



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 145 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Страховская Л.Г.

О методе конечных
суперэлементов в решении
спектральных задач

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Страховская Л.Г. О методе конечных суперэлементов в решении спектральных задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 145. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-145](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-145)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-145>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Л.Г. Страховская

**О методе конечных суперэлементов
в решении спектральных задач**

Москва — 2018

Страховская Л.Г.

О методе конечных суперэлементов в решении спектральных задач

Развивается подход к решению спектральных задач, использующий для аппроксимации задачи метод конечных суперэлементов. МКСЭ позволяет, не увеличивая размерности конечномерного аппроксимирующего пространства, повысить точность искомого решения. Конструкции МКСЭ определяют итерационный алгоритм вычисления собственных значений и собственных функций дифференциального оператора. Построено два алгоритма: с полиномиальным суперэлементом и двухуровневым суперэлементом. Проведено сравнение с МКЭ высокого порядка.

Ключевые слова: суперэлемент, спектр, оператор, алгоритм

Ludmila Glebovna Strakhovskaya

On the finite superelement method in the solution of eigenvalue problems

An approach to solving spectral problems using the finite superelement method for approximation of the problem is developed. FSEM allows without increasing the dimension of the finite-dimensional approximating space to increase the accuracy of the desired solution. The FSEM designs define an iterative algorithm for computing eigenvalues and eigenfunctions of the differential operator. There were built two algorithms using polynomial and two-level superelement. A comparison with high-order FEM was made.

Key words: superelement, spectrum, operator, algorithm

Оглавление

Введение	3
1. Схемы МКЭ высокого порядка.....	5
2. Аппроксимация МКСЭ	7
3. Итерационный алгоритм решения спектральной задачи	9
4. Двухуровневый суперэлемент	10
5. Результаты численных экспериментов	11
Заключение.....	19
Библиографический список.....	20

Введение

Вычисление собственных значений и собственных функций линейных дифференциальных операторов необходимо во многих прикладных задачах [1]. Методы решения главной спектральной задачи для краевых задач математической физики и, конкретно, для математического моделирования стационарного состояния ядерного реактора описаны в [1], [2].

Задачи на собственные значения возникают при исследовании гидродинамической устойчивости течения в каналах и пограничных слоях, используются в расчетах положения ламинарно-турбулентного перехода в аэродинамических течениях [3].

Численные методы решения спектральных задач можно условно разделить на методы, ориентированные на нахождение 1–2 главных собственных значений (значений с наибольшей действительной частью), и методы, которые подходящей дискретизацией сводят решение дифференциальной спектральной задачи к решению алгебраической проблемы собственных значений, а уже для ее решения используется соответствующая стандартная программа. Необходимо при этом использовать методы высокоточной дискретизации, которые учитывали бы свойства исследуемых уравнений и не приводили бы к матрицам большого размера [1].

Одним из таких методов является метод конечных суперэлементов (МКСЭ) [4], разработанный в 1976–1979 годах для аппроксимации диффузионной модели ядерного реактора, включающей решение главной спектральной задачи. В задаче присутствует большая пространственная разномасштабность, но учет мелкомасштабных деталей необходим. Первоначально МКСЭ – это проекционно-сеточный метод, отличающийся от стандартных конструкций метода конечных элементов (МКЭ) следующим: 1) используется шаг по пространству, большой относительно гладкости искомого решения; 2) сложные базисные функции, учитывающие мелкомасштабную структуру объекта, строятся как решение исходного уравнения со специальными граничными условиями; 3) требуется выполнение вариационного уравнения в пространстве следов, а именно, выполнение условия слабой непрерывности потока на границе суперэлемента.

В [5] описан опыт применения МКСЭ в задачах конвекции–диффузии, для решения которых разработан двухуровневый вариант на неструктурированной треугольной сетке. Проведено сравнение с близким по конструкции методом RFB (residual free bubble) [6] и показано, что МКСЭ принадлежит к классу стабилизированных методов галеркинско-го типа.

МКСЭ применялся также в двумерных расчетах течений вязкой несжимаемой жидкости [7], для аппроксимации уравнений Навье–Стокса

удалось построить векторный суперэлемент, преодолеть условие LBB (Ладыженская–Брецци–Бабушка) и использовать общую сетку для скорости и давления.

В данной работе метод конечных суперэлементов предлагается использовать в решении спектральных задач.

Пусть L – линейный дифференциальный несамосопряженный оператор, соответствующий некоторой краевой задаче. Требуется решить задачу на собственные значения с нулевыми граничными условиями в области Ω

$$Lu = \lambda u, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (1)$$

Основной этап в конструировании разностных схем МКСЭ состоит в построении суперэлемента, для этого необходимо в каждом элементе ω_n : $\Omega = \bigcup_n \omega_n$ – решить несколько краевых задач для нахождения базисных функций φ_i^n , удовлетворяющих уравнению, аналогичному (1), но со специальными граничными условиями. В случае задачи (1) неизвестны не только базисные функции, но и параметр λ . Решение краевых задач осуществляется с приближенным значением λ^0

$$L\varphi_i^n = \lambda^0 \varphi_i^n, \quad \varphi_i^n = \tilde{\varphi}_i^n \text{ на } \partial\omega_n, \quad (2)$$

$\tilde{\varphi}_i$ – заданные функции. Приближенное решение в элементе ω_n представляется

в виде

$$u^n = \sum_i u_i^n \varphi_i^n, \quad (3)$$

а во всей области Ω : $u = \sum_n \sum_i u_i^n \varphi_i^n$,

где $\{u_i^n\}$ – сеточная аппроксимация искомого решения задачи (1).

Для формирования системы разностных уравнений для сеточной функции $\{u_i^n\}$ можно использовать условие слабой непрерывности потока на границе суперэлемента [5].

