ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 149 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 149. 32 с. doi:10.20948/prepr-2018-149
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-149

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К. А. Попков

Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов

Москва — 2018

Попков К. А.

Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов

Доказаны следующие утверждения: для любого натурального k существует базис, состоящий из булевых функций от не более чем $2k + 2$ переменных (от не более чем $4k+2$ переменных), в котором любую булеву функцию, кроме константы 1, можно реализовать схемой из функциональных элементов, неизбыточной и допускающей проверяющий тест длины не более 3 (соответственно, диагностический тест длины не более 4) относительно не более k произвольных константных неисправностей на входах и выходах элементов. Показано, что при рассмотрении только произвольных константных неисправностей на входах элементов указанные оценки длин тестов можно понизить до 2.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, произвольная константная неисправность, проверяющий тест, диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

Synthesis of easily testable logic networks under arbitrary stuck-at faults at inputs and outputs of gates

The following assertions are proved: for each natural k, there exists a basis consisting of Boolean functions on not more than $2k + 2$ variables (on not more than $4k + 2$ variables), in which one can implement any Boolean function except the constant 1 by a logic network which is irredundant and allows a fault detection test with a length not exceeding 3 (a diagnostic test with a length not exceeding 4, respectively) under not more than k arbitrary stuck-at faults at inputs and outputs of gates. It is shown that, when considering only arbitrary stuck-at faults at inputs of gates, one can reduce the mentioned bounds on lengths of tests to 2.

Key words: logic network, arbitrary stuck-at fault, fault detection test, diagnostic test

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* (см. [4, с. 110–111]), т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (такие функции неисправности называют *нетривиальными*).

Назовём проверяющий (диагностический) тест k-*проверяющим* (k-*диагностическим*), если в схеме могут быть неисправны не более k элементов, где $k \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать такие тесты только для k-*неизбыточных схем* (см. [5, с. 68]), в которых любая допустимая неисправность не менее одного и не более k элементов приводит к нетривиальной функции неисправности. Очевидно, что понятия 1-проверяющего теста, 1-диагностического теста и 1-неизбыточной схемы совпадают с понятиями единичного проверяющего теста, единичного диагностического теста и неизбыточной схемы соответственно.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный проверяющий тест для некоторой схемы из функциональных элементов S в базисе B. Введём следующие обозначения: пусть $D^B_{\text{ЕП}}(T)$ — длина теста T; $D^B_{\text{ЕП}}(S) = \min D^B_{\text{ЕП}}(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S; $D^B_{\text{ЕП}}(f) = \min D^B_{\text{ЕП}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{\text{ЕП}}(n) = \max D^B_{\text{ЕП}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{\text{ЕП}}(f)$. Функция $D^B_{\text{ЕП}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями $D^B_{\text{ЕП}}$ можно ввести функции $D^B_{\text{ПП}}$, $D^B_{k\text{-П}}$, $D^B_{\text{ЕД}}$, $D^B_{\text{ПД}}$ и $D^B_{k\text{-Д}}$ для соответственно полного проверяющего, k-проверяющего, единичного и полного диагностического и k-диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{\text{ПП}}(f)$ и $D^B_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточность схем, а в определениях функций $D^B_{k\text{-П}}(f)$ и $D^B_{k\text{-Д}}(f)$ предполагается k-неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{k\text{-Д}}(n)$ — функция Шеннона длины k-диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов, при которых значение на неисправном входе (выходе) любого элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$0, 1$» или «p» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности или однотипные константные неисправности типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах/выходах элементов, а под буквой D после символов, обозначающих вид функции — символы «(IO)» или «(I)» в случаях, когда в схемах допускаются неисправности соответственно на входах и выходах элементов или только на входах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, нет входов и не может быть неисправности типа α на его выходе.

В [4, с. 116] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ показано, что $D^{B_1;\,0,1}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant n+3$; при этом используется метод построения схем из работы [6]. К. К. Салуджа и С. М. Редди в [7] получили оценку $D^{*\,B_1;\,0,1}_{k\text{-П (IO)}}(n) \leqslant \leqslant 4 + \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \log_2 2k \rfloor} C_n^i$; наличие звёздочки над буквой D обусловлено тем, что в указанной работе рассматривались схемы, содержащие, помимо входных переменных $x_1, \ldots, x_n$, дополнительную входную переменную h_0, вместо которой при реализации функций подавалась булева константа, но которая принимала значения как 0, так и 1 на наборах из теста. Д. С. Романовым и Е. Ю. Романовой в [8] для базисов $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$, $B_1'' = = \{\&, \oplus, \sim\}$ установлены неравенства $D^{B_1';\,0,1}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$ и $D^{B_1'';\,0,1}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$; в частности, при $n \geqslant 14$ улучшен упомянутый результат из [4] (любая схема в базисе B_1' является также схемой в базисе B_1). Н. П. Редькин в [9–11] для базиса $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$ получил оценки $D^{B_2;\,p}_{\text{ПП (I)}}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, $D^{B_2;\,p}_{\text{ЕД (I)}}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$ и $D^{B_2;\,0,1}_{\text{ПП (I)}}(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$ соответственно, где $p = 0$ или 1. В работе [12] для любого натурального k и для любой булевой константы p доказано существование базиса $B_3(k,p)$, состоящего из булевой функции от $\max(k{+}1; 3)$ переменных и функции $\overline{x}$, для которого, в частности, $D^{B_3(k,p);\,p}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$ и $D^{B_3(k,p);\,p}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 0$, а также существование базиса $B_4(k,p)$, состоящего из булевой функции от не более чем $2{,}5k{+}2$ переменных и отрицания этой функции, для которого, в частности, $D^{B_4(k,p);\,p}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 2$ и $D^{B_4(k,p);\,p}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 0$ (следствия 1–4 и двойственные им результаты).

В данной работе будут рассматриваться k-проверяющие и k-диагностические тесты при $k \in \mathbb{N}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов. Будут определены базисы $B_5(k)$ и $B_6(k)$, состоящие из булевых функций от не более чем $2k+2$ переменных и от не более чем $4k+2$ переменных соответственно, для которых, в частности, будут доказаны равенства $D^{B_5(k);\,0,1}_{k\text{-П (I)}}(n) = D^{B_6(k);\,0,1}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 0$, $D^{B_5(k);\,0,1}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$ и $D^{B_6(k);\,0,1}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 4$ при $n \geqslant 3$ (следствия 1–4 и теорема 5).

В дальнейшем для краткости верхние индексы $0,1$ у величин вида $D^{B_5(k);\,0,1}_{\ldots}$ и $D^{B_6(k);\,0,1}_{\ldots}$, зависящих от f или от n, будем опускать.

Введём обозначения $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}$, $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \ldots, 1}_{r}$, где $r \in \mathbb{N}$.

Два двоичных набора называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах.

Будем называть два двоичных набора k-*соседними*, если они различаются не более, чем в k компонентах.

Оговоримся, что нумерация компонент любого двоичного набора идёт слева направо.

Проверяющие тесты

Рассмотрим базис $B_5(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \psi(\tilde{x}^{k+1}), \overline{x}, 0\}$, где $\psi(\tilde{x}^{k+1}) = x_1 \dots x_{k+1} \vee \overline{x}_1 \dots \overline{x}_{k+1}$, а $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — произвольная несамодвойственная булева функция (определение самодвойственной булевой функции можно найти, например, в [13, с. 16]), для которой выполнены следующие условия:

(i) $\varphi(\tilde{\alpha}^{2k+2}) = \alpha$ для $\alpha = 0,\ 1$;

(ii) $\varphi(\tilde{\sigma}) = \overline{\alpha}$, где $\alpha = 0,\ 1$, а $\tilde{\sigma}$ — любой двоичный набор длины $2k+2$, k-соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{2k+2})$, кроме него самого.

