ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 116 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Березин А.В., Марков М.Б.,
Пароткин С. В., Сысенко А.В.

О методе частиц в неоднородной рассеивающей среде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О методе частиц в неоднородной рассеивающей среде / А.В.Березин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 116. 16 с. doi:10.20948/prepr-2018-116
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-116

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

А.В. Березин, М.Б. Марков, С.В. Паротькин, А.В. Сысенко

О МЕТОДЕ ЧАСТИЦ
В НЕОДНОРОДНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Москва – 2018

А.В. Березин, М.Б. Марков, С.В. Паротькин, А.В. Сысенко
e-mail: a_v_berezin@mail.ru

О МЕТОДЕ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Рассмотрена задача Коши для кинетического и электродинамических уравнений, описывающих распространение потока электронов в неоднородной рассеивающей среде с разрывными характеристиками и генерацию самосогласованного электромагнитного поля. Представлены подходы к интерпретации обобщенного решения, обосновывающего применение метода частиц для численного решения кинетического уравнения.

Ключевые слова: *электрон, рассеяние, метод частиц, электромагнитное поле.*

A.V. Berezin, M.B. Markov, S.V. Parotkin, A.V. Sysenko

ON THE PARTICLES METHOD IN THE SCATTERING MEDIUM

The Cauchy problem for the kinetic and electrodynamic equations describing the propagation of the electron beam in an inhomogeneous scattering medium with discontinuous characteristics and the generation of a self-consistent electromagnetic field are considered. Approaches to the interpretation of the generalized solution substantiating the application of the particle method for the numerical solution of the kinetic equation are represented.

Key words: *electron, scattering, particle method, electromagnetic field.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-01-00301).

Содержание

Введение

Электроны с высокой энергией, рассеиваясь в среде, ионизируют и возбуждают ее частицы, генерируют тормозное излучение, испытывают упругое рассеяние [1-4]. В результате ударной ионизации рассеивающего вещества образуются вторичные электроны низкой энергии [5-7]. Распространение электронов приводит к образованию объемного заряда и электромагнитного поля [8]. При достаточной интенсивности потока электромагнитное поле оказывается самосогласованным и влияет на движение заряженных частиц, что приводит к неустойчивостям их потока [9]. Электронный поток с интенсивностью, достаточной для создания самосогласованного электромагнитного поля, создает, например, ускоритель КАЛЬМАР, который эксплуатируется в НИЦ «Курчатовский институт» [10].

Процессы переноса и рассеяния интенсивного потока электронов описываются квазилинейными кинетическим и электродинамическими уравнениями. Одним из основных подходов к численному решению математических задач для кинетических уравнений является метод частиц [11-12]. Он состоит в переходе к моделированию динамической системы путем построения обобщенного решения кинетического уравнения. Метод частиц медленно сходится и требует организации вычисления функционалов над пространством обобщенных решений.

С другой стороны, он допускает эффективную программную реализацию на параллельных суперкомпьютерах.

Авторам данной работы удалось получить на основе метода частиц результаты, имеющие определенное практическое значение [13,14]. Выявлено, что решение ряда актуальных практических задач требует применения метода частиц для моделирования переноса электронов в рассеивающей среде несмотря на то, что в классическом виде метод частиц разработан для бесстолкновительной плазмы [15]. В работе [16] обобщенное решение построено для неоднородного уравнения Власова в однородной поглощающей среде. Применение метода частиц в однородной рассеивающей среде рассмотрено в работе [17]. Но это далеко не исчерпало всех практически важных случаев. В частности, взаимодействие пучка электронов ускорителя КАЛЬМАР с преградой сопровождается ее нагревом. В результате вещество преграды плавится и испаряется. В твердой фазе образуется механический импульс давления, перераспределяющий плотность вещества. Рассеивающие свойства преграды изменяются, поскольку макроскопические сечения столкновений пропорциональны плотности вещества и сложно зависят от его состава. При длительности импульса в несколько сотен наносекунд оказывается, что рассеивающие свойства существенно изменяются уже за время его действия. Кроме того, даже при низких интенсивностях потока электронов, не способных выделить энергию, сопоставимую с теплотой сублимации вещества, существует проблема конечности размера преграды. На границе преграды свойства среды меняются скачком, причем разрыв терпят как сечения, так и коэффициенты уравнений Максвелла: диэлектрическая и магнитная проницаемость, собственная проводимость. В результате разрывными оказываются нормальные к поверхностям преграды компоненты электромагнитного поля, входящие коэффициентами в кинетическое уравнение.

