



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 119 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Соломатин Р.С., Семенов И.В.,
Меньшов И.С.

К расчету турбулентных течений на основе модели Спаларта-Аллмараса с применением LU-SGS–GMRES алгоритма

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Соломатин Р.С., Семенов И.В., Меньшов И.С. К расчету турбулентных течений на основе модели Спаларта-Аллмараса с применением LU-SGS–GMRES алгоритма // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 119. 30 с. doi:[10.20948/prepr-2018-119](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-119)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-119>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Р.С. Соломатин, И.В. Семёнов, И.С. Меньшов

**К расчету турбулентных течений
на основе модели Спаларта-Аллараса
с применением LU-SGS–GMRES
алгоритма**

Москва — 2018

Соломатин Р.С.^{1,2}, Семёнов И.В.^{1,3}, Меньшов И.С.^{2,3}

К расчету турбулентных течений на основе модели Спаларта-Аллмараса с применением LU-SGS–GMRES алгоритма

Рассматривается численная модель турбулентного пространственного течения при больших числах Рейнольдса. Используется RANS подход на основе модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA) и метода пристеночных функций для моделирования поверхностного трения. Обсуждаются особенности расчетного алгоритма, базирующегося на LU-SGS–GMRES алгоритме, и программной реализации вычислительной модели. На примере численного решения задач по математическому моделированию турбулентного течения вязкого сжимаемого газа над плоской пластиной и в ассиметричном диффузоре, а также расчета турбулентного слоя смешения двух сжимаемых потоков проводится верификация и валидация метода расчета турбулентных течений на основе SA модели и пристеночных функций, моделирующих граничное условие типа «закон стенки».

Ключевые слова: модель турбулентности Спаларта-Аллмараса, LU-SGS–GMRES алгоритм, метод пристеночных функций, слой смешения, пограничный турбулентный слой, большие числа Рейнольдса.

Roman Sergeevich Solomatin, Ilya Vitalievich Semenov, Igor Stanislavovich Menshov

Towards calculating turbulent flows with the Spalart-Allmaras model by using the LU-SGS-GMRES algorithm

A numerical model for turbulent three-dimensional flows at high Reynolds numbers is considered. The RANS approach based on the turbulence model of Spalart and Allmaras (SA) is used. The method of wall functions for modeling surface friction is implemented. Specifics of the numerical algorithm based on the LU-SGS–GMRES solver, and program implementation of the present numerical model are discussed. Numerical solutions of the compressible viscous gas flow over a flat plate and in an asymmetric diffuser, and also mathematical modeling of the turbulent mixture layer of two compressible flows are carried out to perform verification and validation of the RANS equations with the SA model for turbulence and the method of wall functions for modeling boundary conditions of the “law of wall” type.

Key words: Spalart-Allmaras turbulence model, LU-SGS–GMRES algorithm, method of wall functions, mixing layer, turbulent boundary layer, high Reynolds number.

¹ Институт автоматизации проектирования РАН, 123056 Москва, 2-ая Брестская ул., 19/18

² ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4

³ ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 117218 Москва, Нахимовский просп., 36, к.1

Введение

Турбулентность является неотъемлемым свойством течений газовых и жидких сред при рассмотрении внешних и внутренних задач газо- и гидродинамики при больших числах Рейнольдса. Именно турбулентные режимы движения газов и жидкостей главным образом реализуются в природных явлениях и технологических процессах. Пренебрежение диссипативными процессами, связанными с вязкостью, теплопроводностью, диффузией компонент газовых смесей и соответствующими процессами турбулентного тепло– массопереноса ведет к искаженным оценкам математического моделирования и неадекватным расчетным данным по характеристикам гидродинамических течений и, в том числе, химических процессов, происходящих в газовых реагирующих смесях. Турбулентность в ряде задач может критически влиять на скорости и характер протекания таких процессов. Упрощенная система невязких уравнений Эйлера для сжимаемого газа не применима для моделирования реальных течений и массопереноса в реагирующих газовых смесях, когда имеют место развитые процессы вязко-невязкого взаимодействия, существенно изменяющие картину течения.

Задача создания разумной теории или модели, которая позволяла рассчитывать количественные характеристики турбулентного течения, стоит перед учеными уже много лет. Более чем вековой опыт исследований показывает, что проблема турбулентности чрезвычайно сложна и здесь нет места для простых аналитических решений. Турбулентность имеет стохастическую природу, принципиально трехмерный нестационарный характер и включает широкий (непрерывный) спектр пространственно-временных масштабов. Несмотря на то, что согласно общепринятому мнению турбулентные течения должны адекватно описываться нестационарной системой уравнений Навье-Стокса, прямое использование этой системы в качестве математической модели на сегодняшний день приемлемо с практической точки зрения только для очень узкого класса задач, сильно ограниченных по значениям характерного числа Рейнольдса. Прямое численное моделирование уравнений Навье-Стокса (DNS) требует разрешения всех пространственно-временных масштабов, что влечет за собой потребность использования очень подробных расчетных сеток и очень маленького шага интегрирования по времени, причем эти ограничения становятся более жесткими по мере увеличения числа Рейнольдса [1]. Даже мощности современных многопроцессорных вычислительных систем все еще оказывается недостаточно для решения прикладных задач гидро- и газодинамики, характеризующимися большими числами Рейнольдса порядка сотен тысяч и выше.

Метод DNS на современном этапе находит в основном применение в фундаментальных исследованиях канонических турбулентных процессов [2]. В решении прикладных крупномасштабных задач аэро- гидродинамики этот метод пока еще не применим, поэтому на первый план выходит поиск приближенных моделей, с достаточной точностью описывающих турбулентные явления, и в то же время не являющихся столь требовательными к вычислительным ресурсам, как метод DNS. Такие модели, как правило, основаны на некоторых допущениях о характере и масштабах турбулентных явлений в течении [3].

Одним из основных сформировавшихся к настоящему времени подходов к приближенному расчету турбулентного течения стал метод осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) [4]. Этот метод основывается на осреднении параметров течения и определении влияния на течение флуктуационной турбулентной составляющей вне зависимости от масштаба с помощью определенной полуэмпирической модели турбулентности. Существенным недостатком этого подхода является зависимость результатов моделирования от выбранной модели турбулентности. Тем не менее, RANS метод получил широкое применение в решении прикладных задач, поскольку обеспечивал требуемый результат с разумной точностью при использовании пространственно-временных дискретизаций, вполне приемлемых для существующих вычислительных систем.

При использовании полуэмпирических RANS методов в моделировании турбулентности очень важен выбор конкретной модели турбулентности. Именно от этого выбора зависит правильность и, в конечном итоге, точность предсказания характеристик моделируемых турбулентных структур. В последние десятилетия было предложено большое число замыкающих моделей турбулентности для RANS уравнений, проведено всестороннее тестирование их работы и сравнение получающихся численных результатов с имеющимися экспериментальными данными. По результатам этих работ было собрана и обработана большая статистика, которая показала, что наиболее отвечающим требованиям робастности и точности являются модель Спаларта-Аллмараса (SA модель) [5] и модель Ментера (SST модель) [6]. Каждая из них имеет свои преимущества и недостатки при использовании в отдельных задачах. Выбор SA модели для настоящей работы был обусловлен исключительно простотой применения и возможностью ее гибкой модификации.

В настоящей работе была выполнена программная реализация RANS метода моделирования турбулентности с использованием SA модели в трехмерном коде, основанном на конечно-объемной дискретизации второго порядка точности. Реализованная модель в случае необходимости может быть легко модифицирована для увеличения точности расчета или заменена на более

совершенную. Для ослабления требования к сеточному разрешению пограничных течений используется достаточно простой метод пристеночных функций, моделирующий граничное условие типа «закон стенки» на поверхности обтекаемого тела. Результаты работы касаются верификации и валидации численной реализации рассмотренного RANS метода с моделью турбулентности SA и пристеночными функциями на решении задач турбулентного пограничного слоя на плоской пластине, турбулентного течения в асимметричном диффузоре с ограниченной зоной отрыва потока и турбулентного смешения двух параллельных потоков.

1. Математическая модель

В настоящем разделе рассматриваются определяющие уравнения движения вязкого теплопроводного газа и их осредненный аналог, который используется для моделирования турбулентных течений. Все обозначения ниже являются общепринятыми и дополнительно комментируются лишь при необходимости. Для простоты мы используем одинаковые обозначения для основных и осредненных уравнений.

