



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 127 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А., Вершков В.А.

Рёберно-ориентированные
схемы на подвижных
гибридных сетках в коде
NOISEtte

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А., Вершков В.А. Рёберно-ориентированные схемы на подвижных гибридных сетках в коде NOISEtte // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 127. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2018-127](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-127)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-127>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

П.А. Бахвалов, В.А. Вершков

**Рёберно-ориентированные схемы
на подвижных гибридных сетках
в коде NOISEtte**

Москва — 2018

Бахвалов П. А., Вершков В. А.

Рёберно-ориентированные схемы на подвижных гибридных сетках в коде NOISEtte

В настоящей работе описывается построение рёберно-ориентированных разностных схем на подвижных сетках при сохранении сеточной топологии. Скорость движения узлов расчетной сетки полагается постоянной в пределах шага по времени. Интегрирование по времени проводится явными методами Рунге – Кутты либо 2- или 3-слойными неявными схемами. Доказывается консервативность и геометрическая консервативность полученных схем. Работоспособность полученного алгоритма демонстрируется на тестовых задачах.

Ключевые слова: рёберно-ориентированная схема, неструктурированная сетка, подвижная сетка.

Pavel Alexeevich Bakhvalov, Vladislav Alexandrovich Vershkov

Edge-based schemes on moving hybrid meshes in the NOISEtte code

In the present paper we describe edge-based schemes on moving meshes with constant mesh topology. Nodal velocities are assumed to be constant during timestep. For time integration explicit multi-stage Runge – Kutta methods and 1- or 2-step backward differentiation formulae are used. Conservation and geometric conservation are proved. Performance of the algorithm is analyzed by solving test problems.

Key words: edge-based scheme, unstructured mesh, moving mesh

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект № 16-11-10350.

Введение

Численное решение задач аэродинамики обычно представляет собой решение уравнений Эйлера или Навье – Стокса на расчётных сетках. В зависимости от сложности течения и формы обтекаемого тела необходимо улучшенное разрешение определённых зон расчётной области, будь то передняя кромка профиля крыла, либо зона скачка уплотнения, либо турбулентная зона в струе. При решении задач, в которых отсутствуют деформация и взаимное движение твёрдых тел, достаточно использовать статическую расчётную сетку. К таким задачам относятся, например, обтекание планера и вращающегося жёсткого винта. Однако существует ряд задач, связанных со сложным изменением формы или положения тела в пространстве, когда невозможно смоделировать движение тела на статической сетке. К таким задачам относятся моделирование динамического отклонения органов управления на крыльях, отделение частей летательных аппаратов, учёт маховых движений и циклического управления лопастями несущего винта вертолёта. При этом приходится решать уравнения в условиях непрерывного движения узлов расчётной сетки.

Расчёты многомерных задач газовой динамики на движущихся сетках, вероятно, впервые были описаны в [1]. Движущиеся неструктурированные сетки нашли своё применение, в первую очередь, в конечно-объёмных схемах для задач внешнего обтекания колеблющихся профилей. Использовались как конечно-объёмные схемы с определением переменных на сеточных элементах (например, [2]), так и рёберно-ориентированный вариант конечно-объёмных схем [3]. В связи со спецификой решаемых задач большое внимание уделялось качественной (более точной, чем линейная) аппроксимации движения границы во времени [3, 4].

В настоящей работе описывается метод, близкий к [3], реализованный для схем с рёберно-ориентированной реконструкцией переменных в комплексе программ NOISEtte [5]. Он позволяет проводить расчёты на гибридных сетках и использует как явные, так и неявные схемы расчёта. В настоящей работе не

ставится цель описания движения границ твёрдого тела с повышенной точностью, поэтому в пределах шага по времени скорости узлов расчётной сетки считаются постоянными. Данное предположение существенно упрощает алгоритм.

1. Уравнения Эйлера и Навье – Стокса

В настоящей работе будем рассматривать систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$, полная энергия $E = \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \rho \varepsilon$, а ε – внутренняя энергия газа. Компоненты вектора $\mathcal{F}_c(\mathbf{Q})$ записываются в виде

$$\mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Система уравнений (1)–(2) замыкается уравнением состояния идеального газа $\varepsilon = p / (\rho(\gamma - 1))$, где γ – показатель адиабаты.

Также будем рассматривать систему уравнений Навье – Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}). \quad (3)$$

Компоненты вектора диффузионных потоков $\mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$ вдоль осей x , y и z имеют вид

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xx}u + \tau_{yx}v + \tau_{zx}w - \sigma_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xy}u + \tau_{yy}v + \tau_{zy}w - \sigma_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \tau_{zz}w - \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Элементы тензора вязких напряжений записываются в виде

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), & \tau_{yy} &= \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), & \tau_{zz} &= \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

где μ – коэффициент динамической вязкости,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Компоненты вектора теплового потока записываются в виде

$$\sigma_x = -\frac{\gamma\mu}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \sigma_y = -\frac{\gamma\mu}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \quad \sigma_z = -\frac{\gamma\mu}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z},$$

где Pr – число Прандтля.

2. Закон сохранения для движущегося объёма

Для построения консервативной конечно-объёмной схемы вся расчётная область разбивается на контрольные объёмы, для которых выписываются дискретные законы сохранения. Существует два типа такого разбиения. В случае *объёмно-центрированных схем* контрольный объём, также называемый ячейкой, совпадает с сеточным элементом. В настоящей работе используется *вершинно-центрированная схема*, т. е. переменные хранятся в узлах сетки. Внутри каждого контрольного объёма содержится ровно один узел. Контрольный объём вкладывается в объединение сеточных элементов, содержащих этот узел.

Проинтегрируем (1) по движущемуся объёму $K(t)$ с границей $\partial K(t)$ в некоторый момент времени. После применения теоремы Остроградского – Гаусса получим

$$\int_{K(t)} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dV + \int_{\partial K(t)} \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{K(t)} \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV. \quad (5)$$

Введём $f(\mathbf{r}, t)$ – функцию расстояния от точки до границы контрольного объёма – следующим образом: $f < 0$ снаружи контрольного объёма, $f > 0$ внутри контрольного объёма, $|f|$ – расстояние до границы. Пусть Θ – функция Хевисайда. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{K(t)} \mathbf{Q} dV &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \Theta(f(\mathbf{r}, t)) \mathbf{Q} dV = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Theta(f(\mathbf{r}, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, \mathbf{r})}{\partial t} dV + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}) \delta(f(\mathbf{r}, t)) \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Theta(f(\mathbf{r}, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(t, \mathbf{r})}{\partial t} dV + \iint_{f(\mathbf{r}, t)=0} \frac{\mathbf{Q}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}}{|\nabla f(\mathbf{r}, t)|} dS = \int_{K(t)} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dV + \iint_{\partial K(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Q} dS, \end{aligned}$$

где \mathbf{n} – ориентированная внешним образом по отношению к ячейке $K(t)$ единичная нормаль, \mathbf{v} – скорость границы движущегося объёма. Подставив полученное выражение в (5), имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{K(t)} \mathbf{Q} dV + \int_{\partial K(t)} (\mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) - \mathbf{v} \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{K(t)} \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV \quad (6)$$

Введём объём i -й ячейки V_i и переменную $\bar{\mathbf{Q}}_i(t)$ – интегральное среднее от \mathbf{Q} по этой ячейке:

$$\bar{\mathbf{Q}}_i(t) = \frac{1}{V_i} \int_{K_i(t)} \mathbf{Q} dV, \quad V_i = \int_{K_i(t)} dV.$$

Тогда (6) примет вид

$$\frac{d(\bar{\mathbf{Q}}_i V_i)}{dt} + \int_{\partial K_i(t)} \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{K_i(t)} \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV. \quad (7)$$

Интегралы по $\partial K_i(t)$ представляются в виде суммы по частям границы $\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)$. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся величины ориентированных площадей поверхностей, получаемых в результате пересечения границ контрольных объёмов i и j

$$\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)} \mathbf{n} dS. \quad (8)$$

3. Построение контрольных объёмов

Следующим шагом построим контрольные объёмы для вершинно-центрированной схемы. Мы рассматриваем только конформные расчётные сетки, у которых сеточные элементы образованы отрезками, соединяющими узлы расчётной сетки таким образом, чтобы в расчетной области не оставалось подобластей, не принадлежащих ни одному, либо принадлежащих более чем одному сеточному элементу.

Контрольный объём узла i является многоугольником (многогранником) и складывается из частей, лежащих внутри сеточных элементов, содержащих узел i . Такие части будем называть *элементами* контрольного объёма.

В конечном счёте, требуется точное определение величин контрольных объёмов V_i и ориентированных площадей \mathbf{n}_{ij} . Данные величины определяются как

$$V_i = \sum_{m \ni i} V_{i,m}, \quad \mathbf{n}_{ij} = \sum_{m \ni i,j} \mathbf{n}_{ij,m}, \quad (9)$$

где суммирование ведётся по сеточным элементам m , содержащим узел i (или узлы i и j), $V_{i,m} = |K_i \cap m|$ – величина элемента контрольного объёма узла i , лежащего внутри сеточного элемента m , а $\mathbf{n}_{ij,m}$ определяется как

$$\mathbf{n}_{ij,m} = \int_{\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t) \cap m} \mathbf{n} dS.$$

Начнём с рассмотрения двумерной треугольной сетки. Граница контрольного объёма проходит через геометрические середины рёбер треугольника и его центр, деля сеточный элемент на три части, принадлежащие разным контрольным объёмам.

Для построения *ортоцентрических* ячеек центр элемента определяется как центр описанной вокруг остроугольного треугольника окружности, либо как середина наибольшего ребра тупоугольного треугольника. *Барицентрические (медианные)* ячейки подразумевают определение центра треугольника как его центра масс, см. рис. 1. В настоящей работе на треугольной сетке используются медианные ячейки.