Данная работа посвящена анализу применимости метода частиц в средах с нестационарными разрывными рассеивающими свойствами. Следует отметить, что моделирование электронных потоков существенно превосходит по сложности рассмотрение переноса фотонов. Это связано с тем, что на электроны воздействует самосогласованное электромагнитное поле, а рассеяние определяется дальнодействующим кулоновским взаимодействием со средой. По этой причине в работе рассматривается именно кинетическое уравнение для электронов. Алгоритмы моделирования электронных столкновений обобщаются на случай позитронов и фотонов, а также применимы для описания каскада в целом.

1. Постановка задачи

Рассмотрим функцию распределения электронов $f = f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbb{R}^3_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^3_{\mathbf{p}}$ координат $\mathbf{r} = (x,y,z)$ и импульсов $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Эта функция подчиняется уравнениям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f) + e\operatorname{div}_{\mathbf{p}}\left[\left(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta},\mathbf{H}]\right) f\right] + \sigma^t v f = \\ = Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) + \int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v' f(\mathbf{p}'),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

где t – лабораторное время, $\mathbf{v}$ – скорость электрона, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t,\mathbf{r})$ – напряженность электрического и магнитного полей соответственно, $\operatorname{div}_{\mathbf{r}}$ и $\operatorname{div}_{\mathbf{p}}$ – дивергенции в координатном и импульсном пространствах соответственно, e – заряд электрона, $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{v}/c$, c – скорость света в вакууме, σ^t – полное макроскопическое сечение рассеяния электронов, $\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ – дифференциальное макроскопическое сечение рассеяния электронов, $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ – импульсы электрона до и после рассеяния соответственно, $\mathbf{j}$ – плотность тока электронов. Внешний источник электронов задает функция $Q=Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ в правой части уравнения (1).

Задача Коши для уравнений (1)-(2), как показано в работе [17], имеет решение в классе финитных обобщенных функций [18], заданных на основном пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi=\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})$ в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p})$, зависящих от параметра $t\geq 0$. Начальные данные в нулевой момент времени считаются однородными. Плотность тока $\mathbf{j}=\mathbf{j}(t,\mathbf{r})$ в уравнениях Максвелла (2) определяется как действие финитной обобщенной функции $\mathbf{v}f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ [18] на бесконечно дифференцируемую функцию $W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)$, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}}$, $\Delta>0$, удовлетворяющую условиям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}}} W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)\,d\boldsymbol{\alpha}=1,\quad \lim_{\Delta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}}} d\mathbf{r}W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})=\varphi(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}).$$

Функция $W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)$ не является финитной в пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p})$, тем не менее плотность тока и концентрация электронов $n=n(t,\mathbf{r})$ определены корректно именно в силу финитности $f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$:

$$\mathbf{j}=\big(f(t,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}),\mathbf{v}W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)\big),\quad n=\big(f(t,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}),W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)\big). \tag{3}$$

При таком определении плотность тока, а значит, и напряженности электрического и магнитного поля, вычисляемые из уравнений Максвелла (2), являются бесконечно дифференцируемыми функциями координат. Поэтому слагаемое $\mathrm{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f)+e\,\mathrm{div}_{\mathbf{p}}\big[(\mathbf{E}+[\boldsymbol{\beta},\mathbf{H}])f\big]$ в левой части уравнения (1) является финитной обобщенной функцией [18].

В работе [17] также показано, что интеграл столкновений в уравнении (1) представим в виде свертки финитных обобщенных функций $\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ и $f=f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$. Внешний источник электронов $Q=Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ в правой части уравнения (1) задается финитной обобщенной функцией переменных $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$.

Допущение неоднородности свойств среды приводит к следующим проблемам. Величины σ и σ^t перестают быть независимыми от $\mathbf{r}$, становясь функциями $\sigma=\sigma(t,\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{p}')$, $\sigma^t(t,\mathbf{r},p)$. По переменной $\mathbf{r}$ данные функции могут терпеть разрывы первого рода. Уравнения (2) для электромагнитного поля в вакуумоподобной среде превращаются в уравнения Максвелла в сплошной среде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\in}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}(\xi\mathbf{E}+\mathbf{j}),\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{4}$$

где $\in=\in(\mathbf{r})$ – диэлектрическая проницаемость, $\psi=\psi(\mathbf{r})$ – собственная проводимость, $\mu=\mu(\mathbf{r})$ – магнитная проницаемость среды.

