[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/) • [Препринт № 135 за 2018 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-135)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Яшунский А.Д.

Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Яшунский А.Д. Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 135. 16 с. doi:**10.20948/prepr-2018-135**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-135**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Д. Яшунский

Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой

Москва — 2018

Яшунский А. Д.

Алгебры бернуллиевских распределений с единственной предельной точкой

Рассматриваются индуцированные системой булевых функций алгебры бернуллиевских распределений, у которых основное множество имеет единственную предельную точку. Найдены необходимые условия единственности предельной точки и доказан критерий порождения алгебры распределений с единственной предельной точкой.

Ключевые слова: случайная величина, распределение Бернулли, булева функция, предельная точка

Alexey Dmitrievich Yashunsky

Bernoulli distribution algebras with a single limit point

We consider systems of Boolean functions inducing algebras of Bernoulli distributions, whose universal set has a single limit point. We establish the necessary conditions of limit point uniqueness and we prove a criterion for generation of a distribution algebra with a unique limit point.

Key words: random variable, Bernoulli distribution, Boolean function, limit point

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00337.

Оглавление

Введение

Задачи построения дискретных преобразователей случайных величин рассматривались в математической кибернетике достаточно давно. Одна из постановок задачи заключается в конструировании преобразователей из функций, которые получают в качестве аргументов независимые случайные величины с известными распределениями.

В такой постановке естественным образом возникают вопросы выразимости одних распределений через другие. Подобные задачи весьма удобно формулировать на языке универсальных алгебр: каждой преобразующей функции соответствует некоторая (индуцированная) операция на распределениях, тем самым задается алгебра на множестве распределений, в которой можно рассматривать подалгебры, порождаемые различными множествами. По-видимому, впервые в подобных терминах эти задачи были сформулированы в работе Ф. И. Салимова [2].

Вообще говоря, рассматривались алгебры распределений случайных величин над различными конечными множествами, однако в рамках данной работы мы ограничимся только бернуллиевскими случайными величинами, преобразования которых осуществляются булевыми функциями. Это, по-видимому, наиболее изученный класс задач, особенно в случае, когда распределения имеют рациональные компоненты (см., например, работу Р. М. Колпакова [1]).

Помимо выразимости случайных величин рассматривалась также аппроксимируемость: возможность построения случайной величины, распределение которой сколь угодно близко к требуемому. Фактически, задачи об аппроксимируемости сводятся к исследованию множества предельных точек в алгебрах распределений. Таким образом, наличие и структура множества предельных точек в алгебре представляют интерес с точки зрения задачи аппроксимации распределений.

Для достаточно простых систем булевых функций индуцируемые алгебры распределений могут быть всюду плотными в множестве распределений. Так, например, в работе Р. Л. Схиртладзе [3] показано, что любое невырожденное распределение порождает при подстановке в систему функций «конъюнкция, дизъюнкция, отрицание» всюду плотную алгебру.

Ранее в работе [4] были описаны алгебры, индуцированные замкнутыми классами булевых функций, содержащие все свои предельные точки. Примечательно, что за исключением подклассов конъюнкций, дизъюнкций и линейных функций, для всех прочих классов индуцированные алгебры, содержащие все свои предельные точки, оказываются выпуклыми множествами (изоморфными подотрезкам отрезка $[0,1]$).

При этом для конечно-порожденных алгебр, индуцированных замкнутыми подклассами конъюнкций, дизъюнкций или линейных функций (в том числе собственными), можно показать, что алгебра имеет не более одной предельной точки.

Данная работа, фактически, распространяет результат о единственности предельной точки с алгебр, индуцированных замкнутыми классами, на алгебры, индуцированные произвольными системами булевых функций. Ее также можно рассматривать как естественное продолжение исследований из работы [5], где были описаны все конечные алгебры бернуллиевских распределений, т. е. алгебры, не имеющие предельных точек вовсе.

Алгебры бернуллиевских распределений

Напомним, что *булевой функцией* $f(x_1, \dots, x_n)$ называется отображение $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Переменная x_i называется *существенной* для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если найдутся такие $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}$, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Функции, равные константам 0 и 1, не имеют существенных переменных. Будем использовать обозначение $\bar{x}$ для функции «отрицание» ($\bar{x} = x + 1 \pmod 2$) и обозначение $\oplus$ для суммирования $\bmod 2$.

Введем несколько классов булевых функций. Будем считать, что вместе с каждой функцией, принадлежащей классу, в нем также лежат все функции, получающиеся в результате добавления несущественных переменных и переименования переменных. Положим $MU = \{0, 1, x\}$, $U = \{0, 1, x, \bar{x}\}$, $K = \{\min(x_1, \dots, x_n)\}_{n \geqslant 1} \cup \{0, 1\}$, $D = \{\max(x_1, \dots, x_n)\}_{n \geqslant 1} \cup \{0, 1\}$, $L = \{x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus c \mid c \in \{0,1\}\}_{n \geqslant 0}$. Также будем использовать обозначения $\mathcal{A}(0) = K$, $\mathcal{A}(1) = D$, $\mathcal{A}(\frac{1}{2}) = L$. Отметим, что имеет место включение $MU \subset K, D, L$.