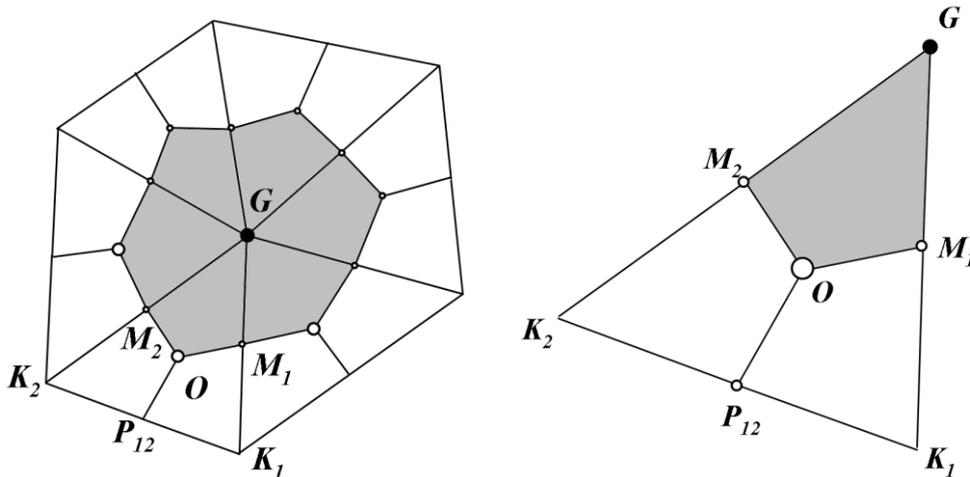


Рис. 1. Двумерный медианный объём узла G (слева) и его элемент, лежащий внутри треугольника GK_1K_2 (справа)

В случае тетраэдральной сетки каждый тетраэдр разбивается на четыре части, являющиеся элементами контрольных объёмов с центрами в вершинах этого тетраэдра. Каждое ребро сетки разрезается на две части в его геометрической середине. На каждом тетраэдре и на каждой грани тетраэдра произвольным образом определяется по одной точке, которые будут называться их центрами. В случае медианных ячеек, это центры масс тетраэдра и его треугольных граней. Поверхность пересечения двух контрольных объёмов, лежащая внутри одного сеточного элемента, состоит из двух треугольных граней, имеющих вершинами центр элемента, центр ребра, соединяющего центры этих контрольных объёмов, и центр грани, опирающейся на данное ребро. Центр тетраэдра имеет смысл общей точки границ четырёх контрольных объёмов, а общей границей трёх контрольных объёмов является отрезок, соединяющий центр тетраэдра с центром одной из его граней, см. рис. 2.

Будем рассматривать гибридные сетки, в двумерном случае состоящие из треугольников и четырёхугольников, а в трёхмерном – из тетраэдров, треугольных призм, четырёхугольных пирамид и гексаэдров. Элемент задаётся рёбрами, и грани, образованные этими рёбрами, могут не лежать в одной плоскости. Будем рассматривать два типа контрольных объёмов на гибридной сетке: прямой и полупрозрачный.

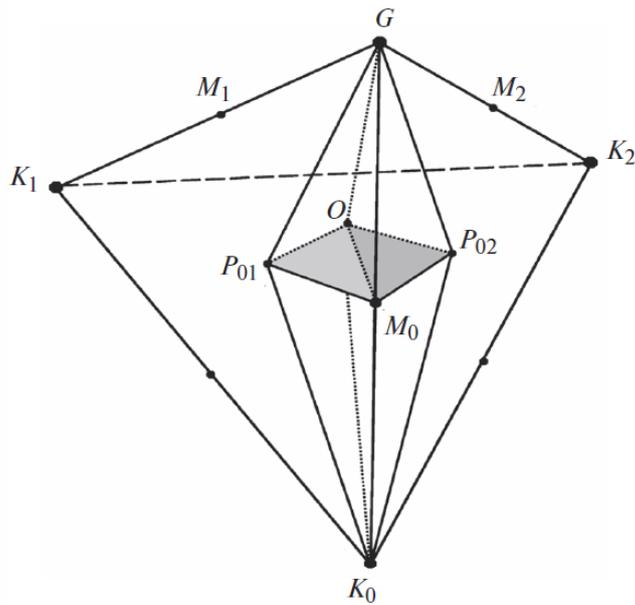


Рис. 2. Тетраэдр $GK_0K_1K_2$ и две его части $GM_0P_{01}O$ и $GM_0P_{02}O$, относящиеся к контрольному объёму узла G и опирающиеся на ребро GK_0

Начнём с *прямого* разбиения. Рассмотрим двумерную гибридную сетку. Граница контрольного объёма состоит из отрезков, которые соединяют геометрические центры ребер с центром сеточного элемента, радиус-вектор которого находится как среднее арифметическое радиус-векторов его узлов. В случае треугольника это разбиение совпадает с барицентрическим.

На рисунке 3 представлено прямое разбиение четырёхугольного двумерного элемента на части, входящие в контрольные объёмы его узлов.

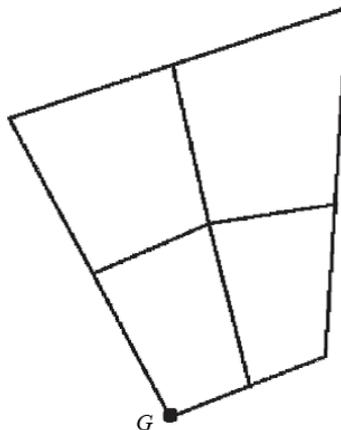


Рис. 3. Прямое разбиение двумерного четырёхугольного элемента

В трёхмерном случае пересечение границ контрольных объёмов некоторых узлов i и j , лежащее внутри некоторого сеточного элемента $T \ni i, j$, состоит из двух треугольников, каждый из которых образован серединой ребра ij , центром сеточного элемента T и центром одной из двух граней T , смежной с ребром ij . Радиус-вектор центра грани и радиус-вектор центра элемента определяются как средние арифметические радиус-векторов вершин, соответственно, грани или элемента. На тетраэдрах прямое разбиение совпадает с барицентрическим.

На рисунке 4 изображены прямые разбиения трёхмерных сеточных элементов. Например, часть контрольного объёма узла A , лежащая внутри призмы $ABCDEF$, представляет собой объединение тетраэдров $AGHO$, $AGOI$, $AHOJ$, $AOKJ$, $AOLK$ и $AOIL$.

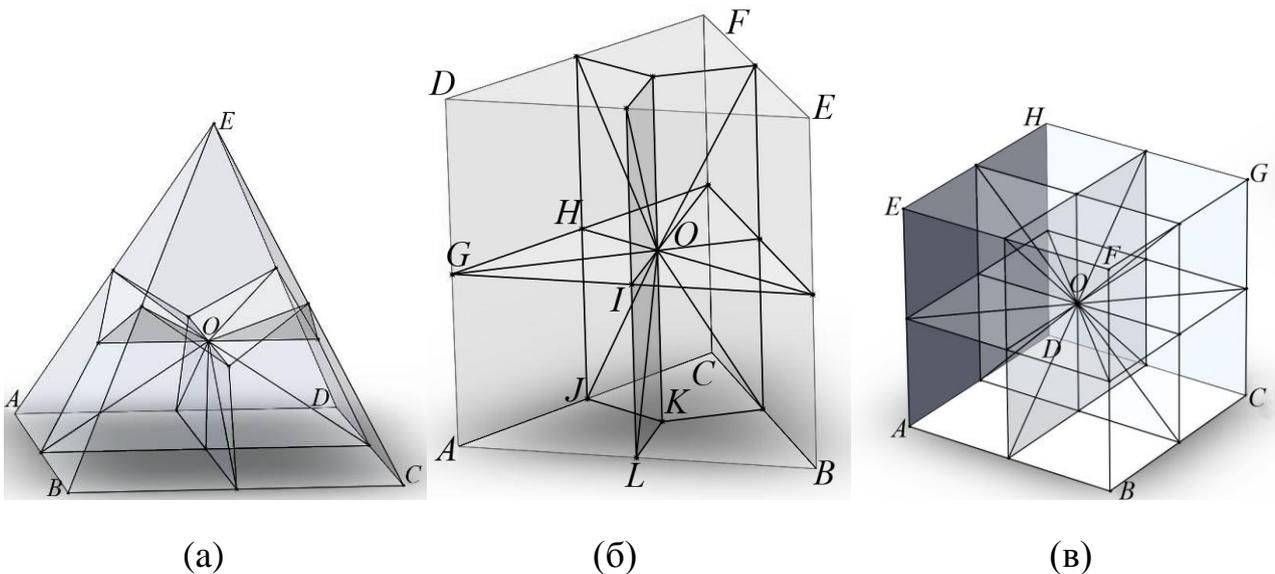


Рис. 4. Прямое разбиение пирамиды (а), призмы (б) и куба (в)
на элементы контрольных объёмов их вершин

Перейдём теперь к описанию *полупрозрачных ячеек*, как они были введены в [6]. Рассмотрим вначале двумерную гибридную сетку. Любой выпуклый четырёхугольник может быть разбит на два треугольника двумя разными диагоналями. На каждом из этих разбиений можно построить элементы барицентрических контрольных объёмов. Построенные таким образом

контрольные объёмы по отношению к исходной сетке мы будем называть *составными*. Можно представить элементы барицентрических контрольных объёмов на треугольной сетке их характеристическими функциями $\chi_{i,m}^1(t, \mathbf{r})$ и $\chi_{i,m}^2(t, \mathbf{r})$, где

$$\chi_{i,m}^n(t, \mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in K_{i,m}^n(t), \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_{i,m}^n(t). \end{cases}$$

Здесь $K_{i,m}^n(t)$ – элемент контрольного объёма узла i в сеточном элементе m при n -м составном разбиении в момент времени t . Характеристическая функция элемента полупрозрачного контрольного объёма на гибридной сетке определяется как

$$\chi_{i,m}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\chi_{i,m}^1(t, \mathbf{r}) + \chi_{i,m}^2(t, \mathbf{r})).$$

Сравнение прямого и полупрозрачного разбиения декартовой сетки представлено на рис. 5. На рис. 6 изображено сравнение прямого и полупрозрачного разбиений для двумерной гибридной сетки.

