ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 158 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лысов В.Г.

О диофантовых приближениях произведения логарифмов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лысов В.Г. О диофантовых приближениях произведения логарифмов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 158. 20 с. doi:10.20948/prepr-2018-158
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-158

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.Г. Лысов

О диофантовых приближениях произведения логарифмов

Москва – 2018

УДК 517.53
В.Г. Лысов

О диофантовых приближениях произведения логарифмов

Рассмотрены приближения произведения логарифмов рациональными дробями. Доказано, что числа $\ln(1-1/m)\ln(1+1/m)$ иррациональны при всех целых $m \geqslant 33$. Получены новые оценки меры иррациональности этих чисел.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита–Паде, диофантовы приближения, иррациональность, мера иррациональности.

V.G. Lysov

On Diophantine approximants for the product of logarithms

The approximation by rational fractions for the product of logarithms is considered. It is proved that the numbers $\ln(1-1/m)\ln(1+1/m)$ are irrational for all integers $m \geqslant 33$. New estimates for the irrationality measure of these numbers are obtained.

Key words: Hermite–Padé approximants, Diophantine approximants, irrationality, irrationality measure.

Исследование частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (проект 17-01-00614).

Оглавление

1 Введение

1.1 Основные результаты

Для натуральных значений m рассмотрим произведение логарифмов:

$$\gamma_m := \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right). \tag{1}$$

В работе [13] М. Хата доказал, что числа γ_m иррациональны при всех целых $m \geqslant 54$. Этот результат является существенным улучшением результата А. И. Галочкина [7], который доказал иррациональность произведения логарифмов (1) при целых $m > e^{795}$ в качестве приложения более общего утверждения о значениях некоторых G-функций Зигеля. Работа [7] стала первой работой, в которой исследовались арифметические свойства значений многочленов нескольких переменных от логарифмов. До этого изучались либо линейные формы от нескольких логарифмов, либо многочлены от одного логарифма.

Нам удалось несколько улучшить результат [13] и доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Числа γ_m иррациональны при всех целых $m \geqslant 33$.*

Основной наш интерес состоит в получении верхних оценок меры иррациональности числа (1). Напомним определение и классические результаты. Мерой иррациональности (см., например, [27]) числа $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называется точная нижняя грань всех μ, для которых неравенство $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu}$ имеет лишь конечное число решений $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Меру иррациональности числа γ будем обозначать через $\mu(\gamma)$. С помощью принципа Дирихле нетрудно показать, что всегда $\mu(\gamma) \geqslant 2$. По теореме Рота мера иррациональности всех алгебраических чисел равна двум. По теореме Хинчина [16] мера иррациональности почти всех трансцендентных чисел равна двум. Мера иррациональности чисел Лиувилля равна бесконечности. Мера иррациональности числа e равна двум. Для остальных математических констант известны лишь верхние оценки. Например, в работе В.Х. Салихова [26] доказано, что $\mu(\pi) < 7.6063$. В работе Р. Марковечио [19] (см. также [20]) доказано, что $\mu(\ln 2) < 3.5746$. Отметим, что предыдущие лучшие оценки мер иррациональности чисел π и $\ln 2$ были установлены М. Хатой в работах [14] и [12].

В работе [13] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших целых m справедлива оценка $\mu(\gamma_m) < 5 + \varepsilon$. Заметим, что стандартная конструкция из работы [25] дает верхнюю оценку меры иррациональности логарифмов $\ln(1 \pm 1/m)$, которая стремится к 2 при $m \to \infty$. Для произведения логарифмов (1) оценок, меньших 5, даже при больших m до сих пор не было. Наша конструкция позволяет улучшить этот результат на единицу.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется эффективно вычислимая постоянная $m_0 = m_0(\varepsilon)$, такая, что $\mu(\gamma_m) < 4+\varepsilon$ для всех целых $m > m_0$.*

Сформулируем теперь основной результат работы о диофантовых приближениях произведения логарифмов γ_m. При $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\Phi_j(m)$ упорядоченные ($|\Phi_0| \geqslant |\Phi_1| \geqslant |\Phi_2| \geqslant |\Phi_3|$) корни алгебраического уравнения четвертой степени:

$$\Phi^4 - 16\left(8m^3 - 5m\right)\Phi^3 + 32\left(18m^2 + 1\right)\Phi^2 - 768\, m\,\Phi + 256 = 0. \qquad (2)$$

Пусть

$$\tau(m) := -\frac{\ln|\Phi_0(m)| + \tau'}{\ln|\Phi_1(m)| + \tau'}, \qquad \tau' := 3 - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}. \qquad (3)$$

Тогда при $m \geqslant 33$ величина $\tau(m)$ положительна и справедлива теорема.

Теорема 3. *Для любого целого $m \geqslant 33$ и любого $\varepsilon > 0$ существует эффективно вычислимая постоянная $q_0 = q_0(m,\varepsilon)$, такая, что $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$: $q \geqslant q_0$ выполнено неравенство*

$$|q\gamma_m - p| \geqslant \frac{1}{q^{\tau(m)+\varepsilon}}.$$

Теоремы 1 и 2 являются следствиями теоремы 3. Действительно, из теоремы 3 вытекает теорема 1 и верхняя оценка для меры иррациональности числа γ_m: $\mu(\gamma_m) \leqslant \tau(m) + 1$. С помощью теоремы Виета нетрудно убедиться, что при $m \to \infty$ имеют место предельные соотношения:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\ln|\Phi_0(m)| = 3, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\ln|\Phi_1(m)| = -1.$$

Таким образом, $\tau(m) \to 3$ при $m \to \infty$, т.е. справедлива теорема 2.