Пусть X — бернуллиевская случайная величина, значения которой принадлежат множеству $\{0,1\}$. Тогда ее распределение есть двумерный вектор (p_0, p_1), где $p_0 \geqslant 0$, $p_1 \geqslant 0$, $p_0 + p_1 = 1$. Такой вектор однозначно задается любой из двух своих компонент, для определенности далее будем использовать компоненту p_1. Множество таких векторов находится в естественном взаимно-однозначном соответствии с отрезком $[0,1]$, поэтому далее, говоря о бернуллиевских распределениях, будем отождествлять их с числами из этого отрезка.

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция от n переменных и $X_1, \dots, X_n$ — независимые в совокупности бернуллиевские случайные величины со значениями в $\{0,1\}$ и распределениями $p_1, \dots, p_n \in [0,1]$ соответственно, то $f(X_1, \ldots, X_n)$ есть также случайная величина со значениями в $\{0,1\}$ и для ее распределения $q \in [0,1]$ выполнено

$$q = \sum_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\{0,1\}^n,\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} \pi(p_1,\sigma_1)\cdots\pi(p_n,\sigma_n), \tag{1}$$

где $\pi(p,1) = p$ и $\pi(p,0) = 1-p$. Таким образом, каждая булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ индуцирует отображение $\hat{f}(p_1,\ldots,p_n) : [0,1]^n \to [0,1]$, заданное равенством (1). Непосредственно из определения вытекает, что если $g = \bar{f}$, то $\hat{g} = 1 - \hat{f}$.

Выражение $\hat{f}(p,\ldots,p)$ будем называть *характеристическим многочленом* функции f и обозначать $h_f(p)$.

Для набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_m) \in \{0,1\}^m$, $m \leqslant n$ и функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ введем обозначение $f_{\tilde{\sigma}}(x_{m+1},\ldots,x_n) = f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,x_{m+1},\ldots,x_n)$. Несложно видеть, что для $\hat{f}$ имеет место следующее представление, по аналогии с булевыми функциями далее называемое разложением по первым m переменным:

$$\hat{f}(p_1,\ldots,p_n) = \sum_{\tilde{\sigma}\in\{0,1\}^m} \pi(p_1,\sigma_1)\cdots\pi(p_m,\sigma_m)\widehat{f_{\tilde{\sigma}}}(p_{m+1},\ldots,p_n).$$

Разложение функции $\hat{f}$ по всем ее n переменным дает выражение, идентичное формуле (1).

Пусть B — некоторое множество булевых функций. Обозначим $\hat{B} = \{\hat{f} \mid f \in B\}$, тогда $\langle [0,1], \hat{B}\rangle$ есть *алгебра бернуллиевских распределений*, индуцированная множеством B. В алгебре $\langle [0,1], \hat{B}\rangle$ имеются различные, в том числе несобственные, подалгебры, которые мы также будем называть алгебрами бернуллиевских распределений.

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений об индуцированных функциях и алгебрах распределений. Следующее утверждение легко проверяются с использованием соотношений (1).

Лемма 1. *$\langle \{0,1\}, \hat{B}\rangle$ — подалгебра алгебры $\langle [0,1], \hat{B}\rangle$, изоморфная алгебре $\langle \{0,1\}, B\rangle$.*

Характеристический многочлен не определяет однозначно функцию f, однако имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Характеристический многочлен $h_f(p)$ булевой функции f постоянный тогда и только тогда, когда выполнено $f(x_1,\ldots,x_n) \equiv c \in \{0,1\}$.*

Доказательство. Достаточность легко проверяется с помощью формулы (1), покажем необходимость. Если $h_f(p) = c$ при всех p, то, в частности, $h_f(0) = h_f(1) = c$, что в силу леммы 1 влечет $c \in \{0, 1\}$.

Предположим, что $f \not\equiv 0$ и при этом имеет место $h_f(p) \equiv 0$. Тогда, в частности, для любого $p_0 \notin \{0, 1\}$ выполнено $h_f(p_0) = 0$. При этом из $f \not\equiv 0$ вытекает, что характеристический многочлен $h_f(p_0)$ содержит по крайней мере одно слагаемое вида $\pi(p_0, \sigma_1) \cdots \pi(p_0, \sigma_n)$ с некоторыми $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$. Легко видеть, что при $p_0 \notin \{0, 1\}$ это слагаемое строго положительно. В совокупности с неотрицательностью всех прочих слагаемых, входящих в $h_f(p_0)$, получаем, что $h_f(p_0) > 0$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, тождество $h_f(p) \equiv 0$ влечет $f \equiv 0$.

Если $h_f(p) \equiv 1$, то $h_{\bar{f}}(p) \equiv 0$, откуда по доказанному выше получаем, что $\bar{f} \equiv 0$, что равносильно $f \equiv 1$. Лемма доказана. $\square$

Пусть заданы распределения $p, q \in [0, 1]$ и число $\alpha \in [0, 1]$. Распределение $\alpha p + (1 - \alpha) q$ будем называть *выпуклой комбинацией* распределений p и q. Всевозможные выпуклые комбинации образуют отрезок, соединяющий распределения p и q. Для индуцированных функций выполнено следующее утверждение, легко проверяемое с помощью равенства (1).