1.1. Системы уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса для сжимаемого вязкого газа

Стандартная система уравнений Навье-Стокса для описания течения вязкого теплопроводного газа может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}_x - \vec{G}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{F}_y - \vec{G}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{F}_z - \vec{G}_z) = 0, \quad (1.1.1)$$

где

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_x \\ \rho U_y \\ \rho U_z \\ \rho E \end{pmatrix}, \vec{F}_x = \begin{pmatrix} \rho U_x \\ \rho U_x^2 + p \\ \rho U_x U_y \\ \rho U_x U_z \\ (\rho E + p)U_x \end{pmatrix}, \vec{F}_y = \begin{pmatrix} \rho U_y \\ \rho U_x U_y \\ \rho U_y^2 + p \\ \rho U_y U_z \\ (\rho E + p)U_y \end{pmatrix}, \vec{F}_z = \begin{pmatrix} \rho U_z \\ \rho U_x U_z \\ \rho U_y U_z \\ \rho U_z^2 + p \\ (\rho E + p)U_z \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

$$\vec{G}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \chi_x \end{pmatrix}, \vec{G}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \chi_y \end{pmatrix}, \vec{G}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \chi_z \end{pmatrix}$$

Здесь τ – тензор вязких напряжений:

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div} \vec{U} \right), \quad \tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \text{div} \vec{U} \right),$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \text{div} \vec{U} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right), \quad (1.1.3)$$

$$\chi_x = U_x \tau_{xx} + U_y \tau_{xy} + U_z \tau_{xz} - j_x, \quad \chi_y = U_x \tau_{xy} + U_y \tau_{yy} + U_z \tau_{yz} - j_y,$$

$$\chi_z = U_x \tau_{xz} + U_y \tau_{yz} + U_z \tau_{zz} - j_z$$

где \vec{q} – вектор неизвестных в консервативной форме, ρ – плотность, p – давление, U_x, U_y, U_z – компоненты вектора скорости, E – удельная полная энергия, \vec{j} – вектор теплового потока, $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ – вектора конвективных потоков, $\vec{G}_x, \vec{G}_y, \vec{G}_z$ – вектора вязких потоков.

Путем применения стандартных процедур осреднения по Рейнольдсу [4] система уравнений Навье-Стокса (1.1.1) преобразуется в систему уравнений Рейнольдса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{U}) = 0, \\ \frac{\partial (\rho \bar{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{U} \bar{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_t), \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{U} H) = \nabla \cdot [\bar{U} \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_t) + (\vec{q}_m + \vec{q}_t)], \\ \rho = pm/(RT) \end{array} \right. \quad (1.1.4)$$

где \bar{U} – вектор скорости осредненного течения, $\boldsymbol{\tau}_m, \boldsymbol{\tau}_t$ – ламинарная и турбулентная составляющие тензора вязких напряжений, \vec{q}_m, \vec{q}_t – ламинарная и турбулентная составляющие вектора плотности теплового потока. Предполагается, что газ описывается уравнением состояния идеального совершенного газа: m – молекулярный вес, $E = C_v T + 0.5(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)$.

Ламинарные составляющие тензора напряжений и вектора теплового потока в (1.1.4) определяются с помощью реологического закона Ньютона и закона Фурье, соответственно, относительно осредненных параметров:

$$\boldsymbol{\tau}_m = 2\mu(T) \left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \bar{U} \right), \quad \vec{q}_m = -\lambda(T) \nabla T \quad (1.1.5)$$

где $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{U} + [\nabla \bar{U}]^t \right)$ – тензор скоростей деформации, \mathbf{I} – единичный тензор, $\mu(T), \lambda(T)$ – коэффициенты молекулярной динамической вязкости и теплопроводности.

Система уравнений (1.1.4) не замкнута. Связь между турбулентными составляющими тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}_t$ и вектора плотности теплового потока \vec{q}_t с параметрами осредненного течения не задана системой уравнений и должна быть определена из дополнительных соотношений, которые и являются моделью турбулентности.

При использовании линейных моделей турбулентности, а именно к данному классу относится SA модель, предполагается, что справедливы гипотеза Буссинеска и закон Фурье:

$$\boldsymbol{\tau}_t = 2\mu_t \left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \bar{U} \right) + \frac{2}{3} k \mathbf{I}, \quad \vec{q}_t = -\lambda_t \nabla T \quad (1.1.6)$$

где μ_t – турбулентная динамическая вязкость, $k = \frac{1}{2}(\overline{U_x'^2} + \overline{U_y'^2} + \overline{U_z'^2})$ – кинетическая энергия турбулентности, λ_t – турбулентная теплопроводность.

Поэтому модель турбулентности в методе RANS фактически сводится к заданию связи между параметрами турбулентного тепло- массопереноса μ_t , λ_t , k с параметрами осредненного течения. При этом дополнительно предполагается, что μ_t и λ_t связаны соотношением:

$$\lambda_t = \frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \quad (1.1.7)$$

где Pr_t – турбулентный аналог числа Прандтля, который обычно полагается равным константе, $Pr_t = 0.9$.

Для окончательной формулировки задачи расчета турбулентных течений с использованием системы уравнений Рейнольдса необходимо поставить граничные условия.

На твердых стенках ставятся условия прилипания для скорости $\vec{U} = \vec{0}$ и условия первого или второго рода по температуре

$$T = T_w, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_w$$

1.2. Модель турбулентности Спаларта-Аллмараса

Как уже отмечалось ранее, SA модель турбулентности с момента своего создания остается одной из самых популярных моделей, так как сочетает в себе простоту применения и точность работы. Классическая SA модель является единственной моделью турбулентности, имеющей 4-й (высший) уровень рейтинга готовности (MRR) по классификации NASA [12].

Исходная модель описывается одним уравнением для переноса параметра турбулентной вязкости, так называемой модифицированной кинематической турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$ [5]:

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dt} = P^{\nu} - D^{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot [(v + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + c_{b2} [(\nabla \tilde{\nu}) \cdot (\nabla \tilde{\nu})] \right\} + f_{t1} \Delta U^2 \quad (1.2.1)$$

которая связана с кинематической турбулентной вязкостью выражением:

$$\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu} \quad (1.2.2)$$

где

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \chi = \frac{\tilde{v}}{\nu} \quad (1.2.3)$$

ν – кинематическая молекулярная вязкость. Кинематическая турбулентная вязкость связана с динамической турбулентной вязкостью соотношением

$$\nu_t = \mu_t / \rho.$$

Генерационный член P^v и диссипативный член D^v , входящие в правую часть (1.2.1) определяются следующими выражениями:

$$P^v = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{v} \quad (1.2.4)$$

$$D^v = \left(c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{v}}{d_w} \right)^2 \quad (1.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}}{(\kappa d_w)^2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \\ f_w &= g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S}(\kappa d_w)^2} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

d_w – ближайшее расстояние до стенки, $\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана, Ω – модуль тензора завихренности:

$$\Omega = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Функция f_{t2} обеспечивает подавление «спонтанного» или «численного» ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое и определяется выражением:

$$f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4}\chi^2) \quad (1.2.7)$$

Последний член в правой части (1.2.1) предназначен для инициирования ламинарно-турбулентного перехода в заданной точке или на заданной линии (в зависимости от размерности задачи). Однако при моделировании в данной работе использовался так называемый FT (Fully turbulent) подход, при котором делается допущение, что ламинарным участком пограничного слоя можно пренебречь, и, следовательно, не происходит ламинарно-турбулентного перехода. В этом случае последний член полагается равным нулю.

Эмпирические константы, определяющие SA модель, равны [5]:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2/3, c_{b1} = 0.1355, c_{b2} = 0.622, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}, c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2, c_{v1} = 7.1, \\ C_{t3} &= 1.2, C_{t4} = 0.5\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

2. Численный метод для расчета турбулентных течений

В данном разделе рассматривается численный метод решения системы уравнений законов сохранения (1.1.4) и уравнения (1.2.1) турбулентной модели. Предполагается, что расчетная область разбита на контрольные объемы в форме произвольных многогранников. Каждая грань контрольного объема является плоской и характеризуется площадью и единичным вектором внешней нормали.

2.1. Численный метод для решения основной системы уравнений

В программном комплексе, разработанном авторами для моделирования в общем случае реагирующих газовых течений, интегрирование системы уравнений законов сохранения осуществляется по методу, предложенному И.С. Меньшовым и Й. Накамурой [7]. Пространственная дискретизация уравнений основана на методе конечных объемов. Для i -й ячейки после интегрирования по ее объему получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} V_i + \iiint_{V_i} \left(\frac{\partial (\vec{F}_x - \vec{G}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F}_y - \vec{G}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{F}_z - \vec{G}_z)}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 \quad (2.1.1)$$

где V_i – объем ячейки.

Переход к поверхностному интегралу позволяет переписать это уравнение в виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} V_i + \sum_{\sigma} \iint_{S_{\sigma}} (\vec{F} - \vec{G}) \cdot \vec{n}_{\sigma} ds = 0 \quad (2.1.2)$$

где σ обозначает грань ячейки, \vec{n}_{σ} – вектор единичной внешней нормали к грани σ , $\vec{F} = \{\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z\}$, $\vec{G} = \{\vec{G}_x, \vec{G}_y, \vec{G}_z\}$.

Пусть \vec{q}_i^n – решение на n -ом слое, Δt – шаг по времени, $\vec{F}_\sigma, \vec{G}_\sigma$ – нормальные потоки через грань σ . Тогда, переходя к разностной аппроксимации производной по времени, получим следующую систему разностных уравнений:

$$\vec{q}_i^{n+1} = \vec{q}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{\sigma} s_{\sigma} (\vec{F}_{\sigma} - \vec{G}_{\sigma}) \quad (2.1.3)$$

где $\vec{F}_{\sigma} = F_{k,\sigma} n_k, \vec{G}_{\sigma} = G_{k,\sigma} n_k$.

