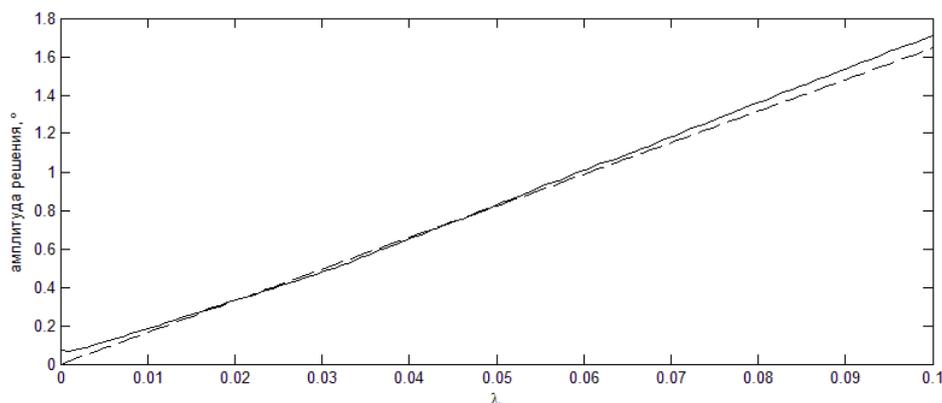


Рис. 1. Сравнение аналитического и численного значений амплитуды периодического решения

На рис. 1 сплошной линией обозначено полученное численно значение амплитуды колебаний, пунктирной – полученное с помощью формулы (2.6) значение в зависимости от характерной величины гравитационного момента.

Периодическое решение существует также и при $\beta^* \neq 0$. При поиске параметров периодических решений необходимо принимать во внимание условие $k < 1$, откуда

$$\dot{\beta}(0) \leq 4\omega^2 (1 - \sin^2(\beta^*/2)). \quad (2.21)$$

Для небольших спутников на околоземных орбитах это условие означает, что начальная скорость не может быть заметно выше орбитальной $\omega_0 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. В противном случае спутник начинает вращаться. Из (2.21) видно, что при $\beta^* = \pi$ периодическое решение существует только при $\dot{\beta}(0) = 0$. Это соответствует неустойчивой стационарной точке $\beta = \pi$, $\dot{\beta} = 0$. На рис. 2 представлена величина амплитуды скорости периодических колебаний в зависимости от величины гравитационного момента и значения β^* .

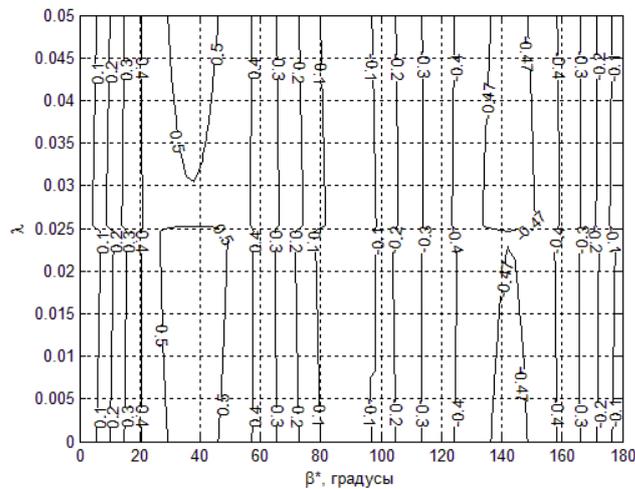


Рис. 2. Величина угловой скорости

Для величины амплитуды колебаний численное решение показывает аналогичную рис. 1 линейную зависимость для различных λ . При этом для фиксированного значения λ зависимость амплитуды от β^* имеет нелинейный вид.