Лемма 3.

$$\hat{f}(\alpha p + (1 - \alpha) q, p_2, \ldots, p_n) = \alpha \hat{f}(p, p_2, \ldots, p_n) + (1 - \alpha) \hat{f}(q, p_2, \ldots, p_n).$$

Алгебры с единственной предельной точкой

Точка $q \in [0, 1]$ называется *предельной точкой* множества $G \subseteq [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $q' \in G$, что $0 < |q' - q| < \varepsilon$.

Если q — предельная точка множества G, то существует такая последовательность $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{q\}$, что $q_n \to q$ при $n \to \infty$, более того, такую последовательность можно выбрать монотонной.

Если множество G конечно, то оно не имеет предельных точек. Если множество $G \subseteq [0, 1]$ счетно, то оно имеет по крайней мере одну предельную точку.

Доказательство необходимых условий единственности предельной точки в алгебре основано на следующем утверждении.

Лемма 4. *Пусть все $n \geqslant 1$ переменных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенные и $\langle G, \hat{f} \rangle$ — алгебра распределений с единственной предельной точкой $q \in [0, 1]$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ и $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \ni q$. Тогда $\hat{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$, положим $r = |\{i \mid \alpha_i \neq q\}|$. Докажем утверждение для всевозможных наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ индукцией по величине r.

Основание индукции. При $r = 0$ доказываемое равенство превращается в $\hat{f}(q, \ldots, q) = q$. Пусть $\{p_s\}_{s\in\mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{q\}$ — последовательность, монотонно сходящаяся к q: такая существует, поскольку q — предельная точка множества G.

Рассмотрим множество $\{\hat{f}(p_s, \ldots, p_s)\}_{s\in\mathbb{N}} = \{h_f(p_s)\}_{s\in\mathbb{N}} \subseteq G$. Если это множество конечно, то найдется такая постоянная c и подпоследовательность $\{p_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, что $h_f(p_{s_j}) = c$. Поскольку $h_f(t)$ — многочлен, получаем, что $h_f(t) = c$ при всех t, а это по лемме 2 влечет $f \equiv c \in \{0, 1\}$, что противоречит существенности всех переменных функции f.

Следовательно, множество $\{h_f(p_s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ счетно и оно имеет предельную точку, а поскольку оно лежит в G, этой предельной точкой является q. Тогда существует подпоследовательность $\{h_f(p_{s_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к q. При этом $\lim\limits_{j\to\infty} p_{s_j} = \lim\limits_{s\to\infty} p_s = q$. Отсюда в силу непрерывности функции $h_f(t)$ получаем, что $\hat{f}(q, \ldots, q) = h_f(q) = \lim\limits_{j\to\infty} h_f(p_{s_j}) = q$.

Предположение и шаг индукции. Пусть $\hat{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q$ для всех наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, в которых $r < R$. Докажем утверждение для $r = R < n$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_{R+1} = \cdots = \alpha_n = q$. Пусть $\{p_s\}_{s\in\mathbb{N}} \subseteq G \setminus \{q\}$ — последовательность, монотонно сходящаяся к q. Для всевозможных $i_1, \ldots, i_R \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества

$$A_{i_1,\ldots,i_R} = \{\hat{f}(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}, p_s, \ldots, p_s)\}_{s\in\mathbb{N}} \subseteq G.$$

Предположим, что все множества $A_{i_1,\ldots,i_R}$ — конечные. Если $A_{i_1,\ldots,i_R}$ конечно, то найдется такая величина $c(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R})$ и такая подпоследовательность $\{p_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, что при всех j выполнено

$$\hat{f}(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}, p_{s_j}, \ldots, p_{s_j}) = c(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}).$$

В силу счетности множества $\{p_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ получаем, что при всех $t \in [0,1]$ имеет место

$$\hat{f}(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}, t, \ldots, t) = c(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}). \tag{2}$$

Поскольку все множества $A_{i_1,\ldots,i_R}$ конечны, то же имеет место при любых $i_1, \ldots, i_R$ и соответствующих $p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}$. При этом, как несложно заметить, величина $c(p_{i_1}, \ldots, p_{i_R})$ выражается многочленом от переменных $p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}$. На месте каждого из значений $p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}$ в равенстве (2) могут стоять произвольные элементы из счетного множества $\{p_s\}_{s\in\mathbb{N}}$. Поскольку $\hat{f}$ и c являются многочленами от $p_{i_1}, \ldots, p_{i_R}$, отсюда вытекает, что равенство (2) выполняется при произвольных $\xi_1, \ldots, \xi_R, t$:

$$\hat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_R, t, \ldots, t) = c(\xi_1, \ldots, \xi_R). \tag{3}$$

Рассмотрим разложение функции $\hat{f}$ по ее первым R переменным:

$$\hat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_R, t, \ldots, t) = \sum_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^R} \pi(\xi_1, \sigma_1) \ldots \pi(\xi_n, \sigma_R) \widehat{f_{\tilde{\sigma}}}(t, \ldots, t) =$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^R} \pi(\xi_1, \sigma_1) \ldots \pi(\xi_n, \sigma_R) h_{f_{\tilde{\sigma}}}(t).$$

