ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 117 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Разложение решений ОДУ в трансряды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Разложение решений ОДУ в трансряды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 117. 19 с. doi:10.20948/prepr-2018-117
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-117

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Брюно

Разложение решений ОДУ в трансряды

Москва — 2018

УДК 517.925

Александр Дмитриевич Брюно

Разложение решений ОДУ в трансряды. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2018.

Рассматривается полиномиальное ОДУ порядка n в окрестности нуля или бесконечности независимой переменной. В 2004 году был предложен метод вычисления его решений в виде степенных рядов и экспоненциальной добавки, которая включает ещё один степенной ряд. Она содержит произвольную постоянную, существует лишь в множестве E_1, состоящем из секторов комплексной плоскости, и находится из решения ОДУ порядка $n-1$. Возможна иерархическая последовательность экспоненциальных добавок, каждая из которых определяется из ОДУ всё меньшего порядка $n-i$ и существует в своём множестве E_i. При этом надо следить за непустотой пересечения множеств существования $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_i$. Каждая экспоненциальная добавка продолжается в своё экспоненциальное разложение, содержащее счётное множество степенных рядов. В итоге получается разложение решения в трансряд, включающий счётное множество степенных рядов, которые все суммируемы. Трансряд описывает семейства решений исходного уравнения в определённых секторах комплексной плоскости.

Ключевые слова: степенные ряды, экспоненциальная добавка, экспоненциальное разложение, трансряд.

Alexander Dmitrievich Bruno

Expansion of ODE solutions into transseries.

We consider a polynomial ODE of the order n in a neighbourhood of zero or of infinity of the independent variable. A method of calculation of its solutions in the form of power series and an exponential addition, which contains one more power series, was described. The exponential addition has an arbitrary constant, exists in some set E_1 of sectors of the complex plane and can be found from a solution to an ODE of the order $n-1$. An hierarchic sequence of such exponential additions is possible, that each of these exponential additions is defined from an ODE of a lower order $n-i$ and exists in its own set E_i. Here we must check the non-emptiness of intersection of the sets $E_1 \cap \ldots \cap E_i$. Each exponential addition continues into its own exponential expansion, containing countable set of power series. As a result we obtain an expansion of a solution into a transseries, containing countable set of power series, all of which are summable. The transseries describes families of solutions to the initial ODE in some set of sectors of the complex plane.

Key words: power series, exponential addition, exponential expansion, transseries.

e-mail: `abruno@keldysh.ru`, site: `http:\\brunoa.name`

Введение

Рассматривается полиномиальное ОДУ порядка n в окрестности нуля или бесконечности независимой переменной. В [3] предложен метод вычисления его решений в виде степенных рядов. Там в §7 показано, что такое решение может иметь экспоненциальную добавку, которая включает ещё один степенной ряд. Она содержит произвольную постоянную, существует лишь в множестве E_1, состоящем из секторов комплексной плоскости, и находится из решения ОДУ порядка $n-1$. Там же показано, что возможна иерархическая последовательность экспоненциальных добавок, каждая из которых определяется из ОДУ всё меньшего порядка $n-i$ и существует в своём множестве E_i. При этом надо следить за непустотой пересечения множеств существования $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_i$. Пример таких вычислений см. в [7, 8]. Каждая экспоненциальная добавка продолжается в своё экспоненциальное разложение [4], содержащее счётное множество степенных рядов. В итоге получается разложение решения в трансряд [6], включающий счётное множество степенных рядов, которые все суммируемы [1]. Трансряд описывает семейства решений исходного уравнения в определённых секторах комплексной плоскости. Приведены примеры из уравнений Пенлеве.

Основной результат.

Теорема 0. *При $x \to x_0$, где $x_0 = 0$ или $x_0 = \infty$, решение $y(x)$ полиномиального ОДУ $f(x,y) = 0$ порядка n разлагается в трансряд*

$$y(x) = \varphi(x) + c_1 \exp \int y_1(x) dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_{1,k}(x) \left[c_1 \exp \int y_1(x) dx \right]^k ,$$

где

$$y_1(x) = \varphi_1(x) + c_2 \exp \int y_2(x) dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_{2,k}(x) \left[c_2 \exp \int y_2(x) dx \right]^k ,$$

где

....

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + c_{i+1} \exp \int y_{i+1}(x) dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_{i,k}(x) \left[c_{i+1} \exp \int y_{i+1}(x) dx \right]^k ,$$

....

где

$$y_{\mu-1}(x) = \varphi_{\mu-1}(x) + c_\mu \exp \int y_\mu(x) dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_{\mu,k}(x) \left[c_\mu \exp \int y_\mu(x) dx \right]^k ,$$

где $y_\mu(x) = \varphi_\mu(x)$. *Здесь* $\varphi(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_\mu(x)$ *и все* $B_{ik}(x)$ *суть определённые степенные ряды от* x;

$$\varphi_i(x) = \beta_i x^{\alpha_i} + \ldots, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\, i = 1,\ldots,\mu\,.$$

Тогда $E_i = \{x : \operatorname{Re}(\beta_i x^{\alpha_i+1}) < 0\}$ *для* x *вблизи* x_0, $D_i = E_1 \cap \ldots \cap E_i$. *Произвольные постоянные* c_i *отличны от нуля только в множествах* D_i. *Число* $\mu < n$ *определяется тем, что множество* D_μ *не пусто, а множество* $D_{\mu+1}$ *— пусто, и* $\mu = n$, *если множество* D_n *не пусто.*