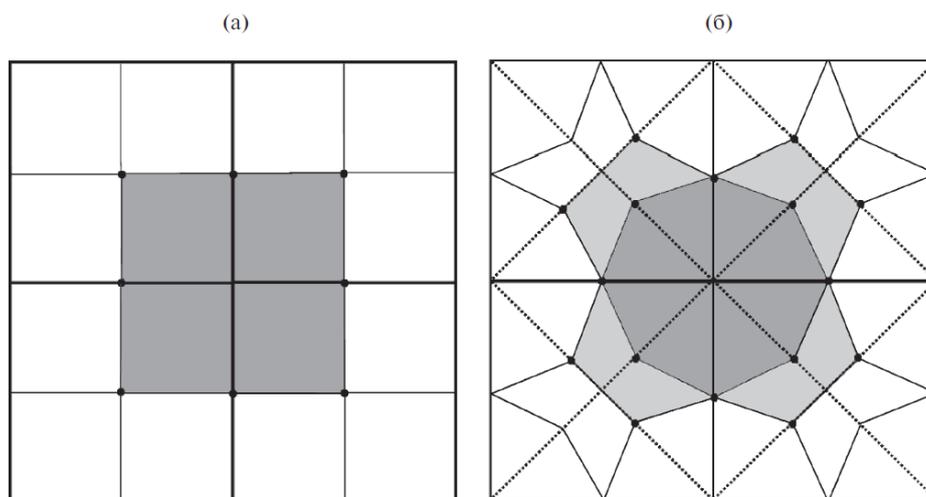


Рис. 5. Прямой (а) и полупрозрачный (б) контрольные объёмы для двумерной декартовой сетки

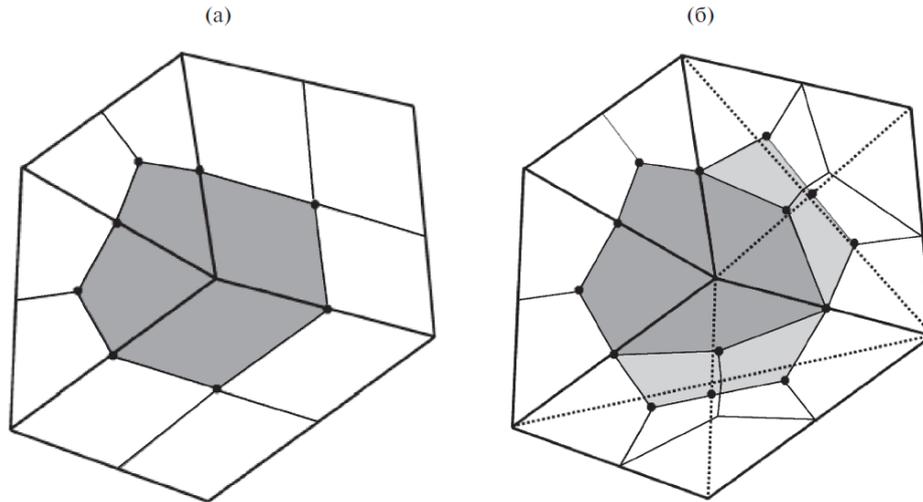


Рис. 6. Прямой (а) и полупрозрачный (б) контрольные объёмы для двумерной гибридной сетки

Каждое из двух возможных составных разбиений ($k = 0$ и $k = 1$) определяет величины ориентированных площадей $\mathbf{n}_{ij,m}^k$, ассоциированных с ребрами, и площадь элемента контрольного объема $V_{i,m}^k$. Эти величины определяются по формулам:

$$\mathbf{n}_{ij,m}^k = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{ij,m}^{k,1} + \mathbf{n}_{ij,m}^{k,2}), \quad V_{i,m}^k = \frac{1}{2}(V_{i,m}^{k,1} + V_{i,m}^{k,2}).$$

В случае трёхмерной гибридной сетки любой сеточный элемент, имеющий более четырёх вершин, может быть разбит на тетраэдры различными способами, каждый из которых должен быть учтён при разбиении его на элементы полупрозрачных контрольных объёмов. Так, пирамида может быть разбита двумя, призма – шестью, а гексаэдр – четырьмя способами, соответствующими различным симплициальным разбиениям. В действительности способов разбиения гексаэдра намного больше, но достаточно перебрать такие разбиения, чтобы характеристическая функция получающегося в результате элемента контрольного объёма не претерпевала разрыва на внутренних гранях расчётной сетки. При построении элемента контрольного объёма берётся среднее арифметическое характеристических функций, соответствующих различным симплициальным разбиениям

трёхмерного сеточного элемента. Такое же осреднение проводится при расчёте величин ориентированных площадей фрагментов границы элемента контрольного объёма.

Величина контрольного объёма V_i определяется как сумма вкладов в объём сеточных элементов, инцидентных узлу i . Таким образом,

$$\begin{aligned}\chi_i(t, \mathbf{r}) &= \sum_{m \ni i} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \chi_{i,m}^k(t, \mathbf{r}), \\ \mathbf{n}_{ij}(t) &= \sum_{m \ni i} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \mathbf{n}_{ij,m}^k(t), \\ V_i(t) &= \sum_{m \ni i} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} V_{i,m}^k.\end{aligned}$$

Здесь n_m – количество перебираемых симплицальных разбиений элемента m (1, 2, 4 или 6, в зависимости от типа элемента).

4. Рёберно-ориентированные конечно-объёмные схемы

Рассмотрим систему (7). Предположим вначале, что вязкие члены отсутствуют. Перепишем (7) в виде

$$\frac{d(\bar{\mathbf{Q}}_i V_i)}{dt} + \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)} (\mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (10)$$

Здесь $N_1(i)$ – множество узлов, соединённых с i ребром (в случае прямых ячеек), либо содержащихся с i в одном сеточном элементе (в случае полупрозрачных ячеек). Также в $N_1(i)$ будем включать части границы контрольного объёма узла i , лежащие на границе расчётной области; в этом случае j ассоциируется с граничной поверхностью с определённым типом граничного условия.

Построим вершинно-центрированную конечно-объёмную аппроксимацию системы (10). Обозначим через \mathbf{Q}_i значение сеточной функции в узле. Запишем конечно-объёмную схему в общем виде

$$\frac{d}{dt} (V_i(t) \mathbf{Q}_i(t)) + \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij}(t) \left| \mathbf{n}_{ij}(t) \right| = 0. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{h}_{ij} – численный поток вдоль ребра или диагонали ij , либо через соответствующую граничную поверхность.

Введём

$$\mathbf{v}_{ij}(t) = \frac{1}{|\mathbf{n}_{ij}|} \int_{\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (12)$$

где \mathbf{n}_{ij} определено в (8). В случае схемы «1-го порядка» запишем следующую аппроксимацию потока переменной \mathbf{Q} через грань, разделяющую i -й и j -й контрольные объёмы:

$$\mathbf{h}_{ij}(t) = \left[\frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_j)}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij} - \underbrace{\mathbf{v}_{ij}}_{\text{перенос}} \frac{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j}{2} \right] - \delta \left[\frac{1}{2} \mathbf{S}^{-1} |\Lambda - \mathbf{v}_{ij}| \mathbf{S} (\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) \right], \quad (13)$$

диссипация

где $\tilde{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{n}_{ij} / |\mathbf{n}_{ij}|$, \mathbf{S} и диагональная матрица Λ определяются равенством

$$\mathbf{S}^{-1} \Lambda \mathbf{S} = \frac{dF}{dQ} \tilde{\mathbf{n}}_{ij}(\mathbf{Q}_{ij}).$$

\mathbf{Q}_i и \mathbf{Q}_j .

Очевидно $\mathbf{h}_{ij} = -\mathbf{h}_{ji}$, что обеспечивает консервативность полудискретной схемы (11).

Для повышения порядка в (13) вместо \mathbf{Q}_i и \mathbf{Q}_j подставляются реконструированные значения \mathbf{Q}_{ij}^- и \mathbf{Q}_{ij}^+ , а матрицы \mathbf{S} и Λ не изменяются.

Способ определения \mathbf{Q}_{ij}^- и \mathbf{Q}_{ij}^+ определяет конкретную рёберно-ориентированную схему. В случае схемы Т. Barth [8] и метода коррекции потоков [9, 10] они определяются формулами

$$\mathbf{Q}_{ij}^- = \mathbf{Q}_i + \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{2} \cdot (\nabla \mathbf{Q})_i, \quad \mathbf{Q}_{ij}^+ = \mathbf{Q}_j + \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{2} \cdot (\nabla \mathbf{Q})_j \quad (14)$$

где $(\nabla \mathbf{Q})_i$ и $(\nabla \mathbf{Q})_j$ – некоторым образом вычисленные градиенты в узлах. Для схемы Т. Barth они должны быть точны на линейной функции. Наиболее простой процедурой, удовлетворяющей этим условиям, является формула Грина – Гаусса. Для метода коррекции потоков градиенты должны быть точны

на квадратичной функции. Этого можно добиться, если вычислять градиенты на основе метода наименьших квадратов или при помощи спектральных элементов.

Для записи схемы EBR5 [11] на продолжении ребра ik с каждой стороны от него нужно определить по две точки пересечения с сеточными рёбрами, см. рис. 7. Значения в этих точках $Q_{ik}^{(1)}$, $Q_{ik}^{(2)}$ и $Q_{ik}^{(5)}$, $Q_{ik}^{(6)}$ определяются линейной интерполяцией по соответствующим рёбрам.