Чтобы снять ограничение на шаг по времени, для каждой ячейки вводится параметр гибридности ω , который позволяет записать разностную схему по времени в виде явно-неявной гибридной схемы, обеспечивающей выполнения принципа невозрастания максимума [7]:

$$\vec{q}_i^{n+1} = \vec{q}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{\sigma} s_{\sigma} (\vec{F}_{\sigma}^{\omega} - \vec{G}_{\sigma}^{\omega}) \quad (2.1.4)$$

В качестве основного алгоритма решения системы уравнений (2.1.4) используется комбинированный метод LU-SGS–GMRES [10]. Матрица, получаемая в результате приближенной факторизации уравнений методом LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel), используется в качестве предобуславливателя для метода наименьших невязок GMRES с целью повышения скорости сходимости.

Основное преимущество метода LU-SGS в том, что он фактически является безматричным, что позволяет существенно сократить расход памяти вычислительных систем. Обычно матрица линейной системы, получаемой на каждой итерации метода Ньютона, имеет громоздкие размеры и требует значительных вычислительных ресурсов для обработки и хранения. Использование LU-SGS–GMRES алгоритма позволяет значительно сократить расход оперативной памяти и увеличить быстродействие алгоритма, что является критически важным при моделировании многомерных нестационарных течений реагирующего газа. Формулировка метода LU-SGS может быть представлена в следующем виде [8, 9]:

$$\begin{cases}
\delta \vec{q}_i^{\rightarrow s,*} = -\frac{1}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} + 1\right) + d_i} \left[\vec{R}_i^s + \sum_{\sigma(i); \sigma(i) < i} \vec{G}_\sigma \left(\delta \vec{q}_{\sigma(i)}^{\rightarrow s,*} \right) \right], \\
\delta \vec{q}_i^{\rightarrow s} = \delta \vec{q}_i^{\rightarrow s,*} - \frac{1}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} + 1\right) + d_i} \left[\sum_{\sigma(i); \sigma(i) > i} \vec{G}_\sigma \left(\delta \vec{q}_{\sigma(i)}^{\rightarrow s} \right) \right] \\
\vec{G}_\sigma \left(\delta \vec{q}^{\rightarrow s} \right) = 0.5 \frac{\Delta t}{V_i} s_\sigma \left(1 - \omega_{\sigma(i)} \right) \left[\mathbf{T}_{\sigma(i)}^{-1} \delta \vec{f}_{\sigma(i)}^{\rightarrow s} - (\bar{\rho}_\sigma - 2\bar{v}_\sigma) \delta \vec{q}_{\sigma(i)}^{\rightarrow s} \right]
\end{cases} \quad (2.1.5)$$

где $\Delta t, \Delta \tau$ – шаги по времени и псевдовремени, соответственно (псевдовремя – итерационный параметр внутри каждого шага по времени), \mathbf{T} – матрица перехода к локальному ортонормированному базису на грани ячейки, $\bar{\rho}_\sigma$ и \bar{v}_σ – невязкий и вязкий спектральный радиус, \vec{R}_i – вектор невязки

$$\vec{R}_i^s = \vec{R}(\vec{q}_i^{n+1,s}) = \vec{q}_i^{n+1,s} - \vec{q}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{\sigma} s_\sigma \left(\vec{F}_\sigma^{\omega,s} - \vec{G}_\sigma^{\omega,s} \right) \quad (2.1.6)$$

s – номер итерации по псевдовремени, $\sigma(i)$ – номер ячейки соседней с i -ой по грани σ ,

$$d_i = 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta \tau} (1 - \omega_i) \sum_{\sigma} s_\sigma (\bar{\rho}_\sigma - 2\bar{v}_\sigma) \quad (2.1.7)$$

Вязкий спектральный радиус оценивается через кинематическую вязкость, $\bar{v}_\sigma = \nu_\sigma / h_{i,\sigma(i)}$, $h_{i,\sigma(i)}$ – расстояние между центрами ячеек с номерами i и $\sigma(i)$.

Символ δ обозначает итерационную невязку – разность векторов неизвестных и потоков на соседних псевдовременных слоях:

$$\begin{aligned}
\delta \vec{q}_i^{\rightarrow s} &= \vec{q}_i^{n+1,s+1} - \vec{q}_i^{n+1,s} \\
\delta \vec{f}_{\sigma(i)}^{\rightarrow s} &= \vec{f}_1 \left(\vec{q}_{\sigma(i)}^{n+1,s+1} \right) - \vec{f}_1 \left(\vec{q}_{\sigma(i)}^{n+1,s} \right)
\end{aligned}$$

Для расчета конвективных потоков используется метод Годунова, основанный на решении задачи Римана о распаде разрыва, а для вязких потоков используется обобщенный метод центральных разностей [7].

2.2. Система уравнений с моделью турбулентности

Запишем еще раз уравнение (1.2.1), отбросив последнее слагаемое в правой части уравнения ввиду использования FT-модели.

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = P^v - D^v + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot [(v + \tilde{v}) \nabla \tilde{v}] + c_{b2} [(\nabla \tilde{v}) \cdot (\nabla \tilde{v})] \right\} \quad (2.2.1)$$

Также во избежание путаницы между обозначениями грани и константы модели в дальнейшем будем обозначать σ в уравнении (2.2.1) как $\sigma_{\tilde{v}}$.

Уравнение (2.2.1) преобразовывается к консервативному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\tilde{v} U_x) - \left(\frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\tilde{v} U_y) - \left(\frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\tilde{v} U_z) - \left(\frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} (v + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) \right] = P^v - D^v + \frac{c_{b2}}{\sigma_{\tilde{v}}} [(\nabla \tilde{v}) \cdot (\nabla \tilde{v})] \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Уравнение (2.2.2) имеет тот же вид, что и основная система уравнений (1.1.2). Поэтому последнюю можно расширить, добавив уравнение (2.2.2), и систему (1.1.2) переписать в расширенном виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F}_x - \vec{G}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{F}_y - \vec{G}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{F}_z - \vec{G}_z) = \vec{S} \quad (2.2.3)$$

В правой части теперь содержится ненулевой вектор источников \vec{S} :

$$\vec{S} = \left(0, 0, 0, 0, 0, P^v - D^v + \frac{c_{b2}}{\sigma_{\tilde{v}}} [(\nabla \tilde{v}) \cdot (\nabla \tilde{v})] \right) \quad (2.2.4)$$

Расширенные вектора переменных и потоков теперь выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\vec{q} &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_x \\ \rho U_y \\ \rho U_z \\ \rho E \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \vec{F}_x = \begin{pmatrix} \rho U_x \\ \rho U_x^2 + p \\ \rho U_x U_y \\ \rho U_x U_z \\ (\rho E + p)U_x \\ \tilde{v}U_x \end{pmatrix}, \vec{F}_y = \begin{pmatrix} \rho U_y \\ \rho U_x U_y \\ \rho U_y^2 + p \\ \rho U_y U_z \\ (\rho E + p)U_y \\ \tilde{v}U_y \end{pmatrix}, \vec{F}_z = \begin{pmatrix} \rho U_z \\ \rho U_x U_z \\ \rho U_y U_z \\ \rho U_z^2 + p \\ (\rho E + p)U_z \\ \tilde{v}U_z \end{pmatrix}, \\
\vec{G}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \chi_x \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}}(v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \end{pmatrix}, \vec{G}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \chi_y \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}}(v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \end{pmatrix}, \vec{G}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \chi_z \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}}(v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Перенос модифицированной турбулентной вязкости напрямую зависит от переноса массы. Поэтому конвективные потоки вычисляются по формуле:

$$F_{v,i} = \frac{\tilde{v}}{\rho} F_m \quad (2.2.6)$$

где F_m – поток массы, $\frac{\tilde{v}}{\rho}$ – интерполированное на грань значение из той ячейки, для которой поток через грань положительный. Отдельное граничное условие для потока модифицированной турбулентной вязкости не ставится, так как на стенке уже стоит условие «непротекания» для потока массы.

Вязкие потоки вычисляются по формулам, описанным в (2.2.5), с обобщенной центрально-разностной аппроксимацией производных на грани ячейки:

$$G_x = \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}}(v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \end{pmatrix}, G_y = \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}}(v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \end{pmatrix}, G_z = \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}}(v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

На границах ставятся граничные условия следующего вида:

- а) на вязкой стенке ставится условие обращения в ноль модифицированной турбулентной вязкости;
- б) на входной границе устанавливается условие первого рода;
- в) на выходной границе значение модифицированной турбулентной вязкости экстраполируется из внутренних точек области.

Начальное значение модифицированной турбулентной вязкости определяется по заданным значениям начальной интенсивности турбулентности int_t и длине смешения l_{mix} . По этим значениям вычисляется кинетическая энергия турбулентности

$$k = \frac{1}{2}(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) \cdot \text{int}_t^2$$

и начальное значение кинематической турбулентной вязкости $\nu_t = l_{\text{mix}} \sqrt{k}$. Используя соотношения (1.2.2) и (1.2.3) методом дихотомии определяется начальное значение модифицированной турбулентной вязкости.