Отметим, что условия (i), (ii) однозначно определяют значения функции $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ на всех наборах, кроме наборов ровно с $k+1$ нулевой и $k+1$ единичной компонентами. Для выполнения условия несамодвойственности необходимо и достаточно, чтобы на каких-то двух противоположных наборах ровно с $k+1$ нулевой и $k+1$ единичной компонентами функция φ принимала одинаковые значения.

Легко видеть, что функция ψ обладает следующими свойствами:

(iii) $\psi(x, \underbrace{y, \dots, y}_{k}) = x \oplus y \oplus 1$;

(iv) $\psi(\tilde{\sigma}') = 0$, где $\tilde{\sigma}'$ — любой двоичный набор длины $k+1$, отличный от наборов $(\tilde{0}^{k+1})$ и $(\tilde{1}^{k+1})$.

Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ (вида $\psi(\tilde{x}^{k+1}), \overline{x}, 0$), будем называть φ-*элементом* (соответственно, ψ-*элементом*, *инвертором*, *элементом «константа* 0»).

Назовём булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 1$, *тождественной*, если $f \equiv x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Лемма 1. *Любую тождественную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе $B_5(k)$, допускающей k-проверяющий тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Доказательство. Функцию f, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё k-проверяющим тестом. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *В случае $f \equiv 0$ справедливы равенства $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f) = 0$, $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f) = 1$.*

Доказательство. Функцию f можно реализовать схемой S, состоящей из одного элемента «константа 0» (обозначим этот элемент через E). Он не имеет входов, поэтому пустое множество является для данной схемы k-проверяющим тестом относительно неисправностей на входах элементов, откуда следует равенство $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f) = 0$. При рассмотрении неисправностей на входах и выходах элементов единственной возможной неисправностью схемы S является неисправность типа 1 на выходе элемента E, при которой схема станет реализовывать константу 1. Указанная неисправность обнаруживается на любом двоичном наборе длины n, поэтому $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f) \leqslant 1$. С другой стороны, выход любой схемы в базисе $B_5(k)$, реализующей константу 0, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 1 выхода этого элемента получающаяся схема станет реализовывать константу 1, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f) \geqslant 1$. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе $B_5(k)$, реализующей не тождественную и отличную от константы 0 булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, любой k-проверяющий тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы два набора.*

Доказательство. Выход любой k-неизбыточной схемы S, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента E, отличного от элемента «константа 0» и, как следствие, имеющего хотя бы один вход. Тогда при неисправности типа α, $\alpha \in \{0, 1\}$, любого фиксированного входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную функцию неисправности, которая может отличаться от функции $f(\tilde{x}^n)$ только на тех наборах, на которых в случае отсутствия неисправностей в схеме S на указанном входе элемента E возникает значение $\overline{\alpha}$. Данные два множества наборов при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ не пересекаются, а в любой k-проверяющий тест для схемы S относительно неисправностей на входах элементов должно входить хотя бы одному набору из каждого из этих множеств, откуда следует справедливость леммы 3. $\square$

Назовём булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ *палиндромной*, если на любой паре противоположных наборов длины n она принимает одинаковые значения.

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S *ниже* функционального элемента E, если в этой схеме существует ориентированный путь от E к E'.

Введём обозначение $\alpha^\beta = \alpha \oplus \beta \oplus 1$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Очевидно, что $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = \overline{\alpha}$, $1^\beta = \beta$ и $0^\beta = \overline{\beta}$.

Лемма 4. *Любую не палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе $B_5(k)$, состоящей только из φ-элементов и инверторов и допускающей k-проверяющий тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, где $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ — произвольные два противоположных двоичных набора длины n, такие, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$.*

Замечание 1. Существование таких наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ следует из того, что функция f не является палиндромной.

Доказательство леммы 4. Пусть $A = [\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}]$ — замыкание множества $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$, тогда $A \subseteq T_{01}$ в силу условия (i) (определения замыкания и замкнутого класса T_{01} можно найти, например, в [13] на с. 14 и 34 соответственно). Докажем, что $A = T_{01}$. Как было отмечено выше, функция φ принимает одинаковые значения на каких-то двух противоположных наборах длины $2k+2$, содержащих $k+1$ нулевую и $k+1$ единичную компоненты. Без ограничения общности это наборы $(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1})$ и $(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1})$. Если $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 0$, то из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{k+1}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k+1}) = xy$,

$$\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k}, xy, xy) = x \vee y$$

и

$$\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \underbrace{x \vee y, \ldots, x \vee y}_{k}, x \vee yz, x \vee yz) = x \vee y\overline{z}; \qquad (1)$$

если же $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 1$, то из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{k+1}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k+1}) = x \vee y$,

$$\varphi(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k}, x \vee y, x \vee y) = xy$$

и выполнено соотношение (1). Таким образом, $\{x \vee y\overline{z}, xy\} \subseteq A$, следовательно, $T_{01} = [\{x \vee y\overline{z}, xy\}] \subseteq A$ (равенство $T_{01} = [\{x \vee y\overline{z}, xy\}]$ установлено, например, в [13, с. 41]). Отсюда и из соотношения $A \subseteq T_{01}$ получаем, что $A = T_{01}$, т. е. любую булеву функцию $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_{01} можно выразить формулой ϕ_h над множеством $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$. Тогда существует схема S_h в базисе $B_5(k)$, состоящая только из входных переменных $x_1, \dots, x_n$ и φ-элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу ϕ_h.

На наборе $(\tilde{\alpha}^n)$ на всех $2k+2$ входах и на выходе каждого элемента схемы S_h в силу условия (i) возникнет значение α, где $\alpha = 0, 1$. Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы S_h есть не менее одного и не более k неисправных. Из всех элементов этой схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный «нижний» элемент E, ниже которого в схеме S_h не существует элемента с указанным свойством (это можно сделать, так как схема S конечна и не содержит ориентированных циклов). Пусть значение на выходе элемента E, если он неисправен, либо значение на произвольном неисправном входе элемента E, если выход этого элемента исправен, равно $\overline{\delta}$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Докажем, что значение на выходе этого элемента на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h равно $\overline{\delta}$. Если неисправен выход элемента E, то утверждение очевидно. Если же указанный выход исправен, то хотя бы один из входов элемента E неисправен и значение на нём равно $\overline{\delta}$. Тогда на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ значения не менее чем на одном и не более чем на k входах этого элемента в схеме S_h отличны от «правильных», т. е. от δ, поскольку всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу условия (ii) значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S равно $\overline{\delta}$, что и требовалось доказать.

Далее изменение значения на выходе элемента E на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h с «правильного» значения δ на $\overline{\delta}$ пройдёт по цепочке до выхода схемы S_h (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и условие (ii)). Таким образом, неисправность схемы S_h будет обнаружена на наборе $(\tilde{\delta}^n)$. Отсюда следует, что данная схема k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{0}^n, \tilde{1}^n)\}$ является для неё k-проверяющим тестом.

Пусть $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $f'(\tilde{x}^n) = f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$. Тогда $\tilde{\sigma}_0 = (\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n)$,

$$f'(\tilde{0}^n) = f(0^{\sigma_1}, \dots, 0^{\sigma_n}) = f(\overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_n) = f(\tilde{\sigma}_0) = 0,$$
$$f'(\tilde{1}^n) = f(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1,$$

поэтому $f'(\tilde{x}^n) \in T_{01}$. Значит, существует k-неизбыточная схема $S_{f'}$ в базисе $B_5(k)$, реализующая функцию f' и допускающая k-проверяющий тест из наборов $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ в случае $\sigma_i = 1$ подадим на вход данной схемы, отвечающий переменной x_i, саму эту переменную, а в случае $\sigma_i = 0$ соединим каждый вход каждого элемента схемы $S_{f'}$, на который подавалась переменная x_i, с выходом (своего) инвертора, на вход которого подадим переменную x_i. Полученную схему (с тем же выходным элементом, что и у схемы $S_{f'}$) обозначим через S; легко видеть, что на её выходе реализуется функция $f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}) = f(\tilde{x}^n)$.

