



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Аптекарев А.И., Туляков Д.Н.

Асимптотический базис  
решений  $q$ -рекуррентных  
соотношений вне зоны  
близких собственных  
значений

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Аптекарев А.И., Туляков Д.Н. Асимптотический базис решений  $q$ -рекуррентных соотношений вне зоны близких собственных значений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 159. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2018-159](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-159)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-159>

О р д е н а Л е н и н а  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.КЕЛДЫША  
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

Асимптотический базис  
решений  $q$ -рекуррентных соотношений  
вне зоны близких собственных значений

Москва — 2018

УДК 517.53+517.9

**Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.**

Асимптотический базис решений  $q$ -рекуррентных соотношений вне зоны близких собственных значений. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, 2018

Описана процедура построения разложения базиса решений одного четырёхчленного рекуррентного соотношения с коэффициентами из кольца  $\mathbb{Z}[q, 1/q]$ . Доказано, что вне зоны близких собственных значений получаемое разложение является асимптотическим.

**Ключевые слова:**  $q$ -многочлены; асимптотика последовательностей многочленов; рекуррентные соотношения; разностные уравнения.

**Aptekarev A. I., Tulyakov D. N.**

Asymptotical basis of solutions of  $q$ -recurrence relations outside of the zone of clustering eigenvalues. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2018

A procedure for constructing expansions of the basis of solutions of a four-term recurrence relations with coefficients from the ring  $\mathbb{Z}[q, 1/q]$  is described. The fact that outside of the zone of the clustering eigenvalues these expansions are the asymptotical expansions is proven.

**Key words:**  $q$ -polynomials; asymptotics of the polynomial sequences; recurrence relations; difference equations.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2018

© А. И. Аптекарев, 2018, © Д. Н. Туляков, 2018

## Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Конкретизация постановки задачи . . . . .	8
3	Процедура разложения базиса однородной задачи . . . . .	10
4	Теорема об асимптотическом базисе . . . . .	18
	Список литературы . . . . .	21

## 1. Введение

**1.1. Общая постановка задачи.** Дана<sup>1</sup>  $\{\dot{J}_n(q)\}$  последовательность многочленов из кольца  $\mathbb{Z}[q, 1/q]$  лорановских степеней с целыми коэффициентами. Эта последовательность задаётся неоднородными 4-х членными рекуррентными соотношениями

$$\sum_{j=0}^3 A_j(q, q^n) \dot{J}_{n+j}(q) + B(q, q^n) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &:= q^{7n+9} (q^{2n+4} - 1) (q^{2n+5} - 1); \\ A_1 &:= q^{2n+5} (q^{2n+5} - 1) (q^{2n+2} - 1) (1 - q^{n+1} \\ &\quad - (q-1)(q^2-1)q^{2n+1} + (q^3+1)q^{3n+2} + 2q^{4n+5} - q^{5n+6}); \\ A_2 &:= q (q^{2n+4} - 1) (q^{2n+1} - 1) (q^{5n+9} - q^{4n+7} \\ &\quad - (q-1)(q^2-1)q^{3n+4} + (q^3+1)q^{2n+2} + 2q^{n+2} - 1); \\ A_3 &:= (q^{2n+1} - 1) (q^{2n+2} - 1); \\ B &:= -q^{4+2n} (1 + q^{1+n}) (1 + q^{2+n}) (q^{1+2n} - 1) (q^{3+2n} - 1) (q^{5+2n} - 1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

и

$$\dot{J}_1(q), \dot{J}_2(q), \dot{J}_3(q), \quad (1.3)$$

подходящие начальные условия.

Функции  $\{Q_n(q)\}$ , удовлетворяющие рекуррентным соотношениям вида:

$$\sum_{j=0}^p A_j(q, q^n) Q_{n+j}(q) = 0, \quad (1.4)$$

с зависящими полиномиально от  $(q, q^n)$  коэффициентами  $\{A_j\}_{j=0}^p$ , называют *q-голономными системами*, см. [1]. Например, определённая в (1.1), (1.2) система  $\{\dot{J}_n(q)\}$  – *q-голономная* для  $p = 4$ .

Нашей основной задачей<sup>2</sup> будет нахождение асимптотики многочленов  $\{\dot{J}_n(q)\}$ , (1.1)–(1.3) в двойном масштабе при

$$q \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad q^n = z \in \mathcal{K} \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (1.5)$$

<sup>1</sup>Частное сообщение Ставроса Гарофолидиса.

<sup>2</sup>В рамках совместного с Джеффри Геронимо и Ставроса Гарофолидиса из Технологического Института Джорджии (GATECH) проекта, посвящённого приложениям асимптотической теории решений разностных уравнений.

**1.2. Мотивация задачи. Гипотеза объёма.** Пусть  $K$  – ориентированный узел (или зацепление) в трёхмерной сфере  $S^3$ . Знаменитая гипотеза объёма [4, 7] связывает две характеристики узла  $K$  совершенно разной природы. С одной стороны – это комбинаторная характеристика  $K$ , а с другой стороны стоит геометрическая характеристика трёхмерного многообразия  $M := S^3 \setminus K$ .

В качестве комбинаторной характеристики выступают инварианты узла: т.н. многочлены Джонса  $J(K, q)$  и их обобщения (в теории представлений группы  $SU(2)$ , квантовой группы  $U_q(\mathfrak{su}(2))$ ) т.н.  $N$ -окрашенные многочлены Джонса  $J_N(K, q)$ . Многочлены Джонса  $J(K, q) \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$  определяются

из начальных условий<sup>3</sup>:  $J(\bigcirc, q) = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\bigcirc$  – не узел,  
 правила композиции:  $J(K_1 \sqcup K_2, q) = J(K_1, q) J(K_2, q)$ ,

и некоторого закона изменения величины  $J(K, q)$  при образовании самопересечения у проекции узла  $K$  на плоскость, (см. точное определение в [2, 7]).

$N$ -окрашенный многочлен Джонса  $J_N(K, q)$  получается «раскраской» узла  $K$  неприводимыми  $N$ -мерными представлениями квантовой группы  $U_q(\mathfrak{su}(2))$ , см. определения и свойства в [3]. Известны выражения  $J_N(K, q)$  через многочлены Джонса для  $K^n$ -«сдвинутых» копий ( $n$ -cabling) узла  $K$ :

$$J_2(K, q) = J(K, q), \quad J_3(K, q) = J(K^2, q) - 1, \quad J_4(K, q) = J(K^3, q) - 2J(K, q), \dots$$

В качестве геометрической характеристики выступает гиперболический объём  $M := S^3 \setminus K$ . Говоря об объёме трёхмерного многообразия  $M$ , уместно вспомнить доказанную Григорием Перельманом в знаменитой работе [5] гипотезу Уильяма Тёрстона о восьми геометрических структурах, допустимых для частей многообразия  $M$ , см. [6]. Причём, как ещё доказал сам Тёрстон в [6], дополнение к нетривиальному узлу (зацеплению) всегда имеет гиперболическую структуру, так что соответствующий гиперболический объём  $\text{Vol}(M)$  является определённым единственным образом топологическим инвариантом.

Теперь мы можем сформулировать знаменитую гипотезу объёма, см. [4]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |V_N(K, q = e^{\frac{2\pi i}{N}})| = \text{Vol}(M), \quad (1.6)$$

где

$$V_N(K, q) = \frac{J_N(K, q)}{J_N(\bigcirc, q)}, \quad J_N(\bigcirc, q) = \frac{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}. \quad (1.7)$$

Нормировка в (1.7) выбрана таким образом, чтобы парировать зануление окрашенных многочленов Джонса в корнях из единицы. Гипотеза объёма проверена лишь для трех узлов<sup>4</sup> см. [8, 4]. Обобщения гипотезы см. в [7].

<sup>3</sup>Нормировка, принятая в квантовой теории поля, в геометрии обычно используют  $J(\bigcirc, q) = 1$ .

<sup>4</sup>Для которых был известен явный вид многочленов  $J_N(K, q)$ : узла-восьмёрки  $4_1$ , а также узлов  $5_2, 6_1$ .

Проверка гипотезы объёма и её обобщений для конкретных узлов остаётся важной и актуальной задачей. В этом направлении отметим важный результат С. Гарофалидиса и Тан Лё, которые доказали, см. [1], что для любого узла  $K$  система  $N$ -окрашенных многочленов Джонса  $\{J_N(K, q)\}$  является  $q$ -голономной. Тем самым, цель нашей работы (1.5) мотивирована и связана с нахождением значения левой части гипотезы объёма (1.6).

**1.3. Асимптотика решений разностных уравнений. Основные положения.** В работах [9, 10, 11, 12, 13, 14] развивалась асимптотическая теория последовательностей функций, определяемых рекуррентными соотношениями. Остановимся вкратце на основных положениях этого подхода, сформулированных в [12].