Тождество (3) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^R} \pi(\xi_1, \sigma_1) \ldots \pi(\xi_n, \sigma_R) h_{f_{\tilde{\sigma}}}(t) = c(\xi_1, \ldots, \xi_R).$$

Продифференцируем обе части этого тождества по переменной t. Получим следующее тождество:

$$\sum_{\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^R} \pi(\xi_1, \sigma_1) \ldots \pi(\xi_n, \sigma_R) h'_{f_{\tilde{\sigma}}}(t) = 0. \tag{4}$$

Оно выполняется при произвольных $\xi_1, \ldots, \xi_R \in [0, 1]$. Возьмем произвольный двоичный набор $\tilde{\tau} \in \{0, 1\}^R$ и положим $\xi_1 = \tau_1, \ldots, \xi_R = \tau_R$. Тогда тождество (4) превратится в тождество $h'_{f_{\tilde{\tau}}}(t) = 0$, выполненное при всех t. Из него следует, что характеристический многочлен функции $f_{\tilde{\tau}}$ постоянный, а это в свою очередь по лемме 2 влечет, что сама функция $f_{\tilde{\tau}}$ — константа. В силу произвольности $\tilde{\tau}$ получаем, что у функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменные $x_{R+1}, \ldots, x_n$ несущественные, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показывает, что все множества $A_{i_1,\ldots,i_R}$ не могут быть конечными.

Итак, среди множеств $A_{i_1,\ldots,i_R}$ найдется хотя бы одно счетное, пусть это $A_{m_1,\ldots,m_R}$. Тогда оно имеет предельную точку, и, поскольку $A_{m_1,\ldots,m_R} \subseteq G$, этой предельной точкой является q. Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{p_{s_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, что $\hat{f}(p_{m_1}, \ldots, p_{m_R}, p_{s_j}, \ldots, p_{s_j}) \to q$ при $j \to \infty$. В силу непрерывности функции $\hat{f}(p_{m_1}, \ldots, p_{m_R}, t, \ldots, t)$ по переменной t, а также равенства $\lim\limits_{j \to \infty} p_{s_j} = q$ получаем, что

$$\hat{f}(p_{m_1}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) = q.$$

Пусть ξ лежит между p_{m_1} и q (отметим, что $p_{m_1} \neq q$). Тогда найдется такое $\beta \in [0, 1]$, что $\xi = (1 - \beta) p_{m_1} + \beta q$. В силу предположения индукции имеем равенство $\hat{f}(q, p_{m_2}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) = q$. Тогда по лемме 3 получаем, что

$$\hat{f}(\xi, p_{m_2}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) = \hat{f}((1-\beta)p_{m_1} + \beta q, p_{m_2}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) =$$
$$= (1-\beta)\hat{f}(p_{m_1}, p_{m_2}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) + \beta\hat{f}(q, p_{m_2}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) =$$
$$= (1-\beta)q + \beta q = q.$$

Таким образом, для любого $\alpha_1 \in [\min\{p_{m_1}, q\}, \max\{p_{m_1}, q\}]$ выполнено $\hat{f}(\alpha_1, p_{m_2}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) = q$. Поскольку $\hat{f}$ является многочленом, получаем, что это же равенство выполнено при произвольных α_1. Аналогично далее показываем, что

$$\hat{f}(\alpha_1, \alpha_2, p_{m_3}, \ldots, p_{m_R}, q, \ldots, q) = \cdots = \hat{f}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_R, q, \ldots, q) = q$$

при произвольных $\alpha_1, \ldots, \alpha_R$. Таким образом шаг индукции, а вместе с ним и лемма доказаны. □

Лемма 5. *Пусть алгебра распределений* $\langle G, \hat{f}\rangle$ *имеет единственную предельную точку* $q \in [0,1]$. *Тогда либо* $f \in MU$*, либо* $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *и* $f \in \mathcal{A}(q)$.

Доказательство. Покажем, что если $f \notin MU$, то выполнено второе утверждение. Без ограничения общности считаем, что все n переменных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенные. Поскольку $f \notin MU$, выполнено $n \geqslant 1$. Тогда к алгебре $\langle G, \hat{f}\rangle$ применимо утверждение леммы 4, из которой вытекает, что для любых $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \ni q$ выполнено равенство $\hat{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q$.

Пусть $f_0(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$, $f_1(x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим разложение функции $\hat{f}$ по первой переменной при $\alpha_1 = q$:

$$q = \hat{f}(q, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (1-q)\widehat{f_0}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) + q\widehat{f_1}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n). \qquad (5)$$

Это тождество, которые выполняется при произвольных значениях $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Рассмотрим $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$. Тогда согласно лемме 1 имеет место $\widehat{f_0}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n), \widehat{f_1}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}$. Как следствие, на всех наборах $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ тождество (5) принимает один из следующих видов:

$$q = (1-q)\cdot 0 + q \cdot 0 \qquad (6)$$
$$q = (1-q)\cdot 0 + q \cdot 1 \qquad (7)$$
$$q = (1-q)\cdot 1 + q \cdot 0 \qquad (8)$$
$$q = (1-q)\cdot 1 + q \cdot 1 \qquad (9)$$

Легко видеть, что из равенства (6) следует, что $q = 0$, из равенства (8) — что $q = \frac{1}{2}$, из равенства (9) — что $q = 1$. Для заданной функции f на всевозможных наборах $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ равенства (5) могут переходить только в одно из соотношений (6),(8),(9), и, возможно, в соотношение (7). Предположим, что ни для одного набора $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ равенство (5) не переходит в какое-то из соотношений (6),(8),(9). Тогда для всех наборов равенство (5) переходит в соотношение (7), откуда следует, что при всех $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ имеют место равенства:

$$f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1.$$

Из этих равенств вытекает, что $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, что противоречит предположению $f \notin MU$.