В таблице 1 приведено сравнение оценок показателей иррациональности чисел (1), полученных в работе [13] и настоящей работе.

Таблица 1: Верхние оценки мер иррациональности чисел γ_m в работе [13] (строка 2) и теореме 3 (строка 3)

m	33	34	53	54	55	100	1000	$\left[e^{170}\right]$	$\left[e^{795}\right]$
$\mu(\gamma_m) <$	–	–	–	19166	1248	44.8	13.5	5.16	5.04
$\mu(\gamma_m) <$	668	315	39.1	37.9	36.7	19.6	9.17	4.11	4.03

1.2 Метод исследования

Наш подход, так же как и подход М. Хаты, основан на исследовании аппроксимаций Эрмита–Паде. Данная конструкция совместных рациональных аппроксимаций была введена Ш. Эрмитом в работе [15] при доказательстве трансцендентности числа e. Приведем соответствующее определение (см. [18]).

Пусть $\vec{f} := (f_1, \dots, f_r)$ — вектор ростков аналитических функций в окрестности бесконечности:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{jk}}{z^k}, \quad j = 1, \dots, r. \tag{4}$$

Для вектора ростков $\vec{f}$ и мультииндекса $\vec{n} := (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ *аппроксимациями Эрмита–Паде* типа II (с общим знаменателем) называется набор рациональных функций $\left(\frac{P_{\vec{n},1}}{Q_{\vec{n}}}, \dots, \frac{P_{\vec{n},r}}{Q_{\vec{n}}}\right)$, таких, что $\deg Q_{\vec{n}} \leqslant |\vec{n}| := n_1 + \dots + n_r$ и выполнено r интерполяционных условий в бесконечности:

$$R_{\vec{n},j}(z) := \left(Q_{\vec{n}} f_j - P_{\vec{n},j}\right)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \to \infty, \quad j = 1, \dots, r. \tag{5}$$

Такие аппроксимации всегда существуют, нахождение $Q_{\vec{n}}$ сводится к поиску нетривиального решения линейной однородной системы, в которой количество неизвестных коэффициентов превосходит на единицу число уравнений. Многочлен $P_{\vec{n},j}$ и функция остатка $R_{\vec{n},j}$ являются соответственно главной и регулярной частями разложения $Q_{\vec{n}} f_j$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности. Мультииндексы с равными координатами $n_1 = \dots = n_r$ будем называть *диагональными*.

Для ростков (4), являющихся преобразованиями Коши некоторых зарядов, условия (5) приводят к соотношениям ортогональности для знаменателей $Q_{\vec{n}}$. Пусть σ — конечный заряд на отрезке Δ. Пусть какая-либо из функций f_j является преобразованием Коши заряда σ, т.е.

$$f_j(z) = \int_\Delta \frac{d\sigma(x)}{z-x}.$$

Тогда соответствующее условие интерполяции (5) эквивалентно соотношениям ортогональности при $k = 0, \ldots, n_j - 1$:

$$\int_\Delta Q_{\vec{n}}(x) x^k d\sigma(x) = 0,$$

а функции $P_{\vec{n},j}$ и $R_{\vec{n},j}$ имеют представления:

$$P_{\vec{n},j}(z) = \int_\Delta \frac{Q_{\vec{n}}(z) - Q_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\sigma(x), \quad R_{\vec{n},j}(z) = \int_\Delta \frac{Q_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\sigma(x).$$

Если все ростки (4) являются преобразованиями Коши некоторых зарядов, то знаменатели $Q_{\vec{n}}$ называют также *многочленами совместной ортогональности.*

Введем обозначения для следующих функций:

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= \int_0^1 \frac{-dx}{z-x} = \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right), \quad g_1(z) := \int_0^1 \frac{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx}{z-x}, \\ f_2(z) &:= \int_{-1}^0 \frac{dx}{z-x} = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right), \quad g_2(z) := \int_{-1}^0 \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) dx}{z-x}. \end{aligned} \tag{6}$$

По формуле Сохоцкого–Племеля нетрудно найти скачки функций g_1, g_2 на $(0,1)$, $(-1,0)$ и убедиться, что их линейная комбинация дает произведение логарифмов:

$$f_3(z) := -\left(g_1 + g_2\right)(z) = \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

При доказательстве своего результата [13] М. Хата нашел явный вид знаменателей аппроксимаций Эрмита–Паде для набора из четырех функций (f_1, f_2, g_1, g_2) и диагональных индексов. Эта система функций представляет собой обобщенную систему Никишина (GN-систему), ассоциированную со следующим деревом.

$$\begin{array}{ccccc} & & f_1 & \longrightarrow & g_1 \\ & \nearrow & & & \\ \circ & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & f_2 & \longrightarrow & g_2 \end{array}$$

Системы Никишина были введены в работе [21], они соответствуют линейному дереву (т.е. простой цепи) и имеют многочисленные приложения. Обобщение таких систем для произвольных деревьев было предложено в работе [11] А.А. Гончара, Е.М. Рахманова и В.Н. Сорокина. Приложениям систем Никишина и GN-систем к диофантовым приближениям логарифмов, полилогарифмов и $\zeta(3)$ посвящены работы [28], [29], [30], [31]. В работе [3] был найден явный вид многочленов совместной ортогональности для системы четырех мер, также ассоциированной с деревом, изображенным выше. Исследование этой системы привело к рациональным приближениям, определяемым четырехчленными рекуррентными соотношениями, для постоянной Эйлера, см. [1], [2], [23], [24], [36].