2.3. Граничное условие «закон стенки»

При моделировании турбулентных течений одним из важнейших аспектов является моделирование вязкого погранслоя. Однако, использование расчетных сеток с достаточным количеством ячеек внутри погранслоя для высокоскоростных течений ведет к большим вычислительным затратам. Чтобы избежать этого, используется специальное граничное условие «закон стенки», которое позволяет получить аппроксимацию напряжения на стенке и значение модифицированной турбулентной вязкости без разрешения погранслоя. Работа данного граничного условия основана на восстановлении значений данных величин по автомодельному профилю скорости в вязком погранслое.

Пусть (\vec{V}, ρ, T, P) – параметры в центре пристеночной ячейки. Введем переменные «закона стенки» [11]:

$$y^+ = \frac{y}{l_\tau}, u^+ = \frac{|\vec{V}_\tau|}{u_\tau}, l_\tau = \frac{\mu}{\rho u_\tau}, u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}} \quad (2.3.1)$$

где \vec{V}_τ – проекция скорости \vec{V} в центре пристеночной ячейке на плоскость касательную к стенке, μ – молекулярная кинематическая вязкость, τ_w – касательное напряжение на стенке.

Касательное напряжение на стенке τ_w может быть найдено из формулы

$$y^+ = \frac{y \sqrt{\rho |\tau_w|}}{\mu} \quad \text{и связи между основными переменными «закона стенки»}$$

$y^+ = \frac{\text{Re}}{u^+}$, где Re – характерное число Рейнольдса для пристеночной ячейки:

$$\text{Re} = \frac{y |\vec{V}_\tau| \rho}{\mu} \quad (2.3.2)$$

Значения переменных стенки u^+ и y^+ находятся из универсального автомодельного профиля скорости внутри вязкого погранслоя, предложенного Сполдингом [11]:

$$y^+ = u^+ + e^{-2.2} \left(e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{1}{2} (\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6} (\kappa u^+)^3 - \frac{1}{24} (\kappa u^+)^4 \right) \quad (2.3.3)$$

где $\kappa = 0.41$ – константа Кармана.

Поиск значений осуществляется путем решения уравнения $F(u^+) = f(u^+) - \frac{\text{Re}}{u^+} = 0$, где $f(u^+)$ – функция, стоящая в правой части (2.3.3).

Уравнение решается с помощью итерационного метода Ньютона.

Начальное приближение для метода Ньютона строится исходя из значения числа Рейнольдса в первой пристеночной ячейке.

По достижению требуемого уровня точности итерационный процесс завершается. Путем подстановки найденного значения u^+ в приведенные выше формулы находится значение напряжения на стенке τ_w .

Во всей пристеночной области для SA модели выполнено [5]:

$$\chi = \kappa u^+ \quad (2.3.4)$$

Из данного соотношения получается аппроксимация значения модифицированной турбулентной вязкости в пристеночной ячейке.

2.4. Расчет источников в модели турбулентности

Использование классической SA модели для моделирования турбулентности может сопровождаться проблемами численного характера при расчёте функции источников. Если течение по своему характеру становится близко к ламинарному, то модуль тензора завихренности Ω и значение модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$ стремятся к нулю. Это приводит к близости к нулю величины \tilde{S} . Данная конфигурация значений переменных порождает неопределенность вида «ноль на ноль» в расчете величины $r \sim \tilde{\nu} / \tilde{S}$. Также в некоторых случаях величина \tilde{S} может принимать отрицательные значения, что приводит к нефизичному результату расчета источника турбулентности.

Авторами модели было предложено несколько вариантов решения данных вычислительных трудностей [12]:

- а) самый простой вариант - ограничение \tilde{S} неотрицательными значениями;

б) решение, предложенное Спалартом - ограничение на \tilde{S} снизу величиной $0.3 * \Omega$;

в) способ, предложенный авторами модели в 2012 году [14], заключающийся в модификации выражения для \tilde{S} :

$$\bar{S} = \frac{\tilde{v}}{(\kappa d_w)^2} f_{v2} \quad (2.4.1)$$

$$\tilde{S} = \begin{cases} \Omega + \bar{S}, & \text{если } \bar{S} \geq -c_2 \Omega \\ \Omega + \frac{\Omega(c_2^2 \Omega + c_3 \bar{S})}{(c_3 - 2c_2)\Omega - \bar{S}}, & \text{если } \bar{S} < -c_2 \Omega \end{cases} \quad (2.4.2)$$

где $c_2 = 0.7$, $c_3 = 0.9$.

Однако, даже с внесенными изменениями \tilde{S} может становиться равным нулю в случае если модуль тензора завихренности близок к нулю. В этом случае предлагается принимать $r = 10$.

3. Результаты расчётов

Разработанная авторами численная реализация метода RANS на основе SA модели верифицировалась и валидировалась путем решения ряда модельных задач, а именно: обтекание потоком газа плоской пластины с формированием турбулентного погранслоя, течение газа сквозь ассиметричный диффузор Оби, а также формирование турбулентного слоя смешения между слоями газа, движущимися с разной скоростью. Во всех случаях поток газа являлся строго дозвуковым. Расчеты проводились с использованием сеток с различной разрешающей способностью. Постановки задач и данные были взяты из [12, 13].

3.1. Турбулентный пограничный слой

Моделирование турбулентного погранслоя на плоской пластине проводилось на трех сетках различной разрешающей способности в области погранслоя. Были использованы сетки с $y^+ = 3, 22$ и 335 для центра первой пристеночной ячейки. Поток вязкого газа находился при нормальных условиях: $P = 1 \text{ атм}$, $T = 300 \text{ К}$. Скорость потока равнялась 68 м/с , что соответствует числу Маха $M = 0.2$.

Для сетки $y^+ = 3$ были построены профили скорости в безразмерных переменных закона стенки y^+, u^+ . Профили строились в трех срезях, соответствующих $Re_x = 2.7 \cdot 10^6, 5.0 \cdot 10^6, 10^7$. Сравнение проводилось с расчетами по $k - \varepsilon$ модели кодом WIND, представленными в базе тестов NASA [13]. Результаты представлены на рис. 1.

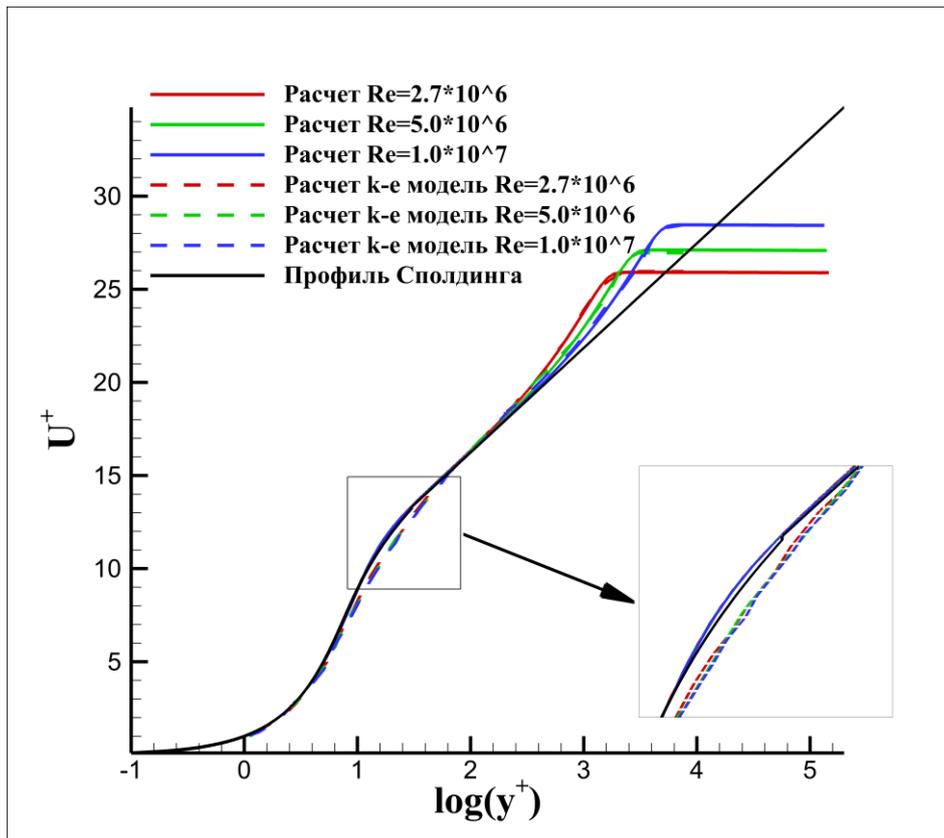


Рис. 1. Сравнение безразмерных профилей скорости для сетки $y^+ = 3$ в 3 сечениях.

Из рисунка видно хорошее совпадение безразмерных профилей скорости по всей толщине пограничного слоя за исключением буферной зоны ($y^+ = 10 - 50$), различия в которой обусловлены использованием разных моделей турбулентности. Однако в буферной зоне именно SA модель лучше согласуется с автомодельным профилем Сполдинга [11]. Хорошая корреляция дает предпосылки говорить о том, что численная реализация модели турбулентности функционирует правильно.