Заметим, что неисправность на входе и/или выходе каждого «добавленного» инвертора схемы S равносильна некоторой неисправности на входе элемента, соединённого с выходом этого инвертора. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхемы $S_{f'}$. На наборе $\tilde{\sigma}_1$ на все входы подсхемы $S_{f'}$ по построению поступят единицы, а на наборе $\tilde{\sigma}_0$ — нули. Множество $\{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$ позволяет обнаружить любую неисправность не более k входов/выходов элементов в этой подсхеме. Отсюда следует, что схема S является k-неизбыточной и допускает k-проверяющий тест из наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Любую палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, отличную от константы 0, можно реализовать схемой в базисе $B_5(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-проверяющий тест длины 2 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы.*

Доказательство. Существуют такие два противоположных набора длины n, на каждом из которых функция f принимает значение 1, поскольку $f \not\equiv 0$. Обозначим тот из них, первая компонента которого равна единице, через $\tilde{\sigma}_1$, а другой — через $\tilde{\sigma}_0$. Пусть $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\hat{f}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1$. Тогда $\sigma_1 = 1$, $\tilde{\sigma}_0 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$,

$$\hat{f}(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus \overline{\sigma}_1 \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$
$$\hat{f}(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus \sigma_1 \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

поэтому $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ — не палиндромная функция. Тогда в силу леммы 4 существует k-неизбыточная схема S' в базисе $B_5(k)$, реализующая функцию $\hat{f}$ и допускающая k-проверяющий тест из наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Соединим выход данной схемы со входом ψ-элемента E, отвечающим первой переменной, а на все остальные входы этого элемента подадим переменную x_1. Выход элемента E объявим выходом полученной схемы, которую обозначим через S. В силу свойства (iii) она реализует функцию

$$\psi(\hat{f}(\tilde{x}^n), \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k}) = \hat{f}(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n).$$

При отсутствии неисправностей в схеме S в силу равенств $\hat{f}(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\sigma_1 = 1$ и $\hat{f}(\tilde{\sigma}_0) = 0$ на все входы элемента E на наборе $\tilde{\sigma}_1$ поступят единицы, а на наборе $\tilde{\sigma}_0$ — нули. Если выход элемента E исправен, а хотя бы один из его входов или из входов/выходов элементов подсхемы S' неисправен, то хотя бы на одном из этих наборов не менее чем на одном и не более чем на k входах элемента E возникнут «неправильные» значения, а тогда в силу свойства (iv) значение на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, изменится, поэтому неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$. Наконец, неисправность типа 0 на выходе элемента E обнаруживается на любом из этих двух наборов, так как $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Поэтому схема S является k-неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе её выходного элемента, и допускает k-проверяющий тест из наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ относительно неисправностей указанного вида. Лемма 5 доказана. □

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция или } f \equiv 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 1. Равенство $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f) = 0$ в случаях, когда f — тождественная функция и $f \equiv 0$, следует из лемм 1 и 2 соответственно. Если же функция f не тождественная и отлична от константы 0, то неравенство $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f) \geqslant 2$ вытекает из леммы 3, а неравенство $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f) \leqslant 2$ — из лемм 4 и 5. Теорема 1 доказана. □

Лемма 6. *Не существует схем в базисе $B_5(k)$, реализующих константу 1 и k-неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Доказательство. Выход любой схемы в базисе $B_5(k)$, реализующей константу 1, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 1 на выходе этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу 1, т. е. исходная схема k-избыточна. Лемма 6 доказана. $\square$

Очевидно, что никакая тождественная функция не является палиндромной, а константа 0 является палиндромной функцией.

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 1, справедливо равенство*

$$D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция,} \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \text{ — не тождественная и} \\ & \text{не палиндромная функция,} \\ 3, & \text{если } f \text{ — палиндромная функция и } f \not\equiv 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 3$.*

Доказательство теоремы 2. Вместо $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу леммы 6. Равенства $D(f) = 0$, если функция f тождественная, и $D(f) = 1$, если $f \equiv 0$, следуют из лемм 1 и 2 соответственно. В случае, когда функция f не тождественная и не палиндромная, неравенство $D(f) \geqslant 2$ следует из леммы 3, а неравенство $D(f) \leqslant 2$ — из леммы 4.

Пусть f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0, 1$. В силу леммы 5 функцию f можно реализовать схемой S в базисе $B_5(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-проверяющий тест длины 2 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы. Добавим в этот тест любой двоичный набор длины n, на котором функция f принимает значение 0. На нём обнаруживается неисправность типа 1 на выходе выходного элемента схемы S (возможно, при наличии в ней других неисправных входов/выходов элементов). Поэтому данная схема k-неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов и допускает k-проверяющий тест длины не более 3 относительно неисправностей указанного вида. Отсюда следует, что $D(f) \leqslant 3$.

Докажем, неравенство $D(f) \geqslant 3$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leqslant 2$. В силу леммы 3 имеем $D(f) \geqslant 2$, поэтому $D(f) = 2$. Значит, существует k-неизбыточная схема S' в базисе $B_5(k)$, реализующая функцию f и допускающая k-проверяющий тест из каких-то двух наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — все существенные переменные функции f. Предположим, что i_j-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \ldots, s\}$ и равны α. Переменная x_{i_j} обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S', поскольку $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$. Тогда неисправность типа α этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$; противоречие. Следовательно, наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1-й, …, i_s-й компонент.

Далее, пусть $\tilde{\pi}_1'$ — набор, противоположный набору $\tilde{\pi}_1$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_1')$ в силу палиндромности функции f. Наборы $\tilde{\pi}_1'$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают в i_1-й, $\ldots$, i_s-й компонентах, а функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит только от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, поэтому $f(\tilde{\pi}_1') = f(\tilde{\pi}_2)$. Таким образом, $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда следует, что неисправность типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе выходного элемента схемы S' нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, т. е. множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ не является k-проверяющим тестом для этой схемы. Полученное противоречие означает, что $D(f) \geqslant 3$. Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание 2. Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (I)}}(f)$ и $D^{B_5(k)}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ в теоремах 1 и 2 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, а ψ-элемент — только в построении схем, реализующих отличные от нуля палиндромные функции (причём в единственном числе).

Диагностические тесты

Пусть $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$, $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ — булевы функции, удовлетворяющие следующим условиям при $\alpha = 0, 1$:

(v) $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha$;

(vi) на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, кроме него самого, функция ξ принимает значение $\overline{\alpha}$;

(vii) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\rho}_\alpha = \left(\tilde{\alpha}^{k+1}, \tilde{\overline{\alpha}}^{2k+1}\right)$, функция ξ принимает значение α;

(viii) $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1$;

(ix) на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, кроме него самого, функция η принимает значение 0;

(x) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\nu}_\alpha = \left(\tilde{\alpha}^{2k+1}, \tilde{\overline{\alpha}}^{2k+1}\right)$, функция η принимает значение α.

На всех остальных двоичных наборах длины $3k + 2$ (длины $4k + 2$) функция ξ (соответственно, η) может принимать произвольные значения.