Нам удалось построить явный вид знаменателей $Q_{\vec{n}}$ для набора из трех функций (f_1, f_2, f_3) и диагональных индексов $\vec{n} = (N, N, N)$:

$$Q_{\vec{n}}(z) = \frac{1}{N!\,\left(\left[\frac{N}{2}\right]!\right)^2} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{\left[\frac{N}{2}\right]} \Bigg\{ (z^2-1)^{\left[\frac{N}{2}\right]} z^{2\left[\frac{N}{2}\right]} \times \\ \times \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left(z^{2\left[\frac{N}{2}\right]} \left(\frac{d}{dz}\frac{1}{z}\right)^{N} (z^2-1)^N z^{2N} \right) \Bigg\}. \quad (7)$$

Система функций (f_1, f_2, f_3) является обобщенной системой Никишина, ассоциированной со следующим графом-ромбом.

$$\begin{tikzcd} & f_1 \arrow[dr] & \\ \circ \arrow[ur] \arrow[dr] & & f_3 \\ & f_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде систем функций на графах исследовались в работе [4], некоторые теоретико-числовые приложения получены в работах [32], [33].

Отметим, что цитированная выше работа В.Х. Салихова об оценке $\mu(\pi)$ также основана на совместных рациональных аппроксимациях. Однако эти аппроксимации удовлетворяют интерполяционным условиям не в одной, а в паре точек, подробности можно найти в работе [35].

Настоящая работа имеет следующую структуру. Доказательство теоремы 3 является содержанием следующей главы. Вначале мы докажем единственность аппроксимаций Эрмита–Паде для системы (f_1, f_2, f_3) и диагональных индексов $\vec{n} = (N, N, N)$. Здесь обнаруживается интересный эффект отсутствия *нормальности* индексов (т.е. свойства $\deg Q_{\vec{n}} = |\vec{n}|$) при нечетных N. Затем докажем формулу (7), т.е. проверим соответствующие соотношения ортогональности. После этого исследуем арифметические свойства коэффициентов многочленов $Q_{\vec{n}}$ и $P_{\vec{n},j}$ и асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде. Доказательство теоремы 3 основывается на полученных свойствах и стандартной в теории диофантовых приближений лемме, которая является частным случаем леммы 6.1 из [13].

Лемма 4. *Пусть γ — вещественное число, а p_n, q_n — целочисленные последовательности, такие, что для q_n и линейных форм $r_n := q_n\gamma - p_n$ выполнены соотношения:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| \leqslant \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |r_n| = -\beta,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда число γ иррационально, а его мера иррациональности не превосходит $\alpha/\beta + 1$.

2 Доказательство

2.1 Единственность аппроксимаций Эрмита–Паде

Единственность рассматриваемых аппроксимаций не является существенной для доказательства теоремы 3. Доказательство единственности мы приводим для того, чтобы продемонстрировать специфику аппроксимаций Эрмита–Паде для функций на графах. Для доказательства единственности нам понадобится следующее свойство, которое вытекает из предложения 3.2 работы [4].

Лемма 5. *Пусть $Q_{\vec{n}}$ — знаменатель аппроксимаций Эрмита–Паде для набора (f_1, f_2, f_3) и мультииндекса $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, такого, что $n_1 + 1 \geqslant n_3$ и $n_2 + 1 \geqslant n_3$. Тогда $Q_{\vec{n}}$ имеет не менее $|\vec{n}| - 1$ перемен знака на множестве $(-1, 0) \cup (0, 1)$.*

Следствие 6. *Для диагональных индексов $\vec{n} = (N, N, N)$ аппроксимации Эрмита–Паде определены однозначно, а многочлен $Q_{\vec{n}}$ — однозначно с точностью до нормировки.*

Доказательство. Будем предполагать, что все многочлены в этом рассуждении имеют старший коэффициент, равный единице. Отдельно рассмотрим случай четного и нечетного N.

Случай $N = 2n$. Для доказательства единственности достаточно проверить, что если $Q_{\vec{n}} \not\equiv 0$ удовлетворяет (5), то $\deg Q_{\vec{n}} = |\vec{n}| = 6n$. Тогда если бы линейная система (5) имела два различных нетривиальных решения, то их разность также была бы нетривиальным решением (5) степени меньше $6n$. Итак, предположим, что $Q_{\vec{n}} \not\equiv 0$ — решение (5) степени меньше $6n$, тогда по лемме 5 $\deg Q_{\vec{n}} = 6n-1$. В силу инвариантности системы (f_1, f_2, f_3) относительно смены знака многочлен $Q_{\vec{n}}(-x)$ также удовлетворяет (5). Тогда нечетный многочлен $\mathcal{S}Q_{\vec{n}}(x) := (Q_{\vec{n}}(x) - Q_{\vec{n}}(-x))/2$ степени $6n-1$ удовлетворяет (5). С одной стороны, $\mathcal{S}Q_{\vec{n}}(0) = 0$, а с другой стороны, по лемме 5 все нули $\mathcal{S}Q_{\vec{n}}$ лежат на $(-1,0)\cup(0,1)$. Получили противоречие.