1. Степенные ряды и их суммируемость

Пусть $x \in \mathbb{C}$. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, \text{если } x \to 0, \\ \\ 1, \text{если } x \to \infty, \end{cases}$$

т.е.

$$x^\omega \to \infty\,.$$

Рассмотрим степенные ряды

$$\varphi(x) = a_r x^r + \sum_{\omega s < \omega r} a_s x^s\,, \tag{1.1}$$

где r и s — рациональные числа с общим знаменателем q, a_r и a_s — комплексные постоянные, т.е. (1.1) — это ряды Пюизе-Лорана. Ряды (1.1), в которых все коэффициенты a_s удовлетворяют неравенствам

$$|a_s| \leqslant AB^{|s|}\Gamma^k(|s|)\,,$$

где A,B,k — положительные постоянные и $\Gamma(|s|)$ — гамма функция (факториал), образуют *класс Жевре*. Всякий степенной ряд (1.1) класса Жевре суммируется в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$, если $\omega = -1$, или точки $x_0 = \infty$, если $\omega = 1$, на q-листном накрытии $\mathbb{C}_q$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с несколькими разрезами, выходящими из точки x_0 [1].

Рассмотрим ОДУ

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.2}$$

где $y' = dy/dx$.

Теорема 1 ([2]). *Если в ОДУ* (1.2) $f(x,y)$ *является многочленом по зависимой переменной* y *и всем её производным* $y',\ldots,y^{(n)}$ *и принадлежит классу Жевре по независимой переменной* x, *то его решение* $y = \varphi(x)$ *в виде степенного ряда* (1.1) *относится к классу Жевре.*

Замечание 1. Степенные ряды, представляющие решения алгебраических и аналитических уравнений, всегда сходятся, т.е. аналитичны. Поэтому класс аналитических уравнений замкнут на аналитических решениях. Для ОДУ решения в виде степенных рядов зачастую расходятся, но принадлежат классу Жевре, т.е. суммируемы. Согласно теореме 1 этот класс ОДУ замкнут.

В [3] был предложен следующий алгоритм вычисления всех решений уравнения (1.2) класса Жевре по x и полиномиального по y и её производным. В ОДУ (1.2) ряд $f(x,y)$ рассматривается как сумма дифференциальных мономов $a_i(x,y)$, каждый из которых является произведением обычного монома const $\cdot\, x^\alpha y^\beta$, где постоянные $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, и конечного числа производных $y^{(l)}$. Каждому дифференциальному моному $a(x,y)$ ставится в соответствие векторный показатель степени $Q(a) = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$ по таким правилам:

$$Q(\text{const}) = 0,\ Q(x^\alpha y^\beta) = (\alpha,\beta),\ Q(y^{(l)}) = (-l,1),\ Q(a \cdot b) = Q(a) + Q(b).$$

Множество $\mathbf{S}(f)$ всех векторных показателей $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(x,y)$, входящих в сумму $f(x,y)$, называется *носителем* суммы $f(x,y)$. Замыкание выпуклой оболочки $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником* суммы $f(x,y)$. Граница $\partial\Gamma$ многоугольника Γ состоит из *вершин* $\Gamma_j^{(0)}$ и *рёбер* $\Gamma_j^{(1)}$. Каждым вершине и ребру $\Gamma_j^{(d)}$ ставятся в соответствие *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)}(x,y) = \sum a_i(x,y) \quad \text{по} \quad Q(a_i) \in \Gamma_j^{(d)} \tag{1.3}$$

и *нормальный конус*

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_j^{(d)} = \{P = (p_1,p_2)\ :\ \langle Q,P\rangle = \langle Q',P\rangle\,,\ Q,Q' \in \Gamma_j^{(d)},\\ \langle Q,P\rangle > \langle Q'',P\rangle\,;\ Q'' \in \Gamma\backslash\Gamma_j^{(d)}\},\end{aligned}$$

лежащий в двойственной плоскости $\mathbb{R}_*^2 = \{P = (p_1,p_2)\}$. Здесь $\langle Q,P\rangle = q_1p_1 + q_2p_2$ — скалярное произведение. У каждого решения $y = \varphi(x)$ в виде ряда (1.1) уравнения (1.2) первое слагаемое $y = a_r x^r$ является решением укороченного уравнения (1.3), если

$$\omega(1,r) \subset \mathbf{U}_j^{(d)}\,.$$

Если $\omega = -1$, т.е. $x \to 0$, то вершины и рёбра $\Gamma_j^{(d)}$ берутся на левой стороне многоугольника $\Gamma(f)$, включая верхние и нижние. Если $\omega = 1$, т.е. $x \to \infty$, то вершины и рёбра $\Gamma_j^{(d)}$ берутся на правой стороне многоугольника $\Gamma(f)$, включая верхние и нижние.