Пусть система  $\{Q_n(z)\}$  определяется  $(p + 2)$ -членными рекуррентными соотношениями:

$$\vec{Q}_{n+1} = \mathcal{A}_n(z) \vec{Q}_n, \quad \vec{Q}_n := (Q_{n+p+1}, \dots, Q_{n+1}, Q_n)^T, \quad p \geq 1. \quad (1.8)$$

Будем считать коэффициенты матрицы перехода  $\mathcal{A}_n(z)$  рациональными функциями от  $n$  и  $z$ , т.е.  $\mathcal{A}_n(z) \in \mathbb{Q}(\mathbb{C}^2)$ . Подход состоит в построении асимптотических разложений базисных решений (1.8) в различных зонах  $(n, z) \in \mathbb{C}^2$ , с последующим нахождением в пересечениях этих зон матриц перехода, связывающих асимптотические базисы разных зон.

Основным моментом подхода является нахождение диагонализующего преобразования («диагонализатора»)  $V_n$ , такого, что матрица  $V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n$  близка к диагональной матрице

$$D_n := \text{diag} [V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n] \approx V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n, \quad (1.9)$$

где степень близости, установленная в [12],

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \| D_n^{-1} V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n - I \| < \infty, \quad \| V_n \|, \| V_n^{-1} \| = O(n^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad (1.10)$$

позволяет оценить сходимость итерационных процедур нахождения разложений базисных векторов. Формально базисные вектора являются столбцами матрицы

$$B_n := V_n \prod_{k=k_0}^{n-1} D_k =: V_n \Pi_n. \quad (1.11)$$

Действительно,

$$\mathcal{A}_n B_n = V_{n+1} V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n \Pi_n = V_{n+1} \Pi_{n+1} = B_{n+1}.$$

Таким образом, задача построения асимптотического базиса решений (1.8) сводится к нахождению разложений «диагонализаторов»  $V_n$  (главная задача) и произведения  $\Pi^{(n)}$  диагональных операторов (решение следует из главной).

Основная идея решения задачи построения приближённых  $V_n$  состоит во введении дополнительного параметра  $\tau \in \mathbb{C}$  и поиске формального степенного ряда по  $\tau$ ,

$$\widehat{V}_n(x, \tau) := \widetilde{V}_0(x, n) + \tau \widetilde{V}_1(x, n) + \tau^2 \widetilde{V}_2(x, n) + \dots, \quad (1.12)$$

решающего задачу превращения матрицы  $\widehat{V}_{n+\tau}^{-1} \mathcal{A}_n \widehat{V}_n$  в диагональную:

$$\widehat{V}_{n+\tau}^{-1} \mathcal{A}_n \widehat{V}_n \equiv \text{diag}[\widehat{V}_{n+\tau}^{-1} \mathcal{A}_n \widehat{V}_n],$$

(тождественно в смысле формальных рядов), при этом коэффициенты формального ряда  $\widehat{V}_{n+\tau}$  вычисляются переразложением

$$\widetilde{V}_j(x, n + \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i \frac{d^i}{i! dn^i} \widetilde{V}_j(x, n). \quad (1.13)$$

Ясно, что если для фиксированного  $x$  имеется аналитичность коэффициентов формального ряда (1.12) по второму аргументу

$$\widetilde{V}_n(x, \tilde{n}) \in \mathcal{H}_{\tilde{n}}(|\tilde{n} - n| < |\tau|), \quad (1.14)$$

то ряд в (1.13) из формального превращается в сходящийся. Однако для всех  $j$  условие (1.14) удовлетворить нельзя, поэтому для приближений пользуемся частичными суммами:  $V_n \approx \sum_{j=0}^{l+1} \widetilde{V}_j(x, n)$  и  $V_{n+1} \approx \sum_{j=0}^{l+1} \widetilde{V}_j(x, n+1)$ .

Для  $\widehat{V}_n$  будем строить последовательные приближения  $\widehat{V}_n^{(l)}$ . В качестве начального приближения  $\widehat{V}_n^{(0)}$  и одновременно главного члена разложения  $\widetilde{V}_0(x, n)$  полагаем матрицу, в которой столбцы  $\{\vec{b}_j\}_{j=1}^p$  - с.в. матрицы  $\mathcal{A}_n$ :

$$\widehat{V}_n^{(0)} := \widetilde{V}_0(x, n) := (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p), \quad (1.15)$$

а последующее приближение задаётся формулой

$$\widehat{V}_n^{(l+1)} := \widehat{V}_n^{(l)}(I + X_n^{(l)}), \quad X_n^{(l)} := (X_{ij}^{(l)}), \quad (1.16)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} X_{ii}^{(l)} = 0, \\ X_{ij}^{(l)} = \frac{S_{ij}^{(l)}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad S^{(l)} := (\widehat{V}_{n+\tau}^{(l)})^{-1} \mathcal{A}_n \widehat{V}_n^{(l)}. \quad (1.17)$$

$\{\lambda_j\}_1^p$  - с. з. матрицы  $\mathcal{A}_n$ . При этом внедиагональные элементы  $S^{(l)}$  порядка  $O(\tau^l)$ , ряды  $S^{(l)}$  и  $S^{(l+1)}$  совпадают<sup>5</sup> до  $\bar{o}(\tau^{(l+1)})$ , а  $\widehat{V}_n^{(l)}$  и  $\widehat{V}_n^{(l+1)}$  — до  $\bar{o}(\tau^{(l)})$ .

<sup>5</sup>Коэффициент при  $\tau^{(l+1)}$  у  $S^{(l+1)} - S^{(l)}$  не зависит от  $X_{ii}^{(l)}$ , которые поэтому в (1.17) приравнены 0.

Обратим внимание (см. знаменатель в (1.17)) на то, что данная процедура имеет смысл лишь вне зон, в которых с.з. матрицы  $\mathcal{A}_n$  близки (т.н. *зоны «разделённых» с.з.*). Ясно, что в зоне разделённых с.з. имеется область  $\mathbb{C}^2$ , где начальные данные (1.15) итерационного процесса аналитичны и итерационные формулы (1.16) аналитичность сохраняют. Внутри этой области более конкретно можно описать область голоморфности для каждого приближения  $\widehat{V}_n^{(l)}$ . Обозначим через  $\text{Dis}(x, n)$  дискриминант характеристического многочлена матрицы  $\mathcal{A}_n$  и определим  $R(x, n) := \text{dist}(n, \{nn \mid \text{Dis}(x, nn) = 0\})$ .

Для начального приближения  $\widehat{V}_n^{(0)}$  формальный ряд по  $\tau$  состоит из одного члена, следовательно, мы имеем, см. (1.14),

$$\widehat{V}_{\tilde{n}}^{(0)}(x, \tau) \in \mathcal{H}_\tau(|\tau| < \infty) \quad \text{и} \quad \widehat{V}_{\tilde{n}}^{(0)}(x, \tau) \in \mathcal{H}_{\tilde{n}}(|\tilde{n}| < R).$$

Для последующих приближений формальные ряды по  $\tau$  содержат уже б.м. членов, однако, учитывая то, что каждый шаг итерации  $(l) \rightarrow (l+1)$  установивает  $(l+1)$  член ряда (1.12), то в нахождении последующих приближений мы используем только установившиеся члены и поэтому имеем

$$\widehat{V}_{\tilde{n}}^{(l)}(x, \tau) \in \mathcal{H}_\tau(|\tau| < R/l) \quad \text{и} \quad \widehat{V}_{\tilde{n}}^{(l)}(x, \tau) \in \mathcal{H}_{\tilde{n}}(|\tilde{n}| < R/(l+1)).$$

Это объясняет введённые выше частные суммы для приближений  $V_n$  и  $V_{n+1}$ .

Тем самым,  $\overline{\mathbb{C}^2}$  разбивается на зоны (с перекрытиями), в которых с.з. либо разделены, либо среди них имеются близкие. На компактах  $K$  в этих зонах, в зависимости от масштаба и связи переменных  $(x, n) \in K \Subset \overline{\mathbb{C}^2}$ , выбирается малый параметр. Входные данные задачи (1.8):  $\mathcal{A}_n(x)$  раскладываются в степенной ряд по выбранному малому параметру. Затем по отрезку этого ряда<sup>6</sup> ищется приближение диагонализующего преобразования  $V_n$ .

В зоне разделённых с.з. используется процедура, описанная выше (с введением дополнительного малого параметра  $\tau$ ). Здесь получаемые коэффициенты асимптотического разложения для  $V_n$  являются алгебраическими функциями.