Итак, для любой функции $f \notin MU$ выполнено $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. При этом, если $q = 0$, то для любого набора $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ выполнено $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$; если $q = 1$, то для любого набора $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ выполнено $f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$; наконец, если $q = \frac{1}{2}$, то для любого набора $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ выполнено $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Поскольку в рассуждениях выше вместо переменной x_1 можно взять любую другую, получаем, что единственность предельной точки у множества G влечет одно из трех утверждений:

1. $q = 0$ и для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (1, \ldots, 1)$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.
2. $q = 1$ и для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.
3. $q = \frac{1}{2}$ и на любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \{0,1\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i \oplus \beta, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \oplus \beta$.

Несложно проверить, что эти три условия в точности описывают функции из множеств $\mathcal{A}(q)$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть алгебра распределений $\langle G, \hat{B} \rangle$ имеет единственную предельную точку $q \in [0,1]$. Тогда либо $B \subseteq MU$, либо $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $B \subseteq \mathcal{A}(q)$.*

Доказательство. Если $\langle G, \hat{B} \rangle$ — алгебра с единственной предельной точкой $q \in [0,1]$ и $f \in B$, то $\langle G, \hat{f} \rangle$ — также алгебра с единственной предельной точкой q. По лемме 5 либо $f \in MU$, либо $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $f \in \mathcal{A}(q)$, Если $B \subseteq MU$, то утверждение теоремы выполнено.

Если $B \setminus MU \neq \varnothing$, то $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $B \setminus MU \subseteq \mathcal{A}(q)$. Поскольку $MU \subset \subset \mathcal{A}(q)$ при любом $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, получаем, что $B \subseteq (B \setminus MU) \cup MU \subseteq \mathcal{A}(q)$, что и требовалось доказать. □

Порождение единственной предельной точки

Для множества $G \subseteq [0,1]$ определим *замыкание* $V_B(G)$ относительно операций из множества $\hat{B}$ как наименьшую по включению подалгебру $\langle[0,1], \hat{B}\rangle$, содержащую множество G. Отметим, что если $A \subseteq B$, то $V_A(G) \subseteq V_B(G)$.

Докажем критерий того, что множество G порождает алгебру с единственной предельной точкой.

Сформулируем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6. *Пусть все $n \geqslant 1$ переменных функции f существенные.*

Если $f \in K$, то $\hat{f}(p_1, \ldots, p_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i$.

Если $f \in D$, то $\hat{f}(p_1, \ldots, p_n) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - p_i)$.

Если $f = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus c \in L$, то $(1 - 2\hat{f}(p_1, \ldots, p_n)) = (-1)^c \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - 2p_i)$.

Доказательство. Пусть $f \in K$. Так как f имеет $n \geqslant 1$ существенных переменных, $f(x_1, \ldots, x_n) = \min(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$ равносильно $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 1$, откуда по формуле (1) получаем, что $\hat{f}(p_1, \ldots, p_n) = p_1 \cdots p_n$.

Пусть теперь $f \in D$. Так как f имеет $n \geqslant 1$ существенных переменных, $f(x_1, \ldots, x_n) = \max(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим $g = \bar{f}$. Тогда $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$ равносильно $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 0$, откуда получаем $\hat{g}(p_1, \ldots, p_n) = (1 - p_1) \cdots (1 - p_n)$ и $\hat{f}(p_1, \ldots, p_n) = 1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n)$.

Пусть, наконец, $f \in L$. Докажем утверждение индукцией по n. Если $n = 1$, то $f(x_1) = x_1$ или $f(x_1) = x_1 \oplus 1$. В первом случае $\hat{f}(p_1) = p_1$, откуда $1 - 2\hat{f}(p_1) = (-1)^0(1 - 2p_1)$. Во втором случае $\hat{f}(p_1) = 1 - p_1$, откуда $1 - 2\hat{f}(p_1) = 1 - 2(1 - p_1) = 2p_1 - 1 = (-1)^1(1 - 2p_1)$

Пусть утверждение доказано для $n = N$, докажем его для $n = N + 1$. Рассмотрим $f(x_1, \ldots, x_{N+1}) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_N \oplus x_{N+1} \oplus c$. Пусть $f_0(x_1, \ldots, x_N) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_N \oplus c$ и $f_1(x_1, \ldots, x_N) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_N \oplus \bar{c}$. Тогда имеет место разложение $\hat{f}$ по последней переменной:

$$\hat{f}(p_1, \ldots, p_{N+1}) = (1 - p_{N+1})\widehat{f_0}(p_1, \ldots, p_N) + p_{N+1}\widehat{f_1}(p_1, \ldots, p_N).$$