В случае $N = 2n+1$ покажем, что если $Q_{\vec{n}} \not\equiv 0$ удовлетворяет (5), то $\deg Q_{\vec{n}} = |\vec{n}| - 1 = 6n+2$. Предположим, что $\deg Q_{\vec{n}} \neq 6n+2$, тогда $\deg Q_{\vec{n}} = 6n+3$ и многочлен $\mathcal{S}Q_{\vec{n}} \not\equiv 0$ также удовлетворяет (5). В силу нечетности функции $f_3\,\mathcal{S}Q_{\vec{n}}$ многочлен $\mathcal{S}Q_{\vec{n}}$ удовлетворяет (5) для мультииндекса $(2n+1, 2n+1, 2n+2)$. По лемме 5 все нули $\mathcal{S}Q_{\vec{n}}$ лежат на $(-1,0)\cup(0,1)$, а это противоречит нечетности $\mathcal{S}Q_{\vec{n}}$. $\square$

Таким образом, при нечетных N диагональные индексы $\vec{n} = (N, N, N)$ не являются нормальными, и для доказательства единственности пришлось использовать симметрию задачи. Заметим, что нормальность всех индексов для системы Никишина доказана в работах [5], [6]. Нормальность диагональных индексов (на самом деле, более широкого класса индексов, но не всех) для GN-систем на деревьях доказана в [11]. Наличие замкнутых (неориентированных) циклов в графе может привести к положительному дефекту $|\vec{n}| - \deg Q_{\vec{n}}$. Данный дефект, однако, не превосходит размерности пространства циклов, которая в рассматриваемом случае равна единице.

2.2 Явное представление для знаменателей

Докажем теперь формулу (7). Приведем доказательство для мультииндекса $\vec{n} = (N, N, N)$ при четных $N = 2n$. В этом случае многочлен степени $6n$ в правой части (7) имеет вид:

$$Q_{6n}(x) := \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n x^{2n} U_{4n}(x),$$

где

$$U_{4n}(x) := \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n}\widetilde{U}_{4n}(x), \quad \widetilde{U}_{4n}(x) := \frac{(n!)^{-2}}{(2n)!}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^{2n}(x^2-1)^{2n}x^{4n}.$$

Необходимо проверить, что Q_{6n} удовлетворяет соотношениям ортогональности, которые эквиваленты условиям интерполяции (5).

Лемма 7. *Многочлен Q_{6n} удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности при $k \in \mathbb{Z}_+$, $k < 2n$:*

$$\int_{-1}^{0} Q_{6n}(x)x^k dx = 0, \qquad \int_0^1 Q_{6n}(x)x^k dx = 0, \tag{8}$$

$$\int_{-1}^{0} Q_{6n}(x)x^k \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)dx - \int_0^1 Q_{6n}(x)x^k \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Будем обозначать через T_n и S_n соответственно четный и нечетный многочлены степени не выше n. Положим $T_n \equiv S_n \equiv 0$ при $n < 0$. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m T_n &= T_{n-2m}, \quad \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^m T_n = \frac{\widetilde{T}_n}{x^{2m}}, \\ \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^m S_n &= S_{n-2m}, \quad \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m S_n = \frac{\widetilde{S}_n}{x^{2m}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Проверим справедливость соотношений (8). В силу четности Q_{6n} достаточно проверить одно из этих соотношений. Для нечетных показателей k это делается n-кратным применением формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^1 Q_{6n}(x)S_{2n-1}(x)dx =$$
$$= (-1)^n \int_0^1 (x^2-1)^n x^{2n} U_{4n}(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^n S_{2n-1}(x)dx = 0.$$

Для четных показателей, снова используя (10) и интегрирование по частям, имеем следующую цепочку равенств:

$$\int_0^1 T_{2n-2}(x)Q_{6n}(x)dx =$$
$$= \int_0^1 \widetilde{T}_{2n-2}(x)(x^2-1)^n U_{4n}(x)dx = \int_0^1 \widetilde{T}_{4n-2}(x)\widetilde{U}_{4n}(x)dx =$$
$$= \frac{(n!)^{-2}}{(2n)!}\int_0^1 (x^2-1)^{2n}x^{4n}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{2n}\widetilde{T}_{4n-2}(x)dx = 0.$$

Таким образом, соотношения (8) доказаны.

Теперь проверим справедливость соотношений (9). Для четных показателей эти соотношения выполнены в силу симметрии относительно начала координат. Остается проверить (9) для нечетных k, т.е. показать, что интеграл

$$I := \int_0^1 Q_{6n}(x)S_{2n-1}(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx \tag{11}$$

равен нулю для любого многочлена S_{2n-1}.