В зоне близких с.з. используются другие подходы (см. [9, 10, 11]). Здесь дополнительный малый параметр (близость с.з.) при стремлении к нулю превращает разностную задачу (1.8) в дифференциальную и получаемые коэффициенты асимптотического разложения для  $V_n$  являются уже решениями уравнений: гипергеометрического, Бесселя, Айри.

В свою очередь, разложения базисных решений (1.11) непосредственно получаются из разложений  $V_n$ , следуя (1.9) и (1.11).

Наконец, находя в пересечениях зон матрицы перехода между базисами, базис решений можем определить глобально.

---

<sup>6</sup>Чем больше членов ряда для  $\mathcal{A}_n(x)$ , тем точнее приближение  $V_n$ .

## 2. Конкретизация постановки задачи

Вернёмся к асимптотике окрашенных многочленов Джонса, определённых рекуррентными соотношениями (1.1), (1.2). Для нахождения асимптотики последовательности многочленов, определяемых неоднородными рекуррентными соотношениями, мы сначала будем строить асимптотическое разложение базиса решений однородной задачи

$$\vec{Q}_{n+1}(q) = \mathcal{A}_n \vec{Q}_n(q), \quad \vec{Q}_n := (Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2})^T, \quad (2.1)$$

где элементы матрицы перехода

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{A_2}{A_3} & \frac{A_1}{A_3} & \frac{A_0}{A_3} \end{pmatrix},$$

заданы в (1.2).

**2.1. Новые переменные (переобозначение).** Напомним, см. (1.5), мы интересуемся предельным режимом:

$$\begin{cases} n \rightarrow \infty, q \rightarrow 1, \\ q^n =: z \in K \Subset \mathbb{C}. \end{cases}$$

Вместо базовых переменных  $q$  и  $n$  рассмотрим следующие параметры. Будем различать большое  $N$  и текущее  $n$ :

$$N \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{N} = t \in [0,1].$$

Далее напомним введённую раньше переменную  $z := q^n$ . Наконец, определим параметр  $H$  такой, что

$$H := N \ln q, \quad \text{т.е.} \quad q^N =: e^H \Rightarrow \begin{cases} q^n = z = e^{tH} \\ q = \exp\left(\frac{H}{N}\right) = 1 + \frac{H}{N} + \dots, \end{cases}$$

В итоге вместо переменных  $n$ ,  $q$  и  $q^n$  основными переменными будут

$$(n, q, q^n) \rightarrow (tN, H/N, z), \quad (2.2)$$

определённые выше в этом пункте. Ввиду (1.6) имеем  $H = 2\pi i$ . При этом малым параметром для степенных разложений будет служить  $(1/N)$ .

## 2.2. Спектральная кривая однородной задачи. Точки ветвления.

Подставляя в характеристическое уравнение

$$\det(\mathcal{A}_n - I\lambda) = 0 \quad (2.3)$$

предельные значения  $q^n =: z$ ,  $q =: 1$ , получим уравнение:

$$\lambda(z) : \quad \lambda^3 + a_2(z)\lambda^2 + a_1(z)\lambda + z^7 = 0 \quad (2.4)$$

предельной спектральной кривой, где

$$a_2 = z^5 - z^4 + 2z^2 + 2z - 1, \quad a_1 = -z^2(z^6 - 2z^4 - 2z^3 + z - 1). \quad (2.5)$$

Род алгебраической функции  $\lambda(z)$  равен 2. Она имеет восемь точек ветвления, из них две лежат на единичной окружности с центром в т. 0

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \left( 3 - \sqrt{13 + 16\sqrt{2}} \pm I \sqrt{-6 + 6\sqrt{13 + 16\sqrt{2}} - 16\sqrt{2}} \right), \quad (2.6)$$

их численные значения равны  $z_{1,2} = -0.7422176660 \pm I 0.6701588892$ .

Отметим также, что хотя точки  $z = \pm 1$  не являются точками ветвления, но в них совпадают все три ветви функции  $\lambda(z) = \{\lambda_j(z)\}_{j=0}^2$ :

$$\lambda_0(\pm 1) = \lambda_1(\pm 1) = \lambda_2(\pm 1). \quad (2.7)$$

## 2.3. Дорожная карта. Левая часть гипотезы объёма.

Напомним, что нашей целью является нахождение асимптотики (1.6)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |J_N(q)| \Big|_{q=e^{\frac{2\pi i}{N}}}$$

для  $q$ -голономной системы  $\{\dot{J}_n(q)\}$ , определяемой рекуррентными соотношениями (1.1)–(1.2) и начальными условиями (1.3). То есть, если многочлен  $\dot{J}_n(q) =: \dot{Q}(q, q^n)$  рассматривать, как функцию двух переменных  $q = e^{\frac{2\pi i}{N}}$  и  $z := q^n$ , то мы стартуем с функций  $\{\dot{Q}(q, q^n)\}_{n=1}^3$ , взятых в точках  $q, q^2, q^3$ , и, вычисляя функции  $\{\dot{Q}(q, q^n)\}_{n=4}^N$  (по (1.1-1.2)) в последовательных корнях из единицы  $z := q^n$ , двигаясь по  $z$  вдоль единичной окружности от  $z := q$  до  $z := q^N = e^{2\pi i}$ , прийдём к  $\dot{Q}(q, q^N)$ . Для определения  $\lim_{N \rightarrow \infty} \dot{Q}(q, q^N)$  мы сначала находим асимптотику базиса решений однородной задачи (2.1) при  $z \in K$  для компактов  $K$ , покрывающих окружность  $\{|z| = 1\}$ .

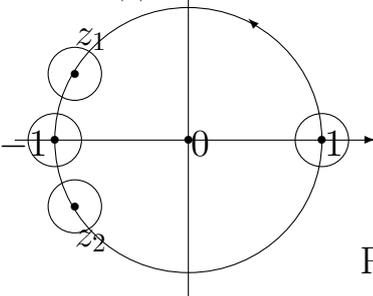


Рис. 1. Зоны близких с.з. вдоль единичной окружности.

Отметим усложняющее задачу обстоятельство. Единичная окружность целиком не лежит в зоне разделённых с.з.: наш путь вдоль  $\{e^{i\phi}\}_{\phi=0}^{2\pi i}$  начинается и кончается в зоне близких с.з. (окрестность точки 1), и также по пути эти зоны пересекаются в окрестностях точек  $z_1, -1, z_2$ , см. (2.6), (2.7).

Поэтому для нахождения глобального (вдоль всей окружности) асимптотического базиса решений однородной задачи мы после нахождения этого базиса в зоне разделённых с.з. должны будем найти базисы в четырёх локальных зонах близких с.з. (в окрестностях точек  $1, z_1, -1, z_2$ ) и матрицы перехода для базиса в зоне разделённых с.з. на входе и выходе из локальных зон, где с.з. близки.

Наконец, имея в своём распоряжении асимптотическое разложение общего однородного решения вдоль всей единичной окружности, методом вариации постоянных мы находим общее решение неоднородной задачи (1.1)-(1.2)), которое привязываем к начальным данным (1.3). Полученное таким образом специальное решение неоднородной задачи с помощью асимптотического базиса однородной задачи мы можем продолжить из начальной зоны – окрестности точки  $z = 1$  вдоль всей окружности в конечную зону – окрестность точки  $z = e^{2\pi i}$ .

В настоящей работе мы решаем задачу построения асимптотического (несколько первых членов) базиса однородной задачи в зоне разделённых с.з., т.е. мы адаптируем (в обозначениях пункта 2.1) общую процедуру, описанную в пункте 1.3, применительно к  $q$ -голономной системе (2.1).

### 3. Процедура разложения базиса однородной задачи

Входные данные для процедуры нахождения базиса решений задачи (2.1) представляют собой матрицу  $\mathcal{A}_n$ . Так как на выходе мы ожидаем асимптотическое разложение по степеням  $(1/N)$ , то и входные данные должны быть подготовлены соответствующим образом (собственно, для этого мы и вводили новые параметры в пункте 2.1). Сделаем замену в матрице коэффициентов  $\mathcal{A}_n$ :  $\text{subs}(q^n = e^{tH}, q = e^{H/N}, \mathcal{A}_n) =: \mathbf{A}(N, t, H)$  и разложим по малому параметру  $(1/N)$

$$\mathbf{A}(N, t, H) = \mathbf{A}_0(e^{tH}) + \frac{1}{N} \mathbf{A}_1(t, H) + \frac{1}{N^2} \mathbf{A}_2(t, H) + \dots, \quad (3.1)$$

где главный член разложения (напомним,  $q^n = e^{tH} = z$ ):

$$\mathbf{A}_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad a_j := \text{subs}\left(q^n = z, q = 1, \frac{A_j}{A_3}\right), \quad j=0,1,2, \quad (3.2)$$

где  $\{A_j\}$  – коэффициенты рекуррентных соотношений (1.2), а многочлены  $\{a_j(z)\}$  – коэффициенты уравнения предельной спектральной кривой (2.5).