Для исследования влияния разрешающей способности расчетной сетки были построены профили коэффициента трения вдоль пластины для трех используемых сеток. На сетках с $y^+ = 22$ и $y^+ = 335$ расчеты проводились как с использованием граничного условия «закон стенки» так и без него. Профили

сравнивались с результатами расчетов с помощью кода CFL3D и аналитическим решением Кармана-Шонхерра (К-S теория) [15], которые представлены в валидационной базе моделей турбулентности NASA [12]. Графики построены в переменных Re_θ, c_f , где:

$$Re_\theta = \frac{\rho_\infty U_\infty \theta}{\mu_\infty} \quad (3.1.1)$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{0.5 \cdot \rho_\infty U_\infty^2} \quad (3.1.2)$$

Результаты сравнения представлены на рис. 2.

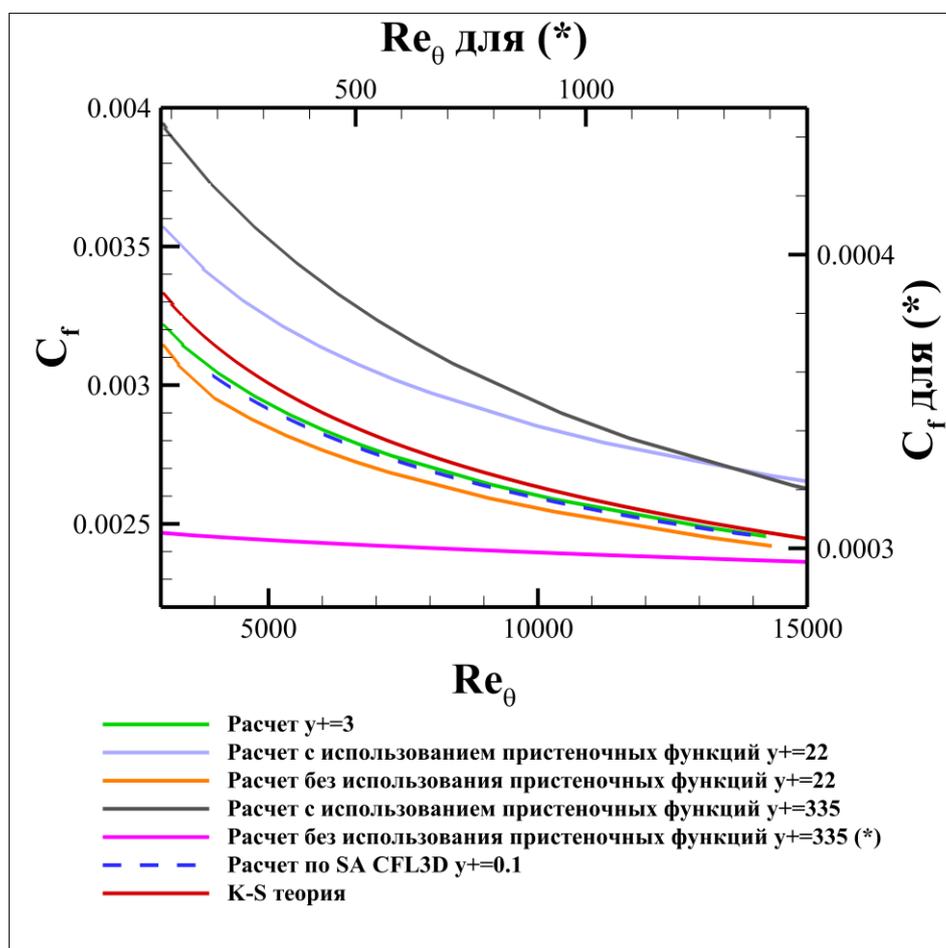


Рис. 2. Сила сопротивления на пластине для различных сеток

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы. Во-первых, видно, что в расчете на сетке с $y^+ = 3$ коэффициент трения на пластине совпадает с коэффициентом, полученным в расчете кодом CFL3D на сетке с

$y^+ = 0.1$ [12] и близок к значениям полученным по К-S теории. Во-вторых, расчеты с использованием граничного условия «закон стенки» на сетках с $y^+ = 22$ и 335 завышают коэффициент трения, а без его использования занижают. Причем для сетки с $y^+ = 335$ в расчете без использования граничного условия «закон стенки» коэффициент трения отличается на порядок от результатов, полученных на сетке с $y^+ = 0.1$. В целом же можно говорить о том, что численная реализация SA модели работает удовлетворительно, однако для расчета на сетках с большими y^+ необходимо провести коррекцию алгоритма граничного условия «закон стенки».

Далее для используемых трех сеток были построены безразмерные профили скорости, соответствующие $Re_\theta = 10000$. Сравнение также проводилось с профилями, полученными с использованием кода CFL3D [12]. Результаты сравнения представлены на рис. 3.

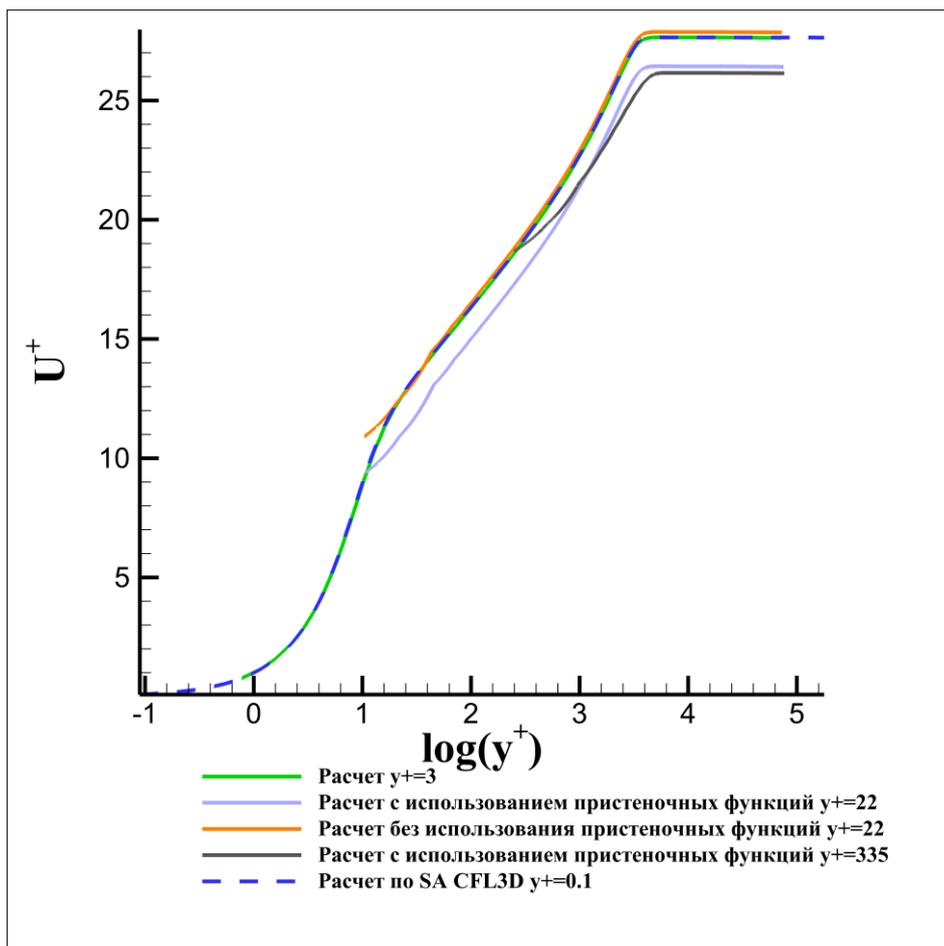


Рис 3. Безразмерные профили скорости в срезе для различных сеток

Построенные профили скорости показывают, что численная реализация модели турбулентности удовлетворительно работает на сетках, плохо

разрешающих погранслоев. Граничное условие «закон стенки» (пристеночные функции) обеспечивает правильные значения u^+ и y^+ в первой пристеночной ячейке. Дальнейшее расхождение с профилем, полученным на сетке с $y^+ = 0.1$, связано с завышением коэффициента трения в пристеночной ячейке и подтверждает необходимость доработки граничного условия «закон стенки» для проведения расчетов на сетках с большими y^+ .