Введем обозначение для нечетной части ряда Лорана:

$$g_n(x) := \sum_{j=-\infty}^{n} c_j x^j \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}g_n(x) := \frac{g_n(x)-g_n(-x)}{2}.$$

Нам понадобится следующее очевидное свойство оператора $\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$:

$$\mathcal{S}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^n g_{2n}(x) = \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^n \mathcal{S}g_{2n}(x) = O\left(x^{-2n-1}\right), \quad x\to\infty. \tag{12}$$

Через A_n и B_n будем обозначать произвольные многочлены степени не выше n. При отрицательных n считаем, что $A_n \equiv B_n \equiv 0$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ справедливы разложения:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^m S_{2n-1}(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} B_{2n-2m-2}(x) + O\left(x^{-2}\right), & x\to\infty,\\ O\left((x+1)^{-m}\right), & x\to -1,\\ O\left(x^{-2m}\right), & x\to 0.\end{cases} \tag{13}$$

При $m = n$ полиномиальный коэффициент при логарифме равен нулю, получим рациональную функцию вида:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^n S_{2n-1}(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{A_{3n-2}(x)}{x^{2n}(x+1)^n}.$$

Нечетная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности обладает следующим свойством (см. (12)):

$$\mathcal{S}\frac{A_{3n-2}(x)}{x^{2n}(x+1)^n}=O\left(x^{-2n-3}\right),\quad x\to\infty. \tag{14}$$

К интегралу (11) n раз применим формулу интегрирования по частям, в силу (13) все внеинтегральные слагаемые равны нулю, получим:

$$I=(-1)^n\int_0^1 U_{4n}(x)A_{3n-2}(x)(x-1)^n dx. \tag{15}$$

Из (14) следует, что половина коэффициентов при нечетных степенях многочлена $A_{3n-2}(x)(x-1)^n$ равна нулю:

$$\mathcal{S}A_{3n-2}(x)(x-1)^n=(x^2-1)^n x^{2n}\,\mathcal{S}\frac{A_{3n-2}(x)}{x^{2n}(x+1)^n}=O\left(x^{2n-3}\right),\quad x\to\infty.$$

Далее, при $m\leqslant n$ имеем:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^m A_{3n-2}(x)(x-1)^n=\frac{A_{3n+m-2}(x)(x-1)^{n-m}}{x^{2m}}. \tag{16}$$

При $m=n-1$ и $m=n$ оператор $\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^m$ обнуляет все остальные коэффициенты при нечетных степенях, поэтому функция в правой части (16) является четной:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^n A_{3n-2}(x)(x-1)^n=\frac{T_{4n-2}(x)}{x^{2n}}.$$

К интегралу (15) снова применим формулу интегрирования по частям:

$$I=\int_0^1 \widetilde{U}_{4n}(x)T_{4n-2}(x)dx=0.$$

Что и требовалось доказать. □

Итак, для многочленов Q_{6n} выполнены соотношения ортогональности (8) и (9), которые эквивалентны условиям интерполяции (5) при $\vec{n}=(N,N,N)$ и $N=2n$. В силу единственности, доказанной в следствии 6, с точностью до произвольного множителя выполняется тождество $Q_{\vec{n}}\equiv Q_{6n}$. Далее считаем, что нормировка $Q_{\vec{n}}$ фиксирована этим тождеством. Случай нечетных N может быть рассмотрен аналогично, но далее последовательность нечетных диагональных мультииндексов использоваться не будет.

2.3 Арифметические свойства коэффициентов

Перейдем к описанию арифметических свойств коэффициентов многочленов $Q_{\vec{n}}$ и $P_{\vec{n},j}$.

Обозначим через D_n наименьшее общее кратное чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. При $0 < a < b$ обозначим через $d_{a,b}$ произведение всех простых чисел из полуинтервала $(a, b]$:

$$d_{a,b} := \prod_{\substack{p \text{ — простое} \\ a<p\leqslant b}} p.$$

Положим $d_{a,b} := 1$, если множество $(a, b]$ не содержит простых чисел. При $\gamma \in (0, 1)$ обозначим через $d(n, \gamma)$ произведение всех простых чисел p, для которых дробная часть $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ не меньше γ:

$$d(n, \gamma) := \prod_{\substack{p \text{ — простое} \\ \left\{\frac{n}{p}\right\}\geqslant\gamma}} p = \prod_{m=0}^{[n/2]} d_{\frac{n}{m+1}, \frac{n}{m+\gamma}}.$$

По теореме о распределении простых чисел выполнены предельные соотношения при $n \to \infty$, $0 < \alpha < \beta$ и $\gamma \in (0, 1)$:

$$\frac{1}{n} \ln D_n \to 1, \qquad \frac{1}{n} \ln d_{\alpha n, \beta n} \to \beta - \alpha, \tag{17}$$

$$\frac{1}{n} \ln d(n, \gamma) \to \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+\gamma} - \frac{1}{m+1} \right) = \psi(1) - \psi(\gamma), \tag{18}$$

где ψ — дигамма функция $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. При рациональных $\gamma = \frac{p}{q}$ можно выразить сумму ряда (18) через элементарные функции:

$$\psi(1) - \psi\left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 \frac{qx(x^p - x^q)}{1 - x^q} dx =$$

$$= \ln q + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \sum_{m=1}^{q-1} \cos\left(\frac{2\pi m p}{q}\right) \ln\left(2 \sin \frac{\pi m}{q}\right). \tag{19}$$

В частности, при $\gamma = \frac{3}{4}$ имеем:

$$\frac{1}{n} \ln d\left(n, \frac{3}{4}\right) \to 3 \ln 2 - \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Используя явную формулу (5), нетрудно найти выражения для коэффициентов Q_{6n}.

