ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 161 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 161. 7 с. doi:**10.20948/prepr-2018-161**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-161**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе

Москва — 2018

Попков К. А.

Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе

Для любой булевой функции найдено точное значение минимально возможной длины полного проверяющего теста для реализующих её схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция, дизъюнкция, отрицание» при однотипных константных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, однотипная константная неисправность, полный проверяющий тест

Kirill Andreevich Popkov

Minimal complete fault detection tests for logic networks in the standard basis

For each Boolean function, we find the exact value of minimal possible length of a complete fault detection test for logic networks implementing this function in the basis “conjunction, disjunction, negation” under one-type stuck-at faults at outputs of gates.

Key words: logic network, one-type stuck-at fault, complete fault detection test

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00337 «Проблемы синтеза, сложности и надежности в теории управляющих систем»).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов (СФЭ), реализующих заданные булевы функции (см. [1–3]). Пусть имеется СФЭ S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в схеме S могут происходить *однотипные константные неисправности типа p на выходах элементов*, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно заданной булевой константе p; число неисправных элементов в схеме предполагается произвольным. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать какие-то, вообще говоря, отличные от неё булевы функции, называемые *функциями неисправности* данной схемы.

Будем рассматривать только СФЭ в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. *Полным проверяющим тестом* (ППТ) для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. Введём следующие обозначения: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берётся по всем ППТ T для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берётся по всем схемам S в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ППТ.

Для удобства под буквой D будем ставить символ «1» или «0» в случаях, когда в схемах допускаются однотипные константные неисправности типа 1 или типа 0 на выходах элементов соответственно. Н. П. Редькин в [4] получил оценки $D_1(n) \leqslant n$ и $D_0(n) \leqslant n$ при $n \geqslant 1$; впоследствии эти оценки были улучшены Ю. В. Бородиной, которая в [5] установила, что $D_1(n) = D_0(n) = 2$ при $n \geqslant 2$.

В настоящей работе найдены точные значения величин $D_1(f)$ и $D_0(f)$ для любой булевой функции f.

Формулировка и доказательство основного результата

Рассмотрим однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ (вида $x \vee y$, $\overline{x}$), будем называть *конъюнктором* (соответственно — *дизъюнктором*, *инвертором*).

Сформулируем одно утверждение, вытекающее из доказательства теоремы 1 работы [5].

Лемма 1. *Пусть неконстантная булева функция $f(\tilde{x}^n)$, равная ей тупиковая дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) F и число $k \in \{0, \ldots, n\}$ таковы, что выполнены следующие условия:*

1) $f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}) = 0$, где $m = n - k$;

2) $f(\tilde{\tau}) = 1$ для любого набора $\tilde{\tau}$ длины n, последние m компонент и хотя бы одна из первых k компонент которого равны 1;

3) в случае $k \geqslant 1$ в форму F не входят отрицания переменных $x_1, \ldots, x_k$.

Тогда функцию f можно реализовать СФЭ, допускающей ППТ длины 1.

(Определение тупиковой ДНФ можно найти, например, в [6, с. 301].)

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{1}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной по переменной* x_i, где $n \geqslant 1$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, если для любых булевых констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n$ справедливо неравенство $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \leqslant f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Через m_f будем обозначать число переменных, по которым функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна, а через $\tilde{\sigma}_f$ — двоичный набор длины n, i-я компонента которого равна 0 тогда и только тогда, когда данная функция монотонна по переменной x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$D_1(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если функция } f \textit{ представима в виде } (1) \textit{ или } f \equiv 1, \\ 2, & \textit{если } \mathrm{m}_f \leqslant n-2 \textit{ и } f(\tilde{\sigma}_f) = 1, \\ 1 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Если $f = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то функцию f, очевидно, можно реализовать СФЭ, не содержащей функциональных элементов; у такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому в качестве ППТ для неё можно взять пустое множество, откуда следует равенство $D_1(f) = 0$. Если $f \equiv 1$, то такое же равенство доказано в [3, с. 149].

Далее будем считать, что функция f не представима в виде (1) и $f \not\equiv 1$. Выход любой схемы, реализующей эту функцию, не может совпадать ни с одним и её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности данного элемента схема будет реализовывать константу 1, отличную от функции f. Указанные две функции надо различить хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D_1(f) \geqslant 1$.