Для анализа влияния размерности пространства Крылова на скорость сходимости провели серию расчетов на сетке с $y^+ = 3$ с использованием метода LU-SGS, а также LU-SGS–GMRES. На рис. 4 приведены графики зависимости относительной невязки от числа итераций:

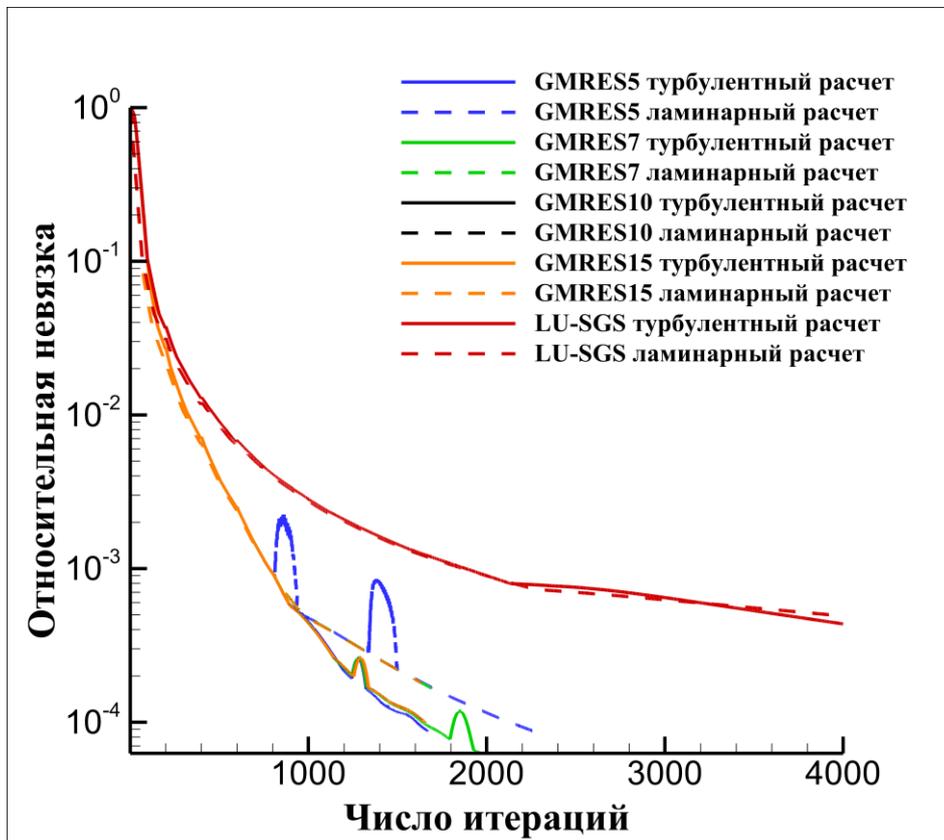


Рис. 4. Относительная невязка при расчете с использованием различных схем

По результатам численных экспериментов видно, что использование метода LU-SGS–GMRES позволяет существенно ускорить сходимость по сравнению с использованием метода LU-SGS и, следовательно, уменьшить время расчета. Однако использование размерности пространства Крылова больше 7 является нецелесообразным, тк перестает давать значительное ускорение сходимости по сравнению с использованием пространства размерности 7.

3.2. Ассиметричный диффузор Оби

В настоящем разделе представлены результаты расчетов по моделированию турбулентного течения в ассиметричном диффузоре Оби [13, 16]. Параметры газового потока: $P=1 \text{ атм}$, $T=293\text{K}$, скорость потока равнялась 20.6 м/с , что соответствует числу Маха $M=0.06$. Общая картина установившегося течения показана на рис. 5.

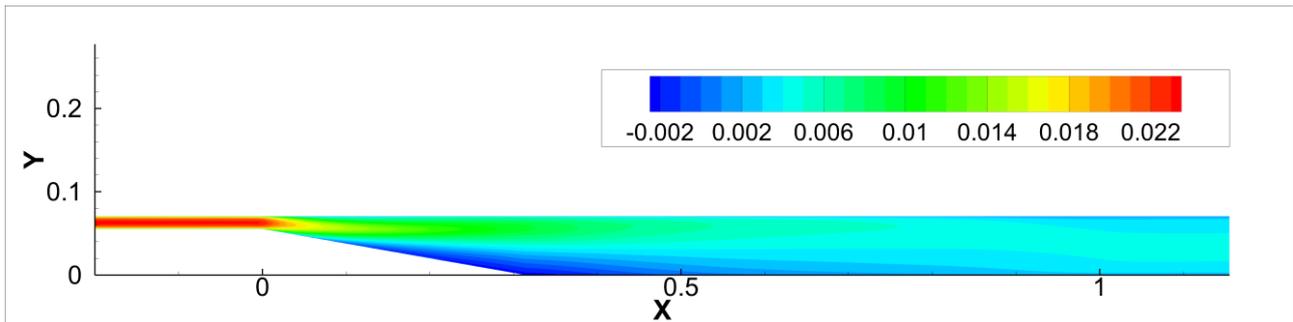


Рис. 5. Распределение продольной скорости в диффузоре Оби

Количественное распределение турбулентной вязкости с характерным «ядром» показано на рис. 6.

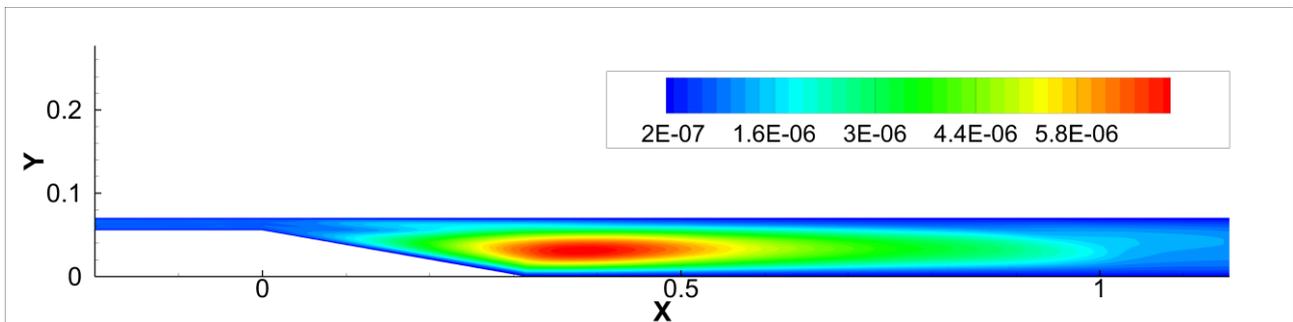


Рис. 6. Распределение модифицированной турбулентной вязкости в диффузоре Оби

Расчеты проводили на двух сетках с различной разрешающей способностью. Для обеих сеток были построены безразмерные профили скорости в расширении диффузора и проведено сравнение с результатами экспериментов, описанных в базе тестов NASA [13]. Результаты сравнения представлены ниже на рис. 7.

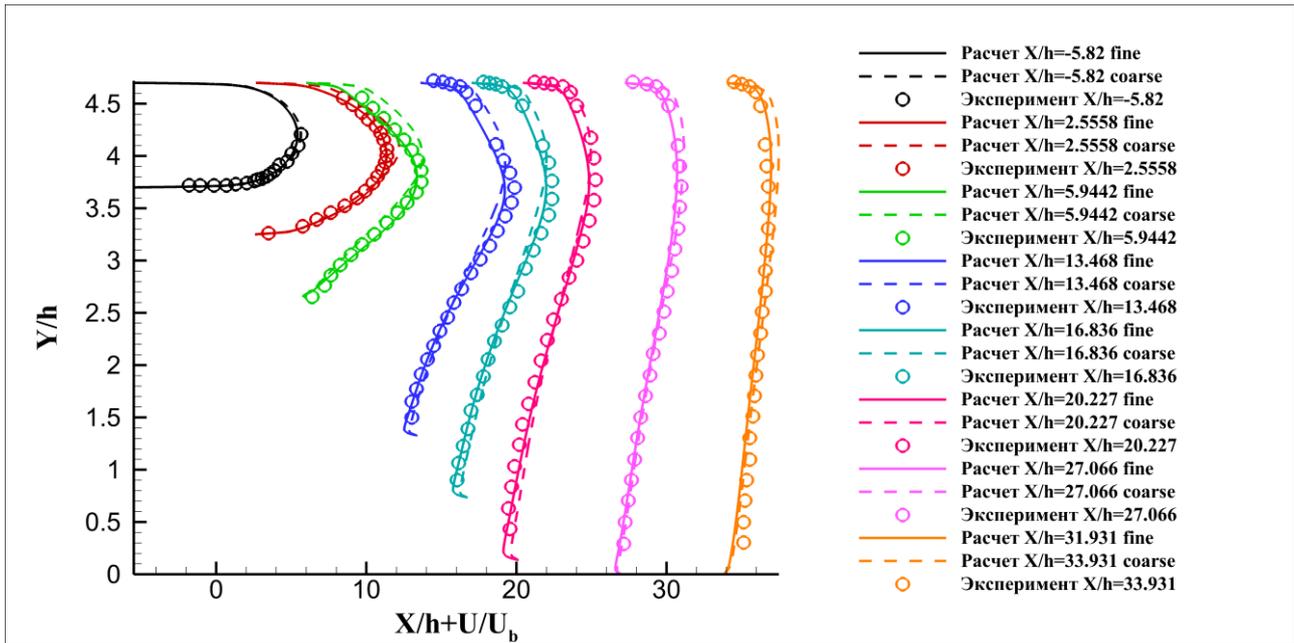


Рис. 7. Профили скорости в расширении диффузора

На рис. 7 $h = 1.5$ см - высота изолятора диффузора, $U_b = 20.6$ м/с - скорость потока на входе в изолятор.

Как видно по данным графикам, соответствие между результатами расчета и данными эксперимента очень хорошее. Стоит отметить, что результаты расчетов на грубой сетке (в поперечном сечении канала 35 ячеек) показывают, что сетка имеет недостаточное разрешение для правильного описания переноса импульса поперек канала. В то же время результаты, полученные на подробной сетке (в поперечном сечении канала 140 ячеек), очень хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Для задачи по моделированию течения газа сквозь диффузор также были проведены расчеты с использованием различных размерностей пространства Крылова с целью изучения скорости сходимости численных решений. Зависимость относительной невязки от числа итераций представлена на рис. 8.