Отсюда получаем, опуская для краткости аргументы функций:

$$\begin{aligned}
1 - 2\hat{f} &= 1 - (1 - p_{N+1}) \cdot 2\widehat{f_0} - p_{N+1} \cdot 2\widehat{f_1} = \\
&= 1 + (1 - p_{N+1})(1 - 2\widehat{f_0}) + p_{N+1}(1 - 2\widehat{f_1}) - (1 - p_{N+1}) - p_{N+1} = \\
&= (1 - p_{N+1})(1 - 2\widehat{f_0}) + p_{N+1}(1 - 2\widehat{f_1}).
\end{aligned}$$

Применим к функциям f_0 и f_1 предположение индукции. Тогда

$$1-2\hat{f}=(1-p_{N+1})(-1)^c\prod_{i=1}^{N}(1-2p_i)+p_{N+1}(-1)^{c+1}\prod_{i=1}^{N}(1-2p_i)=$$
$$=(-1)^c(1-p_{N+1}-p_{N+1})\prod_{i=1}^{N}(1-2p_i)=(-1)^c\prod_{i=1}^{N+1}(1-2p_i),$$

что и требовалось доказать. □

Из леммы 6 вытекают несколько простых следствий.

Следствие 1. *Если у функции* $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{A}(q)$ *все* $n\geqslant 1$ *переменных существенные, то* $(1+4q(1-q))|\hat{f}(p_1,\ldots,p_n)-q|=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+4q(1-q))|p_i-q|$.

Следствие 2. *Если у функции* $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{A}(q)$ *все* $n\geqslant 1$ *переменных существенные,* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[0,1]$*,* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\ni q$*, то* $\hat{f}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=q$.

Следствие 3. *Если для заданных* $q\in\{0,\frac{1}{2},1\}$ *и* $p_1,\ldots,p_n\in[0,1]$ *число* $r\in$ $\in[0,1]$ *удовлетворяет* $(1+4q(1-q))|r-q|=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+4q(1-q))|p_i-q|$*, то найдется такая функция* $f\in\mathcal{A}(q)$*, что* $\hat{f}(p_1,\ldots,p_n)=r$.

Следствие 4. $V_{\mathcal{A}(q)}(G)=\{\hat{f}(g_1,\ldots,g_n)\mid f\in\mathcal{A}(q);g_1,\ldots,g_n\in G\}$.

Доказательство. Из включения $MU\subseteq\mathcal{A}(q)$ и определения замыкания легко следует, что $G\subseteq\{\hat{f}(g_1,\ldots,g_n)\mid f\in\mathcal{A}(q);g_1,\ldots,g_n\in G\}\subseteq V_{\mathcal{A}(q)}(G)$. Покажем, что множество $G'=\{\hat{f}(g_1,\ldots,g_n)\mid f\in\mathcal{A}(q);g_1,\ldots,g_n\in G\}$ — подалгебра. Пусть заданы $r_1,\ldots,r_m\in G'$ и $f(x_1,\ldots,x_m)\in\mathcal{A}(q)$. Тогда по определению множества G' для каждого r_j найдется такая функция $\varphi_j(x_1,\ldots,x_{l_j})\in\mathcal{A}(q)$ и такой набор $p_{ji}\in G$, $i=1,\ldots,l_j$, что $r_j=\widehat{\varphi_j}(p_{j1},\ldots,p_{jl_j})$. По следствию 1 для каждого r_j выполнено равенство $(1+4q(1-q))|r_j-q|=\prod\limits_{i=1}^{l_j}(1+4q(1-q))|p_{ji}-q|$. Рассмотрим $\hat{f}(r_1,\ldots,r_m)$. В силу следствия 1 имеем:

$$(1+4q(1-q))|\hat{f}(r_1,\ldots,r_m)-q|=\prod_{j=1}^{m}(1+4q(1-q))|r_j-q|=$$
$$=\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{l_j}(1+4q(1-q))|p_{ji}-q|.$$

Тогда из следствия 3 вытекает, что найдется такая функция $\varphi \in \mathcal{A}(q)$, что $\hat{f}(r_1, \ldots, r_m) = \widehat{\varphi}(p_{11}, \ldots, p_{ml_m})$. Поскольку $p_{11}, \ldots, p_{ml_m} \in G$, имеет место $\widehat{\varphi}(p_{11}, \ldots, p_{ml_m}) \in G'$, откуда $\hat{f}(r_1, \ldots, r_m) \in G'$. Следствие доказано. $\square$

Нам также потребуется следующая теорема, характеризующая конечные алгебры бернуллиевских распределений.

Теорема 2 [5]. *Пусть $\langle G, \hat{B} \rangle$ — конечная алгебра бернуллиевских распределений, индуцированная множеством булевых функций B. Тогда имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений:*

1. $G \subseteq \{0, 1\}$;
2. $B \subseteq U$;
3. $G = \{p\}$, $p \notin \{0, 1\}$ *— алгебраическое число;*
4. $G \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $B \subseteq L$.

Сформулируем теперь критерий. Через $\lambda(G)$ будем обозначать множество предельных точек множества G.