2. Экспоненциальные добавки и экспоненциальные разложения

Пусть ряд
$$y = \varphi(x) = a_r x^r + \sum_{\omega s < \omega r} a_s x^s \tag{2.1}$$
является формальным решением уравнения (1.2). При подстановке
$$y = \varphi(x) + z$$
уравнение (1.2) перейдёт в уравнение
$$g(x,z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x,\varphi(x) + z) = 0\,. \tag{2.2}$$
Оно имеет решение $z = 0$. Поэтому многоугольник $\widetilde{\Gamma} = \Gamma(g)$ имеет нижнее горизонтальное ребро $\widetilde{\Gamma}^{(1)}$ высоты $m = q_2 \geqslant 1$. Этому ребру соответствует укороченное уравнение
$$\hat{g}(x,z) = 0\,. \tag{2.3}$$

Лемма 1 ([3]). *Если $m = 1$, то*
$$\hat{g}(x,z) = \left.\frac{\delta f}{\delta z}\right|_{y=\varphi(x)} z\,,$$
где $\left.\dfrac{\delta f}{\delta z}\right|_{y=\varphi(x)}$ — это оператор: первая вариация функции f, взятая на $y = \varphi(x)$. Он применяется к z.

Лемма 2 ([3]). *При логарифмическом преобразовании*
$$y_1 = \frac{d \ln z}{dx} \tag{2.4}$$
для целого $l \geqslant 0$ имеем
$$z^{(l)} = z\left[y_1^l + P_{l-1}(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(l-1)})\right]$$
где P_{l-1} — определённый многочлен степени $l - 1$ от указанных переменных с постоянными коэффициентами.

Следствие 1. *После замены* (2.4)

$$\hat{g}^{(1)}(x,z) = z^m f_1(x,y_1)\,, \tag{2.5}$$

где $f_1(x,y_1)$ *— дифференциальный многочлен по* y_1 *и её производным порядка* $n-1$*, если* n *— порядок дифференциального многочлена* $\hat{g}^{(1)}(x,z)$*. А именно, если* $\hat{g}^{(1)}(x,z) \stackrel{def}{=} \hat{g}^{(1)}(x,z,z',\ldots,z^{(n)})$*, то*

$$f_1(x,y_1,\ldots,y_1^{(n-1)}) = \hat{g}^{(1)}\left(x,1,y_1,\ldots,y_1^n + P_{n-1}\left(y_1,\ldots,y_1^{(n-1)}\right)\right)\,.$$

Теорема 2. *Если*

$$\left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{y=\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\,,$$

то при $y_1 = d\ln z/dx$ *и* $m=1$ *в* (2.5) *имеем*

$$f_1(x,y_1) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x)\ \left[y_1^k + P_{k-1}\left(y_1,\ldots,y_1^{(k-1)}\right)\right]\,.$$

Посредством преобразования (2.4) решение уравнения (2.3) порядка n сводится к решению уравнения

$$f_1(x,y_1) = 0 \tag{2.6}$$

порядка $n-1$. Указанным выше способом находятся все решения уравнения (2.6) в виде степенных рядов

$$y_1 = \varphi_1(x) = b_\rho x^\rho + \sum_{\omega\sigma<\omega\rho} b_\sigma\, x^\sigma\,. \tag{2.7}$$

Тогда решения укороченного уравнения (2.3) суть

$$z = z_0(x) = c_1 \exp \int \varphi_1(x)\,dx\,, \tag{2.8}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Теорема 3 ([4]). *Решения полного уравнения* (2.2) *имеют вид*

$$z = z_0(x) + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(x) z_0^k\,, \tag{2.9}$$

где $B_k(x)$ *— степенные ряды вида* (1.1).

Для каждого $B_k(x)$ можно составить своё ОДУ по исходному уравнению (1.2), аналогично тому, как это было сделано для функциональных коэффициентов сложных и экзотических разложений решений ОДУ [5] (см. раздел 5 здесь).

Отметим, что при $x^\omega \to \infty$ экспоненциальные добавки (2.8) и разложения (2.9) должны стремиться к нулю. Но exp $\alpha x^\beta \to 0$ только при $\mathrm{Re}(\alpha x^\beta) < 0$, т.е. согласно (2.8) exp $\int \varphi_1(x)dx \to 0$ при

$$\mathrm{Re}\left(b_\rho x^{\rho+1}\right) < 0.$$

Это неравенство выделяет на $\mathbb{C}_q$ несколько секторов, их совокупность обозначим E_1. Это множество назовём *множеством существования* экспоненциальной добавки (2.8) и разложения (2.9).

3. Иерархия экспоненциальных добавок и трансряд

Пусть степенное разложение (2.7) является решением уравнения (2.6). Сделаем в уравнении (2.6) подстановку

$$y_1 = \varphi_1(x) + z_1$$

и получим уравнение

$$g_1(x,z_1) \stackrel{def}{=} f_1(x,\varphi_1 + z_1) = 0\,.$$

Многоугольник $\Gamma(g_1)$ дифференциальной суммы $g_1(x,z_1)$ имеет нижнее горизонтальное ребро высоты $m_1 \geqslant 1$, которому соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_1(x,z_1) = 0\,. \tag{3.1}$$

После логарифмического преобразования

$$\frac{d\ln z_1}{dx} = y_2$$

получаем

$$\hat{g}_1(x,z_1) = z_1^{m_1} f_2(x,y_2)\,,$$

где $f_2(x,y_2)$ — дифференциальная сумма. При этом укороченное уравнение (3.1) порядка $n-1$ переходит в уравнение

$$f_2(x,y_2) = 0$$

порядка $n-2$. Пусть $y_2 = \varphi_2(x)$ — его решение в виде степенного ряда. Тогда укороченное уравнение (3.1) имеет решения

$$z_1 = c_2 \exp \int \varphi_2(x)\,dx\,.$$

При $x^\omega \to \infty$ они стремятся к нулю в определённом секториальном множестве E_2 q-листного накрытия $\mathbb{C}_q$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом решения полного уравнения (2.2) имеют вид

$$z = c_1 \exp \int \left[\varphi_1(x) + c_2 \exp \int \varphi_2(x)\, dx + \ldots \right] dx + \ldots . \qquad (3.2)$$

Это разложение имеет смысл только в пересечении $E_1 \cap E_2 \stackrel{def}{=} D_2$. В нём имеется двупараметрическое семейство разложений (3.2). Вне D_2, но в множестве E_1 существует только однопараметрическое семейство асимптотик решений (2.8). Вне множества E_1 существует только одно решение (2.1).