Этап 2. Аппроксимация периодических решений

Общую зависимость амплитуды от β^* и λ представим в виде

$$\beta_{\max} = k_1(\beta^*)\lambda + k_0(\beta^*). \quad (2.22)$$

Поиск параметров $k_1(\beta^*)$ и $k_0(\beta^*)$ при $\beta^* \in [0, \pi]$ был проведен по полученным численным значениям β_{\max} с помощью метода наименьших квадратов. Полученные зависимости показали, что аппроксимацию целесообразно провести с помощью полиномов

$$k_1(\beta^*) = \sum_{j=0}^9 a_j \beta^{*j}, \quad (2.23)$$

$$k_0(\beta^*) = \sum_{j=0}^3 b_j \beta^{*j}.$$

Использование метода наименьших квадратов дало

$$\begin{aligned} k_1(\beta^*) = & 0.01115\beta^{*9} - 0.21552\beta^{*8} + 1.7586\beta^{*7} - \\ & - 7.85184\beta^{*6} + 20.71312\beta^{*5} - 32.12662\beta^{*4} + \\ & + 26.42569\beta^{*3} - 7.42894\beta^{*2} - 1.72622\beta^* + 0.27445, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$k_0(\beta^*) = 0.03867\beta^{*3} - 0.32723\beta^{*2} + 1.65024\beta^* - 0.01085,$$

при этом среднеквадратичное отклонение не превышает 0.017. Формулы (2.22)-(2.23)-(2.24) позволяют достаточно точно описать амплитуду периодических решений при $\beta^* \neq 0$. При β^* , близких к нулю, предпочтительнее пользоваться результатом (2.6). В качестве примера использования формул (2.22)-(2.23)-(2.24) на рис. 3 приведена амплитуда периодического решения при $\beta^* = 108^\circ$.

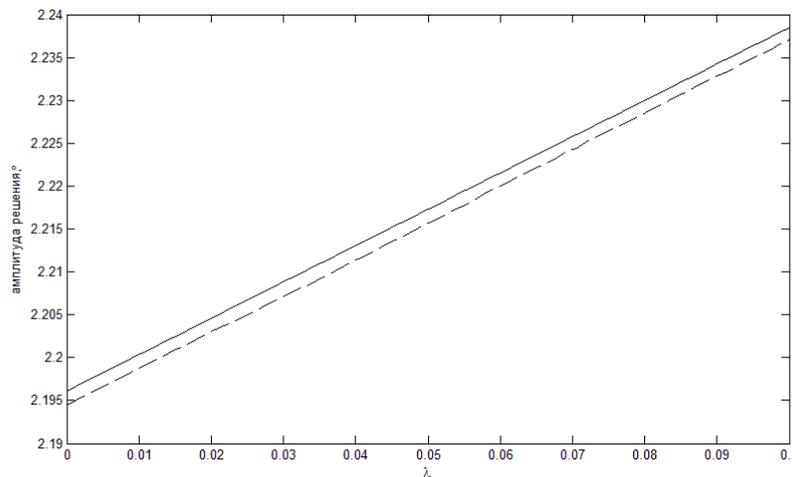


Рис. 3. Аппроксимация амплитуды периодического решения

На рис. 3 сплошной линией отмечена амплитуда, полученная при численном расчете, пунктирной – полученная по формулам (2.22)-(2.23)-(2.24). При $\beta^* \in [\pi, 2\pi]$ также можно пользоваться формулами (2.22)-(2.23)-(2.24), проведя замену $\beta^* \rightarrow 2\pi - \beta^*$.

3. Пространственное движение

Перейдем к пространственному движению спутника. Для анализа поведения динамической системы в широком диапазоне параметров управления k_a , $k'_\omega = \omega_0 k_\omega$ и величины гравитационного момента используем теорию Флоке [9]. Для этого линеаризуем уравнения движения (1.2) в окрестности нуля,