В данной работе для формирования системы разностных уравнений используется проекционный метод Галеркина [7], [8].

Рассматривается слабая формулировка задачи (1) в пространстве H_0^1 – пространстве функций, интегрируемых с квадратом, имеющих обобщенные производные первого порядка; нужно найти

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad (4)$$

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \partial\Omega\},$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $a(u, v)$ – билинейная форма.

В классическом МКЭ пространство функций H_0^1 обычно аппроксимируется конечномерным подпространством $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, состоящим из непрерывных кусочно-полиномиальных функций, в МКЭ конечномерное подпространство V_h состоит из функций вида (3) и зависит от способа решения краевых задач (2). Подробно это описано в [8].

Для дискретизации задачи (4) используются билинейная форма

$$a(u, \tilde{\varphi}_i^n) = \lambda(u, \tilde{\varphi}_i^n). \quad (5)$$

Вычисляются коэффициенты разностных уравнений, которые собираются из функционалов от базисных функций

$$a(\varphi_i^n, \tilde{\varphi}_j^n), \quad (\varphi_i^n, \tilde{\varphi}_j^n),$$

и дифференциальная спектральная задача (4) сводится к алгебраической проблеме собственных значений

$$A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u}, \quad (6)$$

которая решается стандартной процедурой на основе QZ-алгоритма [9], реализованной в пакете LAPACK [10]. Обычно в прикладных задачах интерес представляет первое собственное значение λ_1 с максимальной действительной частью, если оно недостаточно точное, процесс построения базисных функций можно повторить с этим новым собственным значением λ_1 .

Таким образом, способ конструирования разностных уравнений методом конечных суперэлементов в случае спектральной задачи инициирует итерационный процесс ее решения. Итерации выполняются до установления значения первого собственного числа λ_1 . Достигнутая точность контролируется нормой невязки

$$\|Lu - \lambda u\| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

где ε – заданная погрешность, или

$$|\lambda_1^n - \lambda_1^{n-1}| \leq \varepsilon_1.$$

В главе 1 подробно описан процесс формирования матриц A и B , полезный с методической точки зрения, так как обычно довольно подробно описывается построение базиса, но вскользь – построение разностной схемы.

1. Схемы МКЭ высокого порядка

Рассмотрим схему метода конечных элементов.

Пространство функций H_0^1 аппроксимируем его конечномерным подпространством $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, состоящим из непрерывных кусочно-полиномиальных функций.

Проиллюстрируем процесс аппроксимации задачи (4) для одномерного случая, когда область $\Omega = [0, y_{\max}]$.

Область Ω делится на $N+1$ отрезков $[y^{n-1}, y^n]$, границы которых образуют основную сетку

$$0 = y^0 < \dots < y^n < \dots < y^{N+1} = y_{\max}. \quad (8)$$

Пусть $\{u^n\}$ – сеточная аппроксимация искомого решения задачи (4). На каждом n отрезке строится конечный элемент (КЭ) – полный интерполяционный базис Лагранжа порядка Ne

$$\tilde{\varphi}_i^n(y) = \sum_{j=1}^{Ne+1} c_{ij} \chi_j(\alpha(y)), \quad i = 1, \dots, Ne+1. \quad (9)$$

Функции $\chi_j(\alpha) = \alpha^{j-1}(y)$ – это мономы, составляющие предбазис на каноническом отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$, на который отображается отрезок $[y^{n-1}, y^n]$, именно, $\alpha(y) = (y - y_{n-1}) / (y_n - y_{n-1})$. Коэффициенты c_{ij} находятся обычным способом построения интерполяционного базиса из условия $\tilde{\varphi}_i^n(y_j^n) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, Ne+1$, и считаются известными.

Приближенное решение на отрезке n представляется в виде

$$u^n(y) = \sum_{i=1}^{Ne+1} u_i^n \tilde{\varphi}_i^n(y). \quad (10)$$

Каждая базисная функция $\tilde{\varphi}_i^n(y)$ соответствует узлу y_i^n , совокупность которых образует в КЭ локальную сетку

$$y^{n-1} = y_1^n < \dots < y_i^n < \dots < y_{Ne+1}^n = y^n.$$

Приближенное решение в области Ω ищется в виде

$$u(y) = \sum_{n=1}^{N+1} \sum_{i=1}^{Ne+1} u_i^n \tilde{\varphi}_i^n(y) \quad (11)$$

с граничными условиями $u_1^1 = u_{Ne+1}^{N+1} = 0$.

Сеточные значения u_i^n в узлах локальной сетки также должны быть определены. Число узлов локальной сетки, включая граничные, равно $Ne+1$, число внутренних узлов равно $Ne-1$, они вводятся, если строится схема более высокого порядка, Ne – порядок схемы. Некоторое несоответствие в обозначениях элементов основной и локальной сеток обусловлено способом формирования коэффициентов разностной схемы.

Для аппроксимации задачи (4) приближенное решение (11) подставляется в (4), умножается на тестовую финитную функцию $\tilde{\varphi}_k^m(y)$ и интегрируется, учитывая граничные условия. Получаем аппроксимацию обобщенной задачи (4) в виде билинейной формы

$$a(u, \tilde{\varphi}_k^m) = \lambda(u, \tilde{\varphi}_k^m), \quad (12)$$

$$m = 1, \dots, N + 1; \quad k = 1, \dots, Ne + 1.$$

Тестовая функция $\tilde{\varphi}_k^m(y)$ соответствует узлу y_k^m глобальной сетки, которая есть объединение основной и локальной сеток, номер узла y_k^m вычисляется по формуле $m1 = Ne(m-1) - 1 + k$. Если этот узел является внутренним узлом отрезка $[y^{m-1}, y^m]$, то тестовая функция совпадает с соответствующей этому узлу базисной функцией $\tilde{\varphi}_k^m(y)$, а отрезок $[y^{m-1}, y^m]$ является ее носителем. Полученное при этом соотношение (12) связывает значения сеточной функции (11) только на отрезке $[y^{m-1}, y^m]$. Если узел y_k^m является пограничным, то носитель тестовой функции состоит из двух отрезков $[y^{m-1}, y^m]$ и $[y^m, y^{m+1}]$, а тестовая функция составлена из двух базисных функций: $\tilde{\varphi}_{Ne+1}^m(y)$ и $\tilde{\varphi}_1^{m+1}(y)$.