Итак, получаем следующую последовательность уравнений и их решений.

Шаг 0. Исходное уравнение $f(x,y) = 0$ порядка n и его решение $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — степенной ряд.

Шаг 1. Из $f(x,y)$ и $\varphi(x)$ по следствию 1 и теореме 2 получаем: уравнение $f_1(x,y_1) = 0$ порядка $n-1$, его решение $y_1 = \varphi_1(x)$ в виде степенного ряда, экспоненциальную добавку $z = c_1 \exp \int \varphi_1(x)\, dx$ и множество её существования $E_1 = \{x \,:\, \mathrm{Re} \int \varphi_1(x)\, dx < 0\}$. При этом $z = y - \varphi(x)$, $y_1 = d \ln z / dx$.

Шаг $i-1$. Получаем уравнение $f_i(x,y_i) = 0$ порядка $n-i+1$ и его решение $y_{i-1} = \varphi_{i-1}(x)$ в виде степенного ряда.

Шаг i. Из $f_{i-1}(x,y_{i-1})$ и $\varphi_{i-1}(x)$ по следствию 1 и теореме 2 получаем: уравнение $f_i(x,y_i) = 0$ порядка $n-i$, его решение $y_i = \varphi_i(x)$ в виде степенного ряда, экспоненциальную добавку $z_{i-1} = c_i \exp \int \varphi_i(x)\, dx$, область её существования

$$E_i = \{x \,:\, \mathrm{Re} \int \varphi_i(x)\, dx < 0\} .$$

При этом $z_{i-1} = y_{i-1} - \varphi_{i-1}$, $y_i = d \ln z_{i-1}/dx$ и

$$D_i = E_1 \cap \ldots \cap E_i .$$

Шаг n. Получаем уравнение $f_n(x,y_n) = 0$ порядка 0, т.е. без производных, и его решение $y_n = \varphi_n(x)$ в виде степенного ряда, экспоненциальную добавку $z_{n-1} = c_n \exp \int \varphi_n(x)\, dx$ и область её существования E_n.

Пусть μ — это такое значение $i < n$, что $D_\mu \neq \emptyset$, но $D_{\mu+1} = \emptyset$, и $\mu = n$, если $D_n \neq \emptyset$. Тогда для уравнения

$$f_\mu(x,y_\mu) = 0$$

находим его решение $y_\mu = \varphi_\mu(x)$ в виде степенного ряда. Затем по теореме 3 для уравнения

$$f_{\mu-1}(x,y_{\mu-1}) = 0$$

находим его решение в виде экспоненциального разложения

$$y_{\mu-1}(x) = \varphi_{\mu-1}(x) + c_\mu \exp\left(\int \varphi_\mu dx\right) + \sum_{k=2}^{\infty} B_{\mu k}(x) \left[c_\mu \exp\left(\int \varphi_\mu dx\right)\right]^k,$$

где $B_{\mu k}(x)$ — степенные ряды и c_μ — произвольная постоянная. Затем находим решения уравнения

$$f_{\mu-2}(x, y_{\mu-2}) = 0$$

в виде

$$y_{\mu-2}(x) = \varphi_{\mu-2}(x) + c_{\mu-1} \exp\left(\int y_{\mu-1}(x) dx\right) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} B_{\mu-1,k}(x) \left[c_{\mu-1} \exp\left(\int y_{\mu-1} dx\right)\right]^k,$$

где $B_{\mu-1,k}(x)$ — степенные ряды и $c_{\mu-1}$ — произвольная постоянная, и т. д. Наконец, для исходного уравнения

$$f(x, y) = 0$$

получаем его решения

$$y = \varphi(x) + c_1 \exp \int y_1(x)\, dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_{1k}(x) \left[c_1 \exp \int y_1 dx\right]^k,$$

где $B_{1k}(x)$ — степенные ряды и c_1 — произвольная постоянная. Это и есть трансряд [6]. Он описывает i-параметрические семейства решений исходного уравнения (1.2) в областях D_i. В теореме 0 этот трансряд описан в обратном порядке.

Замечание 2. Реально мы не можем вычислять бесконечные степенные ряды $\varphi_i(x)$. Достаточно вычислить такие их отрезки, которые обеспечивают присутствие в уравнениях $f_i(x, y_i) = 0$ ближайших по q_1 дифференциальных мономов наибольшего порядка $n - i$.

В [7, 8] для уравнения (1.2) порядка $n = 4$ вычислена последовательность отрезков рядов $\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ и показано, что $D_2 \neq \emptyset$ и $D_3 = \emptyset$, т. е. $\mu = 2$.