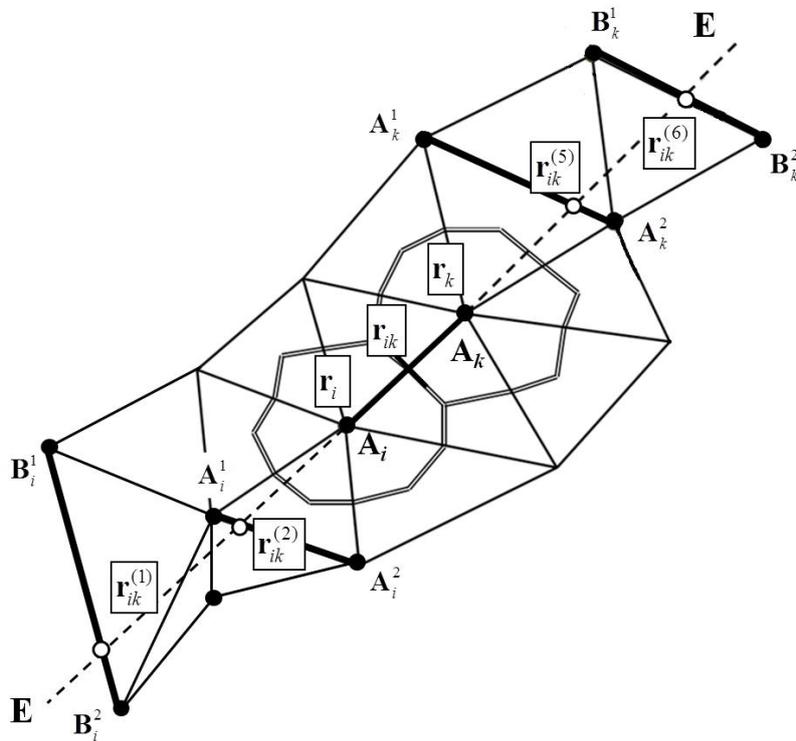


Рис. 7. Схема квазиодномерной реконструкции в схеме EBR5 на примере треугольной сетки

Реконструированные значения при этом определяются формулами

$$\begin{aligned} Q_{ik}^L &= Q_i + \frac{\Delta r_{ik}^{(7/2)}}{2} \left(-\frac{1}{15} \frac{\Delta Q_{ik}^{(3/2)}}{\Delta r_{ik}^{(3/2)}} + \frac{11}{30} \frac{\Delta Q_{ik}^{(5/2)}}{\Delta r_{ik}^{(5/2)}} + \frac{4}{5} \frac{\Delta Q_{ik}^{(7/2)}}{\Delta r_{ik}^{(7/2)}} - \frac{1}{10} \frac{\Delta Q_{ik}^{(9/2)}}{\Delta r_{ik}^{(9/2)}} \right) \\ Q_{ik}^R &= Q_k - \frac{\Delta r_{ik}^{(7/2)}}{2} \left(-\frac{1}{10} \frac{\Delta Q_{ik}^{(5/2)}}{\Delta r_{ik}^{(5/2)}} + \frac{4}{5} \frac{\Delta Q_{ik}^{(7/2)}}{\Delta r_{ik}^{(7/2)}} + \frac{11}{30} \frac{\Delta Q_{ik}^{(9/2)}}{\Delta r_{ik}^{(9/2)}} - \frac{1}{15} \frac{\Delta Q_{ik}^{(11/2)}}{\Delta r_{ik}^{(11/2)}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Delta r_{ik}^{(s+1/2)} = |\mathbf{r}_{ik}^{(s+1)} - \mathbf{r}_{ik}^{(s)}|$, $\Delta Q_{ik}^{(s+1/2)} = |Q_{ik}^{(s+1)} - Q_{ik}^{(s)}|$.

Вблизи границы, если нет возможности определить точки пересечения с рёбрами, вместо (15) используются упрощённые формулы, использующие доступные значения $\mathbf{Q}_{ik}^{(m)}$. Подробности этого алгоритма см. в [11]. Также в настоящей работе будет использоваться схема EBR-WENO, в которой вместо (15) используется монотонизированный аналог [12].

Для граничных подсегментов поток \mathbf{h}_{ij} определяется в зависимости от типа граничного условия. В случае входной/выходной границы расчётной области поток также считается по формуле (13), причём \mathbf{Q}_j – некоторым образом определённое значение с внешней стороны расчётной области. В настоящей работе оно принимается равным значениям вектора консервативных переменных в невозмущённом потоке.

В случае условия непротекания ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{n}$) поток определяется по формуле $\mathbf{h}_{ij}(t) = \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}_{ij}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij} v_{ij}$, в которой \mathbf{Q}_{ij} определяется из значений плотности и давления в узле i и нормальной компоненты скорости границы $v_{ij} = \mathbf{v}_\Gamma \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij}$. В результате получается поток \mathbf{h}_{ij} с компонентами

$$\left(\mathbf{h}_{ij}\right)_\rho = 0, \quad \left(\mathbf{h}_{ij}\right)_{\rho u} = p_i \tilde{n}_{ij}^x, \quad \left(\mathbf{h}_{ij}\right)_{\rho v} = p_i \tilde{n}_{ij}^y, \quad \left(\mathbf{h}_{ij}\right)_{\rho w} = p_i \tilde{n}_{ij}^z, \quad \left(\mathbf{h}_{ij}\right)_E = p_i v_{ij}.$$

5. Аппроксимация вязких членов

Аппроксимация слагаемых в уравнении (3), описывающих процессы вязкости и теплопроводности, не претерпевает изменений при переходе от статической сетки к деформируемой. На симплицальной сетке используется метод Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями при диагонализированной матрице масс; его использование совместно с рёберно-ориентированными схемами было предложено в [8]. Нам будет проще описать его как конечно-объёмный. Запишем

$$\int_{K_i(t)} \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV = \oint_{\partial K_i(t)} \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dV = \sum_{T \ni i} \int_{T \cap \partial K_i(t)} \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dV.$$

Каждая компонента диссипативного потока \mathcal{F}_v (4) складывается из произведений двух величин: первая может быть коэффициентом вязкости,

теплопроводности или произведением коэффициента вязкости на компоненту скорости, а вторая является компонентой градиента скорости или удельной внутренней энергии, см. (3). Первую величину в пределах каждого симплекса будем считать постоянной, равной среднему арифметическому её значений в узлах этого симплекса. Градиенты также будем полагать постоянными в пределах симплекса и вычислять как градиент линейного интерполянта, построенного по значениям соответствующих переменных в вершинах симплекса. Таким образом, диссипативное слагаемое аппроксимируется следующим образом:

$$\int_{K_i(t)} \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV \approx \sum_{T \ni i} \mathcal{F}_v(\mathbf{u}_T, \mu_T, (\nabla \mathbf{u})_T, (\nabla \varepsilon)_T) \cdot \int_{T \cap \partial K_i(t)} \mathbf{n} dS. \quad (16)$$

В случае гибридной сетки также можно использовать метод Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями, однако в настоящей работе использовался другой подход. Для каждого элемента сетки m рассмотрим n_m его разбиений на симплексы $T_{m,k}$, как это было сделано для построения полупрозрачных объёмов, и для каждого из разбиений аппроксимируем интеграл описанным выше образом. Взвешивая аппроксимации для разных разбиений, получим окончательное выражение

$$\int_{K_i(t)} \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV \approx \sum_{m \ni i} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \mathcal{F}_v(\mathbf{u}_{T_{m,k}}, \mu_{T_{m,k}}, (\nabla \mathbf{u})_{T_{m,k}}, (\nabla \varepsilon)_{T_{m,k}}) \cdot \int_{T_{m,k} \cap \partial K_i(t)} \mathbf{n} dS.$$

Наличие вязкости требует дополнительной постановки граничных условий. При моделировании высокорейнольдсовых течений на входных/выходных границах расчётной области вязкими потоками обычно можно пренебречь. На твёрдых поверхностях 1) поток плотности полагается равным нулю, как и в невязком случае; 2) задаются все компоненты вектора скорости; 3) ставится условие на температуру: адиабатическое или изотермическое. Для задания адиабатических условий на границе поток энергии считается по обычной формуле, в которую подставляется $(\nabla \varepsilon)_{T_{m,k}} = 0$. Остальные условия – на скорость и, в случае изотермического условия,

на температуру, реализуются по-разному при явном и неявном интегрировании по времени. В случае явной схемы после каждой итерации Рунге – Кутты корректируются значения компонент импульса и энергии в граничных узлах. Для адиабатических условий они определяются так, чтобы сохранить неизменными плотность и давление и задать правильные значения скорости, а для изотермических условий – чтобы сохранить неизменной плотность и задать правильные значения скорости и температуры. В случае неявной схемы переход со слоя на слой представляет собой решение системы нелинейных уравнений (см. ниже); в граничных узлах вместо обычных уравнений для эволюции импульса записываются уравнения

$$\rho^{n+1} \mathbf{u}(t^{n+1}) - (\rho \mathbf{u})^{n+1} = 0,$$

а в случае изотермических условий дополнительно вместо обычного уравнения для эволюции энергии записывается

$$\rho^{n+1} \left(\frac{\mathbf{u}^2(t^{n+1})}{2} + \frac{T(t^{n+1})}{\gamma - 1} \right) - E^{n+1} = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}(t^{n+1})$ и $T(t^{n+1})$ – задаваемые в качестве граничных условий значения скоростей и температуры на границе на соответствующий момент времени.

6. Описание деформации сетки

Рассмотрим зависимость радиус-векторов узлов расчётной сетки от времени.

Пусть даны радиус-векторы узлов в моменты времени t^n и t^{n+1} . Будем считать, что в пределах шага по времени t они движутся с постоянной скоростью $\mathbf{v} = const$, см. рис. 8.

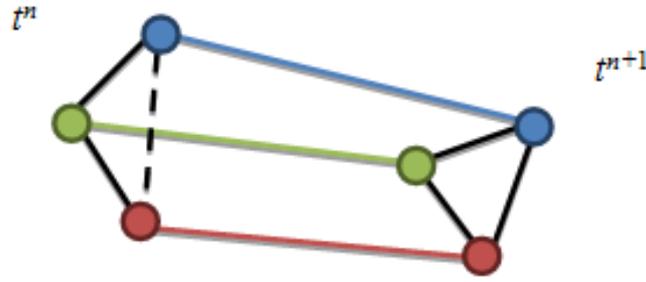


Рис. 8. Смещение узлов за шаг по времени

Таким образом, радиус-вектор сеточного узла в момент времени t выражается формулой

$$\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j(t^n) \frac{t^{n+1} - t}{t^{n+1} - t^n} + \mathbf{r}_j(t^{n+1}) \frac{t - t^n}{t^{n+1} - t^n}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}.$$

В каждый момент времени контрольный объём определяется так, как указано выше, исходя из положения узлов на этот момент времени. Изучим поведение ориентированной площади контрольного объёма \mathbf{n}_{ij} (8) и величин $v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}|$ (12) как функций от времени.

Пересечение границ контрольных объёмов $\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)$ по построению контрольных объёмов представляется в виде объединения отрезков в 2D и треугольников в 3D. Радиус-векторы вершин этих отрезков ($\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{r}_1(t)$) или треугольников ($\mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$) являются линейной комбинацией радиус-векторов сеточных узлов, и коэффициенты этой линейной комбинации не зависят от времени.

Обозначим через $\mathbf{N}_e(t)$ значение интеграла $\int \mathbf{n} dS$ по одному такому отрезку или треугольнику. В 2D $\mathbf{N}_e(t)$ есть не что иное, как повернутый на угол $\pi/2$ вектор $\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_0(t)$. Таким образом, каждая компонента $\mathbf{N}_e(t)$ есть линейная функция t . В трёхмерном случае $\mathbf{N}_e(t) = \frac{1}{2} [(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_0(t)) \times (\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_0(t))]$. Следовательно, каждая компонента $\mathbf{N}_e(t)$ является квадратичной функцией t .