Адаптируя случай  $q$ -многочленов к общему подходу, см. пункт 1.3, мы рассматриваем диагонализующее преобразование  $V$ , см. (1.9), в переменных  $(N, t, H)$ , и начальное приближение для  $\mathbf{V}(N, t, H)$  выбираем в виде (1.15), то есть в виде матрицы  $\mathbf{V}_0(t, H)$ , столбцы которой есть собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}_0(z)|_{z=\exp(tH)}$ :

$$\mathbf{V}_0(t, H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1(e^{tH}) & \lambda_2(e^{tH}) & \lambda_3(e^{tH}) \\ \lambda_1^2(e^{tH}) & \lambda_2^2(e^{tH}) & \lambda_3^2(e^{tH}) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Для построения последующих приближений нам нужно вычислять производные  $V_0(t)$  по параметру  $t$ , см. (1.13), (1.17), что, в свою очередь, требует параметризации алгебраической кривой  $\lambda(z)$ ,  $z = e^{tH}$ .

Получению параметризации алгебраической кривой  $\lambda(z)$ , см. (2.4), посвящён следующий пункт 3.1. Затем в пункте 3.2 мы опишем процедуру разложения диагонализующего преобразования. Наконец, в пункте 3.3 получим разложение базиса решений однородной задачи (1.8) в зоне разделённых собственных значений.

### 3.1. Параметризация спектральной кривой. Справедлива

**Теорема 3.1.** Пусть  $s \in \mathbb{C}$ . Тогда для точек кривой  $\lambda(z)$ , см. (2.4), имеем

$$\begin{cases} z = \frac{d+1}{d-1}, & d = \left( \frac{R_3(s)+2}{R_3(s)-2} \right)^{1/2}, \\ \lambda = L(z, s) = (s+1)z^2 - s(s+2)(s^2+s-1)z + s^2(s+2), \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$R_3(s) := \frac{s^3 + 2s^2 + s - 1}{s(s+1)}. \quad (3.5)$$

При этом для ветвей  $\lambda(z)$  имеем

$$\lambda_j(z) = L(z, s_j), \quad \text{где } \{s_j\}_{j=0}^2 : R_3(s_0) = R_3(s_1) = R_3(s_2). \quad (3.6)$$

**Замечание.** Если для какого-то  $s =: s_0$  в виду (3.4) имеем значение ветви  $\lambda_0 = L(z(s_0), s_0)$ , то для нахождения других ветвей  $\lambda_{1,2}$  с помощью (3.6) приходится решать кубическое уравнение  $R_3(s_0) = R_3(s)$  для нахождения  $s = s_1, s_2$ . Однако на практике мы сводим задачу к квадратному уравнению следующим образом. В левой части уравнения спектральной кривой (2.4)

мы заменяем  $z$  на её параметризацию переменной  $s$  (первая строка в (3.4)). Полученное выражение (от  $\lambda$  и  $s$ ) мы делим на  $(\lambda - L(z, s))$ , при этом в выражение  $L(z, s)$  (вторая строка в (3.4)) тоже подставлена параметризация. Символьные вычисления позволяют реализовать эту процедуру деления. В результате получается квадратное уравнение на другие ветви:  $\lambda_{1,2}$ .

**Доказательство Теоремы 3.1.** Положим

$$\mathcal{L} := \lambda + \frac{1}{\lambda}, \quad \mathcal{Z} := z + \frac{1}{z}. \quad (3.7)$$

Если к этим уравнениям добавить (2.4) и исключить переменные  $z$  и  $\lambda$ , то получим уравнение для алгебраической функции  $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^3 + (\mathcal{Z}^5 + 6\mathcal{Z}^2 - \mathcal{Z}^4 - 5\mathcal{Z}^3 - 8 + 7\mathcal{Z})\mathcal{L}^2 + \\ & + (16 - 20\mathcal{Z}^3 + 2\mathcal{Z}^6 + 16\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^7 + 3\mathcal{Z}^2 + 8\mathcal{Z}^5 - 9\mathcal{Z}^4)\mathcal{L} - \\ & - 16\mathcal{Z}^5 + 64 + 34\mathcal{Z}^4 - 48\mathcal{Z} + 2\mathcal{Z}^7 - 4\mathcal{Z}^6 + 45\mathcal{Z}^3 - 88\mathcal{Z}^2 = 0. \end{aligned}$$

Алгебраическая кривая  $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$  имеет род 0:  $\text{gen } \mathcal{L}(\mathcal{Z}) = 0$ , следовательно, для неё существует униформизация рациональными функциями, которая может быть выбрана в следующем виде

$$\begin{cases} \mathcal{L} = -\frac{-1 + 3s + 4s^2 - 5s^3 - 9s^4 + s^5 + 4s^6 + s^7}{s^2}; \\ \mathcal{Z} = \frac{s^3 + 2s^2 - 1 + s}{s(s+1)}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Из этой униформизации с помощью (3.7) мы можем найти параметризацию спектральной кривой  $\lambda(z)$ . Отметим сначала полезную формулу

$$\left(\mathcal{Z} - \frac{1}{\mathcal{Z}}\right) \left(\mathcal{L} - \frac{1}{\mathcal{L}}\right) = -\frac{(s-1)(s+1)(s^2+2s-1)(s^3+4s^2+3s-1)(s^3-s-1)}{s^3},$$

с помощью которой мы можем выбрать правильную ветвь квадратного корня для параметризации координат кривой с помощью униформирующей переменной  $s$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2s^2} \left( \sqrt{s^3 + 4s^2 + 3s - 1} (1 - s^2) (s^2 + 2s - 1) \sqrt{s^3 - s - 1} + \right. \\ & \quad \left. + 1 - 3s - 4s^2 + 5s^3 + 9s^4 - s^5 - 4s^6 - s^7 \right); \\ z &= \frac{\left( \sqrt{s^3 - s - 1} + \sqrt{s(s+2)^2 - s - 1} \right)^2}{4s(s+1)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отметим, что другой выбор ветвей приводит к

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-1}{2s^2} \left( \sqrt{s^3 + 4s^2 + 3s - 1} (1 - s^2) (s^2 + 2s - 1) \sqrt{s^3 - s - 1} + 1 - 3s - 4s^2 + 5s^3 + 9s^4 - s^5 - 4s^6 - s^7 \right);$$

$$\frac{1}{z} = \frac{(\sqrt{s^3 - s - 1} - \sqrt{s(s+2)^2 - s - 1})^2}{4s(s+1)}.$$

Отсюда, см. (3.9), мы можем вывести второе соотношение в (3.4):

$$\lambda = L(z, s) = (s+1)z^2 - s(s+2)(s^2 + s - 1)z + s^2(s+2),$$

считая, что  $s$  есть униформизационная переменная из (3.8).

Теперь получим параметризацию переменной  $z$  в виде первого соотношения в (3.4). Мы знаем, см. (3.7), (3.8) и (3.5), что

$$z + \frac{1}{z} = R_3(s), \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{Z} = R_3(s) := \frac{s^3 + 2s^2 + s - 1}{s(s+1)}. \quad (3.10)$$

Обратное преобразование Жуковского можно записать в виде

$$z = \frac{R_3}{2} + \frac{R_3 - 2}{2} \sqrt{\frac{R_3 + 2}{R_3 - 2}}, \quad \sqrt{\frac{R_3 + 2}{R_3 - 2}} =: d. \quad (3.11)$$

Тогда

$$zd - d = \frac{R_3}{2}d + \frac{R_3}{2} + 1 - d = \frac{R_3}{2} + \frac{R_3 - 2}{2}d + 1 = z + 1,$$

т.е.

$$d = \frac{z+1}{z-1}, \quad \text{и} \quad z = \frac{d+1}{d-1}. \quad (3.12)$$

Отметим, что доказанная в теореме параметризация (3.4) более компактна и удобна по сравнению с (3.9) (в частности, для вычисления  $\lambda$  используется уже вычисленная переменная  $z$ ).

Наконец, прокомментируем (3.6). Обратимся опять к (3.10). Рациональная функция  $R_3$  имеет порядок 3, следовательно,

$$\forall \mathcal{Z} \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{s_k\}_{k=0}^2 : \mathcal{Z}(s_0) = \mathcal{Z}(s_1) = \mathcal{Z}(s_2).$$

Теорема доказана. ■

**3.2. Разложение диагонализующего преобразования.** В этом пункте мы реализуем процедуру нахождения диагонализующих преобразований  $V_n(q) : V_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_n V_n \longrightarrow D_n$  – диагональная матрица (1.9), для однорядной задачи (2.1) в зоне разделённых собственных значений матрицы коэффициентов  $\mathcal{A}_n$ , т.е. вне подходящих окрестностей нулей дискриминанта алгебраической функции  $\lambda(z)$ , см. (2.4).