4. Примеры

Рассмотрим четвёртое уравнение Пенлеве при нулевых значениях двух его параметров

$$y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2x^2 y \,.$$

После умножения его на $2y$ и переноса левой части в правую получаем полиномиальное ОДУ

$$f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 3y^4 + 8xy^3 + 4x^2y^2 = 0 \,. \tag{4.1}$$

Его носитель $\mathbf{S}(f)$ и многоугольник $\Gamma(f)$ показаны на рис. 1.

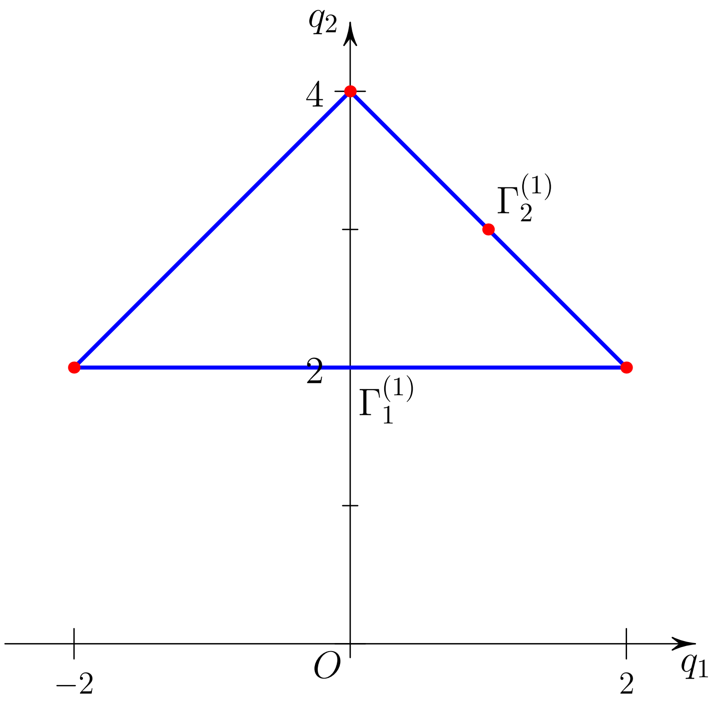

Рис. 1. Носитель и многоугольник уравнения (4.1).

Пример 1. Нижнему горизонтальному ребру $\Gamma_1^{(1)}$ рис. 1 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 4x^2y^2 = 0 \,. \tag{4.2}$$

Здесь $\varphi \equiv 0$, $z = y$ и $g(x,z) \equiv f(x,y)$. Положим

$$y_1 = \frac{d \ln z}{dx} = \frac{d \ln y}{dx} \,,$$

т. е. $y = \exp \int y_1 dx$. Тогда

$$y' = y_1 y, \; y'' = \left(y_1' + y_1^2\right) \, y \,, \tag{4.3}$$

что соответствует лемме 2, и укороченное уравнение (4.2) принимает вид

$$y^2\left[-2(y_1'+y_1^2)+y_1^2+4x^2\right]=0\,,$$

т.е.

$$f_1(x,y_1)\stackrel{\text{def}}{=}-2y_1'-y_1^2+4x^2=0\,. \tag{4.4}$$

Его носитель и многоугольник $\Gamma(f_1)$ см. на рис. 2.

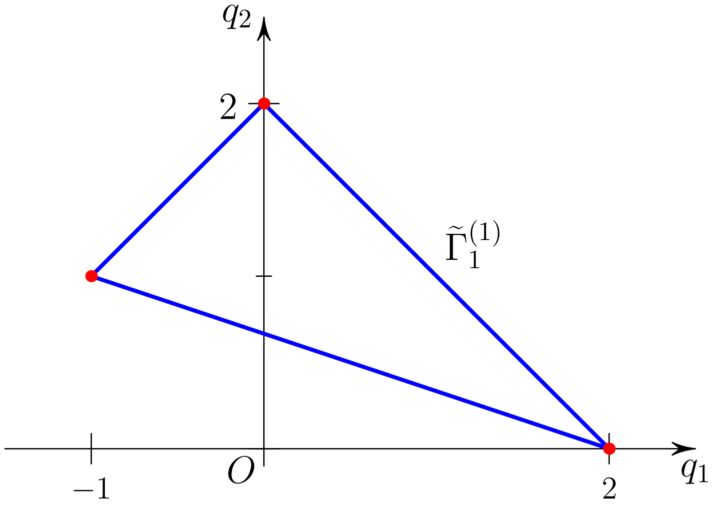

Рис. 2. Носитель и многоугольник уравнения (4.4).

Он имеет правое наклонное ребро $\widetilde{\Gamma}^{(1)}$ с укороченным уравнением

$$\hat{f}_1(x,y_1)\stackrel{def}{=}-y_1^2+4x^2=0\,. \tag{4.5}$$

Здесь $\omega=1$, т.е. $x\to\infty$. Уравнение (4.5) имеет 2 решения $y_1=\pm 2x$, которые продолжаются в ряды

$$y_1=\varphi_1(x)=\pm 2x-\frac{1}{x}\mp\frac{3}{4x^3}+O(x^{-5})\,.$$

Для них

$$D_{1\pm}=E_{1\pm}=\left\{x\,:\,\pm\operatorname{Re}x^2<0\right\}\,.$$

Множество D_{1+} заштриховано на рис. 3.