В результате произведения $(\mathbf{E}+[\boldsymbol{\beta},\mathbf{H}])f$, $\sigma^t vf$, $\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')f(\mathbf{p}')$ теряют свою определенность как финитные обобщенные функции.

Численный алгоритм решения уравнения (1) строится на основе того факта, что оно эквивалентно интегральному уравнению:

$$\begin{gathered} f=\int_0^t d\tilde{t}\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\times \\ \times\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^{t} dt'\sigma^t v^{s'}\right\}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s), \end{gathered} \tag{5}$$

где функции $\mathbf{r}^s=\mathbf{r}^s(t,\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p}^s=\mathbf{p}^s(t,\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})$ являются решениями уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{r}^s}{dt}=\mathbf{v}^s,\quad \frac{d\mathbf{p}^s}{dt}=e\left(\mathbf{E}(t,\mathbf{r}^s)+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}^s,\mathbf{H}(t,\mathbf{r}^s)\right]\right) \tag{6}$$

с начальными условиями $\mathbf{r}^s\big|_{t=\tilde{t}}=\tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p}^s\big|_{t=\tilde{t}}=\tilde{\mathbf{p}}$. Подынтегральное выражение в показателе экспоненты имеет вид

$$\sigma^t v^{s'}\equiv\sigma^t\left(t',\mathbf{r}^{s'},p^{s'}\right)v\left(p^{s'}\right), \tag{7}$$

где $\mathbf{r}^{s'}=\mathbf{r}^s(t',\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{p}^{s'}=\mathbf{p}^s(t',\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})$.

Эквивалентность уравнений (1) и (5) исследована в [17] для бесконечно дифференцируемых в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ коэффициентов $\sigma=\sigma(t,\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{p}')$, $\sigma^t(t,\mathbf{r},p)$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t,\mathbf{r})$. Рассмотрим формально процедуру исследования для разрывных коэффициентов.

Подставим (5) в (1) и рассмотрим действие результата подстановки на функцию из основного пространства. Рассмотрим подробно промежуточные выкладки. Действие $f(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ на функцию из основного пространства имеет вид:

$$(\varphi,f)= \\ =\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\times \\ \times\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s). \tag{8}$$

Рассмотрим действие функции из основного пространства на первое слагаемое (1):

$$\left(\varphi,\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\times \\ \times\left[Q(t,\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(t,\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(t,\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\delta(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}})\delta(\mathbf{p}-\tilde{\mathbf{p}})- \\ -\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\times \\ \times\sigma^t(t,\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)\tilde{v}\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s)- \\ -\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\times \\ \times\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\mathrm{div}_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{v}^s\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\right)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s)- \\ -\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^{t} dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\mathrm{div}_{\mathbf{p}}\left(e\left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}^s\right)+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}^s,\mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}^s\right)\right]\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right)\right).$$

Здесь учтено, что $\mathbf{r}^s\left(t,t,\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)=\tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p}^s\left(t,t,\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)=\tilde{\mathbf{p}}$. Разрывы функций $\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}^s\right)$ и $\mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}^s\right)$ не создают проблем для дифференцирования в импульсном пространстве.

Выполним интегрирование по переменным $\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}$ в первом слагаемом $\left(\varphi,\partial f/\partial t\right)$ и интегрирование по частям во втором и третьем.

$$\begin{gathered}
\left(\varphi,\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\left[Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p})+\int d\mathbf{p}'\sigma(t,\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{p}')v'f(t,\mathbf{r},\mathbf{p}')\right]-\\
-\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}'\right)v'f\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}'\right)\right]\times\\
\times\sigma^t\left(t,\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s\right)\tilde{v}\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^{t} dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right)+\\
+\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\times\\
\times\left[Q\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}'\right)v'f\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}'\right)\right]\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^{t} dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\times\\
\times\left\langle\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p}),\mathbf{v}^s\right\rangle\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right)+\\
+\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}'\right)v'f\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}'\right)\right]\times\\
\times\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^{t} dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\times\left\langle\mathrm{grad}_{\mathbf{p}}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p}),e\left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}^s\right)+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}^s,\mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}^s\right)\right]\right)\right\rangle\times\\
\times\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right).
\end{gathered}\tag{9}$$

Рассмотрим действие на основную функцию второго слагаемого (1):

$$\begin{gathered}
\left(\varphi,\mathrm{div}_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{v}f\right)\right)=\\
=\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}'\right)v'f\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}'\right)\right]\times
\end{gathered}$$

$$\times \exp\left\{-\int_{\tilde t}^{t} dt' \sigma^t v^{s\prime}\right\} \operatorname{div}_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{v}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right).$$