Лемма 8. *Коэффициенты многочлена $Q_{6n}(x)=\sum_{l=0}^{3n}c_{n,l}x^{2l}$ имеют явное представление*

$$c_{n,l}:=(-1)^{n+l}\binom{n+l}{l}\sum_{\substack{k+j=l\\0\leqslant k\leqslant 2n\\0\leqslant j\leqslant n}}\binom{n}{j}\binom{2n+k}{2k}\binom{n+k}{k}\binom{4n+2k}{2n+k}.$$

В частности, старший коэффициент Q_{6n} имеет вид:

$$c_{n,3n}:=\binom{4n}{n}\binom{3n}{n}\binom{8n}{4n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln c_{n,3n}=14\ln 2.$$

Ясно, что коэффициенты Q_{6n} являются целыми. Покажем, что коэффициенты $c_{n,l}$ имеют геометрически растущий общий множитель. Кроме того, старшие n ненулевых коэффициентов Q_{6n} имеют общий множитель с еще большим показателем роста. Оба этих свойства связаны с наличием произведения биномиальных коэффициентов $\binom{n+k}{k}\binom{4n+2k}{2n+k}$ в выражении для $c_{n,l}$.

Лемма 9. *А) Пусть l — целое число из отрезка $[0,3n]$, а p — простое число, такое, что дробная часть $\left\{\frac{n}{p}\right\}\geqslant\frac{3}{4}$, тогда $c_{n,l}$ делится на p. Таким образом, $Q_{6n}\in d\left(n,\frac{3}{4}\right)\cdot\mathbb{Z}[x]$.*
Б) Пусть l — целое число из полуинтервала $(2n,3n]$, а p — простое из $(2n,l]\cup(4n,2l)$, тогда $c_{n,l}$ делится на p.

Доказательство. А) Достаточно проверить, что $p\mid\binom{n+k}{k}\binom{4n+2k}{2n+k}$ при всех $k\in\mathbb{Z}_+$. Для этого достаточно проверить положительность по меньшей мере одного из двух целых чисел:

$$N_1:=\left[\frac{n+k}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right],\quad N_2:=\left[\frac{4n+2k}{p}\right]-2\left[\frac{2n+k}{p}\right].$$

Введем обозначения для дробных частей: $\xi:=\{k/p\}$, $\eta:=\{n/p\}$. Тогда $N_1=\eta+\xi-\{\eta+\xi\}$, $N_2=2\{2\eta+\xi\}-\{4\eta+2\xi\}$, где по условию $\eta\geqslant 3/4$. Доказательство пункта А) следует из цепочки импликаций:

$$\eta\geqslant\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\eta+\xi\geqslant 1,\\ 2>2\eta+\xi\geqslant\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\eta+\xi\geqslant 1,\\ 2\{2\eta+\xi\}\geqslant 1\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}N_1>0,\\ N_2>0.\end{array}\right.$$

Б) Пусть индекс $l\in(2n,3n]$, а p — простое из $(2n,l]\cup(4n,2l)$. Достаточно показать, что для всех целых $k\in[l-n,2n]$ по меньшей мере одно из чисел N_1, N_2 положительно. Тогда $p \,|\, \binom{n+k}{k}\binom{4n+2k}{2n+k}$ и, следовательно, $p \,|\, c_{n,l}$. Пусть вначале $p \in (2n, l]$, тогда справедлива цепочка неравенств $n < l - n \leqslant k \leqslant 2n < p \leqslant l \leqslant n + k$. Отсюда следует, что $N_1 \geqslant 1$. Пусть теперь $p \in (4n, 2l)$, тогда $2n + k \leqslant 4n < p < 2l \leqslant 2n + 2k < 4n + 2k$, т.е. $N_2 \geqslant 1$. Лемма доказана. $\square$

Перейдем теперь к описанию арифметических свойств многочленов второго рода $P_{6n,j} := P_{\vec{n},j}$, где, напомним, $\vec{n} = (2n, 2n, 2n)$.

Лемма 10. *Рассмотрим целое число* $M_{6n} := \dfrac{D_{3n}\, D_{6n}}{d\left(n, \frac{3}{4}\right)\, d_{2n,3n}\, d_{4n,6n}}$. *Тогда многочлены второго рода* $P_{6n,1}, P_{6n,2}, P_{6n,3} \in \dfrac{1}{M_{6n}}\,\mathbb{Z}[x]$.

Доказательство. Начнем с более сложного — докажем, что $M_{6n}P_{6n,3}$ имеет целые коэффициенты. Многочлен $P_{6n,3}$ определяется как полиномиальная часть разложения f_3Q_{6n} в бесконечности, где

$$f_3(x) := \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^k}{k(2m-k)}x^{-2m}.$$

Таким образом, имеем:

$$P_{6n,3}(x) = \sum_{l=1}^{3n}\sum_{m=1}^{l}\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^k c_{n,l}}{k(2m-k)}\,x^{2(l-m)}. \qquad (21)$$

Возможны два случая: а) $\max(k, 2m-k) \leqslant 4n$ и б) $\max(k, 2m-k) > 4n$.

В случае а) числа $\frac{D_{2n}D_{4n}}{k(2m-k)}$ являются целыми. Так как $\frac{D_{2n}\,D_{4n}}{d\left(n,\frac{3}{4}\right)} \,|\, M_{6n}$ и $d\left(n, \frac{3}{4}\right) \,|\, c_{n,l}$ (см. п. А) леммы 9), то $\frac{M_{6n}\,c_{n,l}}{k(2m-k)} \in \mathbb{Z}$.