Чтобы вычислить $f_2(x,y_2)$ применим теорему 2. Согласно (4.4)

$$\frac{\delta f_1}{\delta y_1}=-2\frac{d}{dx}-2y_1\,,$$

т.е. на $y_1=\varphi_1(x)$

$$\left.\frac{\delta f_1}{\delta y_1}\right|_{y_1=\varphi_1(x)}=-2\frac{d}{dx}-2\varphi_1(x)=-2\left[\frac{d}{dx}+\varphi_1(x)\right]\,.$$

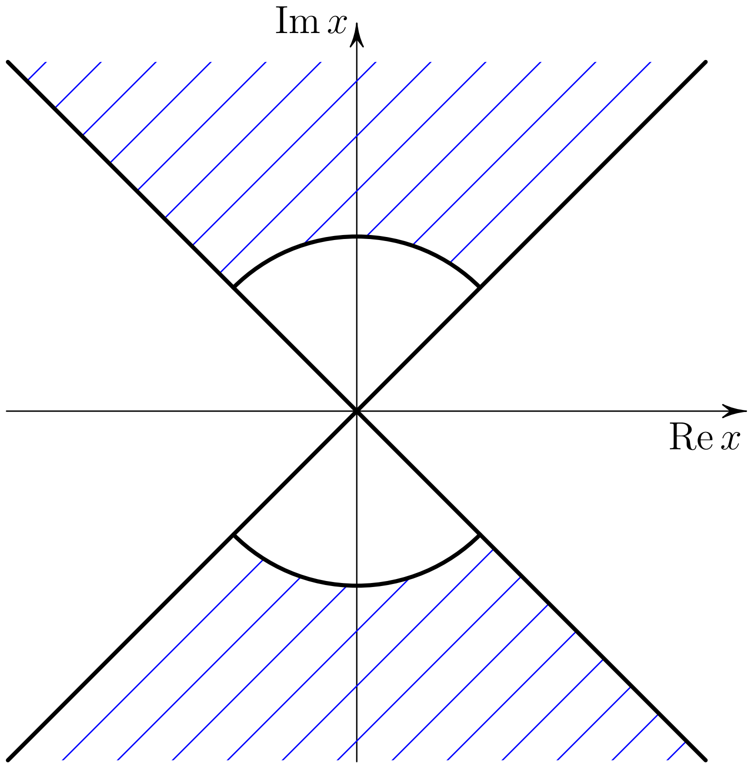

Рис. 3. Заштрихованы секторы E_{1+} вблизи $x = \infty$.

Поэтому

$$f_2(x,y_2) = -2[y_2 + \varphi_1(x)]$$

и

$$y_2 = -\varphi_1(x) = \mp 2x + \dots ,$$

т. е.

$$\int y_2 dx = \mp x^2 + \dots$$

Поэтому

$$E_{2\pm} = \{x \, : \, \mp \operatorname{Re} x^2 < 0\} \text{ и } E_{1\pm} \cap E_{2\pm} = \emptyset \, .$$

Следовательно, $\mu = 1$ и для решений уравнения (4.1) получаем 2 однопараметрических семейства разложений

$$y = c_1 \exp \int \varphi_1(x) dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(x) \left[c_1 \exp \int \varphi_1(x) dx \right]^k$$

в двух секторах множеств $E_{1\pm} = \{x \, : \, \pm \operatorname{Re} x^2 < 0\}$ комплексной плоскости (рис. 3).

Пример 2. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ рис. 1 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)} \stackrel{def}{=} 3y^4 + 8xy^3 + 4x^2y^2 = 0 \, .$$

Оно имеет 2 укороченных решения $y = -2x$ и $y = -\frac{2}{3}x$. Поскольку ребро правое, то $x \to \infty$ и $\omega = 1$. Первое из укороченных решений продолжается в решение полного уравнения (4.1) так

$$y = \varphi(x) = -2x + \frac{1}{4x^3} + O(x^{-7})\,. \tag{4.6}$$

Вычислим $f_1(x,y_1)$ по теореме 2. Здесь

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -2y\,\frac{d^2}{dx^2} + 2y'\frac{d}{dx} - 2y'' + 12y^3 + 24xy^2 + 8x^2y\,.$$

Согласно (4.3) и теореме 2 получаем

$$f_1(x,y_1) = -2\varphi(y_1' + y_1^2) + 2\varphi' y_1 - 2\varphi'' + 12\varphi^3 + 24x\varphi^2 + 8x^2\varphi =$$

$$= -2\left(-2x + \frac{1}{4x^3} + \ldots\right)(y_1' + y_1^2) + 2\left(-2 - \frac{3}{4x^4} + \ldots\right)y_1 - \frac{2}{3x^5} - 12\cdot 8x^3 +$$

$$+24\cdot 4x^3 - 16x^3 + \ldots = 4x\left(y_1' + y_1^2\right) - 4y_1 - 16x^3 + \ldots \tag{4.7}$$

Правая часть носителя $\mathbf{S}(f_1)$ и многоугольника $\Gamma(f_1)$ показаны на рис. 4.