Выполним интегрирование по частям

$$\left(\varphi, \operatorname{div}_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{v} f\right)\right) =$$
$$= -\int_0^t d\tilde t \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[Q\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}\right) + \int d\mathbf{p}' \sigma\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}'\right) v' f\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}'\right)\right] \times \tag{10}$$
$$\times \exp\left\{-\int_{\tilde t}^{t} dt' \sigma^t v^{s\prime}\right\} \left\langle \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \varphi\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right), \mathbf{v}\right\rangle \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right).$$

Рассмотрим третье слагаемое

$$e\left(\varphi, \operatorname{div}_{\mathbf{p}}\left[\left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}\right) + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}\right)\right]\right) f\right]\right) =$$
$$= e\int_0^t d\tilde t \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p}\, \varphi\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right) \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[Q\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}\right) + \int d\mathbf{p}' \sigma\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}'\right) v' f\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}'\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-\int_{\tilde t}^{t} dt' \sigma^t v^{s\prime}\right\} \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right) \operatorname{div}_{\mathbf{p}}\left[\left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}\right) + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}\right)\right]\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right)\right].$$

Выполним интегрирование по частям

$$e\left(\varphi, \operatorname{div}_{\mathbf{p}}\left[\left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}\right) + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}\right)\right]\right) f\right]\right) =$$
$$= -e\int_0^t d\tilde t \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \left[Q\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}\right) + \int d\mathbf{p}' \sigma\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{p}'\right) v' f\left(\tilde t, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{p}'\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-\int_{\tilde t}^{t} dt' \sigma^t v^{s\prime}\right\} \left\langle \operatorname{grad}_{\mathbf{p}} \varphi\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right), \left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}\right) + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}\right)\right]\right)\right\rangle \times$$
$$\times \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right).$$

Рассмотрим действие на функцию из основного пространства четвертого слагаемого (1):

$$\left(\varphi,\sigma^t vf\right)=\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\varphi\left(\mathbf{r},\mathbf{p}\right)\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\times$$
$$\times\left[Q\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}'\right)v'f\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}'\right)\right]\times$$
$$\times\sigma^t\left(t,\mathbf{r},p\right)v\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right).$$

Таким образом, подстановка (2) в (1) образует невязку следующей структуры:

$$\int_0^t d\tilde{t}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}}\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}'\right)v'f\left(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}'\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s\right)\times \tag{11}$$
$$\times\left[\varphi\left(\mathbf{r},\mathbf{p}\right)\left(\sigma^t\left(t,\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s\right)-\sigma^t\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p}\right)\right)\tilde{v}+\left\langle \mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\varphi\left(\mathbf{r},\mathbf{p}\right),\left(\mathbf{v}^s-\mathbf{v}\right)\right\rangle+\right.$$
$$\left.+\left\langle \mathrm{grad}_{\mathbf{p}}\varphi\left(\mathbf{r},\mathbf{p}\right),e\left(\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}^s\right)+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}^s,\mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}^s\right)\right]-\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}\right)+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v},\mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}\right)\right]\right)\right\rangle\right].$$

Если функции $\sigma\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)$, $\sigma^t\left(t,\mathbf{r},p\right)$, $\mathbf{E}\left(t,\mathbf{r}\right)$ и $\mathbf{H}\left(t,\mathbf{r}\right)$ бесконечно дифференцируемы, то интегрирование по $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ обращает невязку в ноль. В противном случае представленное рассмотрение теряет смысл.

В актуальных задачах зависимость функций $\sigma\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)$, $\sigma^t\left(t,\mathbf{r},p\right)$ от пространственных переменных определяет распределение плотности рассеивающей среды. Для невозмущенной преграды эта величина задается кусочно-постоянной функцией координат, то есть терпит разрывы первого рода. Если преграда разрушается под действием ионизирующего излучения, то плотность вычисляется путем решения уравнения неразрывности среды. В этом случае она может сохранять разрывы первого рода и являться дифференцируемой вне точек разрыва. Аналогично нормальные компоненты электрического поля терпят разрывы первого рода на границах сред с различной диэлектрической проницаемостью, оставаясь дифференцируемыми функциями вне областей разрыва.