Покажем, что каждая из функций $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$, $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что для любого $\alpha \in \{0, 1\}$ набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ отличается от каждого из наборов $\left(\tilde{\overline{\alpha}}^{3k+2}\right)$, $\tilde{\rho}_\alpha$ по крайней мере в $2k+1$ компоненте, поэтому любой набор, k-соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, отличается от каждого из наборов $\left(\tilde{\overline{\alpha}}^{3k+2}\right)$, $\tilde{\rho}_\alpha$ по крайней мере в $k+1$ компоненте, т. е. не может быть k-соседним ни с одним из этих наборов. Набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ отличается от набора $\tilde{\rho}_{\overline{\alpha}}$ в $k+1$ компоненте, поэтому не является k-соседним с этим набором. Кроме того, наборы $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\rho}_1$ различаются в $3k+2$ компонентах, поэтому никакой набор, k-соседний с набором $\tilde{\rho}_0$, не может быть k-соседним с набором $\tilde{\rho}_1$. Из приведённых рассуждений и условий (v)–(vii) следует, что множества наборов, на которых функция $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Далее, для любого $\alpha \in \{0, 1\}$ набор $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$ отличается от набора $\tilde{\nu}_1$ в $2k+1$ компоненте, поэтому никакой набор, k-соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, не может быть k-соседним с набором $\tilde{\nu}_1$. Наборы $\tilde{\nu}_0$ и $\tilde{\nu}_1$ различаются в $4k+2$ компонентах, поэтому никакой набор, k-соседний с набором $\tilde{\nu}_0$, не может быть k-соседним с набором $\tilde{\nu}_1$. Кроме того, любые два из наборов $(\tilde{0}^{4k+2})$, $(\tilde{1}^{4k+2})$ и $\tilde{\nu}_0$ различаются по крайней мере в $2k+1$ компоненте, поэтому не являются k-соседними. Из приведённых рассуждений и условий (viii)–(x) следует, что множества наборов, на которых функция $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис $B_6(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2}), \overline{x}, 0\}$, где $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — булева функция из базиса $B_5(k)$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ (вида $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$), будем называть *ξ-элементом* (соответственно, *η-элементом*).

По аналогии с леммами соответственно 1, 2, 3 и 6 доказываются следующие утверждения.

Лемма 7. *Любую тождественную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе $B_6(k)$, допускающей k-диагностический тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Лемма 8. *В случае $f \equiv 0$ справедливы равенства $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (I)}}(f) = 0$, $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = 1$.*

Лемма 9. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе $B_6(k)$, реализующей не тождественную и отличную от константы 0 булеву функцию*

$f(\tilde{x}^n)$, любой k-диагностический тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы два набора.

Лемма 10. *Не существует схем в базисе $B_6(k)$, реализующих константу 1 и k-неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Через $I_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборе $\tilde{\sigma}$ и значение 0 на всех остальных двоичных наборах длины n.

Лемма 11. *Любую не палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, принимающую значения 0 и 1 на каких-то противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ соответственно, можно реализовать схемой в базисе $B_6(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$.*

Доказательство. Пусть $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$. Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \tag{2}$$
$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \tag{3}$$

из которых следует, что функция $f'(\tilde{x}^n)$ не является палиндромной.

Построим схему S в базисе $B_6(k)$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рис. 1). Схема S состоит из $3k+2$ подсхем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$ и выходного ξ-элемента E, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, $(3k+2)$-й вход — с выходом подсхемы S_{3k+2}). Каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, а каждая из подсхем $S_{k+2}, \ldots, S_{3k+2}$ — функцию $f'(\tilde{x}^n)$, причём каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$ является k-неизбыточной схемой, состоящей только из φ-элементов и инверторов и допускающей k-проверяющий тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов; существование таких схем следует из леммы 4. При этом используются тот факт, что функции f и f' не являются палиндромными, и соотношения $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$, $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, а также (2) и (3).

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Всюду ниже в доказательстве леммы будет предполагаться, что α — произвольное число из множества $\{0, 1\}$. На любом двоичном наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n, на котором функция f принимает значение α, отличном от набора $\tilde{\sigma}_\alpha$, на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ возникнет значение α, а на выходе каждой

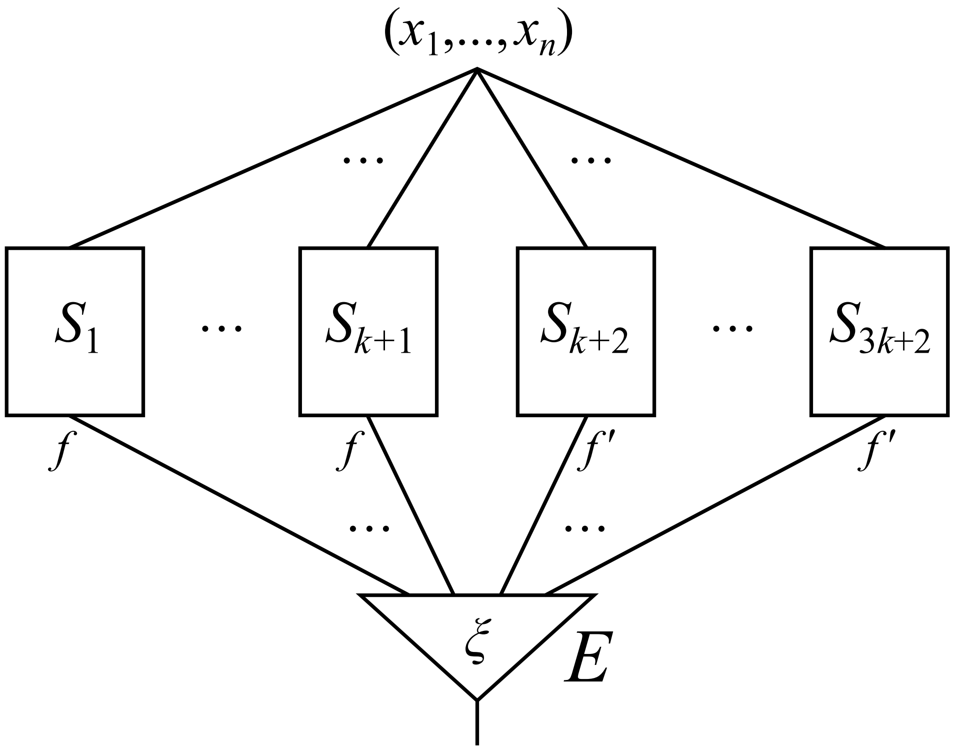

Рис. 1. Схема S

из подсхем $S_{k+2},\ldots,S_{3k+2}$ — значение

$$f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \overline{\alpha},$$

поскольку $\tilde{\tau}_\alpha \notin \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ (действительно, $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$ по определению и $\tilde{\tau}_\alpha \neq$ $\neq \tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}}$ в силу того, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \neq f(\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}})$). Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\rho}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\xi(\tilde{\rho}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (vii). Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_\alpha$ на выходе каждой из подсхем $S_1,\ldots,S_{k+1}$ возникнет значение $f(\tilde{\sigma}_\alpha) = \alpha$, а на выходе каждой из подсхем $S_{k+2},\ldots,S_{3k+2}$ — значение

$$f'(\tilde{\sigma}_\alpha) = f(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_\alpha}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}}}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \alpha.$$

Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$ в силу условия (v). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента E схемы исправен. Неисправность на i-м входе элемента E равносильна неисправности такого же типа на выходе выходного элемента подсхемы S_i, где i — произвольный индекс от 1 до

$3k+2$. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$. При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E. Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α, отличном от набора $\tilde{\sigma}_\alpha$, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\rho}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (vii).

На наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ на входы элемента E поступят наборы $\tilde{\pi}_0$ и $\tilde{\pi}_1$ длины $3k+2$, k-соседние с наборами $(\tilde{0}^{3k+2})$ и $(\tilde{1}^{3k+2})$ соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{3k+2})$, $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{3k+2})$, поскольку множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является k-проверяющим тестом для каждой из k-неизбыточных схем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$ (значение на выходе любой из этих схем, содержащей хотя бы один неисправный элемент, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$). Следовательно, значение на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ в силу условий (v), (vi). Таким образом, на выходе схемы S возникнет функция неисправности, отличающаяся от функции f по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией f на всех наборах длины n, отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$, поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен. Лемма 11 доказана. □

Лемма 12. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, для которой существуют такие два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n, что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, можно реализовать схемой в базисе $B_6(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$, а в случае $k = 1$ — множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$.*

Доказательство. Пусть $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$, $f'' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$. Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) = 1 \oplus 1 = 0, \tag{4}$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1, \qquad (5)$$
$$f''(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \qquad (6)$$
$$f''(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \qquad (7)$$

из которых следует, что функции $f'(\tilde{x}^n)$ и $f''(\tilde{x}^n)$ не являются палиндромными.

Построим схему S в базисе $B_6(k)$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рис. 2). Схема S состоит из $4k+2$ подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$ и выходного η-элемента E, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, $(4k+2)$-й вход — с выходом подсхемы S_{4k+2}). Каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ реализует функцию $f'(\tilde{x}^n)$, а каждая из подсхем $S_{2k+2}, \ldots, S_{4k+2}$ — функцию $f''(\tilde{x}^n)$, причём каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$ является k-неизбыточной схемой, состоящей только из φ-элементов и инверторов и допускающей k-проверяющий тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов; существование таких схем следует из леммы 4, того, что функции f' и f'' не являются палиндромными, и соотношений (4)–(7).

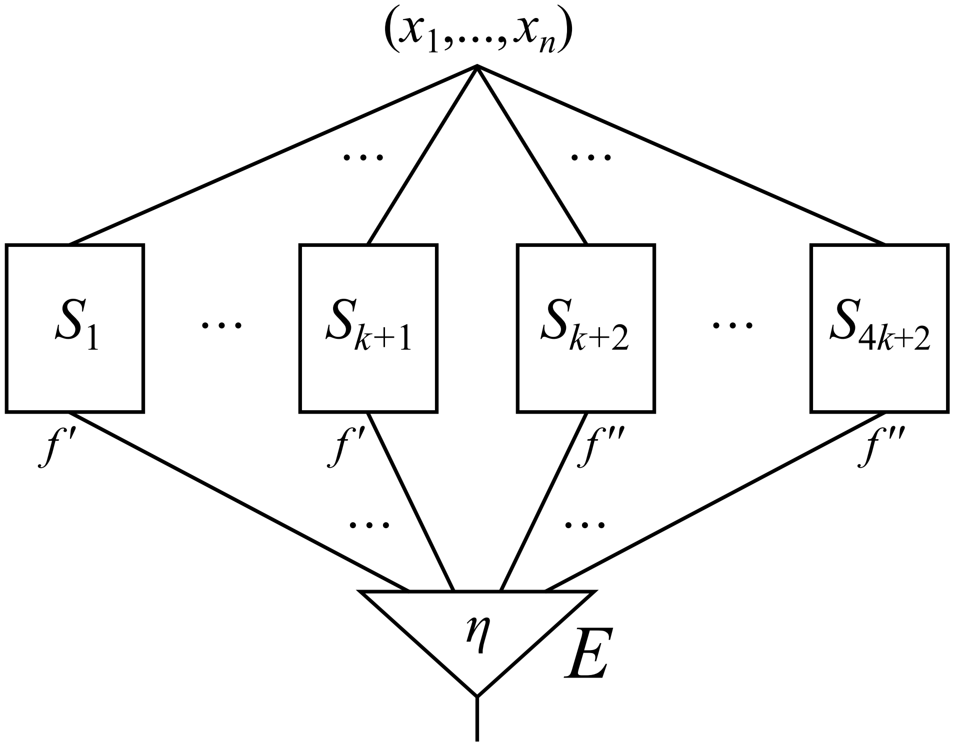

Рис. 2. Схема S

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Всюду ниже в доказательстве леммы будет предполагаться, что α — произвольное число из множества $\{0,1\}$. На любом двоичном наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n, на котором функция f принимает значение α, отличном от наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ возникнет значение

$$f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \oplus 0 = \alpha,$$

а на выходе каждой из подсхем $S_{2k+2}, \ldots, S_{4k+2}$ — значение

$$f''(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 1 = \overline{\alpha}.$$

Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\nu}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\eta(\tilde{\nu}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (x). Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_\alpha$ на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$ возникнет значение α в силу (4), (6) при $\alpha = 0$ и (5), (7) при $\alpha = 1$. Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1 = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$ в силу условия (viii). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента E схемы исправен. Неисправность на i-м входе элемента E равносильна неисправности такого же типа на выходе выходного элемента подсхемы S_i, где i — произвольный индекс от 1 до $4k+2$. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$. При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E. Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α, отличном от наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\nu}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (x).

На наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ на входы элемента E поступят наборы $\tilde{\pi}_0$ и $\tilde{\pi}_1$ длины $4k+2$, k-соседние с наборами $(\tilde{0}^{4k+2})$ и $(\tilde{1}^{4k+2})$ соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{4k+2})$, $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{4k+2})$, поскольку множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является k-проверяющим тестом для каждой из k-неизбыточных схем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$. Следовательно, значение на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ в силу условий (viii), (ix). Таким образом, на выходе схемы S возникнет функция неисправности, отличающаяся от функции f по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией f на всех наборах длины n, отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$, поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-диагностический тест $T = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен.

Пусть $k = 1$. Если при отсутствии неисправностей в схеме S на некотором входе/выходе некоторого элемента этой схемы, кроме выхода элемента E, на двух наборах из множества T возникает одно и то же значение β, то неисправность типа β указанного входа/выхода нельзя обнаружить на наборах из данного множества, однако это противоречит тому, что T является k-диагностическим тестом для k-неизбыточной схемы S. Поэтому на любом входе/выходе любого элемента схемы S, за исключением выхода элемента E, на двух наборах из множества T возникают различные значения. Тогда неисправность типа γ, $\gamma \in \{0, 1\}$, любого входа/выхода любого элемента этой схемы, кроме выхода элемента E, обнаруживается только на том наборе $\tilde{\sigma}'$ из множества T, на котором значение на указанном входе/выходе в отсутствие неисправностей равно $\overline{\gamma}$, и не обнаруживается на другом наборе $\tilde{\sigma}''$ из данного множества. Значит, при рассматриваемой неисправности на наборе $\tilde{\sigma}'$ схема S выдаст значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}')$, а на наборе $\tilde{\sigma}''$ — «правильное» значение $f(\tilde{\sigma}'')$.

Приведённые выше рассуждения показывают, что любая функция неисправности схемы S отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ ровно на одном наборе из множества T и совпадает с ней на всех остальных наборах, т. е. принадлежит множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Лемма 12 доказана. □

Теорема 3. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция или } f \equiv 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 3. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 3. Равенство $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (I)}}(f) = 0$ в случаях, когда f — тождественная функция и $f \equiv 0$, следует из лемм 7 и 8 соответственно. Если же функция f не тождественная и отлична от константы 0, то неравенство $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (I)}}(f) \geqslant 2$ вытекает из леммы 9, а неравенство $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (I)}}(f) \leqslant 2$ — из лемм 11 и 12. Стоит лишь отметить, что если f — не палиндромная функция, то существуют такие два противоположных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n, для которых $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, а в случае, когда f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0$, существуют такие два противоположных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n, что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Теорема 3 доказана. $\square$

Лемма 13. *Любую не палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать схемой в базисе $B_6(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-диагностический тест длины не более 4 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

Доказательство. Существуют такие противоположные наборы $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. По лемме 11 функцию f можно реализовать схемой S в базисе $B_6(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Если же указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно, единице) и тем самым отличная от функции f, поскольку константы 0 и 1 являются палиндромными функциями. Таким образом, данная схема k-неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$.