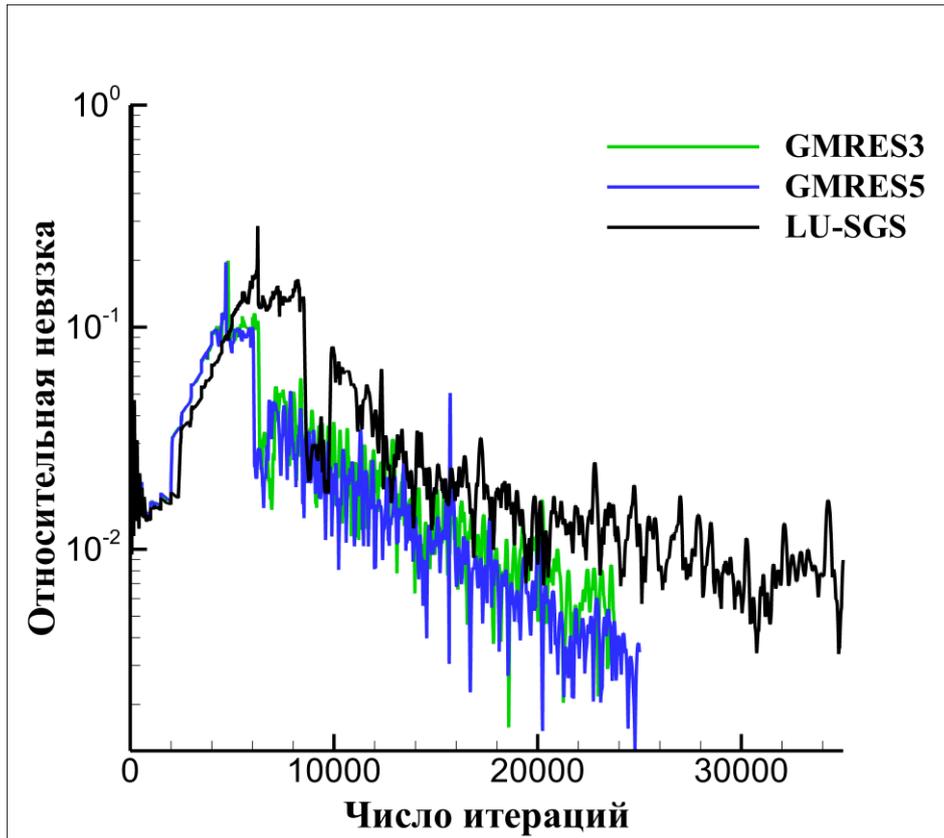


Рис. 8. Относительная невязка при моделировании течения в диффузоре различными методами

На данном рисунке видно, что при моделировании течения в диффузоре невязка во всех случаях сильно осциллирует, однако тенденция ускорения сходимости при увеличении размерности пространства Крылова вплоть до 5 сохраняется.

3.3. Турбулентный слой смешения

При моделировании многокомпонентных реагирующих течений особую роль играют процессы смешения. Для валидации разработанного вычислительного алгоритма было проведено моделирование турбулентного слоя смешения между двумя слоями газа, движущимися с разными скоростями [12].

Вдув газа производится двумя потоками, которые в начале разделены плоской пластиной. Скорость газа сверху от пластины 41.54 м/с, снизу 22.4 м/с. Газ вдувается при нормальных условиях $P=101325 \text{ Па}$, $T=293 \text{ К}$. Интенсивность турбулентности задавали на уровне 0.3%. Расчетная сетка состояла из трех областей: зоны смешения и двух каналов (верхнего и нижнего) с числом ячеек: 368x368, 120x160, 88x160, соответственно. На верхней и нижней стенках расчетной области ставились условия проскальзывания. На

разделяющей пластине – условия прилипания. Расчет проводили с использованием метода LU-SGS–GMRES с размерностью пространства Крылова 3. Распределения продольной скорости и турбулентной вязкости показаны на рис. 9 и рис. 10, соответственно.

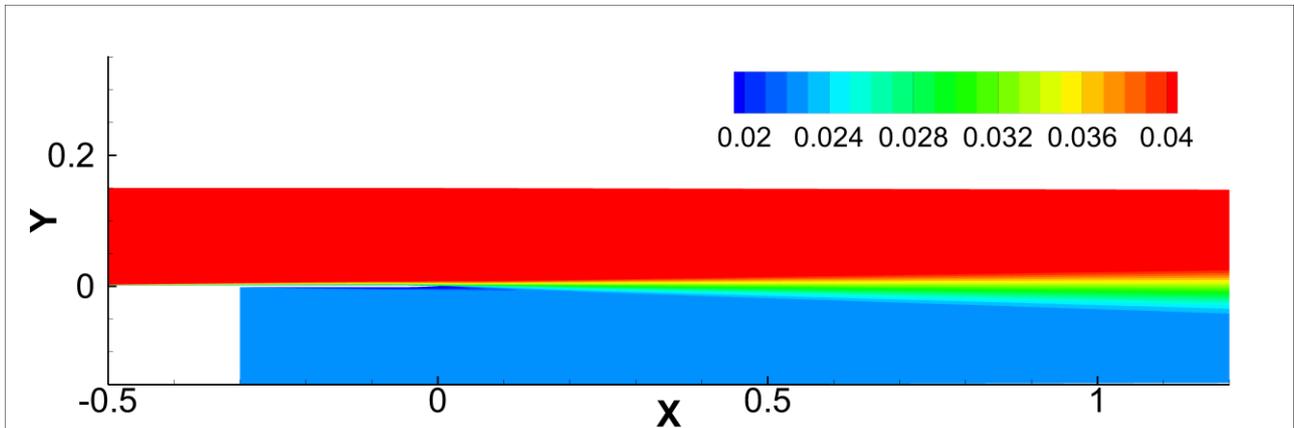


Рис. 9. Распределения продольной скорости в слое смешения

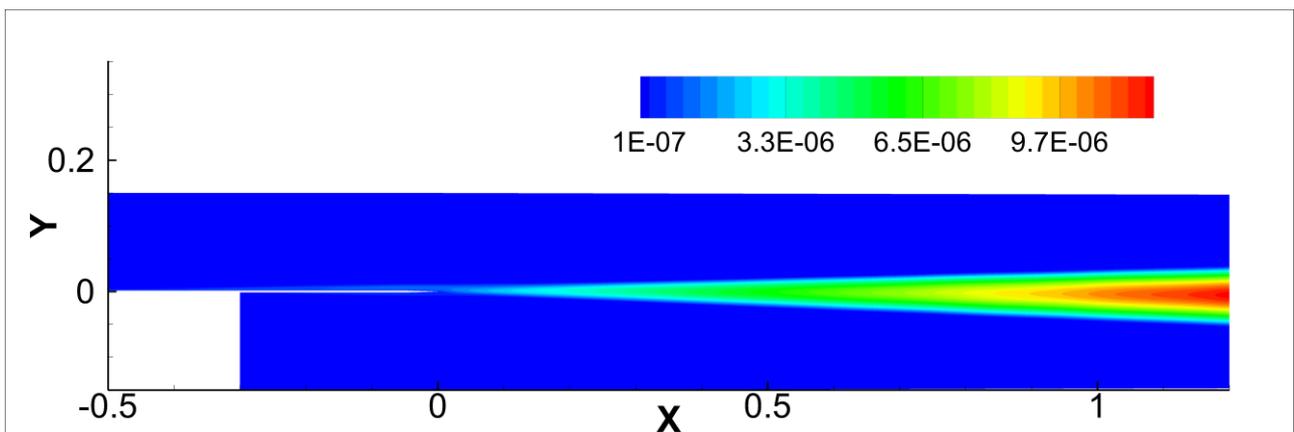


Рис.10. Распределение турбулентной вязкости в слое смешения

Для валидации были построены размерные и безразмерные профили скорости в различных сечениях области смешения и проведено сравнение с экспериментальными результатами из [12]. Результаты сравнения представлены на рис. 11 и рис. 12. Координата сечения отсчитывается от конца разделяющей пластины.