Отметим, что все интегрирования, необходимые для вычисления скалярных произведений, выполняются аналитически, так как базисные функции – это полиномы.

Проделав процедуру (12) для всех тестовых функций, мы приходим к алгебраической проблеме собственных значений (6) с квадратными матрицами порядка $N1 = Ne(N + 1) - 1$, которую решаем стандартной процедурой [10].

Элементы матриц вычисляются как

$$\begin{aligned} A(m1, n1) &:= A(m1, n1) + a(\tilde{\varphi}_i^n, \tilde{\varphi}_k^m), & B(m1, n1) &:= B(m1, n1) + (\tilde{\varphi}_i^n, \tilde{\varphi}_k^m), \\ n = m, \quad m1 &= Ne(m-1) - 1 + k, & n1 &= Ne(m-1) - 1 + i, \quad 1 \leq m1 \leq N \\ & & m &= 1, \dots, N + 1; \quad i, k = 1, \dots, Ne + 1. \end{aligned}$$

Если схема первого порядка ($Ne = 1$), то матрицы трехдиагональные, если $Ne > 1$, то число элементов в строке увеличивается и оно разное для внутренних и граничных узлов элемента.

Результаты численного решения спектральной задачи (1) с аппроксимацией методом конечных элементов высокого порядка обсуждаются в главе 5. Здесь укажем, что матрицы A и B для схем высокого порядка получаются большой размерности, так как увеличивается число базисных функций на отрезке $[y^{n-1}, y^n]$ и, соответственно, увеличивается число тестовых функций. Для аппроксимации обобщенной спектральной задачи (4) предложен метод конечных суперэлементов.

2. Аппроксимация МКСЭ

В данной работе приводится вариант МКСЭ, основанный на методе Галеркина [7], [8], используется слабая формулировка задачи (4).

Приближенное решение в суперэлементе n в одномерном случае представляется в виде

$$u^n(y) = \sum_{i=1}^2 u_i^n \varphi_i^n(y) \quad (13)$$

с неизвестными пока $\{u_i^n\}$ и $\varphi_i^n(y)$, а в области $\Omega = [0, y_{\max}]$ в виде

$$u(y) = \sum_{n=1}^{N+1} \sum_{i=1}^2 u_i^n \varphi_i^n(y). \quad (14)$$

В МКСЭ базисные функции $\varphi_i^n(y)$ на каждом отрезке $[y^{n-1}, y^n]$ строятся как решение исходного уравнения со специальными граничными условиями, в этом его основное преимущество: с одной стороны повышается порядок аппроксимации, с другой стороны понижается размерность системы линейных алгебраических уравнений, так как большое число узлов можно «спрятать» внутрь СЭ. Напомним, что в МКЭ базисные функции известны – это интерполяционные полиномы Лагранжа $\tilde{\varphi}_i^n(y)$.

Чтобы построить МКСЭ базис на отрезке $[y^{n-1}, y^n]$, надо решить две краевые задачи:

$$L\varphi_1^n(y) = \lambda\varphi_1^n(y), \quad \varphi_1^n(y^{n-1}) = 1, \quad \varphi_1^n(y^n) = 0; \quad (15)$$

$$L\varphi_2^n(y) = \lambda\varphi_2^n(y), \quad \varphi_2^n(y^{n-1}) = 0, \quad \varphi_2^n(y^n) = 1. \quad (16)$$

В задачах (15), (16) неизвестны не только базисные функции, но и параметр λ , краевые задачи решаются с приближенным значением λ_1^0 , полученным из решения обобщенной задачи (4) по схеме первого порядка метода конечных элементов. Базисные функции ищем в виде

$$\varphi_i^n = \tilde{\varphi}_i^n + \psi_i^n, \quad \text{где} \quad \psi_i^n = \sum_{j=1}^J b_{ij}^n \psi_j, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Функции $\psi_j(\alpha(y)) = \alpha^j(1-\alpha)$ – это bubble-функции (пузыри), обращающиеся в 0 на границе канонического отрезка $0 \leq \alpha \leq 1$.

Коэффициенты b_{ij}^n на каждом отрезке $[y^{n-1}, y^n]$ находим из решения уравнений

$$\sum_{j=1}^J b_{ij}^n (L - \lambda^0 I) \psi_j = -(L - \lambda^0 I) \tilde{\varphi}_i^n, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

методом Галеркина с тестовыми функциями ψ_l .

$$\sum_{j=1}^J b_{ij}^n [a(\psi_j, \psi_l) - \lambda^0(\psi_j, \psi_l)] = -[a(\tilde{\varphi}_i^n, \psi_l) - \lambda^0(\tilde{\varphi}_i^n, \psi_l)], \quad l = 1, \dots, J. \quad (19)$$

Приближенное решение (14) с известными теперь базисными функциями (17) подставляется в (4), умножается на тестовую финитную функцию $\tilde{\varphi}_k^m(y)$ и интегрируется, учитывая граничные условия. Получаем конечномерную аппроксимацию обобщенной задачи (4) в виде билинейной формы

$$a(u, \tilde{\varphi}_k^m) = \lambda(u, \tilde{\varphi}_k^m), \quad m = 1, \dots, N+1; \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

Проделав (20) для всех тестовых функций, мы приходим к алгебраической проблеме собственных значений с квадратными матрицами порядка N , которую решаем стандартной процедурой [10].