Согласно общему подходу, см. пункт 1.3, для нахождения разложения по малому параметру матрицы  $\mathbf{V}(N, t, H) := V_n(q)$

$$\mathbf{V}(N, t, H) = \mathbf{V}_0(t, H) + \frac{1}{N} \mathbf{V}_1(t, H) + \frac{1}{N^2} \mathbf{V}_2(t, H) + \dots \quad (3.13)$$

вводим дополнительный параметр  $\tau$  и степенной ряд  $\widehat{V}(N, t, \tau, H)$  по  $\tau$

$$\widehat{V}(N, t, \tau, H) := \mathbf{V}_0(t, H) + \tau \widetilde{V}_1(N, t, H) + \tau^2 \widetilde{V}_2(N, t, H) + \dots, \quad (3.14)$$

решающий (в формальном смысле) задачу превращения матрицы  $\mathbf{A}$ , см. (3.1), в диагональную:

$$\widehat{V}(\cdot, t + \tau, \tau, \cdot)^{-1} \mathbf{A}(N, t, H) \widehat{V}(\cdot, t, \tau, \cdot) \equiv \text{diag}[\widehat{V}(\cdot, t + \tau, \cdot, \cdot)^{-1} \mathbf{A} \widehat{V}],$$

при этом коэффициенты формального ряда  $\widehat{V}(\cdot, t + \tau, \cdot, \cdot)$  вычисляются переразложением

$$\widetilde{V}_j(N, t + \tau, H) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i \frac{d^i}{dt^i} \widetilde{V}_j(N, t, H). \quad (3.15)$$

Степенной ряд (3.14) ищется с помощью последовательных приближений, устанавливающих его коэффициенты. В качестве начального приближения  $\widehat{V}^{(0)}$  берётся матрица (3.3):

$$\mathbf{V}_0(t, H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1(z) & \lambda_2(z) & \lambda_3(z) \\ \lambda_1^2(z) & \lambda_2^2(z) & \lambda_3^2(z) \end{pmatrix} =: \widehat{V}^{(0)}.$$

Из (3.2) следует, что  $[\mathbf{V}_0(t, H)]^{-1} \mathbf{A}_0(z) \mathbf{V}_0(t, H) = \text{diag}(\lambda_1(z), \lambda_2(z), \lambda_3(z))$ . Последующие приближения<sup>7</sup> для (3.14) ищутся по формулам (1.16), (1.17):

$$\widehat{V}^{(k+1)}(N, t, \tau, H) = \widehat{V}^{(k)}(I + X^{(k)}), \quad \text{где}$$

$$X_{ii}^{(k)} := 0, \quad X_{ij}^{(k)} := \frac{\left( \left[ \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t + \tau, \cdot, \cdot) \right]^{-1} \mathbf{A}(\cdot, t, \cdot) \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t, \cdot, \cdot) \right)}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j. \quad (3.16)$$

<sup>7</sup>Степенные ряды по  $\tau$  с бесконечным числом коэффициентов, каждый из которых есть бесконечный (вообще говоря, формальный) ряд по  $1/N$ .

Напомним, ряды  $\widehat{V}_n^{(l)}$  и  $\widehat{V}_n^{(l+1)}$  совпадают до  $\bar{o}(\tau^l)$ . Это обстоятельство позволяет существенно упростить (3.16) для вычисления  $X_{ij}^{(k)}$  с требуемой точностью. Справедливо

**Предложение 3.1.** Пусть  $S^{(k)}(N, t, \tau, H)$ ,  $L^{(k)}(N, t, \tau, H)$  и  $M^{(k)}(N, t, \tau, H)$  определены следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{(k)} &:= \left[ \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t + \tau, \tau, \cdot) \right]^{-1} \mathbf{A}(\cdot, t, \cdot) \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t, \tau, \cdot) \\ &=: L^{(k)} + O(\tau^k) =: L^{(k)} + \tau^k M^{(k)} + \bar{o}(\tau^k). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда

$$M^{(k)} = \mathbf{V}_0^{-1} \text{coeff} \left( \mathbf{A}(\cdot, t, \cdot) \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t, \tau, \cdot) - \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t + \tau, \tau, \cdot) L^{(k)}, \tau^k \right),$$

и, обозначая

$$\widehat{X}_{ij}^{(k)} := \frac{M_{ij}^{(k)}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j, \quad \widehat{X}_{ii}^{(k)} := - \sum_{j \neq i} \widehat{X}_{ij}^{(k)},$$

мы имеем

$$L^{(k+1)} = L^{(k)} + \text{diag} (M^{(k)}); \quad (3.18)$$

$$\widehat{V}^{(k+1)} = \widehat{V}^{(k)} + \tau^k \mathbf{V}_0^{-1} \widehat{X}^{(k)}. \quad (3.19)$$

**Доказательство.** Из (3.17) следует

$$\mathbf{A}(\cdot, t, \cdot) \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t, \cdot, \cdot) - \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t + \tau, \cdot, \cdot) L^{(k)} =$$

$$\tau^k \widehat{V}^{(k)}(\cdot, t + \tau, \cdot, \cdot) M^{(k)} + \bar{o}(\tau^k) = \tau^k \mathbf{V}_0 M^{(k)} + \bar{o}(\tau^k),$$

т.е. для вычисления на каждом шаге по  $k$  матрицы  $M^{(k)}$  не надо каждый раз обращать матрицу  $\widehat{V}^{(k)}(\cdot, t + \tau, \cdot, \cdot)$ , достаточно один раз обратить матрицу  $\mathbf{V}_0$ . Отсюда сразу получаем выражения для  $\widehat{X}_{ij}^{(k)}$  при  $i \neq j$  и для  $L^{(k+1)}$  в (3.18). Для выбора  $\widehat{X}_{ii}^{(k)}$  имеется свобода (см. сноску на стр. 6). В нашем случае он обусловлен условием нормировки матриц  $\widehat{V}^{(k)}$ , которая фиксируется, как и у матрицы  $\mathbf{V}_0$ , см.(3.3), равенством элементов первой строки единице:

$$\widehat{V}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1(z) + O(\tau) & \lambda_2(z) + O(\tau) & \lambda_3(z) + O(\tau) \\ \lambda_1^2(z) + O(\tau) & \lambda_2^2(z) + O(\tau) & \lambda_3^2(z) + O(\tau) \end{pmatrix},$$

что влечёт равенство нулю сумм элементов каждого столбца  $\widehat{X}^{(k)}$ , см.(1.16).

Для доказательства (3.19) ещё раз отметим, что  $\widehat{V}^{(k)}(N, t, \tau, H)$  имеет «устоявшиеся» члены разложения до  $\tau^{(k-1)}$  порядка (включительно), но для вычисления  $\widehat{V}^{(k+1)}(N, t, \tau, H)$ , с соответствующей точностью (до  $\tau^k$  порядка) нам нужно получить  $\widehat{V}^{(k)}(N, t + \tau, \tau, H)$  с точностью до  $\tau^k$  порядка. Из (1.16), (3.16), с учётом того, что элементы  $S^{(k)}$  порядка  $O(\tau^k)$ , имеем

$$\widehat{V}_n^{(k+1)} := \widehat{V}_n^{(k)}(I + X_n^{(k)}) = \widehat{V}_n^{(k)}(I + O(\tau^k)), \quad \widehat{V}_n^{(k+1)} = \widehat{V}_n^{(k)}(I + \tau^k \widehat{X}_n^{(k)}) + \bar{o}(\tau^k).$$

Откуда следует (3.19). Предложение доказано. ■

Наконец, в завершение процедуры нахождения приближённого значения «диагонализатора»  $V_n(q) =: \mathbf{V}(N, t, H)$  пользуемся частичными суммами:

$$V_n \approx \sum_{j=0}^{k+1} \widetilde{V}_j(N, t, H), \quad V_{n+1} = \mathbf{V}(N, t + \frac{1}{N}, H) \approx \sum_{j=0}^{k+1} \widetilde{V}_j(N, t + \frac{1}{N}, H). \quad (3.20)$$

Как видим, см. (3.3), (3.15), (3.16), для реализации этой процедуры нужны выражения производных (по параметру  $t$ ) ветвей  $\{\lambda_j(z)\}$  спектральной кривой (2.4). Получить эти выражения можно, используя параметризацию кривой  $\{\lambda_j(z)\}$ , см. Теорему 3.1. Действительно, связь  $z$  и  $t$

$$q^n = z = e^{tH} \quad (3.21)$$

влечёт зависимость  $\{\lambda_j(z)\}$  от  $t$ , что, в свою очередь, обуславливает зависимость  $s(t)$  переменной, параметризующей в (3.4) спектральную кривую  $\lambda(z)$ . Таким образом, искомые выражения для производных  $\{\lambda'_j(z(t))\}$  получаются с помощью  $s'(t)$ . Справедливо