Теорема 3. *Для того, чтобы порождаемая множеством $G \subset [0, 1]$ алгебра распределений $V_B(G)$ имела единственную предельную точку $q \in [0, 1]$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1. $B \subseteq MU$ *и* $\lambda(G) = \{q\}$;
2. $q = \frac{1}{2}$, $B \subseteq U$ *и* $\lambda(G) = \{q\}$;
3. $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $B \not\subseteq U$, $B \subseteq \mathcal{A}(q)$, $\lambda(G) \subseteq \{q\}$ *и* $G \not\subseteq \{0, q, 1\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V_B(G)$ имеет единственную предельную точку $q \in [0, 1]$. Из включения $G \subseteq V_B(G)$ вытекает, что $\lambda(G) \subseteq \{q\}$.

Если $B \subseteq U$ (в том числе, если $B \subseteq MU$), то выполнено $V_B(G) \subseteq \subseteq G \cup \{1 - g \mid g \in G\} \cup \{0, 1\}$. Если множество G конечно, то $V_B(G)$ также конечно и не имеет предельных точек. Поскольку $V_B(G)$ имеет предельную точку q, получаем, что $\lambda(G) = \{q\}$.

Если $B \subseteq U$, и при этом $B \not\subseteq MU$, то $\bar{x} \in B$. Тогда $V_B(G)$ замкнуто относительно операции, индуцированной функцией $\bar{x}$, и, следовательно, вместе с каждой точкой $r \in V_B(G)$ также содержит точку $1-r$. Тогда, если q — предельная точка множества $V_B(G)$, то $1 - q$ также является его предельной точкой. В силу единственности предельной точки получаем, что $q = 1 - q$, откуда $q = \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $B \not\subseteq U$. По теореме 1 из единственности предельной точки q в алгебре $\langle V_B(G), \hat{B} \rangle$ вытекает, что $q \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и $B \subseteq \mathcal{A}(q)$.

Условие $G \not\subseteq \{0,1\}$ очевидно необходимо в силу леммы 1. Если $q = \frac{1}{2}$ и $B \subseteq \mathcal{A}(\frac{1}{2}) = L$, то из леммы 1 и следствия 2 вытекает равенство $V_B(\{0,\frac{1}{2},1\}) = \{0,\frac{1}{2},1\}$, которое влечет необходимость условия $G \not\subseteq \{0,\frac{1}{2},1\}$ в этом случае.

Достаточность. Если $B \subseteq U$, достаточность условия $\lambda(G) = \{q\}$ (и дополнительного условия $q = \frac{1}{2}$ в случае $B \not\subseteq MU$) легко вытекает из включения $V_B(G) \subseteq G \cup \{1-g \mid g \in G\} \cup \{0,1\}$.

Пусть далее $q \in \{0,\frac{1}{2},1\}$, $B \not\subseteq U$, $B \subseteq \mathcal{A}(q)$, $\lambda(G) \subseteq \{q\}$ и $G \not\subseteq \{0,q,1\}$. Покажем, что $V_B(G)$ имеет единственную предельную точку q.

Предположим, что $V_B(G)$ не имеет предельных точек, тогда $V_B(G)$ конечно. С учетом условий, которым удовлетворяют множества B и G, по теореме 2 получаем, что единственный случай, в котором возможно конечное множество $V_B(G)$ — это $G = \{p\}$ и $V_B(G) = \{p\}$.

Тогда найдется функция $f \in B \setminus U$ с $n \geqslant 2$ существенными переменными, для которой выполнено $h_f(p) = p$. По следствию 1 это равносильно равенству $(1+4q(1-q))|p-q| = ((1+4q(1-q))|p-q|)^n$, из которого следует, что $(1+4q(1-q))|p-q| \in \{0,1\}$. Несложно убедиться, что при $q \in \{0,\frac{1}{2},1\}$ это влечет $p \in \{0,q,1\}$.

Таким образом конечность множества $V_B(G)$ влечет $G = \{p\}$, где $p \in \in \{0,1\}$, а это противоречит условию $G \not\subseteq \{0,q,1\}$. Получаем, что множество $V_B(G)$ счетно, и имеет предельные точки. Покажем, что в действительности предельная точка единственна и равна q.

Из включения $B \subseteq \mathcal{A}(q)$ вытекает, что $V_B(G) \subseteq V_{\mathcal{A}(q)}(G)$, поэтому достаточно доказать единственность предельной точки q для множества $V_{\mathcal{A}(q)}(G)$.

Пусть ξ — предельная точка множества $V_{\mathcal{A}(q)}(G)$, тогда существует такая монотонная последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V_{\mathcal{A}(q)}(G)$, что $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$. В силу монотонности последовательности ξ_n все ее элементы различны, и, кроме того, не ограничивая общности можно считать, что $\xi_n \neq q$ при всех n. В силу следствия 4 имеет место представление:

$$V_{\mathcal{A}(q)}(G) = \{\hat{f}(g_1,\ldots,g_n) \mid f \in \mathcal{A}(q); g_1,\ldots,g_n \in G\}.$$

Следовательно, для каждого элемента последовательности ξ_n найдется функция $f_n(x_1,\ldots,x_{l_n}) \in \mathcal{A}(q)$, у которой все l_n переменных существенные, и такие элементы $g_{n1},\ldots,g_{nl_n} \in G$, что $\xi_n = \widehat{f_n}(g_{n1},\ldots,g_{nl_n})$. Отметим, что $g_{ni} \neq q$, так как в противном случае по следствию 2 имело бы место $\xi_n = \widehat{f_n}(g_{n1},\ldots,g_{nl_n}) = q$, что противоречит выбору $\xi_n \neq q$.