Величина $v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}|$ складывается из интегралов $\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ по треугольникам или отрезкам. Интеграл по каждому из них вычисляется как

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}_1) \cdot \mathbf{N}_2(t) \quad (2D),$$

$$\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{3} (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2) \cdot \mathbf{N}_2(t) \quad (3D).$$

Таким образом, $v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}|$ является линейной (в 2D) или квадратичной (в 3D) функции времени. Полагая в (10) $\mathbf{Q} = const$, получаем

$$\frac{dV_i}{dt} = \sum_{j \in N_1(i)} \int_{\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{j \in N_1(i)} v_{ij} |\mathbf{n}_{ij}|.$$

Поэтому объём ячейки является многочленом второго (в 2D) или третьего (в 3D) порядка от времени.

7. Требования к численному методу

Обязательным требованием к схеме, предназначенной для расчёта задач с разрывными решениями, является **консервативность**, то есть интегралы от массы, импульса и энергии по расчётной области должны меняться только под действием граничных условий: $\frac{d}{dt} \int_G \mathbf{Q} dV = \int_{\partial G} (\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_v) \cdot \mathbf{n} dS$, где G – расчётная область. Это условие выполняется по построению, благодаря использованию конечно-объёмного подхода.

Другим важным свойством является **геометрическая консервативность**. Она означает, что если поток в начальный момент времени был однородным, то он останется однородным в любой другой момент времени, т. е. если $\mathbf{Q}|_{t=0} = const \Rightarrow \mathbf{Q} = const, \forall t$. Если геометрической консервативности нет, то численная ошибка пропорциональна не величине пульсаций переменных, а величине фонового потока, что делает схему непригодной для моделирования низкомаховых течений и акустических эффектов.

Рёберно-ориентированные схемы в полудискретном виде (11)–(13) являются консервативными и геометрически консервативными (если

реконструкция точна на константе; реконструкции (14) и (15) этому условию удовлетворяют). Но на движущейся сетке схемы вида (11) – (13) представляют собой неавтономные системы: явную зависимость от времени даёт вхождение $V_i(t)$ и $v_{ij}(t)$. Из-за этого их непосредственная дискретизация может повлечь за собой потерю геометрической консервативности (а если вынести $V_i(t)$ из-под знака производной, то потеряна будет консервативность). Чтобы этого избежать, при дискретизации по времени члены, связанные с движением сетки, должны аппроксимироваться специальным образом.

8. Случай явного интегрирования по времени

Выше была получена полудискретная аппроксимация (11), удовлетворяющая условиям консервативности и геометрической консервативности. Опишем способ интегрирования по времени, сохраняющий эти свойства.

S -стадийную явную схему Рунге – Кутты для уравнения $\frac{dU}{dt} = f(U, t)$

можно записать в виде

$$U^{(s)} = U^{(0)} + \tau \sum_{m=0}^{s-1} a_{sm} k_m, \quad s = 1, \dots, S;$$

$$k_m = f(U^{(m)}, t^{n,m}), \quad t^{n,m} = t + \tau c_m, \quad m = 0, \dots, S-1;$$

$$U^{(0)} = U^n; \quad U^{n+1} = U^{(S)}.$$

Здесь a_{sm} , c_s – коэффициенты матрицы Бутчера. Применим её для аппроксимации полудискретной схемы (10), полагая $U_i = V_i Q_i$. Имеем

$$V_i^{(s)} Q_i^{(s)} - V_i^{(0)} Q_i^{(0)} = \tau \sum_{m=0}^{s-1} a_{sm} \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij}(\{Q^{(m)}\}, t^{n,m}) \mathbf{n}_{ij}(t^{n,m}). \quad (17)$$

Вместе с (11) той же схемой Рунге – Кутты будем решать уравнение

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (18)$$

определяя таким образом значения $V_i^{(s)}$. В результате получим

$$V_i^{(s)} - V_i^{(0)} = \tau \sum_{m=0}^{s-1} a_{sm} \sum_{j \in N_1(i)} v_{ij}(t^{n,m}) |\mathbf{n}_{ij}(t^{n,m})|. \quad (19)$$

Убедимся в том, что полученная схема (13), (17), (19) обладает геометрической консервативностью, то есть точна при $\mathbf{Q} = const$.

При $\mathbf{Q} = const$ выражение для потока (13) приобретает вид $\mathbf{h}_{ij} = \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ij} - v_{ij} \mathbf{Q}$. При суммировании по j член, содержащий $\mathcal{F}_c(\mathbf{Q})$, обнуляется, схема (17) сводится к (19), и поэтому условие геометрической консервативности выполняется.

В общем случае определение объёмов формулой (19) может быть некорректным, так как величина V_i^{n+1} , найденная из (19), будет отличаться от настоящего объёма ячейки на момент времени t^{n+1} . Однако выражение в правой части (12) является полиномом 1-го (в 2D) или 2-го (в 3D) порядка. Поэтому для точного вычисления V^{n+1} необходимо брать схему Рунге – Кутты не ниже 2-го (в 2D) или 3-го (в 3D) порядка.

9. Случай неявного интегрирования по времени

Опишем способ интегрирования по времени полученной выше полудискретной аппроксимации (11), сохраняющий присущую ей консервативность и геометрическую консервативность.

Для полудискретной системы

$$\frac{dU}{dt} + f(U, t) = 0 \quad (20)$$

неявная схема Эйлера первого порядка записывается в виде

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + f(U^{n+1}, t^{n+1}) = 0.$$

Полагая $U_i = V_i Q_i$, применим её для аппроксимации полудискретной схемы (11). Получим

$$\frac{V_i^{n+1} \mathbf{Q}_i^{n+1} - V_i^n \mathbf{Q}_i^n}{\tau} - \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij}(\{\mathbf{Q}^{n+1}\}, t^{n+1}) |\mathbf{n}_{ij}(t^{n+1})| = 0. \quad (21)$$

Консервативность (21) достигается по построению благодаря конечно-разностному подходу. Но схема (21) не является геометрически консервативной. Чтобы исправить данный недостаток, подставим в (13) вместо скорости v_{ij} значение w_{ij} , которое определим ниже.

В случае $\mathbf{Q} = const$ из (13) и (21) следует уравнение

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \sum_{j \in N_1(i)} w_{ij} |\mathbf{n}_{ij}(t^{n+1})| = 0. \quad (22)$$

Вернёмся к уравнению Навье – Стокса для движущегося объёма (7) и подставим $\mathbf{Q} = const$ в него. Получим уравнение

$$\frac{dV_i}{dt} - \sum_{j \in N_1(i)} v_{ij} \cdot |\mathbf{n}_{ij}(t)| = 0. \quad (23)$$

Отметим, что v_{ij} постоянна в пределах шага по времени. Проинтегрируем (23) по времени. Получим

$$\frac{V_i(t^{n+1}) - V_i(t^n)}{\tau} = \sum_{j \in N_1(i)} \frac{v_{ij} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{n}_{ij}(t)| dt}{\tau |\mathbf{n}_{ij}(t^{n+1})|} |\mathbf{n}_{ij}(t^{n+1})|. \quad (24)$$

Теперь определим w_{ij} так, чтобы выполнялась геометрическая консервативность численной схемы. Сравнив (22) и (24), приходим к выводу, что искомая величина может быть выбрана как

$$w_{ij} = \frac{(\Delta V)_{ij}}{\tau |\mathbf{n}_{ij}(t^{n+1})|}, \quad (25)$$

$$(\Delta V)_{ij} = v_{ij} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\mathbf{n}_{ij}(t)| dt. \quad (26)$$

Благодаря тому, что $w_{ij} \underset{t \rightarrow 0}{=} v_{ij} + o(1)$, (13), (21), (25) и (26) можно рассматривать как полностью дискретную аппроксимацию полудискретной

схемы (11). $(\Delta V)_{ij}$ – объём (в 2D – площадь), заметаемый общей границей контрольных объёмов i и j в пределах шага по времени (при $t^n < t < t^{n+1}$). Тогда величину контрольного объёма $V_i(t^{n+1})$ можно представить в виде $V_i(t^{n+1}) = V_i(t^n) + \sum_{j \in N_1(i)} (\Delta V)_{ij}$.

$(\Delta V)_{ij}$ находится по формуле (26). Так как $v_{ij} = \text{const}$ в пределах шага, а \mathbf{n}_{ij} можно посчитать, зная, как движется граница в пределах шага по времени, можно узнать, какой порядок по времени нужен для точного вычисления интеграла в (26). В двумерном случае правая часть (26) есть полином 1 порядка, в трёхмерном – 2 порядка. Используя квадратуру Гаусса, получим

$$\frac{1}{\tau} (\Delta V)_{ij} = v_{ij} \frac{1}{2} \sum_{\pm} \left| \mathbf{n}_{ij} \left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t^{n+1} - t^n}{2} \right) \right|. \quad (27)$$

Неявная схема 2-го порядка для уравнения (20) записывается как

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau_{n+1/2}} (1 - \alpha_n) + \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau_{n-1/2}} \alpha_n + f(U^{n+1}, t^{n+1}) = 0,$$

где $\tau_{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$, и $\tau_{n-1/2} = t^n - t^{n-1}$, и

$$\alpha_n = -\frac{\tau_{n+1/2}}{\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2}}. \quad (28)$$

Если $\tau_{n+1/2} = \tau_{n-1/2}$, то $\alpha_n = -0,5$. Применим данную схему для аппроксимации полудискретной схемы (11), полагая $U_i = V_i \mathbf{Q}_i$. Получим неявную схему 2 порядка:

$$(1 - \alpha_n) \frac{V_i^{n+1} \mathbf{Q}_i^{n+1} - V_i^n \mathbf{Q}_i^n}{\tau_{n+1/2}} + \alpha_n \frac{V_i^n \mathbf{Q}_i^n - V_i^{n-1} \mathbf{Q}_i^{n-1}}{\tau_{n-1/2}} - \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij} \left(\{\mathbf{Q}^{n+1}\}, t^{n+1} \right) \left| \mathbf{n}_{ij}(t^{n+1}) \right| = 0. \quad (29)$$