**Предложение 3.2.** Пусть  $d$  определено в (3.11), а  $R_3(s)$  в (3.10). Тогда

$$s'(t) = H d \frac{(R_3(s) - 2)}{R'_3(s)}. \quad (3.22)$$

**Доказательство.** Продифференцируем (3.12) с помощью (3.21) и преобразуем с учётом (3.11) и (3.12)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Z} = H \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{4 H d}{d^2 - 1} = H d (R_3(s) - 2).$$

Отсюда следует (3.22). Полезно знать производную  $d$ . Продифференцировав (3.12), с учётом (3.21) и (3.11) имеем

$$\frac{d}{dt} d(s(t)) = -\frac{H}{2}(d^2 - 1) = \frac{-2 H}{R_3(s) - 2}. \quad (3.23)$$

■

**3.3. Разложение базиса.** Вспоминая общий подход, см. (1.11), (1.9), в качестве базисных векторов используем столбцы матрицы  $B_n$ :

$$B_n := V_n \prod_{m=m_0}^{n-1} D_m =: V_n \Pi_n, \quad D_m := \text{diag} [V_{m+1}^{-1} \mathcal{A}_m V_m] =: \text{diag} [d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}].$$

В нашей ситуации, для приближения «диагонализаторов»  $V_n$  берём отрезки степенного ряда по  $(1/N)$  из (3.20). Остановимся на получении коэффициентов разложения по  $(1/N)$  для  $\Pi_n$ . Здесь надо начать с ряда для диагональных матриц  $D_n$ , для которого приближение даёт отрезок ряда по  $(1/N)$  из (3.18):

$$D_n \approx L^{(k)}(N, t, \tau, H)|_{\tau=1/N} =: \text{diag} \left\{ \lambda_j(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l_i(j, H, z)}{N^i} \right\}_{j=1}^3 \quad (3.24)$$

при фиксированном<sup>8</sup>  $k$ . Перейдём к разложению для  $\Pi_n =: \text{diag}\{\pi_j\}_{j=1}^3$ :

$$\pi_j(z, H, N) := \prod_{m=m_0}^{n-1} d^{(j)}(m) = \exp \left\{ \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\varphi_i(j, H, z)}{N^i} \right\}. \quad (3.25)$$

Для главного члена разложения из (3.24) получим<sup>9</sup>:

$$\pi_j = \exp \left\{ N \int^t \ln \lambda_j d\tilde{t} \right\} + O(1) = \exp \left\{ \frac{N}{H} \int^z \ln \lambda_j(\tilde{z}) \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}} \right\} + O(1). \quad (3.26)$$

Продолжим для остальных коэффициентов в (3.25). Имеем

$$\ln \pi_j(qz) = \ln \pi_j(z) + \frac{H}{N} \cdot z \frac{\partial}{\partial z} (\ln \pi_j(z)) + \frac{1}{2} \left( \frac{H}{N} \right)^2 \left( \left( z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (\ln \pi_j(z)) \right) + \dots =$$

Подставляя сюда (3.25) и переразлагая результат по степеням  $N^{-1}$ , получим

$$= \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\varphi_i}{N^i} + \frac{H}{N} \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{z\varphi'_i}{N^i} + \dots = N\varphi_{-1} + (\varphi_0 + Hz\varphi'_{-1}) + \frac{1}{N}(\varphi_1 + Hz\varphi'_0 + H^2z(z\varphi'_{-1})') + \dots$$

Вычитанием из полученного выражения разложения  $\ln \pi_j$ , см. (3.25), убираем коэффициенты  $\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \dots$ , оставляя только их производные. Наконец, сравнивая остаток с получаемым из (3.24) разложением  $\ln d^{(j)} = \ln \lambda_j + \dots$ , мы последовательно получаем выражения для этих производных. Таким образом,  $\varphi_{-1} = \frac{1}{H} \int^z \ln \lambda(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$ , и все  $\varphi_k$  суть первообразные.

<sup>8</sup>Обеспечивающем требуемую точность.

<sup>9</sup>С точностью до мультипликативной константы.

## 4. Теорема об асимптотическом базисе

### 4.1. Формулировка результатов.

**Теорема 4.1.** 1)  $\exists$  формальные ряды

$$V(z) = V_0(z) + \frac{1}{N}V_1(z, H) + \frac{1}{N^2}V_2(z, H) + \dots \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \pi_j(z) &= \exp \left( N\varphi_{-1}(j, z, H) + \varphi_0(z, H) + \frac{1}{N}\varphi_1(j, z, H) + \dots \right) = \\ &= \exp \left( N\varphi_{-1}(j, z, H) + \varphi_0(j, z, H) \right) \left( I + \frac{1}{N}\tilde{\varphi}_1(j, z, H) + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Элементы матриц  $V_i$  – алгебраические функции по  $z$  и многочлены от  $H$ ,

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \quad \det V_0 \neq 0.$$

Элементы диагональных матриц  $\{\varphi_i, \tilde{\varphi}_i\}_{i \geq 0}$  – абелевы интегралы по  $z$  и многочлены от  $H$ ,

$$\varphi_{-1} = \text{diag} \left( \int^z \ln(\lambda_j(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right).$$

**2)** Справедливы следующие оценки членов рядов (4.1), (4.2) вблизи точек  $z_{1,2}, \pm 1$  совпадения ветвей спектральной кривой, см. (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned} V_i &= \underline{O}(z - z_{1,2})^{c - \frac{3}{2}i}, \quad \varphi_i, \tilde{\varphi}_i - \text{аналогично}, \\ V_i &= \underline{O}(z - (\pm 1))^{\tilde{c} - 2i}, \quad \varphi_i, \tilde{\varphi}_i - \text{аналогично}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

для некоторых констант  $c, \tilde{c}$ .

Вне сужающихся окрестностей точек  $z_{1,2}, \pm 1$  :

$$|z - z_{1,2}| \gtrsim N^{\varepsilon - 1/2}, \quad |z - (\pm 1)| \gtrsim N^{\varepsilon - 1/3}, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.4)$$

формальные ряды (4.1), (4.2) являются асимптотическими разложениями.

## 4.2. Доказательство.

1) Существование и алгебраичность  $V_k$  следуют из правил построения: исходные коэффициенты – алгебраические функции, при переразложении алгебраичность сохраняется, установление рядов показывается полностью так же, как в работе [12]. Особенности возникают только от деления матричных элементов на  $\lambda_i - \lambda_j$ . Поэтому осталось правильно оценить порядок этих особенностей индукцией по  $k$ .

Выбрав вещественное  $s$  для  $z$  на окружности (однолиственная ветвь  $z(s)$ ), обозначим  $\widehat{s} := \lim_{z \rightarrow z_j} z^{-1}(z(s))$  и отметим, что при  $z \rightarrow z_j$ ,  $\lambda_2 - \lambda_3 \rightarrow 0$ . Выражая получаемые в результате выполнения процедуры матрицы  $V_1, V_2, \dots$  через униформизирующий параметр  $s$ , будем получать в знаменателе увеличивающиеся степени радикала  $r := \sqrt{s^4 - 2s^3 - 5s^2 - 2s + 1} \sim \sqrt{s - \widehat{s}}$ .

Для доказательства первой оценки в (4.3) предположение индукции состоит в том, что для  $k \geq 1$  (и для всех меньших номеров) элементы  $V_k$  содержат  $r^{3k-1}$  в знаменателе. База индукции проверяется непосредственным вычислением  $V_1$ , (см. Дополнение).

При вычислении  $V_{k+1}$  степень у  $r$  увеличивается на 2 при дифференцировании (переразложение), и ещё 1 добавляет деление на  $\lambda_i - \lambda_j$ . Цикл вычислений кэффицентов  $V$  имеет вид:

$$J := \sum_{j=0}^k \text{coeff}(\mathcal{A}_n, N, j+1) V_{k-j} - \sum_{j=0}^k \left[ \left( H z \frac{d}{dz} \right)^{j+1} V_{k-j} \right] \frac{\Lambda}{(j+1)!} -$$

$$- \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j=l}^k \left[ \left( H z \frac{d}{dz} \right)^{j-l} V_{k-j} \right] \frac{D_{l+1}}{(j-l)!};$$

$$D_{k+1} = [J]; \quad X_{ij} = J_{ij}/(\lambda_i - \lambda_j) \quad (i \neq j); \quad X_{jj} = - \sum_{i:i \neq j} X_{ij}; \quad V_{k+1} = V_0 X.$$

Коэффициенты разложения  $\mathcal{A}_n$  не имеют особенностей при  $z = z_{1,2}$ . В силу индуктивного предположения в знаменателе  $V_j$  ( $j > 0$ ) степень радикала  $r$  равна  $3j-1$ , а в знаменателе  $D_{l+1}$  равна  $3l+1$ . Убеждаемся, что переход индукции верен.