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$ от константы 1, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \not\equiv 1$, а также функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ от константы 0, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$. В случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \not\equiv 1$ добавим во множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ произвольный набор длины n, на котором функция $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$ принимает значение 0, а в случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$ добавим в полученное множество произвольный набор длины n, на котором функция $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ принимает значение 1. Итоговое множество будет являться k-диагностическим тестом длины не более 4 для схемы S относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Лемма 13 доказана. $\square$

Лемма 14. *Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, где $s \geqslant 2$, — все существенные переменные булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, а двоичные наборы $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, $\tilde{\pi}_3$ длины n и числа $\alpha, \gamma \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$ таковы, что i_j-я компонента каждого из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ равна γ, $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$, а $f(\tilde{\pi}_3) = \overline{\alpha}$. Пусть схема S в базисе $B_6(k)$ является k-неизбыточной, реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, и множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ является для неё k-диагностическим тестом относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Тогда на любом* *наборе длины n, i_j-я компонента которого равна γ, функция f принимает значение α.*

Доказательство. Переменная x_{i_j} обязана подаваться хотя бы на один вход v хотя бы одного элемента схемы S, поскольку $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$. Тогда неисправность типа γ этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, значит, она должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_3$. Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности g схемы S справедливы равенства $g(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_1) = \alpha$, $g(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$ и $g(\tilde{\pi}_3) = \overline{f}(\tilde{\pi}_3) = \alpha$, т. е. функцию g нельзя отличить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, $\tilde{\pi}_3$ от константы α, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа α на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ является k-диагностическим тестом для схемы S, это может быть только в том случае, когда $g \equiv \alpha$.

При подаче на входы схемы S произвольного двоичного набора длины n, i_j-я компонента которого равна γ, на вход v поступает значение γ, поэтому функция g, возникающая на выходе схемы при неисправности типа γ этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f. С учётом тождества $g \equiv \alpha$ получаем, что на любом наборе длины n, i-я компонента которого равна γ, функция f принимает значение α. Лемма 14 доказана. □

В следующей теореме рассмотрен случай неисправностей на входах и выходах элементов при $k = 1$, т. е. когда неисправным может быть только один вход/выход только одного элемента.

Теорема 4. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 1, справедливо равенство*

$$D^{B_6(1)}_{\text{ЕД (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция,} \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \equiv \overline{x}_i \text{ для некоторого } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ 3, & \text{если } f \text{ — несамодвойственная функция и } f \not\equiv 0, \\ 4, & \text{если } f \text{ — самодвойственная функция} \\ & \text{и } f \notin \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_6(1)}_{\text{ЕД (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 4. *Для любого $n \geqslant 3$ справедливо равенство $D^{B_6(1)}_{\text{ЕД (IO)}}(n) = 4$.*

Для доказательства следствия 4 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ является самодвойственной.

Доказательство теоремы 4. Вместо $D^{B_6(1)}_{\text{ЕД (IO)}}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу леммы 10. Равенства $D(f) = 0$, если функция f тождественная, и $D(f) = 1$, если $f \equiv 0$, следуют из лемм 7 и 8 соответственно. Пусть $f \equiv \overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда функцию f можно реализовать схемой в базисе $B_6(1)$, состоящей из одного инвертора, на вход которого подаётся переменная x_i. Очевидно, что у данной схемы есть только две функции неисправности — константы 0 и 1, которые можно отличить друг от друга и от функции f на множестве, состоящем из любых двух двоичных наборов длины n, i-я компонента одного из которых равна единице, а другого — нулю. Отсюда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. С другой стороны, $D(f) \geqslant 2$ в силу леммы 9, поэтому $D(f) = 2$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, не принадлежащая множеству $\{0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$. Докажем неравенство $D(f) \geqslant 3$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leqslant 2$. В силу леммы 9 имеем $D(f) \geqslant 2$, поэтому $D(f) = 2$. Значит, существует неизбыточная схема S в базисе $B_6(1)$, реализующая функцию f и допускающая единичный диагностический тест из каких-то двух наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ длины n. Заметим, что

$$f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2), \tag{8}$$

поскольку в противном случае неисправность типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе выходного элемента схемы S нельзя было бы обнаружить ни на одном из этих двух наборов. Пусть x_i — произвольная существенная переменная функции f. Переменная x_i обязана подаваться хотя бы на один вход v хотя бы одного элемента схемы S. Если i-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают и равны β, то неисправность типа β данного входа нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$; противоречие. Значит, i-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ равны соответственно γ и $\overline{\gamma}$ для некоторого $\gamma \in \{0, 1\}$. Тогда неисправность типа γ входа v обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_2$ и не обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_1$, т. е. при рассматриваемой неисправности на наборе $\tilde{\pi}_1$ схема S выдаст значение $f(\tilde{\pi}_1)$, а на наборе $\tilde{\pi}_2$ — значение $\overline{f}(\tilde{\pi}_2)$, которое равно $f(\tilde{\pi}_1)$ в силу (8). Таким образом, полученную функцию неисправности g_1 схемы S нельзя отличить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ от константы $f(\tilde{\pi}_1)$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе её выходного элемента. С учётом того, что $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ — единичный диагностический тест для схемы S, это может быть только в том случае, когда $g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$. Аналогично при неисправности типа $\overline{\gamma}$ входа v на выходе схемы S возникнет функция неисправности g_2, принимающая на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ значения $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ и $f(\tilde{\pi}_2) = \overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ соответственно. Её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ на выходе её выходного элемента, поэтому $g_2 \equiv \overline{f}(\tilde{\pi}_1)$.

Далее заметим, что при подаче на входы схемы S произвольного двоичного набора длины n, i-я компонента которого равна γ, на вход v поступает значение γ, поэтому функция g_1, возникающая на выходе схемы при неисправности типа γ этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f. С учётом тождества $g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$ получаем, что на любом наборе длины n, i-я компонента которого равна γ, функция f принимает значение $f(\tilde{\pi}_1)$. Аналогично на любом наборе длины n, i-я компонента которого равна $\overline{\gamma}$, функция g_2 принимает такое же значение, как и функция f. С учётом тождества $g_2 \equiv \overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ получаем, что на любом таком наборе функция f принимает значение $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$. Но тогда легко проверить, что на любом наборе длины n функция f принимает такое же значение, как и функция $x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$, т. е. $f \equiv x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$. Это означает, что либо $f \equiv x_i$, либо $f \equiv \overline{x}_i$, но в таком случае $f \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$; противоречие. Неравенство $D(f) \geqslant 3$ доказано.

Пусть f — несамодвойственная функция и $f \not\equiv 0, 1$. Докажем, что $D(f) \leqslant 3$; тогда с учётом неравенства $D(f) \geqslant 3$ будет установлено равенство $D(f) = 3$. Функция f принимает одно и то же значение на каких-то двух противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Тогда по лемме 12 (при $k = 1$) функцию f можно реализовать схемой S' в базисе $B_6(1)$, неизбыточной и допускающей единичный диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. В случае же, если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S' возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно, единице). Таким образом, данная схема неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S' на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$.