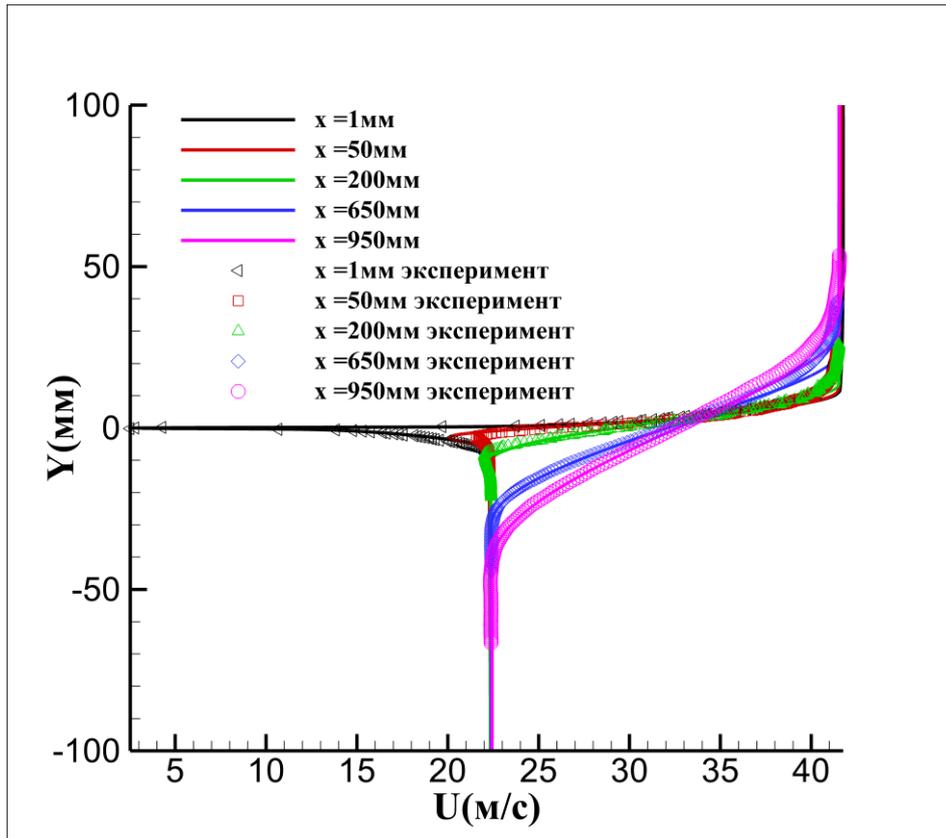


Рис. 11. Профили скорости в слое смешения

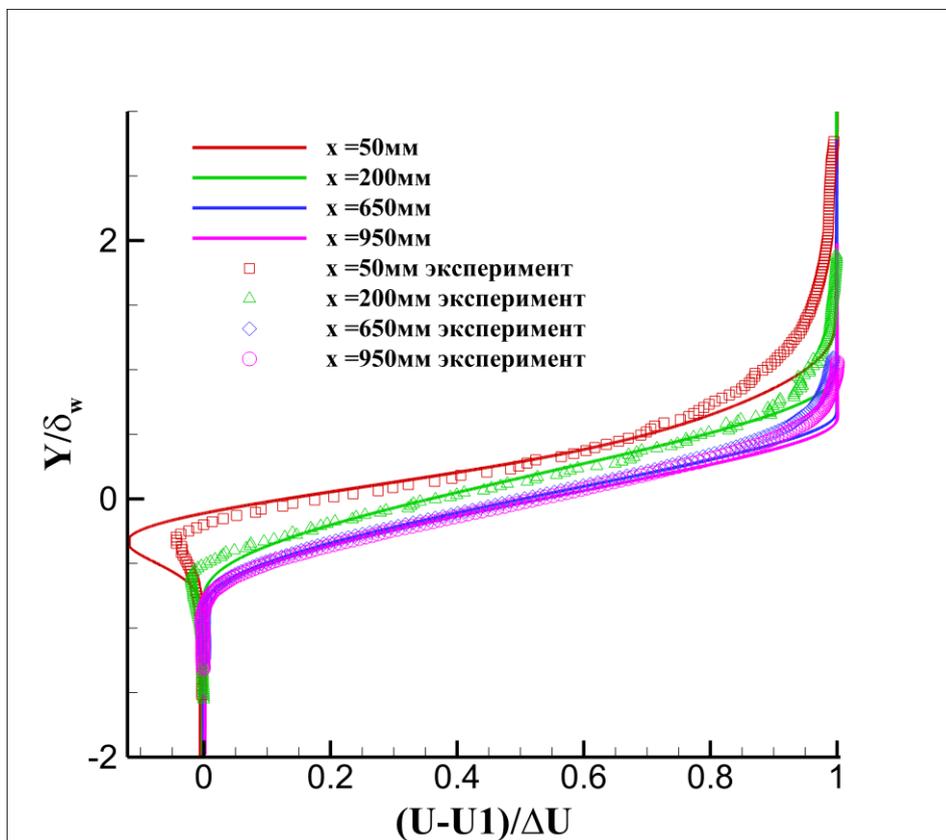


Рис. 12. Безразмерные профили скорости

На рис. 12 за U_1 принята скорость нижнего потока, $\Delta U = 19.14$ м/с – разность между скоростями верхнего и нижнего потоков. δ_w – безразмеривающий параметр, подобранный для каждого сечения:

$$x = 50 \text{ мм} - \delta_w = 8.8583 \text{ мм}, x = 200 \text{ мм} - \delta_w = 13.771 \text{ мм},$$

$$x = 650 \text{ мм} - \delta_w = 35.894 \text{ мм}, x = 950 \text{ мм} - \delta_w = 50.543 \text{ мм}$$

Получение результаты удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным. Отличие между результатами эксперимента и расчета наблюдается в верхней области слоя смешения. Граница расчетного слоя смешения лежит ниже экспериментальной.

Заключение

Для моделирования турбулентных течений вязкого сжимаемого газа при больших числа Рейнольдса разработан и реализован в виде программного кода вычислительный алгоритм, основанный на использовании RANS подхода и модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA). В основе вычислительного алгоритма лежит комбинированный LU-SGS–GMRES метод. Моделирование на сетках с большим размером пристеночной ячейки выполнялось с использованием реализованных граничных условий «закон стенки». Выполнена верификация и валидация разработанных вычислительных алгоритмов путем решения модельных задач по дозвуковому течению вязкого сжимаемого газа над плоской пластиной и сквозь ассиметричный диффузор, а также задачи по формированию турбулентного слоя смешения между двумя дозвуковыми потоками вязкого сжимаемого газа. Показано, что использование комбинированного LU-SGS–GMRES метода является более эффективным с точки зрения ускорения сходимости по сравнению с использованием LU-SGS. Полученные результаты расчетов хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов.

Список литературы

1. Pope. S. Turbulent flows // Cambridge University Press – 2000. – [doi:10.1017/CBO9780511840531](https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531)
2. Ishihara T., Kaneda Y., Hunt J.C.R Thin Shear Layers in High Reynolds Number Turbulence – DNS Results // Springer 91, 2013, pp 895-929. – [doi:10.1007/s10494-013-9499-z](https://doi.org/10.1007/s10494-013-9499-z)
3. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений // Учебное пособие, Издательство Политехнического Института, Санкт-Петербург, 2012.
4. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой жидкости и определение критерия // Проблемы турбулентности. – М.–Л.: ОНТИ, 1936, С. 135-227.
5. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 1992-0439. [doi:10.2514/6.1992-439](https://doi.org/10.2514/6.1992-439)
6. Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003, pp. 625-632.
7. Menshov, I. and Nakamura Y. Hybrid explicit-implicit, unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // AIAA Journal, 42(3), 2004, pp. 551-559. [doi:10.2514/1.9109](https://doi.org/10.2514/1.9109)
8. Men'shov I.S., Nakamura Y. Implementation of the LU–SGS method for an arbitrary finite volume discretization // Proc. of 9th Conference on CFD, Tokyo, 1995, p. 123.
9. Men'shov I.S., Nakamura Y. On implicit Godunov's method with exactly linearized numerical flux // Computers & Fluids 29, 2000, pp. 595-616. [doi:10.1016/S0045-7930\(99\)00020-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(99)00020-1)
10. Luo H., Baum J.D., Lohner R. An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids // Computers and Fluids 30, 2001, pp. 137-159, 2000. [doi:10.1016/S0045-7930\(00\)00011-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(00)00011-6)
11. Spalding D.B. A single formula for the law of the wall // J. Appl. Mech., Vol.28, 1961, pp. 455-457.
12. Turbulence Modelling Resource of Langley Research Center // [электронный ресурс]. – URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov>
13. NRARC Alliance Verification and Validation Archive // [электронный ресурс]. – URL: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/archive.html>
14. Allmaras, S. R., Johnson, F. T., Spalart, P. R., Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart–Allmaras Turbulence Model, ICCFD7-

- 1902, 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics, Big Island, Hawaii, 9-13 July 2012.
15. Schoenherr, K. E. Resistance of flat surfaces moving through a fluid // Trans. SNAME. 40, 1932, pp. 279–313.
 16. Buice C.U., Eaton J.K. Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser // Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1995, pp. 117-120.

Оглавление

Введение	3
1. Математическая модель	5
1.1. Системы уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса для сжимаемого вязкого газа	5
1.2. Модель турбулентности Спаларта-Аллмараса.....	8
2. Численный метод для расчета турбулентных течений	10
2.1. Численный метод для решения основной системы уравнений.....	10
2.2. Система уравнений с моделью турбулентности	13
2.3. Граничное условие «закон стенки»	15
2.4. Расчет источников в модели турбулентности.....	16
3. Результаты расчётов	17
3.1. Турбулентный пограничный слой	17
3.2. Ассиметричный диффузор Оби	22
3.3. Турбулентный слой смешения	24
Заключение.....	27
Список литературы.....	28