Доказательство второй оценки в (4.3) проводится аналогично.

2) Относительно оценок (4.4) отметим, что в работе [12] предложен метод доказательства оценок внедиагональных элементов величин (1.17), позволяющий проверить выполнимость (1.10) в некоторой области, в которой формальные ряды для  $V_n$  и  $\Pi_n$  можно считать асимптотическими.

Напомним, что в [12] вводилась величина

$$R(x, n) = \text{dist}(n, \{nn \mid \text{Dis}(x, nn) = 0\}), \quad \text{и пусть } R_0 = \frac{1}{3}R.$$

Теперь, пусть  $\Delta(x, n) = \inf_{j \neq k} \{|\lambda_j(x, \tilde{n}) - \lambda_k(x, \tilde{n})|, |\tilde{n} - n| < R_0(x, n)\}$ , и

$$\widetilde{M}(x, n) = \sup\{\|V_0^{-1}(\tilde{n})\mathcal{A}_{\tilde{n}}V_0(\tilde{n})\| \mid |\tilde{n} - n| < 2R_0(x, n), |\tilde{n} - n| < 2R_0(x, n)\}.$$

В обозначениях работы [12], фиксируя  $m$  и приняв  $d := \frac{R_0}{m+1}$ , получим  $k \sim \frac{r}{R}$ . Из определения следует  $\frac{\Delta}{M} \leq 2$ . Также  $M \sim \frac{\widetilde{M}}{\Delta}$ ,  $y \sim \frac{\widetilde{M}r}{R\Delta}$ , поэтому  $k \lesssim y$ . Выражение для  $q$  (см. Теорему 2\* [12], в формуле всегда второй случай)

$$q \sim M(k+y) \sim My \sim \frac{\widetilde{M}^2 r}{\Delta^2 R}.$$

Теперь выберем  $r := \theta R \frac{\Delta^2}{M^2}$  для некоторой малой константы  $\theta$ . Тогда условие  $r < d$  верно,  $q \sim \theta$ ,  $y \lesssim \theta$ , так что для подходящей  $\theta$  Теорема 2\* может быть использована. Для внедиагональной части  $\{S^{(l)}(n, \tau)\} = O(\tau^{l+1})$ , поэтому

$$\|\{S^{(l)}(n, 1)\}\| \leq r^{-l-1} \sup_{|\tau| < r} \|\{S^{(l)}(n, \tau)\}\|$$

для тех  $r > 1$ , для которых применима Теорема 2\* работы [12]. Значит, если

$$\frac{\widetilde{M}^2}{\Delta^2 R} = O(N^{-\varepsilon}), \tag{4.5}$$

то найдётся  $l$ , для которого (1.10) будет выполнено.

В нашем случае в окрестности точек  $z_{1,2}$  из первой оценки в (4.3) имеем  $\widetilde{M} \sim 1$ ,  $\Delta \sim \sqrt{|z - z_j|}$ ,  $R \sim N|z - z_j|$ , откуда (4.5) дает первую оценку в (4.4).

В окрестности точек  $\pm 1$  из (4.3)  $\widetilde{M} \sim 1$ ,  $\Delta \sim |z - (\pm 1)|$ ,  $R \sim N|z - (\pm 1)|$ , откуда (4.5) дает вторую оценку в (4.4). ■

### 4.3. Заключительные замечания (о точности оценок Теоремы 4.1).

1) Оценки в окрестности точек  $z_{1,2}$ . В этом случае оценка из (4.3) представляется точной. В то же время, вытекающая из нее оценка в (4.4) существенно грубее ожидаемой. Дело в том, что метод доказательства из [12] давал бы более точную, чем в (4.4), оценку:  $|z - z_j| \gtrsim N^{\varepsilon-2/3}$ . Однако в том доказательстве имелись ошибки. Поэтому здесь мы привели более простое доказательство, свободное от этих ошибок, но приводящее к более грубой оценке (4.5), приводящей к (4.4), которой, видимо, будет достаточно для

«сшивания» локальных асимптотик в окрестности точек  $z_{1,2}$  с асимптотиками (4.3), доказанными здесь в области (4.4). Получение локальных асимптотик и исправление доказательства из [12] более точной, чем (4.5), оценки мы приведем в последующих публикациях.

2) Оценки в окрестности точек  $z = \pm 1$ . В этом случае, как показывают вычисления, оценка из (4.3) неадекватно завышена. Хотя, как уже отмечалось в пункте 2.2 (см. (2.7)), в точках  $z = \pm 1$  нет ветвлений, но собственные значения совпадают. Следовательно, элементы матриц  $V_j$  в окрестностях точек  $z = \pm 1$  мероморфны. Ожидался рост порядка полюса с ростом  $j$ , однако вычисления нескольких первых  $V_j$  показывают, что особенности устранимы, т.е. на самом деле  $V_j$  голоморфны. Поэтому есть гипотеза, что ряды (4.1), (4.2) можно использовать во всей окрестности вплоть до самих точек  $z = \pm 1$ .

## Список литературы

- [1] Stavros Garoufalidis and Thang T. Q. Le, *The colored Jones function is  $q$ -holonomic*, Geom. Topol. 9 (2005), 1253–1293.
- [2] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия*, М.: МЦНМО, 1997. – 352 с.
- [3] Edward Witten. *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989), no.3, 351-399.
- [4] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. 39 (1997), 265-269, arXiv: q-alg/9601025v2.
- [5] Grisha Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, (2003), arXiv: math/0303109v1.
- [6] William P. Thurston, *Three dimensional manifolds, kleinian groups, and hyperbolic geometry*, Bull. AMS 6 (1982), no.3, 357-381.
- [7] Tudor Dimofte and Sergei Gukov, *Quantum Field Theory and the Volume Conjecture*, Contemporary Mathematics, Volume 541, 2011, p. 41-67.
- [8] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Modern Phys. Lett. A9 (1994), no. 5, 427-434, arXiv: hep-th/9310070v1.
- [9] A. I. Aptekarev, *Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality*, Sb. Math., 76:1 (1993), 35–50.

- [10] D. N. Tulyakov, *Local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighbourhood of an end-point of the support of the orthogonality measure*, Sb. Math., 192:2 (2001), 299–321.
- [11] D. N. Tulyakov, *Difference equations having bases with powerlike growth which are perturbed by a spectral parameter*, Sb. Math., 200:5 (2009), 753–781.
- [12] D. N. Tulyakov, *Plancherel–Rotach type asymptotics for solutions of linear recurrence relations with rational coefficients*, Sb. Math., 201:9 (2010), 1355–1402.
- [13] A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, *Asymptotics of Meixner polynomials and Christoffel–Darboux kernels*, Trans. Moscow Math. Soc., 73, 2012, 67–106.
- [14] A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, *The leading term of the Plancherel–Rotach asymptotic formula for solutions of recurrence relations*, Sb. Math., 205:12 (2014), 1696–1719.

## Дополнение

Здесь мы приведём код, генерирующий члены рядов (4.1)–(4.2), и краткие комментарии к нему:

Задание коэффициентов рекуррентных соотношений

```
> Rec:=factor(subs(q^n=z, expand([q^(7*n+9)*(q^(2*n+4)-1)*(q^(2*n+5)-1),
q^(2*n+5)*(q^(2*n+5)-1)*(q^(2*n+2)-1)*(1-q^(n+1)-(q-1)*(q^2-1)*q^(2*n+1)+
(q^3+1)*q^(3*n+2)+2*q^(4*n+5)-q^(5*n+6)),
q*(q^(2*n+4)-1)*(q^(2*n+1)-1)*(q^(5*n+9)-q^(4*n+7)-(q-1)*(q^2-1)*q^(3*n+4)+
(q^3+1)*q^(2*n+2)+2*q^(n+2)-1), (q^(2*n+1)-1)*(q^(2*n+2)-1)]))):
```