В случае б) числа $\frac{D_{3n}D_{6n}}{k(2m-k)}$ являются целыми. Предположим, что знаменатель $k(2m-k)$ имеет простой делитель $p \in (2n, 3n) \cup (4n, 6n)$. Покажем, что в таком случае числитель $c_{n,l}$ в (21) также делится на p. Сразу отметим, что в случае б) выполнены неравенства $2n < m \leqslant l$ и $\min(k, 2m-k) < 2n$.

Если $p \in (2n, 3n)$, то $\max(k, 2m-k) = 2p$. Тогда $2p \leqslant 2m$, т.е. $p \in (2n, l]$. По п. Б) леммы 9 коэффициент $c_{n,l}$ делится на p.

Если $p \in (4n, 6n)$, то $\max(k, 2m-k) = p$. Тогда $p \leqslant 2m$. Отсюда $p \in (4n, 2l]$ и снова по лемме 9 коэффициент $c_{n,l}$ делится на p.

Итак, в случае б) также имеем $\frac{M_{6n}\,c_{n,l}}{k(2m-k)} \in \mathbb{Z}$, т.е. $P_{6n,3} \in \frac{1}{M_{6n}}\,\mathbb{Z}[x]$.

Многочлены $P_{6n,1}$ и $P_{6n,2}$ имеют вид:

$$P_{6n,1}(x) = P_{6n,2}(-x) = -\sum_{l=1}^{3n}\sum_{m=1}^{2l}\frac{c_{n,l}}{m}\,x^{2l-m}.$$

Для них нетрудно проверить, что $P_{6n,1}, P_{6n,2} \in \frac{D_{3n}}{M_{6n}}\,\mathbb{Z}[x]$. Лемма доказана. $\square$

Заметим, что из (17), (20) следует, что $\frac{1}{n}\ln M_{6n} \to 2\tau' = 6 - 3\ln 2 + \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$.

2.4 Асимптотика аппроксимаций

Асимптотика многочленов $Q_{\vec{n}}$ и функций второго рода $R_{\vec{n},j}$ может быть найдена методом Гончара–Рахманова ([8],[9],[10]), основанном на векторной задаче равновесия логарифмического потенциала. Соответствующие построения для функций на графах приведены в работе [4], см. теорему 1.2 и следствие 1.1. В работе [17] мы нашли решение векторной задачи равновесия и асимптотику аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций (f_1, f_2, f_3) в терминах алгебраической функции. Приведем этот результат.

Рассмотрим компактную риманову поверхность $\mathcal{R}$, которая реализуется как замыкание склейки четырех экземпляров сферы Римана вдоль разрезов. Сделаем разрезы вдоль отрезка $[-1, 1]$ и склеим листы

$$\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 := \mathcal{R}_2 := \mathcal{R}_3 := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$$

таким образом:

- лист $\mathcal{R}_0$ вдоль отрезка $[0, 1]$ склеиваем с $\mathcal{R}_1$, а вдоль отрезка $[-1, 0]$ — с $\mathcal{R}_2$;
- лист $\mathcal{R}_3$, наоборот, вдоль отрезка $[0, 1]$ склеиваем с $\mathcal{R}_2$, а вдоль $[-1, 0]$ — с $\mathcal{R}_1$.

Поверхность $\mathcal{R}$ имеет по две точки ветвления второго порядка над точками -1, 0 и 1, ее род равен нулю.

На поверхности $\mathcal{R}$ определим рациональную функцию Φ, имеющую дивизор $3\,\infty_0 - \sum_{j=1}^{3}\infty_j$. Сужения Φ на листы $\mathcal{R}_j$ обозначаем Φ_j. Нормировку функции Φ фиксируем условием в бесконечности на листе $\mathcal{R}_0$: $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi_0(z)/z^3 = 2^7$.

Асимптотика рассматриваемых аппроксимаций Эрмита–Паде в терминах функции Φ описывается в следующей лемме.

Лемма 11. *Для диагональных мультииндексов $\vec{n} = (N, N, N)$ многочлены $Q_{\vec{n}}$ (см. (7)) и функции второго рода имеют следующую асимптотику при $N \to \infty$:*

$$|Q_{\vec{n}}|^{1/N}(z) \rightrightarrows \Phi_0(z), \quad |R_{\vec{n},1}|^{1/N}(z) \rightrightarrows \Phi_1(z),$$
$$|R_{\vec{n},2}|^{1/N}(z) \rightrightarrows \Phi_2(z), \quad |R^*_{\vec{n},3}|^{1/N}(z) \rightrightarrows \Phi_3(z),$$

где $R^*_{\vec{n},3} := R_{\vec{n},3} - f_1 R_{\vec{n},2} - f_2 R_{\vec{n},1}$, а сходимость равномерная на компактах $K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Можно построить (см. [17]) конформное отображение φ комплексной сферы $\mathbb{C}_s$ на поверхность $\mathcal{R}$: $\mathbf{z} = \varphi(s)$. Тогда функцию Φ можно задать параметрически:

$$\begin{cases} \Phi &= 2s(s^2-1), \\ z &= \dfrac{(s^2+1)^2}{4s(s^2-1)}. \end{cases} \tag{22}$$

Исключая s из (22), получим алгебраическое уравнение (2).

Непосредственно проверяется, что для всех $x > 1$ выполнены условия: $|\Phi_0|(x) > |\Phi_1|(x) > |\Phi_2|(x) > |\Phi_3|(x)$. Кроме того, при $x \geqslant 33$ величина $\ln|\Phi_1(x)| + \tau'$ отрицательна.