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию f от константы 1. Добавим к этим наборам ещё один произвольный набор длины n, на котором функция f принимает значение 0. Полученное множество будет являться единичным диагностическим тестом длины 3 для схемы S', откуда следует, что $D(f) \leqslant 3$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 0$. Функция $\overline{f}$ принимает значение 1 на каких-то противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, поэтому по лемме 12 (при $k = 1$) её можно реализовать схемой $\hat{S}'$ в базисе $B_6(1)$, неизбыточной и допускающей единичный диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента E схемы исправен, причём все функции неисправности схемы $\hat{S}'$ принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Соединим выход этой схемы со входом инвертора I, выход которого объявим выходом полученной схемы; обозначим её через S'. Тогда при неисправности любого входа/выхода любого элемента подсхемы $\hat{S}'$, кроме выхода элемента E, на выходе схемы S' возникнет одна из функций неисправности

$$\overline{\overline{f} \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}} = f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0},$$
$$\overline{\overline{f} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}} = f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1},$$

а при произвольной неисправности входа или выхода элемента I либо выхода выходного элемента подсхемы $\hat{S}'$ — одна из булевых констант 0 или 1. Таким образом, схема S' неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности данной схемы на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$.

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	0	0	1	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию f от константы 0. Добавим к этим наборам ещё один произвольный набор длины n, на котором функция f принимает значение 1. Полученное множество будет являться единичным диагностическим тестом длины 3 для схемы S', откуда следует, что $D(f) \leqslant 3$. Случай 2 разобран. Равенство $D(f) = 3$ доказано.

Пусть теперь $f(\tilde{x}^n)$ — самодвойственная функция и $f \notin \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$. Неравенство $D(f) \leqslant 4$ следует из леммы 13 (при $k = 1$) и того, что функция f, очевидно, не является палиндромной. Докажем неравенство $D(f) \geqslant 4$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leqslant 3$. Выше было установлено, что $D(f) \geqslant 3$, поэтому $D(f) = 3$. Значит, существует неизбыточная схема S'' в базисе $B_6(1)$, реализующая функцию f и допускающая единичный диагностический тест из каких-то трёх наборов длины n. Данная функция не может принимать одинаковое значение β

на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы β, возникающей при неисправности типа β на выходе выходного элемента схемы S''. Поэтому на каких двух наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ из теста функция f принимает значение α, а на третьем наборе $\tilde{\pi}_3$ из теста — значение $\overline{\alpha}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — все существенные переменные функции f. Предположим, что наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1-й, …, i_s-й компонент. Пусть $\tilde{\pi}'_1$ — набор, противоположный набору $\tilde{\pi}_1$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) \neq$ $\neq f(\tilde{\pi}'_1)$ в силу самодвойственности функции f. Наборы $\tilde{\pi}'_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают в i_1-й, …, i_s-й компонентах, а функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит только от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, поэтому $f(\tilde{\pi}'_1) = f(\tilde{\pi}_2)$. Таким образом, $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2)$, однако это противоречит тому, что $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$. Следовательно, наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают хотя бы в одной из i_1-й, …, i_s-й компонент; обозначим номер этой компоненты через i_j, а её значение в каждом из указанных наборов — через γ. Тогда выполнены все условия леммы 14 (при $S = S''$), из которой следует, что на любом наборе длины n, i_j-я компонента которого равна γ, функция f принимает значение α. В таком случае на любом наборе длины n, i_j-я компонента которого равна $\overline{\gamma}$, данная функция в силу её самодвойственности принимает значение $\overline{\alpha}$. Но тогда легко проверить, что на любом наборе длины n функция f принимает такое же значение, как и функция $x_i \oplus \gamma \oplus \alpha$, т. е. $f \equiv x_i \oplus \gamma \oplus \alpha$. Это означает, что либо $f \equiv x_i$, либо $f \equiv \overline{x}_i$, поэтому $f \in \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$; противоречие. Неравенство $D(f) \geqslant 4$ доказано.

В итоге получаем, что $D(f) = 4$. Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 4$ при $n \geqslant 3$, причём в случае $k \geqslant 2$ доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = 4$, стремится к 1 при $n \to \infty$.*

Доказательство. Вместо $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (IO)}}(n)$, $D^{B_6(k)}_{k\text{-Д (IO)}}(f)$ для краткости будем писать соответственно $D(n)$, $D(f)$. Неравенство $D(n) \geqslant 4$ при $n \geqslant 3$ вытекает из следствия 4 (любой k-диагностический тест для любой k-неизбыточной схемы является единичным диагностическим тестом для той же схемы, которая при этом неизбыточна). Докажем неравенство $D(n) \leqslant 4$. Для этого достаточно доказать неравенство $D(f) \leqslant 4$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, для которой определено значение $D(f)$. При $f \equiv 1$ оно не определено в силу леммы 1; при $f \equiv 0$ указанное неравенство следует из леммы 8, а в случае, когда функция f не палиндромная — из леммы 13.

Пусть f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0, 1$. Тогда существуют такие два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n, что $f(\tilde{\sigma}_0) =$

$= f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. По лемме 12 функцию f можно реализовать k-неизбыточной схемой S в базисе $B_6(k)$, допускающей k-диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Если же указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно, единице). Таким образом, данная схема k-неизбыточна. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$.

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ от константы 0, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$, а также функцию f от константы 1. Добавим во множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ произвольный набор длины n, на котором функция f принимает значение 0, а в случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$ добавим в полученное множество произвольный набор длины n, на котором функция $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ принимает значение 1. Итоговое множество будет являться k-диагностическим тестом длины не более 4 для схемы S, откуда следует, что $D(f) \leqslant 4$. Неравенство $D(n) \leqslant 4$, а вместе с ним равенство $D(n) = 4$ при $n \geqslant 3$ доказаны.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ и f — произвольная булева функция от n переменных, не принадлежащая множеству $U = \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, для которой $D(f) \leqslant 3$. Докажем, что $f \in F_n$, где F_n — множество булевых функций от n переменных, каждая из которых при подстановке вместо каких-то двух её переменных каких-то булевых констант становится равна некоторой булевой константе. Из теоремы 4 следует, что $D(f) \geqslant 3$, поэтому $D(f) = 3$. Значит, существует неизбыточная схема S' в базисе $B_6(k)$, реализующая функцию f и допускающая k-диагностический тест из каких-то трёх наборов длины n. Данная функция не может принимать одинаковое значение β на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы β, возникающей при неисправности типа β на выходе выходного элемента схемы S'. Поэтому на каких двух наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ из теста функция f принимает значение α, а на третьем наборе $\tilde{\pi}$ из теста — значение $\overline{\alpha}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — все существенные переменные функции f. Ясно, что $s \geqslant 2$. Если i_j-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \ldots, s\}$, то выполнены все условия леммы 14 (при $S = S'$, $\tilde{\pi}_3 = \tilde{\pi}$).