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= \eta\chi \left[-(B_2^2 + B_3^2)\Omega_1 + B_1B_2\Omega_2 + B_1B_3\Omega_3 \right] + \\ &\quad + 2\eta \left[B_1B_2\alpha + B_1B_3\beta - (B_2^2 + B_3^2)\gamma \right] + 3\frac{C-B}{A}(\alpha \cos u \sin u - \gamma \sin^2 u), \\ \dot{\Omega}_2 &= \eta\chi \frac{A}{B} \left[B_1B_2\Omega_1 - (B_1^2 + B_3^2)\Omega_2 + B_2B_3\Omega_3 \right] + \\ &\quad + 2\eta \frac{A}{B} \left[-(B_1^2 + B_3^2)\alpha + B_2B_3\beta + B_1B_2\gamma \right] + 3\frac{A-C}{B}(\alpha \cos^2 u - \gamma \cos u \sin u), \\ \dot{\Omega}_3 &= \eta\chi \frac{A}{C} \left[B_1B_3\Omega_1 + B_2B_3\Omega_2 - (B_1^2 + B_2^2)\Omega_3 \right] + \\ &\quad + 2\eta \frac{A}{C} \left[B_2B_3\alpha - (B_1^2 + B_2^2)\beta + B_1B_3\gamma \right] + 3\frac{B-A}{C}(\cos u \sin u + \beta \sin^2 u - \beta \cos^2 u),\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\dot{\alpha} = \Omega_2, \quad \dot{\beta} = \Omega_3, \quad \dot{\gamma} = \Omega_1,$$

где $\eta = k_a B_0^2 / A \omega_0^2$, $\chi = k'_\omega / k_a$. Для однородной части (3.1) можно применить теорию Флоке. Результаты определения характеристических показателей системы (3.1) представлены на рис. 4-7 и 9-12. В уравнении (3.1) компоненты вектора индукции B_i могут быть записаны с помощью любой модели. Далее используется модель прямого диполя, доставляющая периодичность (3.1).

На рис. 4 и рис. 5 представлены характеристические показатели системы для спутника с тензором инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(1.0255, 1.5393, 1.8172)$ кг·м² (тензор инерции спутника «Чибис-М» [10]). Наклонение орбиты составляет соответственно 30 и 60 градусов, высота здесь и далее 600 км. Величина характеристических показателей зависит от коэффициентов усиления – позиционного и демпфирующего.