Ур-е спектральной кривой

```
> Char:=map2(map, sort, collect(evalm(subs(q=1, Rec)&*L~[$0..3])/%, L, factor)):
A:=linalg[delrows](linalg[stackmatrix](linalg[diag](1$3),
subsop(4=NULL, -Rec/~Rec[4])), 1..1):
```

s - параметризация кривой, обозначения радикалов R и r, производные переменных по s

```
> ('+'@op@map)('*'@op@zip(curry, [Diff, '|'|], [C, d]), [z, s, R, r]):
subs(Diff=diff, unapply(%, C)):
subs~(_Z=~[R, z, r], [_Z^2+(s+1-s^3)*(s^3+4*s^2+3*s-1), numer((s^3+2*s^2+s
-1+R)/2/s/(1+s)-_Z), s^4-2*s^3-5*s^2-2*s+1-_Z^2]): map(%, {%[]}) union {dz-H*z}:
[solve(%, indets(%) intersect '|'|~(d, indets(%)))][]:
unapply('rhs'('isolate'('select'(has, 'Groebner[Basis]'([numer'(g-y), R
-1+(s+1-2*z)*s*(s+1), R^2+(s+1-s^3)*(3*s+s^3+4*s^2-1), s^4-2*s^3-5*s^2-2*s+1-r^2],
plex(g, z, R, r), g), y): lhs~(%)=~collect((%@rhs)~(%), [R, r], factor):
subs(%, ('+'@op@map)('*'@op@zip(curry, [Diff, '|'|], [C, d]), [z, R, r, s])):
dd:=unapply('collect'('simplify'(subs(Diff=diff, %), {R^2+(s+1-s^3)*(s^3+4*s^2+3*s-1),
s^4-2*s^3-5*s^2-2*s+1-r^2}, [R, r]), [R, r], factor), C):
```

$V_0$  - приближение диагонализатора

```
> V0:=map2(subs~,L=~[(1-3*s-4*s^2+5*s^3+9*s^4-s^5-4*s^6-s^7+(1-s^2)*
(s^2+2*s-1)*R)/2/(s^2),(s^7+5*s^6+10*s^5+7*s^4-3*s^3-6*s^2-2*s+1+
(s^4+3*s^3+3*s^2+s-1)*R)*(s^5+s^4-4*s^3-6*s^2-2*s+1+R*r)/4/(s^5)/((s+1)^5),
(s^7+5*s^6+10*s^5+7*s^4-3*s^3-6*s^2-2*s+1+(s^4+3*s^3+3*s^2+s-1)*R)*
(s^5+s^4-4*s^3-6*s^2-2*s+1-R*r)/4/(s^5)/((s+1)^5)],L~[0,1,2]):
```

вычисление  $(V_0)^{-1}$

```
> R^2+(s+1-s^3)*(s^3+4*s^2+3*s-1),s^4-2*s^3-5*s^2-2*s+1-r^2: linalg[det](V0):
#P*R^2-1,1-p*r^2, collect(map(simplify,[%,g],[g,R,r]),[R,r],factor):
V1:=map(collect,map(simplify,linalg[adj](V0)*%[2],[%%],[r,R]),[R,r],factor):
```

процедура приведения выражений к стандартному виду (выделение радикалов  $R$  и  $r$ )

```
> LL:=y->collect(simplify(g,{R^2+(s+1-s^3)*(3*s+s^3+4*s^2-1),
s^4-2*s^3-5*s^2-2*s+1-r^2, numer(g-y)},[g,R,r]),[R,r],factor):
id:=map(LL,evalm(V0&*V1)): [V0[2]$nops(V0)]:
map2(map,collect,factor~(evalm(transpose(%)-%+id)),[R,r],factor):L:=map(LL,1/~%):
```

Начальные данные цикла

```
> {R^2+(s+1-s^3)*(3*s+s^3+4*s^2-1),R-1+(s+1-2*z)*s*(s+1),s^4-2*s^3-5*s^
2-2*s+1-r^2},[z,R,r]: V:=evalm(V0): VV:=V*~0:
map(simplify,subs(q=1,evalm(V1&*A&*V)),%%):
J:=map2(map,collect,factor~(%),[R,r],factor):k:=1;
k:=1
```

Цикл по  $k$ , заполнение разложения  $V$  до  $k - 1$  степени;

```
> VV:=map(collect,subs(h=ss,int~(dd~(V+~VV),ss=0..h)),[ss,N],LL,distributed):
k:=k+1;
AA:=map(collect,convert~(series~(subs(q=exp(H*N),isolate(R-1+(s+1-2*z)
*s*(s+1),z),eval(A)),N,k),polynom),N,LL):
collect~(rem~(evalm(V1&*(&*V-subs(ss=N,V+~VV)&*J)),N^k,N),N,LL):
print(degree~(%),N,ldegree~(%),N); J:=J+~id*~%: %*~L:
evalm(L~0&*%)*~id-%:
V:=map(collect,rem~(evalm(V+V&*%),N^k,N),N,LL):
print(collect~(rem~(evalm(AA&*V-subs(ss=N,V+~VV)&*J),N^k,N),N,length@LL));
k:=2
```

Здесь сформирована матрица  $V_1$ . Повторяя последнюю команду  $k$  раз, получим заполнение разложения  $V$  до  $k - 1$  степени. В данный момент можем распечатать элементы матрицы  $V_1$ . Например:

```
> subs(t=s,coeff~(V,N,1)[2,1]);
-H(2s^12+12s^11+26s^10+31s^9+39s^8+31s^7-33s^6-69s^5-33s^4-4s^3+s^2+3s
+1)R/(2s^2(1+2s^3+s^4+2s+s^2)^2)-H(-1+59s^11+85s^5+69s^12+16s^14
+48s^13+32s^10-263s^8-81s^9+24s^3+6s^2+64s^4+2s^15-257s^7-46s^6
-2s)/(2s^2(1+2s^3+s^4+2s+s^2)^2)
```

Отметим, что здесь мы можем установить базу индукций Теоремы 4.1 и проверить гипотезы пункта 4.3.

Теперь перейдем к получению членов разложения (4.2)

Общая формула получения производной  $\varphi_1$  и параметризация правой части:

- > `H*z*'diff'(phi[j,1],z)=( 'coeff'(J[j,j],N,1)-'dd'( 'coeff'(J[j,j],N,0))/2)`
- > `/'coeff'(J[j,j],N,0);`
- > `seq(LL(rhs(%)),j=1..3);`

$$\begin{aligned}
 H z \left( \frac{\partial}{\partial z} \phi_{j,1} \right) &= \frac{\text{coeff}(J_{j,j}, N, 1) - \frac{1}{2} \text{dd}(\text{coeff}(J_{j,j}, N, 0))}{\text{coeff}(J_{j,j}, N, 0)} \\
 &- \frac{H(-1 - 2s - s^2 + 4s^3 + 5s^4 + 2s^5) R}{2 \%1^2} + \frac{H}{2}, \\
 &\left( - \frac{H(s^6 - 3s^5 - 12s^4 - 13s^3 + 5s + 1) r}{4 \%2 \%1^2} \right. \\
 &- \left. \frac{H(s^2 + 3s + 3)(2s^7 - s^6 - 3s^5 + 7s^3 + 4s^2 - s - 1)}{4 \%2 \%1^2} \right) R + \frac{H}{2}, \\
 &\left( \frac{H(s^6 - 3s^5 - 12s^4 - 13s^3 + 5s + 1) r}{4 \%2 \%1^2} \right. \\
 &- \left. \frac{H(s^2 + 3s + 3)(2s^7 - s^6 - 3s^5 + 7s^3 + 4s^2 - s - 1)}{4 \%2 \%1^2} \right) R + \frac{H}{2} \\
 \%1 &:= 2s + s^2 + 1 + 2s^3 + s^4 \\
 \%2 &:= s^4 - 2s^3 - 5s^2 - 2s + 1
 \end{aligned}$$

Приведение правой части к каноническому виду.

Иллюстрация мероморфности производной  $\varphi_1$  на спектральной кривой:

- > `LL((coeff(J[1,1],N,1)-dd(coeff(J[1,1],N,0))/2)/coeff(J[1,1],N,0)/dd(z));`
- $$\frac{(3s^8 + 13s^7 + 22s^6 + 18s^5 + 6s^4 - 2s^3 + 3s^2 + 5s + 2) R}{4s(1+s)(2s+s^2+1+2s^3+s^4)^2} +$$
- $$\frac{-2 + 19s^{10} - 3s + 43s^9 - 13s^5 + 3s^{11} - 42s^6 + 33s^3 + 10s^2 + 27s^4 - 13s^7 + 36s^8}{4s(1+s)(2s+s^2+1+2s^3+s^4)^2}$$
- > `LL((coeff(J[2,2],N,1)-dd(coeff(J[2,2],N,0))/2)/coeff(J[2,2],N,0)/dd(z)):`
- > `LL((coeff(J[3,3],N,1)-dd(coeff(J[3,3],N,0))/2)/coeff(J[3,3],N,0)/dd(z)):`

**Alexander I. Aptekarev** (*aptekaa@keldysh.ru*)

Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
 Russian Academy of Science,  
 Miusskaya Pl.4, Moscow 125047, Russian Federation

**Dmitrii N. Tulyakov** (*dntulyakov@gmail.com*)

Keldysh Institute of Applied Mathematics,  
 Russian Academy of Science,  
 Miusskaya Pl.4, Moscow 125047, Russian Federation