Суперэлемент, построенный с помощью bubble-функций, называем полиномиальным суперэлементом.

3. Итерационный алгоритм решения спектральной задачи

Процесс решения спектральной задачи (4) можно повторить, увеличив, например, число bubble-функций J .

1. Вычисляется приближенное значение λ^0 : спектральная задача (4) решается методом Галеркина с известными базисными функциями $\tilde{\varphi}_i^n(y) = \sum_{j=1}^2 c_{ij} \chi_j(\alpha(y))$. Собственное значение с максимальной действительной частью обозначим λ_1^0 .

2. С известным значением λ_1^0 решаем две краевые задачи (15), (16) в каждом элементе n , находим базисные функции φ_i^n , $n = 1, \dots, N+1$, $i = 1, 2$.

3. Аппроксимируем задачу (4) новыми базисными функциями φ_i^n и тестовыми функциями $\tilde{\varphi}_k^m(y)$:

$$u(y) = \sum_{n=1}^{N+1} (u^{n-1} \varphi_1^n(y) + u^n \varphi_2^n(y)), \quad u^0 = u^{N+1} = 0,$$

$$a(u, \tilde{\varphi}_k^m) = \lambda(u, \tilde{\varphi}_k^m), \quad m = 1, \dots, N+1, \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Скалярные произведения $a(\varphi_i^n, \tilde{\varphi}_k^m)$ и $(\varphi_i^n, \tilde{\varphi}_k^m)$ вычисляются в элементе n сразу после расчета базисных функций.

Получаем алгебраическую проблему собственных значений (6) размерности (N, N) , решаем ее стандартной процедурой [10] и получаем новые приближенные собственные значения и собственные функции $\mathbf{u} = \{u^n\}$. Обозначим новое первое собственное значение λ_1^1 и с этим приближенным значением построим новые базисные функции как решение краевых задач (15), (16) и аппроксимацию (20) спектральной задачи.

Построенный итерационный процесс решения спектральной задачи (4) выполняется в зависимости от числа bubble-функций: на первом шаге $J = 1$, на втором шаге $J = 2$, на третьем $J = 3$ и т. д. Максимально использовалось $J = 10$, то есть базисные функции были полиномами высокой степени. Итерационный процесс записывается в виде

$$A^{J-1} \mathbf{u}^J = \lambda B^{J-1} \mathbf{u}^J, \quad (22)$$

здесь J – номер итерации.

4. Двухуровневый суперэлемент

Двухуровневый суперэлемент отличается от полиномиального суперэлемента способом решения краевых задач (15), (16), которые в данном случае решаются методом конечных элементов.

На отрезке $[y^{n-1}, y^n]$ вводится локальная сетка $y^{n-1} = y_0^n < \dots < y_j^n < \dots < y_{Nd+1}^n = y^n$. На каждом j -ом отрезке $[y_{j-1}^n, y_j^n]$ локальной сетки строится микроэлемент с известными базисными функциями МКЭ, как в разделе 1, обозначим их $\tilde{\varphi}_k^j(y)$. Для микроэлемента первого порядка

$$\tilde{\varphi}_1^j(y) = (y_j^n - y) / (y_j^n - y_{j-1}^n), \quad \tilde{\varphi}_2^j(y) = (y - y_{j-1}^n) / (y_j^n - y_{j-1}^n).$$

Построение первой базисной функции $\varphi_1^n(y)$ суперэлемента на отрезке $[y^{n-1}, y^n]$ осуществляется решением краевой задачи (15) с известным приближенным первым собственным значением, полученным на первом этапе итерационного процесса

$$L\varphi_1^n(y) = \lambda_1^0 \varphi_1^n(y), \quad \varphi_1^n(y^{n-1}) = 1, \quad \varphi_1^n(y^n) = 0. \quad (23)$$

Базисная функция ищется в виде

$$\varphi_1^n = \tilde{\varphi}_1^n + \sum_{j=1}^{Nd+1} \sum_{k=1}^{Ne+1} b_{1k}^j \tilde{\varphi}_k^j, \quad b_{11}^1 = b_{1,Ne+1}^{Nd+1} = 0 \quad (24)$$

и подставляется в (23). Коэффициенты b_{1k}^j находим из уравнений

$$\sum_{j=1}^{Nd+1} \sum_{k=1}^{Ne+1} b_{1k}^j (L - \lambda_1^0 I) \tilde{\varphi}_k^j = -(L - \lambda_1^0 I) \tilde{\varphi}_1^n \quad (25)$$

методом Галеркина, процедурой, аналогичной той, что описана для полиномиального суперэлемента, с тестовыми функциями $\tilde{\varphi}_l^j$, $k, l = 1, \dots, Ne + 1$.

$$\sum_{j=1}^{Nd+1} \sum_{k=1}^{Ne+1} b_{1k}^j [a(\tilde{\varphi}_k^j, \tilde{\varphi}_l^j) - \lambda_1^0 (\tilde{\varphi}_k^j, \tilde{\varphi}_l^j)] = -a(\tilde{\varphi}_1^n, \tilde{\varphi}_l^j) + \lambda_1^0 (\tilde{\varphi}_1^n, \tilde{\varphi}_l^j). \quad (26)$$

Здесь, функция $\varphi_1^n(y)$ – неизвестная базисная функция МКЭ на отрезке $[y^{n-1}, y^n]$, функция $\tilde{\varphi}_1^n(y)$ – известная базисная функция МКЭ на отрезке $[y^{n-1}, y^n]$, функция $\tilde{\varphi}_k^j(y)$ – известные базисные функции МКЭ (микроэлемента) на отрезке $[y_{j-1}^n, y_j^n]$, Nd – число внутренних узлов локальной сетки, Ne – порядок микроэлемента.