Полученная схема не обладает геометрической консервативностью. Для исправления этого недостатка, как и в случае схемы 1-го порядка, заменим входящие в поток \mathbf{h}_{ij} скорости v_{ij} на некоторые значения w_{ij}^n . Чтобы определить их, возьмем схему 1-го порядка (21) для шагов $\tau_{n+1/2}$ и $\tau_{n-1/2}$ с подставленными

скоростями $w_{ij}^{n+1/2}$ и $w_{ij}^{n-1/2}$, определёнными в (25), и сложим эти два равенства с найденными весами α_n (28). В результате получим выражение

$$(1 - \alpha_n) \frac{V_i^{n+1} \mathbf{Q}_i^{n+1} - V_i^n \mathbf{Q}_i^n}{\tau_{n+1/2}} + \alpha_n \frac{V_i^n \mathbf{Q}_i^n - V_i^{n-1} \mathbf{Q}_i^{n-1}}{\tau_{n-1/2}} - \sum_{j \in N_1(i)} \left((1 - \alpha_n) \mathbf{h}_{ij}(\{\mathbf{Q}^{n+1}\}, t^{n+1}) \left| \mathbf{n}_{ij}(t^{n+1}) \right| + \alpha_n \mathbf{h}_{ij}(\{\mathbf{Q}^n\}, t^n) \left| \mathbf{n}_{ij}(t^n) \right| \right) = 0.$$

При $\mathbf{Q} = const$ оно будет совпадать с (29), если в (29) в поток \mathbf{h}_{ij} вместо скорости v_{ij} подставлены значения

$$w_{ij}^n = (1 - \alpha_n) w_{ij}^{n+1/2} + \alpha_n w_{ij}^{n-1/2} \left| \mathbf{n}_{ij}(t^n) \right| / \left| \mathbf{n}_{ij}(t^{n+1}) \right|. \quad (30)$$

Таким образом, подстановка (30) вместо v_{ij} в схему (29), (13) обеспечивает геометрическую консервативность разностной схемы. Отметим, что на движущейся произвольным образом сетке полученная схема не обладает вторым порядком точности по времени, однако она вырождается в схему 2-го порядка при гладких деформациях.

10. Тестирование

Верифицируем реализованный алгоритм на двух задачах.

Задача 1. Вначале рассмотрим уравнения Навье – Стокса (3) в кубе с рёбрами длиной $L = 25$. Коэффициент динамической вязкости будем считать постоянным и равным $\mu = 0.1$; будем считать, что теплопроводность отсутствует ($Pr = \infty$). В пренебрежении членами второго порядка малости по амплитуде пульсаций относительно фонового поля, их частным решением является затухающая акустическая волна

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\gamma \end{pmatrix} + \frac{A}{|\mathbf{k}|} \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \begin{pmatrix} -\mathbf{k}^2 / \omega \\ k_x \\ k_y \\ k_z \\ -\mathbf{k}^2 / \omega \end{pmatrix},$$

где частота ω определяется как

$$\omega = \frac{2}{3}i\mu\mathbf{k}^2 \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 - \left(\frac{2}{3}\mu\mathbf{k}^2\right)^2}.$$

Были выбраны значения $A = 10^{-4}$, $k_x = k_y = k_z = 2\pi/L$. Наличие мнимой составляющей частоты соответствует затуханию решения. Расчёт проводился до времени $t_{\max} = 25$, и на этот момент времени амплитуда пульсаций составляла примерно 73% от начальной.

Расчёты проводились на двух типах сеток: неструктурированных тетраэдральных и структурированных гексаэдральных. Характерные длины рёбер были заданы равными 1, 0.5 и 0.25. Координаты узлов гексаэдральной сетки были смещены относительно положения правильной решётки по каждой координате на равномерно распределённую случайную величину, максимальное значение которой составляло 10% от начальной длины ребра. В процессе счёта узлы двигались так, что смещение относительно начального положения по каждой координате определялось синусоидальным законом со случайной частотой, не превосходящей 10, и случайной амплитудой, не превосходящей 5% от характерной длины ребра. Для гексаэдральных сеток расчёты проводились с использованием как прямых, так и полупрозрачных ячеек. Всюду применялась 3-шаговая явная схема 3-го порядка точности.

Максимальная по расчётной области ошибка для плотности и компоненты скорости вдоль оси x для всех расчётных случаев сведена в таблицу 1. Также в ней приведён численный порядок точности, посчитанный по сеткам с шагом 1/2 и шагом 1/4. На неподвижной сетке он оказывается немного ниже двух при соблюдении точности на линейной функции (то есть при использовании медианных ячеек на тетраэдральной сетке и при использовании полупрозрачных ячеек на гексаэдральной сетке), а на прямых ячейках падает до 1. Этот результат находится в полном соответствии с [6], где проводилось исследование на невязких задачах. На деформируемой сетке численный порядок точности во всех случаях оказывается чуть выше единицы. Падение точности является ожидаемым, поскольку на движущейся сетке схема перестаёт быть точной на линейной функции. Тем не менее, вносимая ошибка

не является катастрофической; она легко компенсируется динамическим сгущением сетки, если в силу специфики задачи высокое сеточное разрешение требуется в локализованной области.

Таблица 1

Ошибка по плотности и скорости в задаче 1

Сетка	Шаг сетки	Тетраэдральная сетка	Гексаэдральная сетка	
			Прямые ячейки	Полупрозрачные ячейки
Статическая	1	2.06 x 10 ⁻⁶ 1.77 x 10 ⁻⁶	3.24 x 10 ⁻⁶ 2.15 x 10 ⁻⁶	1.93 x 10 ⁻⁶ 1.14 x 10 ⁻⁶
	1/2	5.21 x 10 ⁻⁷ 3.71 x 10 ⁻⁷	1.31 x 10 ⁻⁶ 7.89 x 10 ⁻⁷	4.43 x 10 ⁻⁷ 2.02 x 10 ⁻⁷
	1/4	1.54 x 10 ⁻⁷ 9.89 x 10 ⁻⁸	6.33 x 10 ⁻⁷ 2.65 x 10 ⁻⁷	1.29 x 10 ⁻⁷ 5.68 x 10 ⁻⁸
	числ. порядок	1.76 1.91	1.05 1.57	1.78 1.83
Деформируемая	1	2.47 x 10 ⁻⁶ 1.86 x 10 ⁻⁶	4.39 x 10 ⁻⁶ 2.62 x 10 ⁻⁶	2.73 x 10 ⁻⁶ 1.57 x 10 ⁻⁶
	1/2	1.00 x 10 ⁻⁶ 6.15 x 10 ⁻⁷	1.93 x 10 ⁻⁶ 1.19 x 10 ⁻⁶	1.12 x 10 ⁻⁶ 6.38 x 10 ⁻⁷
	1/4	4.49 x 10 ⁻⁷ 2.09 x 10 ⁻⁷	8.30 x 10 ⁻⁷ 3.74 x 10 ⁻⁷	4.64 x 10 ⁻⁷ 2.23 x 10 ⁻⁷
	числ. порядок	1.16 1.56	1.22 1.67	1.27 1.52

Задача 2. Второй рассмотренной задачей было моделирование акустической волны в невязком газе, генерируемой пульсирующей сферой.

Радиус сферы менялся по закону $R = A \sin(2\pi ft + \varphi_0) \left(1 - e^{-(\alpha t)^2}\right) + R_0$.

В качестве расчётных случаев были выбраны три режима, соответствующие гладкому решению ($A = 0.2$, $f = 0.2$, $\alpha = \pi f$), гладкому решению с большим

градиентом ($A = 0.4$, $f = 0.2$, $\alpha = \pi f$), и разрывному решению ($A = 0.4$, $f = 0.3$, $\alpha = 0$). Во всех случаях $R_0 = 0.5$ и $\varphi_0 = 0$, а время расчета составляло $t_{\max} = 7.5$.

В качестве расчётной области взят сектор с углом в 45° . Расстояние от центра сферы до границы расчётной области составляет 70. В расчётах использовались неструктурированные тетраэдральные расчётные сетки. Характерная длина ребра сеточных элементов на поверхности сферы h_i составляла 0.05 (MESH1), 0.025 (MESH2) и 0.0125 (MESH3). В сферической подобласти радиуса 6 вокруг сферы построена густая расчётная сетка с максимальным размером ячеек $4h_i$, далее ячейки росли со скоростью 1.1. Для решения задач с гладкими решениями выбраны схемы EBR5 [11], а с разрывным – только EBR-WENO5 [12]. Для интегрирования по времени использовалась явная схема третьего порядка.

Деформация сетки проводилась встроенным алгоритмом,двигающим узлы сеточных элементов в радиальном направлении в шаре радиуса $R_{obl} = 3(A+R_0)$. Новые координаты узлов определяются по формуле $r(r_0, t) = r_0 (R/R_0 - 1) f(r_0) + r_0$, где $f(r)$ – весовая функция, принимающая значение 1 при $r \leq R_0$, 0 при $r \geq R_{obl}$ и линейная в диапазоне $R_0 < r < R_{obl}$.

На графиках 9 – 11 представлены зависимости давления от модуля радиус-вектора точки в сравнении с решением, полученным по одномерной программе на очень подробной сетке, принимаемым за эталонное решение. На этих графиках слева изображены общие виды функции $p(r)$ в зоне интереса, а на правых – детальное представление функции в подобласти максимума градиента переменной. Каждая точка на графике соответствует значению в одном сеточном узле. Графики ошибок для гладких режимов, вычисленных как разность давлений между численным решением на неструктурированной сетке и эталонным решением, приведены на рис. 12. Максимумы модуля этой ошибки по области $1 < r < 6$ и численные порядки сходимости решения сведены в таблицу 2.

Видно, что при измельчении сетки наблюдается сходимость. Также на рис. 12 видно, что ошибка складывается из двух частей. Первая часть связана с численной диссипацией и дисперсией; она зависит только от расстояния от узла

до центра сферы. Вторая компонента ошибки принимает разные значения для разных узлов, находящихся на одном расстоянии от центра сферы. Так как видно, что при измельчении сетки начинает доминировать вторая компонента, можно сделать вывод, что первая компонента сходится к нулю быстрее, чем вторая. Это характерно для схем повышенной точности на неструктурированных сетках.