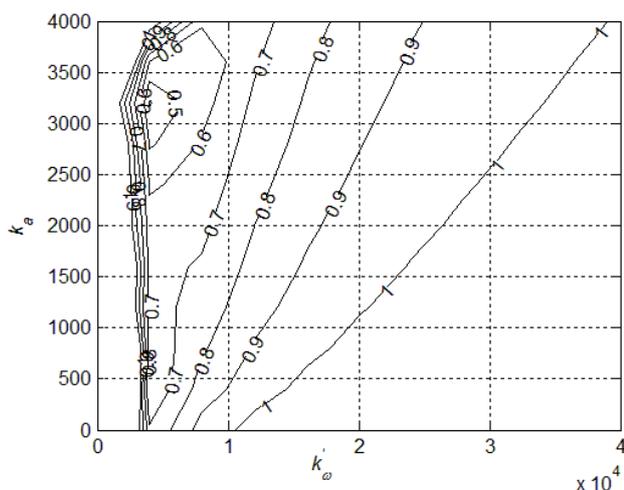


Рис. 4. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30°

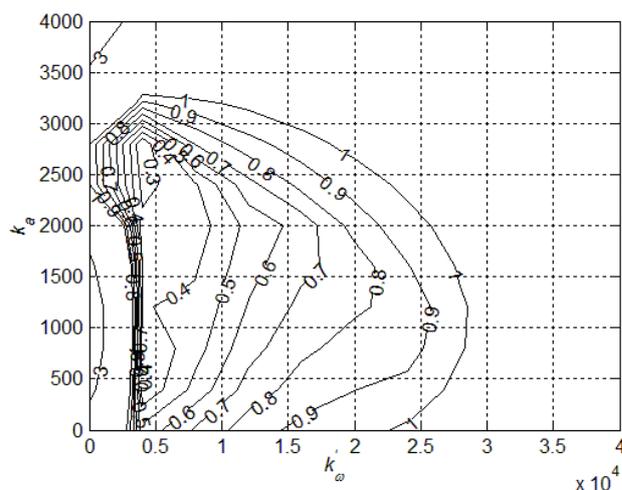


Рис. 5. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60°

Из рис. 4 и рис. 5 видно, что на орбите с меньшим наклоном область устойчивости больше, однако для орбиты с высоким наклоном увеличивается интересная с практической точки зрения область с малыми величинами характеристических показателей. Это связано с действием гравитационного момента, который для выбранной инерциальной системы и наклонов может оказывать восстанавливающее воздействие на спутник. Фактически оказалось, что гравитационный момент зачастую реализует часть управляющего момента ляпуновского управления, которую нельзя реализовать с помощью магнитных катушек. При других наклонах и требуемой ориентации аппарата это воздействие может оказаться сильнее, слабее, или, наоборот, гравитация может оказывать возмущающее воздействие, если момент направлен в другую сторону, нежели желательный управляющий момент. Однако даже в этом случае действие гравитационного момента может привести к увеличению области устойчивости, так как спутник будет выводиться из положения, недоступного для магнитной системы ориентации. На рис. 6 и рис. 7 показаны характеристические показатели при отсутствии гравитационного момента.

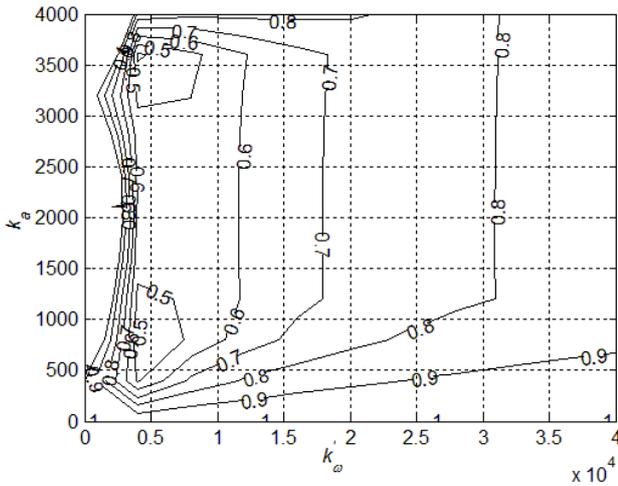


Рис. 6. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30° . Без гравитационного момента

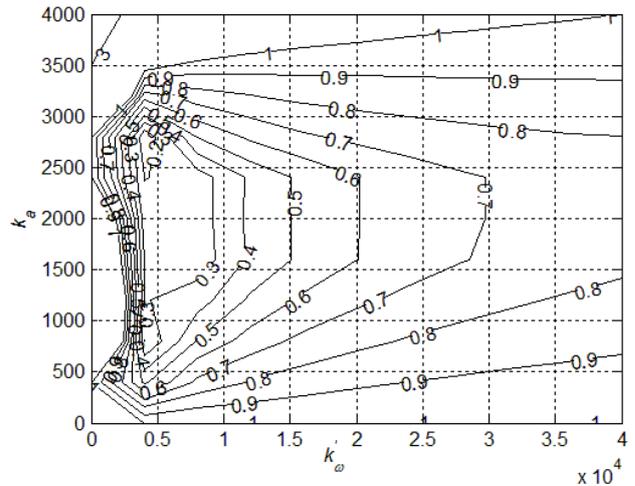


Рис. 7. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60° . Без гравитационного момента

Сравнение пар рис. 4, 5 и рис. 6, 7 показывает, что в целом действие гравитационного момента приводит к уменьшению области устойчивости, хотя для орбит с малым наклоном это воздействие заметно меньше. На рис. 8 представлены полученные численно амплитуды периодических решений.