Аналогично находится вторая базисная функция $\varphi_2^n(y)$ суперэлемента на отрезке $[y^{n-1}, y^n]$. В процессе расчета всех суперэлементов на основной сетке формируется алгебраическая проблема собственных значений (6), которую решаем стандартной процедурой [10].

Итерационный алгоритм решения спектральной задачи (4) строится в зависимости от числа узлов локальной сетки Nd .

5. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились для одномерной спектральной задачи с несамосопряженным оператором

$$Lu \equiv \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + U(y) \frac{du}{dy} = \lambda u, \quad u(0) = u(y_{\max}) = 0, \quad (27)$$

где вязкость μ – малая положительная константа, а $U(y)$ – некоторая непрерывная в области $\Omega = [0, y_{\max}]$ функция.

Задача связана с расчетом положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях [11].

Приведем результаты численного решения задачи (27) для четырех значений вязкости $\mu = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ и трех вариантов $i = 1, 2, 3$ профиля $U(y)$. На рис. 1 изображены эти профили.

Первый профиль $i = 1$: $U(y) \equiv 1$ – задача с этим профилем является основным тестом для характеристики метода, так как имеет точные аналитические решения. Собственные функции и собственные значения имеют вид

$$u_k(y) = \exp(-Uy/2\mu) \sin(k\pi y / y_{\max}), \quad \lambda_k^{ex} = -\mu k^2 \pi^2 / y_{\max} - U^2 / 4\mu. \quad (28)$$

Второй профиль

$i = 2$: $U(y) = y(2.d - y) / d^2, y \leq d$; $U(y) \equiv 1, y > d$, $d = 0.1$ – характерный профиль течения в пограничном слое.

Третий профиль $i = 3$: $U(y) = y(2.y_{\max} - y) / y_{\max}^2, y_{\max} = 1$ – параболический.

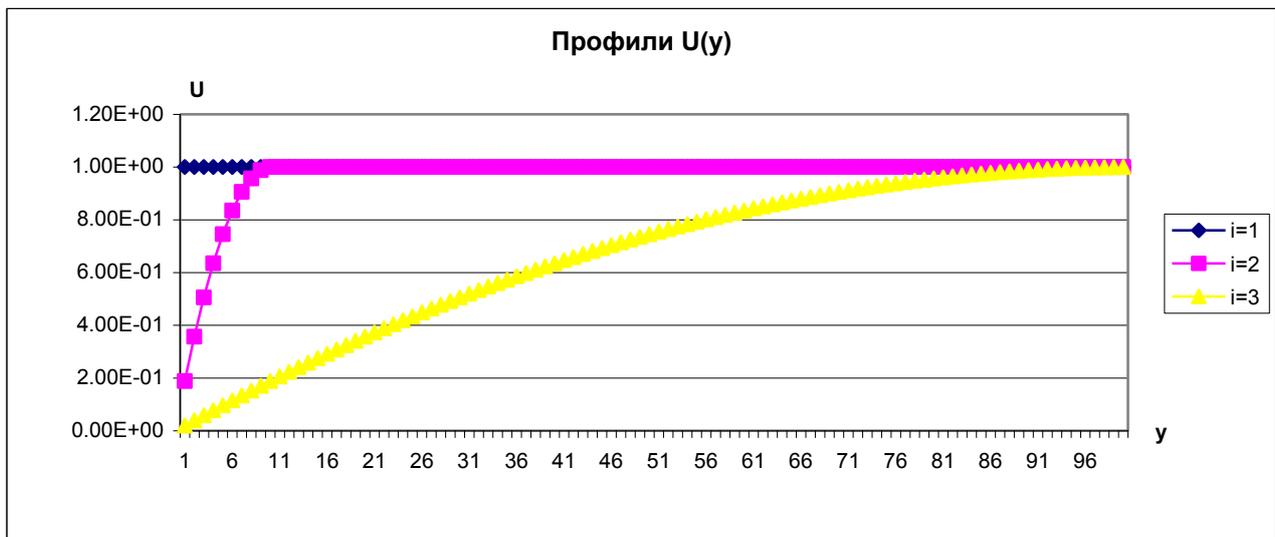


Рис. 1

В Таблице 1 приведены значения первого собственного числа λ_1 для схем МКЭ в зависимости от порядка Ne для разных значений μ . Во всех приводимых расчетах число внутренних узлов основной сетки $N = 100$, число внутренних узлов глобальной сетки $N1 = Ne(N + 1) - 1$ зависит от порядка схемы.

Для первого профиля $U(y) \equiv 1$ с $\mu < 0.01$ собственное значение не устанавливается и получается комплексным, приведена только действительная часть. Во втором столбце таблицы приведены точные собственные значения λ_1^{ex} , то есть спектр дифференциального оператора действительный и целиком лежит на отрицательной оси.

Для второго и третьего профиля собственные значения устанавливаются с ростом порядка аппроксимации, даже при убывающей вязкости.