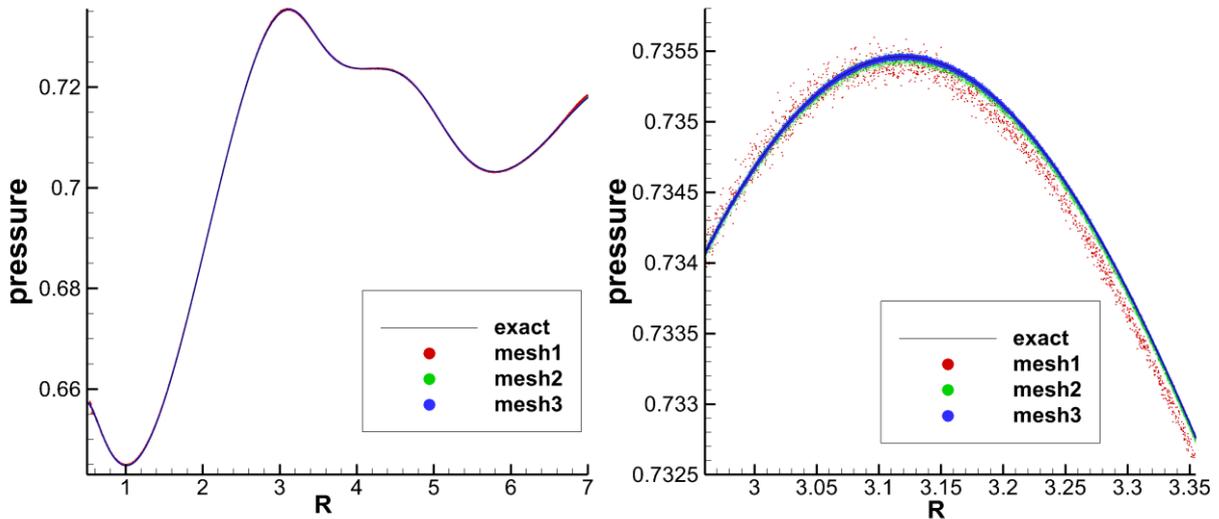


Рис. 9. Графики $p(r)$ для режима $A = 0.2, f = 0.2$

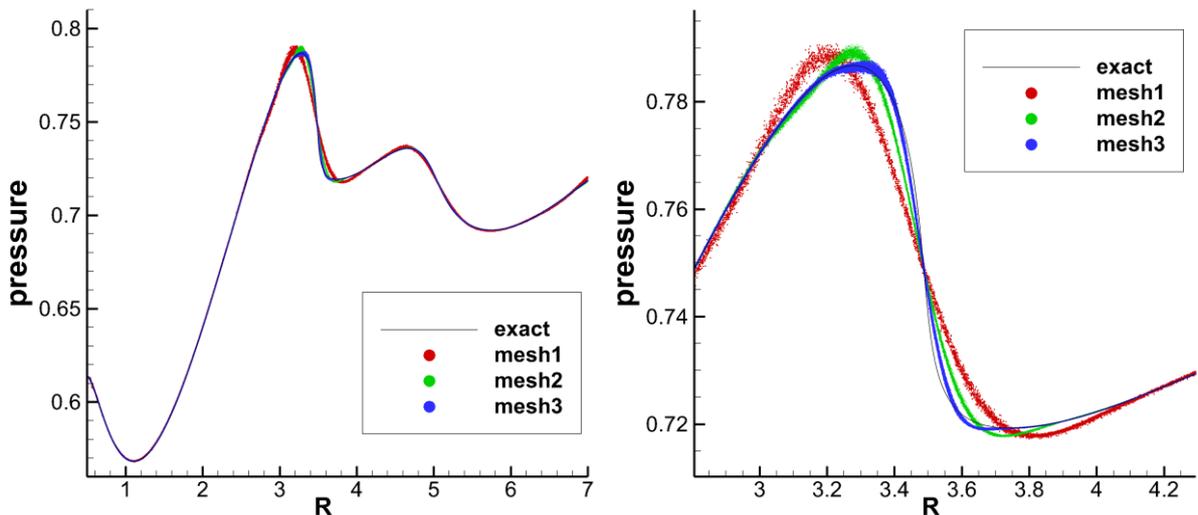


Рис. 10. Графики $p(r)$ для режима $A = 0.4, f = 0.2$

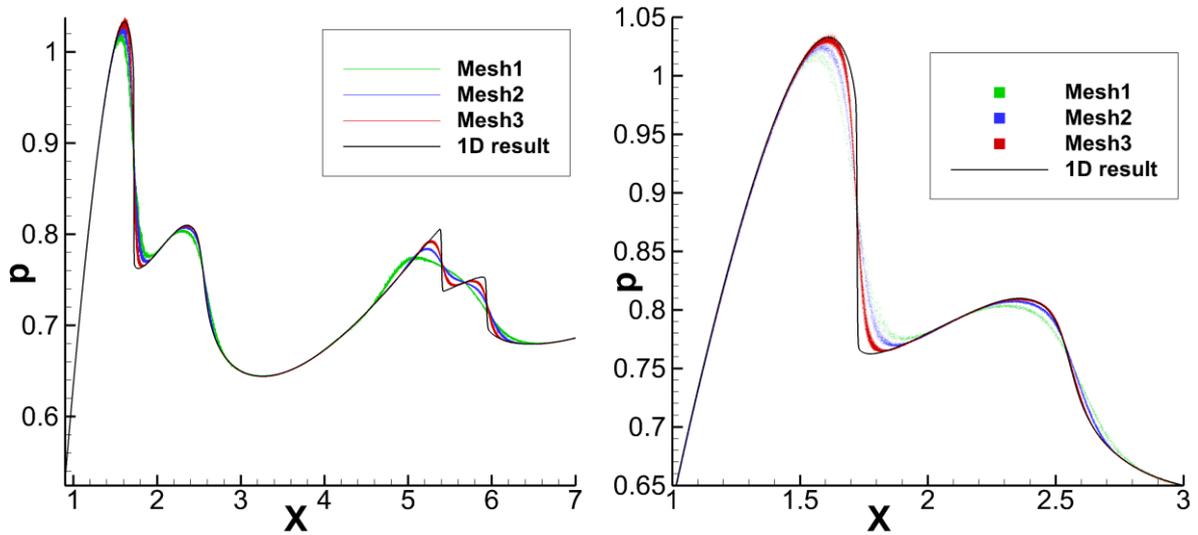


Рис. 11. Графики $p(r)$ для режима $A = 0.4, f = 0.3$, схема EBR-WENO5

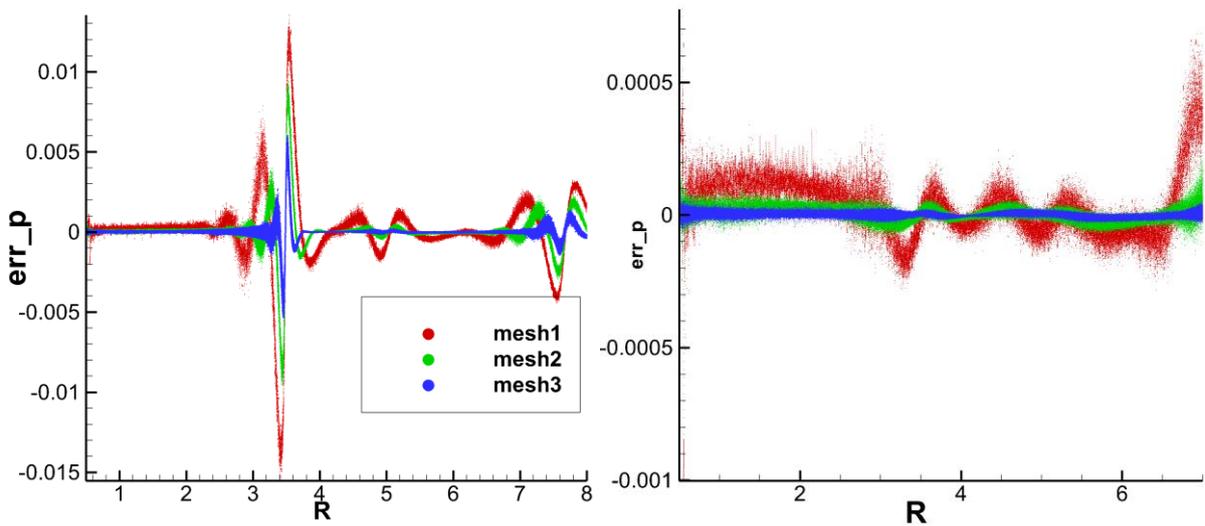


Рис. 12. Графики $p(r) - p_{exact}(r)$ при $f = 0.2$. Слева: $A = 0.4$, справа: $A = 0.4$.

Таблица 2

Максимальная ошибка по давлению в задаче 2

Сетка	Ошибка $A = 0.2,$ $f = 0.2$	Численный порядок сходимости	Ошибка $A = 0.4,$ $f = 0.2$	Численный порядок сходимости
MESH1	3.38×10^{-4}	—	1.55×10^{-2}	—
MESH2	1.02×10^{-4}	1.73	1.00×10^{-2}	0.63
MESH3	7.70×10^{-5}	0.41	6.02×10^{-3}	0.73

В режиме $f = 0.2$, $A = 0.4$ численный порядок точности оказывается меньше единицы. Это связано с тем, что решение содержит область большого градиента, плохо разрешаемого сеткой: максимум ошибки на сетке MESH2 равен 10^{-2} , что составляет более 10% от перепада давления в этой области. Отсюда ясно, что полученные численные порядки точности далеки от асимптотических при дальнейшем измельчении сетки. В режиме $f = 0.2$, $A = 0.2$ на сетках MESH2 и MESH3 доминирует ошибка, хаотически меняющаяся от узла к узлу. Большая ошибка на сетке MESH3 и, следовательно, полученный низкий порядок сходимости обусловлен «выбросами» этой ошибки в отдельных узлах.

Теперь верифицируем неявную схему. На рисунках 13, 14 представлены графики давлений и ошибки по давлению, аналогичные рисункам 9 и 12 соответственно. Расчёты проводились по схеме EBR5 с 3-слойным неявным интегрированием по времени при различных числах Куранта на сетке MESH2. Видно, что при числе Куранта порядка единицы качество результата сравнимо с расчётом по явной схеме; с ростом шага по времени добавляется ошибка, зависящая от шага по времени примерно квадратично.