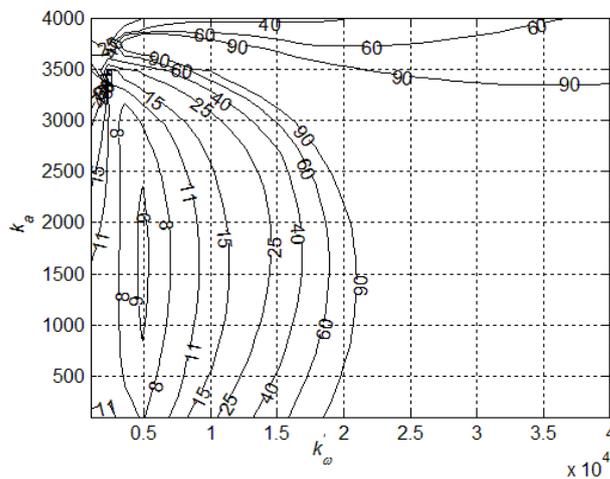


Рис. 8. Амплитуды периодических решений

Рис. 8 можно сравнить с рис. 5, чтобы соотнести значения характеристических показателей с достижимой точностью ориентации (амплитуды периодических решений) в области устойчивости. Так, меньшие характеристические показатели (большая степень устойчивости на рис. 5) соответствуют лучшей точности на рис. 8. На рис. 9 и 10 представлены области устойчивости для спутника с тензором инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(1, 1.1, 1.3) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

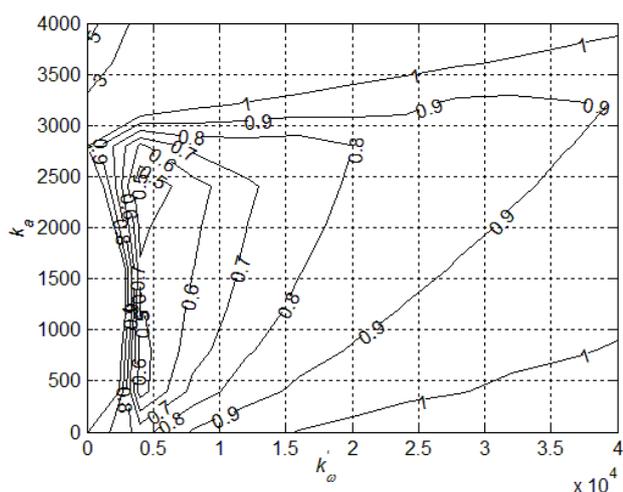


Рис. 9. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30°

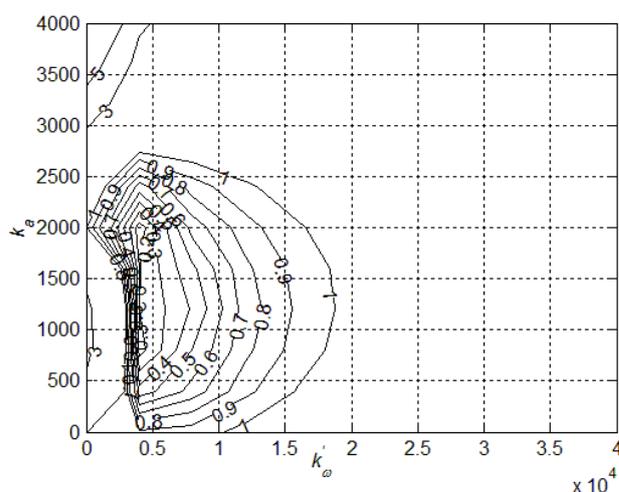


Рис. 10. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60°

Близость тензора инерции к сферически-симметричному приводит к незначительному влиянию гравитационного момента, однако по-прежнему сохраняется большая область устойчивости для орбиты с малым наклоном. Еще меньшее влияние гравитационный момент оказывает на спутник малых массы и размеров. На рис. 11 и 12 представлены области устойчивости для аппарата с тензором инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(0.17, 0.15, 0.2)$ кг·м².