Таблица 1

	$i = 1$		Ne	$i = 2$	$i = 3$
	λ_1^{ex}	λ_1		λ_1	λ_1
$\mu = 0.1$	-3.4869605	-3.4863414	1	-3.4987345	-2.7959619
		-3.4869605	2	-3.4993277	-2.7962241
		-3.4869604	3	-3.4993276	-2.7962240
$\mu = 0.01$	-25.098696	-25.619088	1	-24.918407	-3,6416162
		-25.096686	2	-24.645170	-3,6416995
		-25.098699	3	-24.646147	-3,6416994
		-25.098696	4	-24.646146	-3,6416995
$\mu = 0.001$	-250.0098696	-30.608552	1	-31.397883	-3.8907996
		-93,014558	2	-36.415001	-3.8911777
		-173.95244	3	-36.416605	-3.8911800
		-156.51056	4	-36.416993	-3.8911801
$\mu = 0.0001$	-2500.000987	-3.060855	1	-4.1758218	-3.8032927
		-10,200937	2	-11.731727	-3.9659533
		-21.409292	3	-22.990033	-3.9659710
		-36.684858	4	-37.526110	-3.9659767
		-56.014630	5	-38.911123	-3.9659767

В Таблице 2 приведены численные результаты итерационного решения задачи (27) по схеме МКСЭ с полиномиальным суперэлементом в зависимости от числа bubble-функций $J = 1, 2, \dots, 10$.

Для первого профиля $U(y) \equiv 1$ с $\mu \geq 0.01$ собственные значения точные; для $\mu = 0.001$ собственные значения получились грубыми, но действительными; для $\mu = 0.0001$ собственные значения все получились комплексными. Итераций недостаточно. Для второго профиля собственные значения для $\mu = 10^{-4}$ получились комплексными, но с ростом j стали действительными.

Для третьего профиля собственные значения устанавливаются с ростом порядка аппроксимации, даже при убывающей вязкости. Все собственные значения действительные.

Таблица 2

	$i = 1$			$i = 2$		$i = 3$		
	λ_{ex}	λ_1^J	J	λ_1^J	J	λ_1^J	J	
$\mu = 0.1$	-3.4869605	-3.4863414	0	-3.4987345	0	-2.7959619	0	
		-3.4869605	1	-3.4993276	1	-2.7962241	1	
		-3.4869604	2	-3.4993277	2	-2.7962241	2	
		-3.4869604	10	-3.4993277	10	-2.7962241	10	
$\mu = 10^{-2}$	-25.098696	-25.619088	0	-24.918407	0	-3,6416162	0	
		-25.107314	1	-24.649028	1	-3,6416995	1	
		-25.098872	2	-24.646187	2	-3,6416995	2	
		-25.098700	3	-24.646147	3	-3,6416995	3	
		-25.098696	10	-24.646146	10	-3,6416995	10	
$\mu = 10^{-3}$	-250.0098696	-30.608552	0	-31.397883	0	-3.8907996	0	
		-84.335615	1	-36.337604	1	-3.8911775	1	
		-153.53709	2	-36.415397	2	-3.8911801	2	
		-182.14778	3	-36.416969	3	-3.8911801	3	
		-239.20440	10	-36.416995	10	-3.8911801	10	
$\mu = 10^{-4}$	-2500.000987	-3.0608552	0	-4.30079	-2.12703	0	-3.8032927	0
		-11.625085	1	-11.22542	-5.52966	1	-3.9657267	1
		-22.748407	2	-23.84077	-2.60089	2	-3.9659707	2
		-38.03420	3	-38.88336	0.00000	4	-3.9659767	3
		-265.68707	10	-38.91180	0.00000	10	-3.9659767	10

В Таблице 3 приведены результаты итерационного решения задачи (27) с использованием двухуровневого суперэлемента в зависимости от числа узлов локальной сетки Nd . Выражение 14×56 означает, что число узлов локальной сетки $Nd = 14$ и сделано 56 итераций, аналогично для выражения 7×177 . Для первого профиля со значением вязкости $\mu = 10^{-4}$ число узлов основной сетки пришлось увеличить до $N = 500$.

Результаты эксперимента очень зависят от значений μ и $U(y)$. Для второго профиля, моделирующего течение в пограничном слое, результаты очень хорошие: собственные значения совпадают во всех трех алгоритмах для соответствующих μ . Для второго и третьего профиля лучше использовать схему с полиномиальным суперэлементом. Самыми трудными для расчета оказались задачи с $U(y) \equiv 1$ (первый профиль), в задачах с малым значением вязкости $\mu < 10^{-2}$ надо использовать схему МКСЭ с двухуровневым суперэлементом.

Таблица 3

	$i = 1$			$i = 2$		$i = 3$	
	λ_{ex}	λ_1	Nd	λ_1	Nd	λ_1	Nd
$\mu = 0.1$	-3.4869605	-3.4863414	0	-3.4987345	0	-2.7959619	0
		-3.4868056	1	-3.4991793	1	-2.7966809	1
		-3.4869603	40	-3.4993275	52	-2.7967700	40
$\mu = 10^{-2}$	-25.098696	-25.619088	0	-24.918407	0	-3,6416162	0
		-25.098720	100	-24.718966	1	-3,6416995	1
		-25.098708	200	-24.646162	150	-3,6848786	50
$\mu = 10^{-3}$	-250.0098696	-30.608552	0	-31.397883	0	-3.8907996	0
		-249.50092	15	-36.341335	1	-4.2439183	1
		-250.00999	14x56	-36.416993	200	-4.2844818	50
$\mu = 10^{-4}$	-2500.000987	-67.7865	0	-4.1758218	0	-3.8032927	0
		-2500.1260	7x177	-14.826518	1	-4.9543034	1
				-37.869408	100	-4.4757667	50
				-38.911791	200		

В Таблице 4 приведены результаты итерационного решения задачи (27) в зависимости от числа узлов основной сетки N . Использовались МКЭ первого порядка и МКСЭ с двухуровневым СЭ для самого трудного варианта с $U(y) \equiv 1$ и $\mu = 10^{-4}$.