Пусть $\mathrm{m}_f \leqslant n-2$ и $f(\tilde{\sigma}_f)=1$. Из [5, теорема 2] следует неравенство $D_1(f) \leqslant 2$. Докажем, что $D_1(f) \geqslant 2$. Без ограничения общности

$$\tilde{\sigma}_f = (\underbrace{0,\dots,0}_{\mathrm{m}_f}, \underbrace{1,\dots,1}_{n-\mathrm{m}_f}). \qquad (2)$$

Предположим, что существует СФЭ S, реализующая функцию f и допускающая ППТ, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$. По аналогии с [5, теорема 3] удалим из схемы S все избыточные элементы, если они есть, и получим схему S'. В схеме S' содержится хотя бы один инвертор, так как в противном случае все её элементы реализовывали бы монотонные функции и функция f, возникающая на выходе схемы S', также была бы монотонной, а значит, монотонной по каждой переменной, что противоречит неравенству $\mathrm{m}_f \leqslant n-2$. Далее, рассуждая аналогично второму абзацу доказательства теоремы 3 из [5], получаем, что входы инверторов могут соединяться только со входами схемы S', данная схема должна содержать хотя бы по одному инвертору после входа каждой из переменных $x_{\mathrm{m}_f+1},\dots,x_n$, а сами эти инверторы неизбыточны для схемы S.

Если i-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна 0 для некоторого $i \in \{\mathrm{m}_f+1,\dots, n\}$, то на выходе того из этих инверторов, на вход которого подаётся переменная x_i, на наборе $\tilde{\sigma}$ возникнет значение 1 и неисправность указанного инвертора нельзя обнаружить на данном наборе, но это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ППТ для схемы S. Значит, последние $n-\mathrm{m}_f$ компонент набора $\tilde{\sigma}$ равны 1. Отсюда, из (2), равенства $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и монотонности функции f по первым m_f переменным вытекает, что $f(\tilde{\sigma})=1$, а тогда неисправность выходного элемента схемы S нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$. Полученное противоречие означает, что $D_1(f) \geqslant 2$, следовательно, $D_1(f)=2$.

Пусть теперь либо $\mathrm{m}_f \geqslant n-1$, либо $f(\tilde{\sigma}_f)=0$. Докажем, что $D_1(f) \leqslant 1$; с учётом доказанного неравенства $D_1(f) \geqslant 1$ отсюда будет следовать равенство $D_1(f)=1$. Без ограничения общности выполнено (2). Рассмотрим три случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и $\mathrm{m}_f=n$. Тогда $\tilde{\sigma}_f=(\underbrace{0,\dots,0}_{n})$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна по всем переменным, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}) \geqslant f(\tilde{\sigma}_f)=1$ для

любого набора $\tilde{\pi}$ длины n, поэтому $f \equiv 1$, т. е. функция f представима в виде (1). Противоречие.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f) = 1$ и $\mathrm{m}_f = n - 1$. Тогда $\tilde{\sigma}_f = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1)$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}) \geqslant f(\tilde{\sigma}_f) = 1$ для любого набора $\tilde{\pi}$ длины n, последняя компонента которого равна 1. Однако это противоречит тому, что функция $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной по переменной x_n.

3. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f) = 0$. Если $f \equiv 0$, то $D_1(f) \leqslant 1$ — см. [3, с. 149]. Далее считаем, что $f \not\equiv 0$. Из множества всех двоичных наборов длины n, последние $n - \mathrm{m}_f$ компонент которых равны единице и на которых функция f принимает значение 0, выберем произвольный набор $\tilde{\sigma}$ с наибольшим числом единичных компонент (отметим, что указанное множество непусто, поскольку набор $\tilde{\sigma}_f$ удовлетворяет обоим перечисленным выше условиям). Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m})$, где $k \leqslant \mathrm{m}_f$. Пусть F — произвольная тупиковая ДНФ функции $f(\tilde{x}^n)$. Из монотонности данной функции по переменным $x_1, \ldots, x_k$ при $k \geqslant 1$ несложно получить, что в F не могут входить отрицания этих переменных. Тогда выполнены условия 1)–3) леммы 1, из которой следует неравенство $D_1(f) \leqslant 1$. Теорема 1 доказана. $\square$

Используя теорему 1 и принцип двойственности (см., например, [6, с. 24]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теоремы 1 на двойственные, нетрудно получить двойственный ей результат для случая $p = 0$, т. е. описание всех булевых функций f, для которых $D_0(f) = 0$, $D_0(f) = 1$ и $D_0(f) = 2$.

Список литературы

1. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

2. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

3. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

4. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — № 2. — С. 17–21.

5. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.