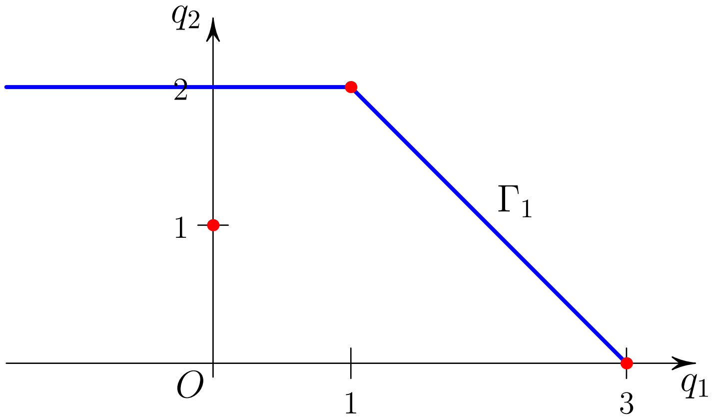

Рис. 4. Правая сторона носителя и многоугольника уравнения (4.7).

Правому ребру Γ_1 рис. 4 соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{f}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} 4xy_1^2 - 16x^3 = 0\,.$$

Оно имеет два укороченных решения

$$y_1 = \pm 2x\,,$$

которые продолжаются в решения полного уравнения $f_1 = 0$ из (4.7) как

$$y_1 = \varphi_1(x) = \pm 2x + \frac{7}{4x} + O\left(x^{-3}\right) . \tag{4.8}$$

Здесь $E_{1\pm} = \left\{x \,:\, \pm \operatorname{Re} x^2 < 0\right\}$. Согласно (4.7) первая вариация

$$\frac{\delta}{\delta y_1} f_1(x,y_1) = -2\varphi \frac{d}{dx} - 4\varphi y_1 + 2\varphi' .$$

Согласно (4.6), (4.8) и теореме 2 получаем

$$f_2(x,y_2) \stackrel{\text{def}}{=} -2\varphi y_2 - 4\varphi\varphi_1 + 2\varphi' = 0 ,$$

следовательно,

$$y_2 = -2\varphi_1 + \frac{\varphi'}{\varphi} = \mp 4x \mp \frac{1}{x} + \dots$$

Поэтому

$$E_{2\pm} = \left\{x \,:\, \mp \operatorname{Re} x^2 < 0\right\} , \, E_{1\pm} \cap E_{2\pm} = \emptyset ,$$

т.е. $\mu = 1$, и получаем однопараметрические семейства разложений решений уравнения (4.1)

$$y = \varphi(x) + c_1 \exp \int \varphi_1 dx + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(x) \left[c_1 \exp \int \varphi_1(x) dx \right]^k$$

в секторах рис. 3 плоскости $\mathbb{C}$.

5. Составление уравнений для коэффициентов $B_k(x)$ в разложении (2.9)

Докажем теорему 3. Пусть $g(x,z)$ — дифференциальный многочлен порядка n и степенной ряд по x, т.е. многочлен от $z, z', \dots, z^{(n)}$, где $z' = dz/dx$. Запишем

$$g(x,z) = \sum_j a_j(x,z) ,$$

где $a_j(x,z)$ — дифференциальные мономы. Пусть $\mathbf{S}(g)$ — носитель для $g(x,z)$. Обозначим

$$g_i(x,z) = \sum a_j(x,z) \quad \text{по} \quad Q(a_j) = (q_1,q_2) \text{ с } q_2 = i .$$

Тогда

$$g(x,z) = \sum_{i=m}^{M} g_i(x,z), \quad 0 \leqslant m \leqslant M < \infty\,. \tag{5.1}$$

Рассмотрим разложение

$$z = \psi(x) + \sum_{k=2}^{\infty} B_k(x)\psi^k \stackrel{def}{=} \psi(x) + \Delta(x)\,, \tag{5.2}$$

где $\psi(x) = c \exp \int \varphi_1(x)\,dx$, $\varphi_1(x)$ — степенной ряд (2.7) и все $B_k(x)$ — степенные ряды по x. Тогда

$$\Delta(x) = \sum_{k=2}^{\infty} B_k(x)\psi^k, \quad \Delta^j = \sum_{k=2j}^{\infty} C_{jk}(x)\psi^k\,,$$

где $j > 0$, коэффициенты $C_{jk}(x)$ являются определёнными суммами произведений j коэффициентов $B_l(x)$ и соответствующих мультиномиальных коэффициентов [9]. При этом $C_{1k}(x) = B_k(x)$. Каждое слагаемое $g_i(\psi + \Delta)$ разлагается в аналог ряда Тейлора

$$g_i(\psi + \Delta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\, \frac{\delta^j g_i}{\delta z^j}\bigg|_{z=\psi} \Delta^j\,,$$

где $\dfrac{\delta^j g_i}{\delta z^j}$ — это j-тая вариация или производная Фреше/Гато. При этом $\delta^j g_i/\delta z^j \equiv 0$, если $j > M$. Итак, при подстановке разложения (5.2) в дифференциальный многочлен (5.1) получаем разложение

$$g(x,z) = \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=0}^{M} \frac{1}{j!}\, \frac{\delta^j g_i}{\delta z^j}\bigg|_{z=\psi} \sum_{k\geqslant 2j}^{\infty} C_{jk}(x)\,\psi^k\,.$$

Лемма 3. *Если n — порядок $g(x,z)$, то*

$$\frac{\delta^j g_i(x,z)}{\delta z^j} = \sum_{l=0}^{jn} A_l(x,z)\,\frac{d^l}{dx^l}\,,$$

где все $A_l(x,z)$ суть однородные многочлены по $z, z', \ldots, z^{(n)}$ степени $i - j \geqslant 0$.