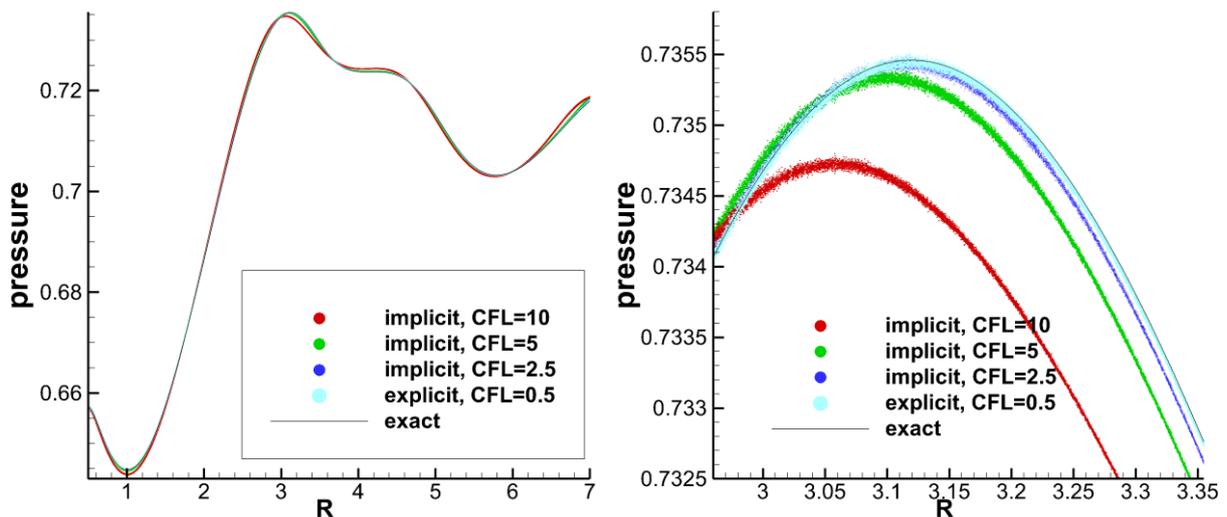


Рис. 13. Графики $p(r)$ для режима $A = 0.2$, $f = 0.2$, неявная схема

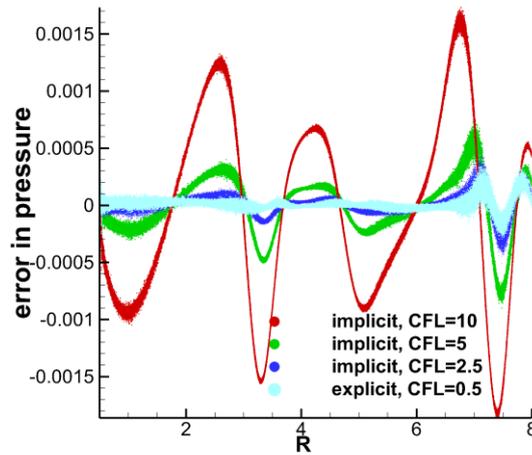


Рис. 14. График $p(r)-p_{exact}(r)$ для режима $A = 0.2, f = 0.2$, неявная схема

11. Приложение. Форма и объём сеточных элементов

Учёт кривизны граней сеточных элементов, применяемый для схем очень высокого порядка, для рёберных схем является излишним. Поэтому в случае тетраэдральной сетки сеточными гранями являются плоские треугольники. Однако на гибридной сетке четырёхугольные грани сеточных элементов образуются четырьмя узлами A, B, C, D , вообще говоря, не лежащими в одной плоскости. Поэтому возникает вопрос о выборе формы этой грани и, как следствие, формы и объёма сеточного элемента.

Проще всего было бы на каждой четырёхугольной грани провести диагональ (AC или BD) и составить поверхность из двух треугольников, образованных этой диагональю и двумя смежными рёбрами. Но в зависимости от того, какую из двух диагоналей выбрать, получатся разные значения объёмов. Они будут отличаться на величину объёма тетраэдра, образованного четырьмя вершинами четырёхугольной грани.

Чтобы избежать этой неоднозначности, можно предложить два способа. Первый способ заключается в переборе разбиений по аналогии с построением полупрозрачных контрольных объёмов. Для каждого из разбиений можно вычислить объём сеточного элемента как суммарный объём входящих в него тетраэдров, а затем взять среднее значение по всем разбиениям. При этом тетраэдр, образованный вершинами четырёхугольной грани, наполовину входит в каждый из сеточных элементов, разделяемых гранью. Отметим, что

нет необходимости перебирать разбиения всего элемента; достаточно только перебирать разбиения граней.

Второй способ заключается в том, чтобы задать центральную точку грани W с радиус-вектором $\mathbf{r}_W = (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D) / 4$ и соединить все вершины грани с этой точкой. Тогда грань будет состоять из четырёх треугольников. Это позволяет однозначно определять принадлежность любой точки пространства сеточному элементу.

Очевидно, что ориентированная площадь поверхности, натянутой на контур $ABCD$, зависит только от контура, но не от самой поверхности.

Действительно, по формуле Стокса $s_x = \oiint_{ABCD} n_x dS = \oint_{AB \cup BC \cup CD \cup DA} \frac{ydz - zdy}{2}$, и для

остальных компонент аналогично.

Докажем, что объёмы «полупрозрачного» элемента и элемента с центральными точками в основаниях четырёхугольных граней равны. Поскольку внутри каждого элемента можно выбрать некоторую точку O и представить его в виде объединения тетраэдров и четырёхугольных пирамид с вершиной в O и основаниями – гранями сеточного элемента (треугольными и четырёхугольными соответственно), далее без ограничения общности будем рассматривать только четырёхугольную пирамиду $ABCDE$.

Для вычисления объёма пирамиды v воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского:

$$\frac{1}{3} \oiint \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS = \frac{1}{3} \iiint \operatorname{div} \mathbf{r} dV = v.$$

Поверхностный интеграл представим в виде суммы интегралов по треугольникам:

$$v = \sum_{T \subset \partial v} \iint_T \frac{1}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS.$$

Поскольку вектор \mathbf{r} в пределах треугольника T перемещается только в направлениях, перпендикулярных \mathbf{n} , подинтегральное выражение не зависит от \mathbf{r} . Таким образом,

$$v = \sum_{T \in \partial v} \frac{1}{3} \mathbf{r}_T \cdot \iint_T \mathbf{n} dS,$$

где \mathbf{r}_T – радиус-вектор любой точки треугольника T . Поверхность пирамиды состоит из 8 треугольников. 4 из них имеют общую вершину – вершину пирамиды E и образуют поверхность, натянутую на основание пирамиды. Оставшиеся 4 треугольника имеют общую вершину W и также образуют поверхность, натянутую на основание пирамиды. Обозначим её ориентированную площадь через \mathbf{S} , пусть она ориентирована вовне пирамиды. Таким образом,

$$v = \frac{1}{3} (\mathbf{r}_W - \mathbf{r}_E) \cdot \mathbf{S}.$$

Легко показать, что \mathbf{S} можно вычислить как половину векторного произведения диагоналей основания пирамиды (как и в плоском случае).

С другой стороны, объём «полупрозрачной» пирамиды также может быть вычислен по формуле Гаусса – Остроградского. При каждом из разбиений пирамида представляется в виде объединения двух тетраэдров. Выберем в качестве точки на каждом из треугольников в их основании середину диагонали. Имеем

$$v = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C}{2} - \mathbf{r}_E \right) \cdot (\mathbf{S}_{ACB} + \mathbf{S}_{ACD}) + \left(\frac{\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D}{2} - \mathbf{r}_E \right) \cdot (\mathbf{S}_{BDA} + \mathbf{S}_{BDC}) \right) = \frac{1}{3} (\mathbf{r}_W - \mathbf{r}_E) \cdot \mathbf{S},$$

что и требовалось доказать.

12. Заключение

В работе описан алгоритм расчета задач газовой динамики на деформируемых сетках в программном комплексе NOISEtte. Проведена верификация метода на тестовых задачах. Доказана работоспособность алгоритма. Однако, установлено, что точность получаемых результатов недостаточно высокая. Ведется дальнейшая работа по выявлению и исправлению причин неточности.

Список литературы

1. J. G. Trulio, Report AFWL-TR-66-19, Air Force Weapons Laboratory Kirtland Air Force Base, 1966
2. H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trépanier and R. Camarero, Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes, *Comput. Fluids* 22 (1993) 9–23.
3. B. Koobus, C. Farhat Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 170 (1999) 103–129.
4. Nkonga B. On the conservative and accurate CFD approximations for moving meshes and moving boundaries // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2000) 1801–1825.
5. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Вычислительные методы и программирование.* 2012. Т. 13. С. 110–125.
6. Бахвалов П.А., Козубская Т.К. О построении реберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на гибридных неструктурированных сетках // *ЖВМ и МФ.* 2017. Т. 57. N 4. С. 92–111.
7. Roe, P.L., Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, *J. Comput. Phys.* 43: 357–372, 1981.
8. Barth T. J. Numerical aspects of computing viscous high Reynolds number flows on unstructured meshes // *AIAA Paper No. 91–0721.* 1991.

9. Katz, V. Sankaran. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered Unstructured Grids, *J Sci Comput.*, 2012 51:375–393.
10. Dalon Work, Aaron J. Katz, “Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes” (AIAA 2015–0834) 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2015.
11. Bakhvalov Pavel, Abalakin Ilya, Kozubskaya Tatiana. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2016. Vol.81(6). P. 331–356.
12. Bakhvalov Pavel, Kozubskaya Tatiana. EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes, *Comput. Fluids*. 157 (2017) 312–324.

Оглавление

Введение.....	3
1. Уравнения Эйлера и Навье – Стокса.....	4
2. Закон сохранения для движущегося объёма	5
3. Построение контрольных объёмов.....	7
4. Рёберно-ориентированные конечно-объёмные схемы.....	13
5. Аппроксимация вязких членов	16
6. Описание деформации сетки.....	18
7. Требования к численному методу	20
8. Случай явного интегрирования по времени.....	21
9. Случай неявного интегрирования по времени.....	22
10. Тестирование	25
11. Приложение. Форма и объём сеточных элементов	32
12. Заключение	35
Список литературы.....	35