2.5 Доказательство основной теоремы

Получены все вспомогательные результаты для доказательства теоремы 3. Для мультииндекса $\vec{n} = (N, N, N)$, где $N = 2n$, обозначим $R_{6n,j} := R_{\vec{n},j}$. Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 33$. Пусть $\gamma := \gamma_m$, $q_n := M_{6n} Q_{6n}(m)$, $p_n := M_{6n} P_{6n,3}(m)$, $r_n := M_{6n} R_{6n,3}(m)$. Тогда очевидно, что для этих последовательностей выполнены условия леммы 4, причем $\alpha = \alpha(m) := 2(\ln|\Phi_0(m)| + \tau')$, $-\beta = -\beta(m) := 2(\ln|\Phi_1(m)| + \tau')$. Отсюда сразу следует справедливость теоремы 3.

Список литературы

[1] Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей, Совр. пробл. матем., 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007 , 84 с.

[2] Aptekarev A.I. On linear forms containing the Euler constant, arXiv:0902.1768.

[3] Aptekarev A.I., Branquinho A., Van Assche W. Multiple Orthogonal Polynomials for Classical Weights. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 355, no. 10 (2003), pp. 3887-3914.

[4] Аптекарев А.И., Лысов В.Г. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде. Матем. сб., 201:2 (2010), 29-78.

[5] Fidalgo Prieto U., López Lagomasino G. Nikishin systems are perfect. Constr. Approx. 34 (2011), no. 3, 297-356.

[6] Fidalgo Prieto U., López Lagomasino G. Nikishin systems are perfect. The case of unbounded and touching supports. J. Approx. Theory 163 (2011), no. 6, 779-811.

[7] Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса. Матем. сб., 95(137):3(11) (1974), 396–417.

[8] Гончар А.А., Рахманов Е.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа. Тр. МИАН, 157 (1981), 31-48.

[9] Гончар А.А., Рахманов Е.А. Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов. Матем. сб., 125(167):1(9) (1984), 117–127.

[10] Гончар А.А., Рахманов Е.А. О задаче равновесия для векторных потенциалов. УМН, 40(244):4 (1985), 155–156.

[11] Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н. Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа. Матем. сб., 188:5 (1997), 33-58.

[12] Hata M. Rational approximations to π and some other numbers. Acta Arith. 63, No. 4, 335-349 (1993).

[13] Hata M. The irrationality of $\log(1+1/q)\log(1-1/q)$. Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 6, 2311–2327.

[14] Hata M. $\mathbb{C}^2$-saddle method and Beukers' integral, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 4557–4583.

[15] Hermite Ch. Sur la fonction exponentielle. C. R. Acad. Sci. Paris 77, 18–24, 74–79, 226–233, 285–293 (1873).

[16] Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.

[17] Лысов В.Г. Об аппроксимациях Эрмита-Паде для произведения двух логарифмов. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, 141, 24 с.

[18] Mahler K. Perfect systems. Compos. Math. 19 (1968), 95–166.

[19] Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\log 2$. Acta Arith., 139:2 (2009), 147–184.

[20] Нестеренко Ю.В. О показателе иррациональности числа $\ln 2$. Матем. заметки, 88:4 (2010), 549–564.

[21] Никишин Е.М. О совместных аппроксимациях Паде. Матем. сб., 113(155):4(12) (1980), 499-519.

[22] Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность, М.: Наука, 1988.

[23] Пилеруд Т.Х., Пилеруд Х.Х. Рациональные приближения значений дигамма-функции и гипотеза о знаменателях. Матем. заметки, 90:5 (2011), 744–763.

[24] Pilehrood Kh.H. Pilehrood T.H. On a continued fraction expansion for Euler's constant. J. Number Theory, 133:2 (2013), 769–786.

[25] Рухадзе Е.А. Оценка снизу для приближения $\ln 2$ рациональными числами. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1987, № 6, 25–29.

[26] Салихов В.Х. О мере иррациональности числа π. УМН, 63:3 (2008), 163–164.

[27] Шидловский А.Б., Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: Изд-во МГУ, 1982.

[28] Сорокин В.Н. Асимптотика линейных функциональных форм от двух логарифмов. УМН, 38:1(229) (1983), 193–194.

[29] Сорокин В.Н. Аппроксимации Эрмита-Паде последовательных степеней логарифма и их арифметические приложения. Изв. вузов. Матем., 1991, № 11, 66-74.

[30] Сорокин В.Н. Аппроксимации Эрмита-Паде для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$. УМН, 49:2(296) (1994), 167-168.

[31] Сорокин В.Н. О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов. Матем. сб., 192:8 (2001), 139–154.

[32] Сорокин В.Н. Циклические графы и теорема Апери. УМН, 57:3(345) (2002), 99–134.

[33] Сорокин В.Н. Об одном алгоритме быстрого вычисления π^4. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2002, 28, 46 с.

[34] Сорокин В.Н. Оценки многочленов от логарифмов некоторых рациональных чисел. Фундамент. и прикл. матем., 11:6 (2005), 179–194.

[35] Сорокин В.Н. Об интеграле Салихова. Тр. ММО, 77:1 (2016), 131–154.

[36] Туляков Д.Н. Система рекуррентных соотношений для рациональных аппроксимациий постоянной Эйлера. Матем. заметки, 85:5 (2009), 782–787.