Таблица 4

$\mu = 10^{-4}$	-2500.000987	N	100	200	500	1000
		МКЭ	-3.0608	-12.1208	-67.7805	-209.8652
		МКСЭ	-401.3275	-1988.4702	-2154.0451	-2500.1260

На рис. 2 представлен интерполяционный базис Лагранжа 4-го порядка. Узлы интерполяции находятся приблизительно в точках с номерами: 1, 7, 14, 20, 26. Это один из базисов, которые использовались в расчетах, приведенных в Таблице 1.



Рис.2. Интерполяционный базис Лагранжа 4-го порядка

На рис. 3-5 представлены суперэлементы для трех профилей. Сравниваются базисные функции для полиномиального и двухуровневого суперэлемента. $\mu = 10^{-3}$.

На рис. 3 изображены базисные функции для первого «тестового» профиля ($i=1$): 1, 2 кривые – это базис МКЭ первого порядка; 3, 4 кривые – это полиномиальный суперэлемент МКСЭ; 5, 6 кривые – это двухуровневый суперэлемент МКСЭ. Полиномиальный базис и двухуровневый базис подобны, но максимумы отличаются $\sim 25\%$, и оба отличаются от базиса МКЭ.

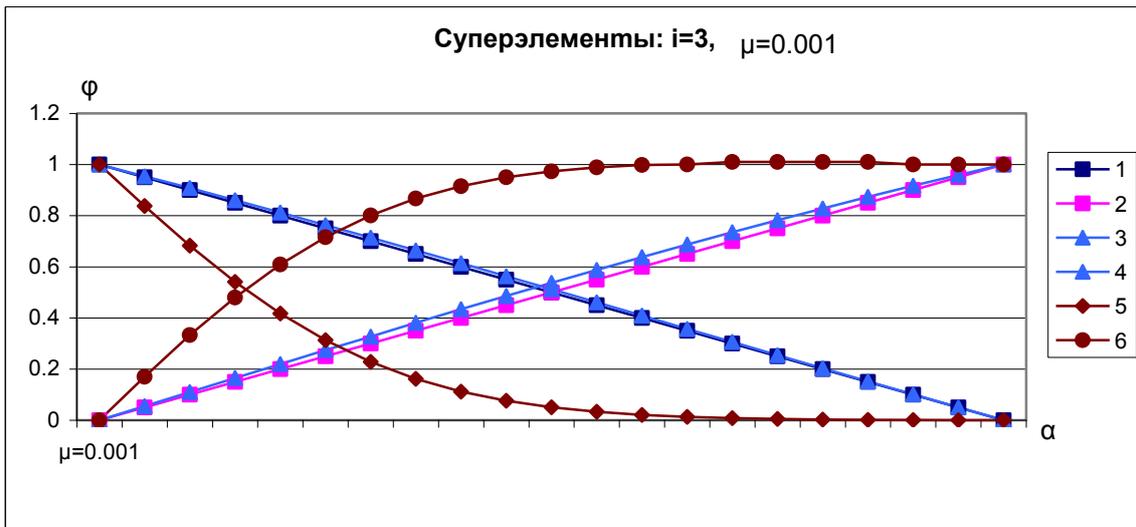


Рис. 5

На рис. 6 представлены 3 из 100 пробных (базисных) функций для первого профиля, по которым интерполируются искомые собственные функции:

$u = \sum_n \sum_i u_i^n \varphi_i^n$. Узлы интерполяции, в которых $\varphi_i^n = 1$, на графике находятся в точках: 21, 41, 61. Кривые под номером «1» построены с помощью полиномиального суперэлемента, а кривые «2» с помощью двухуровневого. Так как $\mu = 10^{-3}$ и $U(y) \equiv 1$ постоянны, то φ_i^n не зависят от номера суперэлемента n .

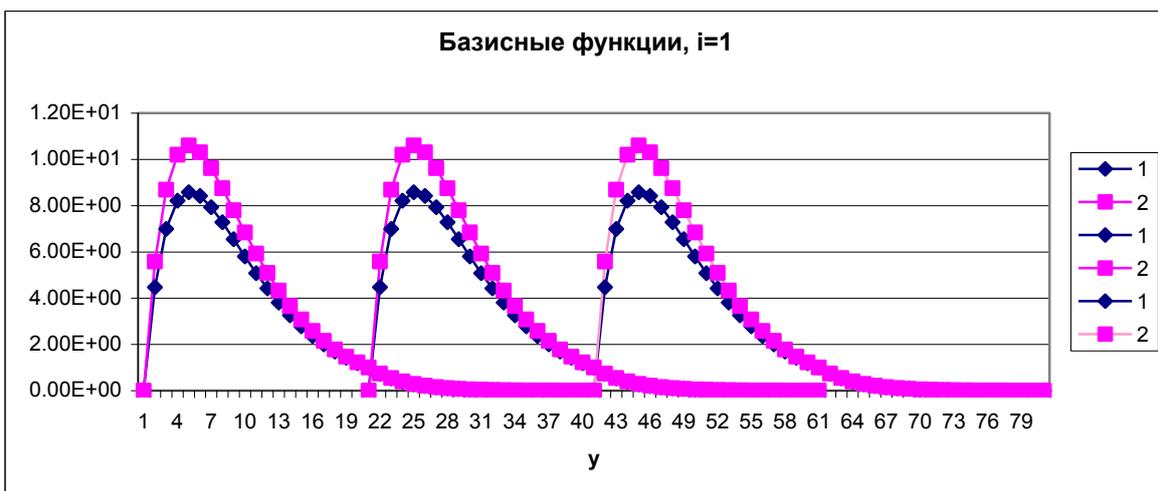


Рис.6

На рис. 7 представлены 3 базисных функции для второго профиля, по которым интерполируются искомые собственные функции: $u = \sum_n \sum_i u_i^n \varphi_i^n$, $n=1, 3, 11$. Узлы интерполяции на графике находятся в точках: 21, 41, 61.