Также можно считать, что $g_{n1},\ldots,g_{nl_n} \notin \{0,1\}$, так как в противном случае можно заменить функцию f_n на функцию $f'_n \in \mathcal{A}(q)$ с меньшим числом существенных переменных.

Обозначим $G' = \{g_{ni}\}_{n\in\mathbb{N},i=1,\ldots,l_n}$. Предположим, что последовательность $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена и множество G' конечно. Тогда имеется лишь конечное число вариантов значений для $\widehat{f_n}(g_{n1},\ldots,g_{nl_n})$, а это противоречит тому, что все элементы последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ различны.

Итак, либо последовательность $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не ограничена, либо множество G' счетно.

Рассмотрим сначала первый вариант. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{l_{n_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$, что $l_{n_s} \to \infty$ при $s \to \infty$. Положим $\gamma = \max\limits_{g\in G\setminus\{0,1\}}(1+4q(1-q))|g-q| < 1$. По следствию 1 для функции f_{n_s} получаем: $(1+4q(1-q))|\widehat{f_{n_s}}(g_{n_s1},\ldots,g_{n_sl_{n_s}})-q| = \prod\limits_{i=1}^{l_{n_s}}(1+4q(1-q))|g_i-q| \leqslant \gamma^{l_{n_s}}$.

При $s\to\infty$ имеет место $\gamma^{l_{n_s}} \to 0$, откуда вытекает, что также выполнено $(1+4q(1-q))|\widehat{f_{n_s}}(g_{n_s1},\ldots,g_{n_sl_{n_s}})-q| \to 0$. Это соотношение равносильно $\xi_{n_s} = \widehat{f_{n_s}}(g_{n_s1},\ldots,g_{n_sl_{n_s}}) \to q$. Поскольку предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности, получаем, что также имеет место $\xi_n = \widehat{f_n}(g_{n1},\ldots,g_{nl_n}) \to q$ при $n\to\infty$, т. е. $\xi = q$.

Рассмотрим теперь второй вариант. Пусть последовательность $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена, но при этом множество G' счетно. Из ограниченности последовательности $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следует, что множество функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конечно, а значит существует такая функция $\varphi(x_1,\ldots,x_N)$ и такая подпоследовательность $\{n_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, что $f_{n_s} = \varphi$, т. е. $\xi_{n_s} = \widehat{\varphi}(g_{n_s1},\ldots,g_{n_sN})$.

Среди множеств $G_i = \{g_{n_si}\}_{s\in\mathbb{N}}$ при $i = 1,\ldots,N$ есть по крайней мере одно счетное, для удобства будем считать, что это G_1. Поскольку $G_1 \subseteq G' \subseteq G$ и $\lambda(G) \subseteq \{q\}$ получаем, что q — предельная точка множества G_1, а следовательно существует такая подпоследовательность $\{n'_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, что $g_{n'_s1} \to q$ при $s\to\infty$.

Положим $\gamma = \max\limits_{g\in G'}(1+4q(1-q))|g-q|$. По следствию 1 получаем:

$$(1+4q(1-q))|\widehat{f_{n'_s}}(g_{n'_s1},g_{n'_s2},\ldots,g_{n'_sN})-q| = \\ = \prod_{i=1}^{N}(1+4q(1-q))|g_{n'_si}-q| \leqslant (1+4q(1-q))|g_{n'_s1}-q|\gamma^{N-1}.$$

Тогда $g_{n'_s1} \to q$ при $s\to\infty$ влечет $\xi_{n'_s} = \widehat{f_{n'_s}}(g_{n'_s1},g_{n'_s2},\ldots,g_{n'_sN}) \to q$ при $s\to\infty$. Поскольку предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности, получаем, что $\xi_n \to q$, и следовательно $\xi = q$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 5. *Если $G \subset [0,1]$ конечно и $V_B(G)$ имеет единственную предельную точку $q \in [0,1]$, то $q \in \{0,\frac{1}{2},1\}$.*

Следствие 6. *Если для какого-то конечного множества* $G \not\subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *алгебра распределений* $V_B(G)$ *имеет единственную предельную точку* $q \in \in [0, 1]$*, то для любого конечного* $G' \not\subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *алгебра* $V_B(G')$ *имеет ту же предельную точку* q.

Автор выражает признательность О. М. Касим-Заде за внимание к данной работе.

Список литературы

[1] Колпаков Р. М. Критерий порождения множеств рациональных вероятностей в классе булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Т. 6, № 2. С. 41–61.

[2] Салимов Ф. И. Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами // Изв. вузов. Матем., 1981, № 5. С. 78–82.

[3] Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой случайной величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1966. Вып. 7. С. 71–80.

[4] Яшунский А.Д. Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 38. 23 с. doi:10.20948/prepr-2016-38 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-38

[5] Яшунский А. Д. Конечные алгебры бернуллиевских распределений // Дискретная математика. 2018. Т. 30, № 2. С. 148–161.