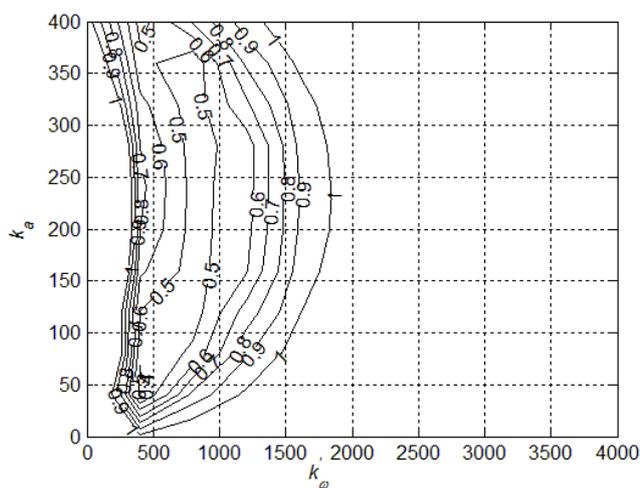


Рис. 11. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 30°

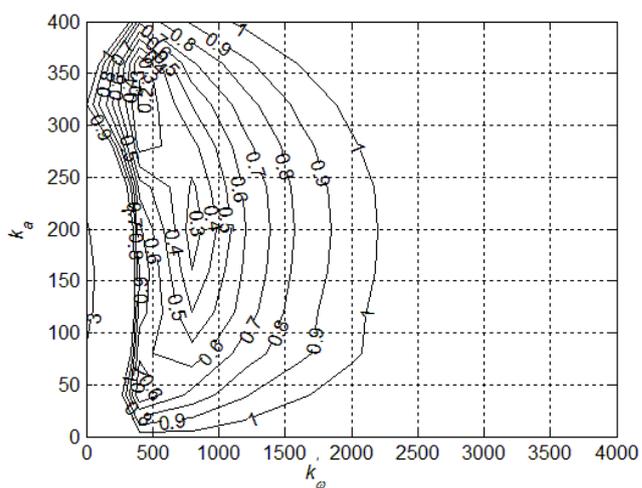


Рис. 12. Характеристические показатели. Наклонение орбиты 60°

Большая область устойчивости и большая область с малыми значениями характеристических показателей для орбиты с высоким наклоном объясняется большим разнообразием положений вектора геомагнитной индукции. Действие гравитационного момента незначительно.

Авторы благодарят М.Ю. Овчинникова и А.Д. Герман за важные замечания и идеи, реализованные в работе.

Заключение

В работе рассмотрено обеспечение трехосной ориентации спутника в инерциальном пространстве магнитной системой ориентации при учете влияния гравитационного момента. Для движения спутника в плоскости полярной орбиты определены амплитуды периодических решений, для которых найдены аналитические аппроксимирующие формулы. При произвольных параметрах управления и спутника для исследования устойчивости пространственного движения использована теория Флоке, найдены характеристические показатели линеаризованной системы. Показано, что гравитационный момент может оказывать как восстанавливающее, так и возмущающее воздействие. При этом в целом ориентация в инерциальном пространстве оказывается достижимой с точностью лучше десяти градусов.

Литература

1. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronautica*. 2015. V. 110. pp. 279–286.
2. Ovchinnikov M.Y. et al. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame // *Acta Astronautica*. 2015. V. 116. pp. 74–77.
3. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronautica*. 2015. V. 107. pp. 87–96.
4. Smirnov G., Ovchinnikov M., Miranda F. On the magnetic attitude control for spacecraft via the epsilon-strategies method // *Acta Astronautica*. 2008. V. 63, № 5–6. pp. 690–694.
5. Wang P., Shtessel Y., Wang Y. -q. Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*. Morgantown, West Virginia, 1998. pp. 500–504.
6. Ovchinnikov M.Y. et al. Geomagnetic field models for satellite angular motion studies // *Acta Astronautica*. 2018. V. 144. pp. 171–180.
7. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
8. Oldham K.B., Myland J., Spanier J. *An Atlas of Functions: with Equator, the Atlas Function Calculator*. Springer Science & Business Media, 2010. 762 p.
9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.
10. Ovchinnikov M.Y. et al. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // *Acta Astronautica*. 2014. V. 93. pp. 23–33.