Базисные функции построены с помощью полиномиального суперэлемента, профиль $U(y)$ зависит от y , поэтому φ_i^n зависят от номера суперэлемента n .



Рис.7

На рис. 8 представлены первая и десятая собственные функции задачи (1) для второго профиля ($i=2$), $\mu = 10^{-2}$.



Рис.8

На рис.9 представлено установление первого собственного значения λ_1 в итерационном процессе с двухуровневым суперэлементом для первого профиля и $\mu = 10^{-2}$ на сетке с $N = 200$ внутренними узлами.

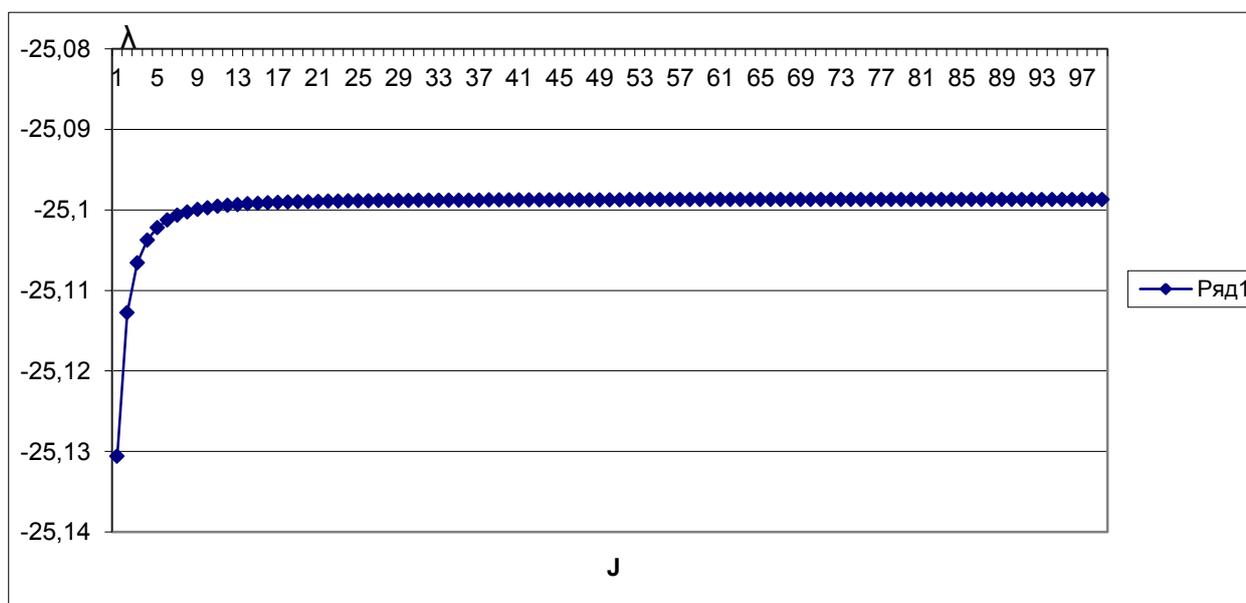


Рис.9

Заключение

Цель работы заключалась в разработке метода решения спектральных задач, который не увеличивал бы конечномерную размерность аппроксимирующего пространства, но, тем не менее, повышал точность искомого решения. Для этой цели предложено использовать метод конечных суперэлементов. Сложное построение базисных функций в суперэлементе, как решения исходного уравнения задачи, расширяет аппроксимирующее пространство классического МКЭ, добавляя пространство кусочно-непрерывных функций, которое зависит от способа решения краевых задач (16), (17). Решение краевых задач возможно при фиксированном, то есть приближенном значении λ^0 , а затем его уточнении. Таким образом, конструкции МКСЭ определяют итерационный характер решения спектральной задачи. Построено два итерационных алгоритма: в первом используется полиномиальный суперэлемент, во втором – двухуровневый суперэлемент. Проведено сравнение с алгоритмом МКЭ высокого порядка. С помощью МКСЭ удастся повысить точность решения задачи, не увеличивая размерности алгебраической проблемы собственных значений, к которой сводится дифференциальная задача. Удалось получить хорошие результаты для задач с малой вязкостью. При использовании МКЭ надежные результаты были для $\mu \geq 10^{-2}$, при использовании МКСЭ надежные результаты получены с $\mu = 10^{-4}$.

Библиографический список

1. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. 2-е изд. - Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2008, 504 с.
2. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. О решении главной спектральной задачи в математическом моделировании ядерных реакторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 920-928.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одном варианте метода конечных элементов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 4. С. 950-960.
5. Жуков В.Т., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. Об одном направлении в конструировании разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. №2. С. 223-235.
6. Hughes T.J.R. Multiscale phenomena: Green's functions, The Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles, and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 127, 387-401, 1995.
7. Страховская Л.Г. Об одном варианте МКСЭ для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 1. С. 123-136.
8. Жуков В.Т., Новикова Н.В., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. Применение метода конечных суперэлементов для решения задач конвекции-диффузии // *Мат. мод.* 2002. Т. 14. № 11. С. 78-92.
9. Golub G. H., Van Loan Ch. *Matrix computations*, 4th ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
10. Anderson E., Bai Z., Bischof C., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Ostrouchov S., Sorensen D. *LAPACK users guide*, 3rd ed. Philadelphia: SIAM, 1999. 407 p.
11. Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. О расчете положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях с учетом сжимаемости // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2015. № 81. 20 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-81>