Из неё следует, что на любом наборе длины n, i_j-я компонента которого равна γ, функция f принимает значение α. Но тогда при подстановке вместо переменной x_{i_j} константы γ, а вместо любой другой переменной из множества $x_1, \ldots, x_n$ произвольной булевой константы данная функция становится равна константе α, откуда вытекает, что $f \in F_n$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1-й, …, i_s-й компонент. Наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}_1$ различаются хотя бы в одной из этих компонент, поскольку $f(\tilde{\pi}) \neq f(\tilde{\pi}_1)$. Пусть они различаются в i_q-й компоненте, $q \in \{1, \ldots, s\}$, причём i_q-е компоненты наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}_1$ равны π_q и $\overline{\pi}_q$ соответственно. Тогда i_q-я компонента набора $\tilde{\pi}_2$ равна π_q. Аналогично наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в какой-то i_t-й компоненте, $t \in \{1, \ldots, s\}$, и их i_t-е компоненты равны π_t и $\overline{\pi}_t$ соответственно, где $\pi_t \in \{0, 1\}$, а i_t-я компонента набора $\tilde{\pi}_1$ равна π_t. При этом $t \neq q$, так как в противном случае i_q-я компонента набора $\tilde{\pi}_2$ была бы равна одновременно π_q и $\overline{\pi}_q$. Составим для наглядности таблицу значений i_q-й и i_t-й компонент наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}$.

	i_q	i_t
$\tilde{\pi}_1$	$\overline{\pi}_q$	π_t
$\tilde{\pi}_2$	π_q	$\overline{\pi}_t$
$\tilde{\pi}$	π_q	π_t

Каждая из переменных x_{i_q}, x_{i_t} обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S', поскольку $x_{i_q}, x_{i_t} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$; обозначим эти входы через v_q и v_t соответственно. Тогда неисправность типа π_q входа v_q нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}$, так как их i_q-е компоненты равны π_q. Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_1$. Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности g_q схемы S' справедливы равенства $g_q(\tilde{\pi}_1) = \overline{f}(\tilde{\pi}_1) = \overline{\alpha}$. Если, помимо неисправности типа π_q входа v_q, в схеме S' также имеет место неисправность типа π_t входа v_t, то для получающейся функции неисправности g_{qt} данной схемы справедливы равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_1) = g_q(\tilde{\pi}_1) = \overline{\alpha}$, поскольку на наборе $\tilde{\pi}_1$ на вход v_t в случае исправности этого входа и неисправности типа π_q входа v_q подаётся i_t-я компонента набора $\tilde{\pi}_1$, которая равна π_t и, следовательно, неисправность типа π_t входа v_t никак не отразится на значении, выдаваемой схемой S' на этом наборе.

Далее, неисправность типа π_t входа v_t нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}$, так как их i_t-е компоненты равны π_t. Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_2$. Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности g_t схемы S' справедливы равенства $g_t(\tilde{\pi}_2) = \overline{f}(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$. Если, помимо неисправности типа π_t входа v_t, в схеме S' также имеет место неисправность типа π_q входа v_q, то для получающейся функции неисправности g_{qt} данной схемы справедливы равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_2) = g_t(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$, поскольку на наборе $\tilde{\pi}_2$ на вход v_q в случае исправности этого входа и неисправности типа π_t входа v_t подаётся i_q-я компонента набора $\tilde{\pi}_2$, которая равна π_q и, следовательно, неисправность типа π_q входа v_q никак не отразится на значении, выдаваемой схемой S' на этом наборе.

В случае отсутствия неисправностей в схеме S' на наборе $\tilde{\pi}$ на входы v_q и v_t поступают значения π_q и π_t соответственно, поскольку i_q-я (i_t-я) компонента набора $\tilde{\pi}$ равна π_q (соответственно, π_t). Поэтому одновременная неисправность входа v_q типа π_q и входа v_t типа π_t никак не отразится на значении, выдаваемой схемой S' на указанном наборе. Отсюда следуют равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) = \overline{\alpha}$.

В итоге получаем, что функция неисправности g_{qt} схемы S' принимает значение $\overline{\alpha}$ на каждом из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}$, поэтому её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы $\overline{\alpha}$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $\overline{\alpha}$ на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}\}$ является k-диагностическим тестом для схемы S', это может быть только в том случае, когда $g_{qt} \equiv \overline{\alpha}$.

Заметим, что при подаче на входы схемы S' произвольного двоичного набора длины n, i_q-я компонента которого равна π_q, а i_t-я компонента равна π_t, на вход v_q поступает значение π_q, а на вход v_t — значение π_t, поэтому функция g_{qt}, возникающая на выходе схемы при одновременной неисправности входа v_q типа π_q и входа v_t типа π_t, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f. С учётом тождества $g_{qt} \equiv \overline{\alpha}$ получаем, что на любом наборе длины n, i_q-я компонента которого равна π_q, а i_t-я компонента равна π_t, функция f принимает значение $\overline{\alpha}$. Следовательно, при подстановке вместо переменной x_{i_q} константы π_q, а вместо переменной x_{i_t} константы π_t данная функция становится равна константе $\overline{\alpha}$, т. е. $f \in F_n$, что и требовалось доказать.

Тем самым установлено, что в случае $n \geqslant 2$ произвольная булева функция f от n переменных, не принадлежащая множеству U, для которой $D(f) \leqslant 3$, принадлежит множеству F_n. Среди функций из множества U могут быть функции f от n переменных, для которых $D(f) \leqslant 3$ (и даже точно есть — см. леммы 7, 8), но все они принадлежат F_n, поскольку $U \subseteq F_n$ в силу определений этих множеств. Значит, все булевы функции f от n переменных, где $n \geqslant 2$, для которых $D(f) \leqslant 3$, принадлежат множеству F_n.

Оценим величину $|F_n|$. Пусть $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$ — подмножество множества F_n, состоящее из всех булевых функций, каждая из которых при подстановке вместо переменной x_i константы α, а вместо переменной x_j константы β, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, становится равна константе γ. Любая функция из множества $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$ принимает значение γ на любом из 2^{n-2} двоичных наборов длины n, i-я компонента которых равна α, а j-я — равна β, а на остальных $2^n - 2^{n-2}$ наборах может принимать произвольные значения, поэтому $|F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}| = 2^{2^n - 2^{n-2}}$. Любая функция из множества F_n принадлежит множеству $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$ для некоторых i, j, α, β и γ, откуда следуют соотношения

$$F_n \subseteq \bigcup_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,1\}}} F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma},$$

$$|F_n| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,1\}}} |F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}| = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,1\}}} 2^{2^n - 2^{n-2}} = C_n^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{2^n - 2^{n-2}} = \\ = 4n(n-1) \cdot 2^{2^n - 2^{n-2}},$$

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{4n(n-1) \cdot 2^{2^n - 2^{n-2}}}{2^{2^n}} = \frac{4n(n-1)}{2^{2^{n-2}}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

т. е. отношение числа булевых функций из множества F_n к общему числу булевых функций от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. В силу доказанного выше это означает, что доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D(f) \leqslant 3$, стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D(f) \geqslant 4$, стремится к 1 при $n \to \infty$. Осталось заметить, что при $f \not\equiv 1$ из неравенства $D(f) \geqslant 4$ вытекает равенство $D(f) = 4$ в силу доказанного соотношения $D(f) \leqslant 4$ для любой булевой функции f от n переменных, кроме константы 1, а $1 \in F_n$. Теорема 5 доказана. $\square$

Замечание 3. Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин $D_{k\text{-Д (I)}}^{B_6(k)}(f)$, $D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_6(k)}(f)$ и $D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_6(k)}(n)$ в теоремах 3, 4 и 5 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, ξ-элемент — только в построении схем, реализующих не палиндромные функции (теоремы 3, 5) либо самодвойственные функции (теорема 4), причём не более чем в единственном числе, а η-элемент — только в построении схем, реализующих палиндромные функции (теоремы 3, 5) либо несамодвойственные функции (теорема 4), причём не более чем в единственном числе.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: Изд-во МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. ...канд. физ.-мат. наук. — М., 2013. — 77 с.

6. Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 11. — P. 1183–1188.

7. Saluja K. K., Reddy S. M. Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. — 1975. — Vol. C-24, No. 10. — P. 995–998.

8. Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, вып. 4. — С. 87–105.

9. Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Известия вузов. Математика. — 1988. — № 7. — С. 57–64.

10. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.

11. Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1997. — № 1. — С. 12–18.

12. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 87. — 18 с.

13. Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 64 с.