Лемма 4.

$$\frac{d^l}{dx^l}\left[C_{jk}(x)\,\psi^k\right] = \psi^k \sum_{s=0}^{l} \left(\begin{array}{c} l \\ s \end{array}\right) C_{jk}^{(l-s)}(x)\left[(k\varphi_1)^s + P_{s-1}(k\varphi_1,\ldots,k\varphi_1^{(s-1)})\right],$$

где $\left(\begin{array}{c} l \\ s \end{array}\right)$ *— биномиальные коэффициенты и* P_{s-1} *— многочлены из леммы 2.*

В силу лемм 3 и 4

$$\left.\frac{\delta^j g_i}{\delta z^j}\right|_{z=\psi} \cdot C_{jk}(x)\,\psi^k = \psi^{i-j+k} G_{i,j,k}(x,\varphi_1,B_2,\ldots,B_{k-2(j-1)}),$$

где $G_{i,j,k}$ — многочлен от рядов $\varphi_1,B_2,\ldots,B_{k-2(j-1)}$ и их производных.

Следовательно,

$$\left.\frac{\delta^j g_i}{\delta z^j}\right|_{z=\psi} \cdot C_{jk}\psi^k$$

является произведением ψ^N и многочлена от степенных рядов, где

$$N = i - j + k\,. \tag{5.3}$$

Если разложение (5.2) является решением уравнения $g(x,z) = 0$, то для каждого фиксированного N получается своё уравнение

$$\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=0}^{M}\frac{1}{j!}\left.\frac{\delta^j g_i}{\delta z^j}\right|_{z=\psi}\sum_{k\geqslant 2j} C_{jk}(x)\,\psi^k = 0\,, \tag{5.4}$$

где выполнено равенство (5.3). При этом

$$1 \leqslant m \leqslant i \leqslant M, \quad 0 \leqslant j \leqslant M, \quad k \geqslant 2j \text{ и } k = 0, \text{ если } j = 0\,.$$

Множество таких точек $(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3$ обозначим $\mathbf{M}$. Его подмножество, удовлетворяющее равенству (5.3), обозначим $\mathbf{M}(N)$.

Пример 3. Рассмотрим несколько случаев.
1) $N = m$. Тогда $i = m, j = k = 0$. Уравнение (5.4) есть $g_m(x,\psi) = 0$.
2) $N = m + 1$. Тогда уравнение (5.3) имеет 2 решения:
а) $i = m, j = 1, k = 2$ и
б) $i = m + 1, j = k = 0$.
Уравнение (5.4) есть

$$\left.\frac{\delta g_m}{\delta z}\right|_{z=\psi} C_{12}\psi^2 + g_{m+1}(\psi) = 0\,.$$

Здесь $C_{12} = B_1$.

3) $N = m + 2$. Уравнение (5.3) имеет 4 решения:

$$\begin{aligned} &i = m, j = 1, k = 3;\\ &i = m, j = 2, k = 4;\\ &i = m + 1, j = 1, k = 3;\\ &i = m + 2, j = k = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (5.4) есть

$$\frac{\delta g_m}{\delta z} C_{13}\psi^3 + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 g_m}{\delta z^2} (C_{12}\psi^2)^2 + \frac{\delta g_{m+1}}{\delta z} C_{12}\psi^2 + g_{m+2} = 0\,.$$

Здесь все g_i и их вариации берутся при $z = \psi(x), C_{12} = B_2, C_{13} = B_3$. $\square$

Для каждого N уравнение (5.4) начинается со слагаемого $\dfrac{\delta g_m}{\delta z} B_{N-m}\psi^{N-m}$ и заканчивается слагаемым $g_N(\psi)$. После сокращения на ψ^N оно превращается в линейное ОДУ для $B_{N-m}(x)$, зависящее от φ_1 и от B_j с $j < N - m$. Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] Ж.П.Рамис. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория // Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002, 80 стр. = J.-P. Ramis. Séries divergentes et théories asymptotique // Panoramas and Synthéses, Société Mathématique de France, T. 121, 1993.

[2] A. Maillet, Sur les séries divergentes et équations différentielles // Ann. Sci. Ecole Norm. Supér. 1903. T. 3, p. 487–518.

[3] А. Д. Брюно, Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 59:3 (2004) 31–80 = Asymptotics and expansions of solutions to an ordinary differential equation // Russian Mathem. Surveys 59:3 (2004) 429–480 (English).

[4] А. Д. Брюно, Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 443:5 (2012) 539–544 = Exponential expansions of solutions to an ordinary differential equation // Doklady Mathematics, 85:2 (2012) 259–264 (English).

[5] А. Д. Брюно Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 55. 27 с. doi:10.20948/prepr-2017-55 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-55

[6] G. A. Edgar. Transseries for beginners // arXiv (2009) 0801.4877v5. (http://arxiv.org/abs/0801.4877v5)

[7] А. Д. Брюно, Н. А. Кудряшов, Степенные разложения решений аналога первого уравнения Пенлеве. Препринт № 17 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша. М.: ИПМ, 2005. 25 с.

[8] A. D. Bruno, N.A. Kudryashov, Expansions of solutions to the equation P_1^2 by algorithms of power geometry // Ukrainian Mathematical Bulletin 6:3 (2009) 311–337.

[9] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), "Multinomial coefficient" (http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/m065320), *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

Список иллюстраций

Содержание