2. Модель рассеивающей среды

Источник электронов финитен, поэтому область, занимаемая электронами, в каждый момент времени ограничена. Преграда имеет конечные размеры. Но задача Коши для уравнений (1)-(2) формулируется в бесконечном пространстве. Это означает, что в качестве рассеивающей среды необходимо рассматривать не только материалы преграды, но и все окружающее пространство. Рассмотрим геометрическую модель рассеивающей среды в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть рассеивающая преграда состоит из M элементов с заданными физико-химическими свойствами. Односвязные воздушные и вакуумные области внутри и в окрестности преграды также рассматриваются как отдельные элементы. Сопоставим элементу с номером m, $m=1,...,M$, максимальное открытое множество D_m расположенных внутри него точек $\mathbb{R}^3$. Обозначим $D_0=\mathbb{R}^3$. Обозначим символом ∂D_m границу множества D_m, $m=0,...,M$, $\partial D_0=\partial\Omega$.

Множества D_m в совокупности со всеми своими открытыми подмножествами определяют базу топологии в $\Gamma=\mathbb{R}^3\setminus\bigcup\limits_{m=0}^{M}\partial D_m$.

Рассмотрим систему множеств T, состоящую из пустого множества, множеств D_m, $m=0,...,M$ и всех их конечных объединений. Пересечение и объединение любого числа множеств из системы T есть множество из системы T. Все множества системы T есть подмножества множества $\mathbb{R}^3$.

Таким образом, система множеств T определяет на множестве Γ топологию [19]. Введенная топология пространства (Γ,T) является слабой [19] по отношению к топологии на множестве Ω, индуцированной стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^3$, базой которой служат открытые шары. Рассмотрение точек, соответствующих границам, и открытых множеств, их содержащих, в топологии пространства (Γ,T) исключается.

Кинетическое и электродинамические уравнения модели содержат неоднородные по пространственным переменным и нестационарные по времени коэффициенты, моделирующие рассеивающие и электрофизические свойства материалов аппарата. Будем рассматривать эти коэффициенты как функции, ограниченные в пространстве $\mathbb{R}^3$, дифференцируемые на каждом из множеств D_m и терпящие разрывы первого рода на границах ∂D_m.

В таких условиях функции $\mathbf{j}=\mathbf{j}(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t,\mathbf{r})$ также ограничены, дифференцируемы на каждом из множеств D_m и терпят разрывы на границах ∂D_m.

3. Рассмотрение функции распределения как плотности меры

Рассмотрим конструкцию $\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s)$. Представим ее в виде

$$\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s)=\int d\Theta(\mathbf{r}^s-\mathbf{r})\int d\Theta(\mathbf{p}^s-\mathbf{p}),$$

где $\Theta(\ldots)$ – функция Хевисайда, причем $\Theta(\mathbf{r}^s-\mathbf{r})\equiv\Theta(x^s-x)\Theta(y^s-y)\Theta(z^s-z)$ аналогично тому, как $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\equiv\delta(x-x^s)\delta(y-y^s)\delta(z-z^s)$. Соответственно, $\Theta(\mathbf{p}^s-\mathbf{p})\equiv\Theta(p_x^s-p_x)\Theta(p_y^s-p_y)\Theta(p_z^s-p_z)$.

Функция $\Theta(\mathbf{r}^s-\mathbf{r})\Theta(\mathbf{p}^s-\mathbf{p})$ определяет сосредоточенную в точке $(\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)$ меру Дирака [19] в фазовом пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p})$. Она принимает значение 1 для каждого открытого множества из эвклидова пространства $(\mathbf{r},\mathbf{p})$, содержащего точку $(\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)$. Для открытого множества, не содержащего точку $(\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)$, мера Дирака равна нулю. В такой интерпретации невязка (11) представляет собой интеграл функции

$$\int_0^t d\tilde{t}\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\left[Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{p}')v'f(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\mathbf{p}')\right]\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\times$$
$$\times\Big[\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\left(\sigma^t(t,\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)-\sigma^t(t,\mathbf{r},\mathbf{p})\right)\tilde{v}+\left\langle\mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p}),(\mathbf{v}^s-\mathbf{v})\right\rangle+$$
$$+\left\langle\mathrm{grad}_{\mathbf{p}}\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p}),e\left(\mathbf{E}(t,\mathbf{r}^s)+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}^s,\mathbf{H}(t,\mathbf{r}^s)\right]-\mathbf{E}(t,\mathbf{r})+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v},\mathbf{H}(t,\mathbf{r})\right]\right)\right\rangle\Big]$$

по мере Дирака, определяемой распределением $\Theta(\mathbf{r}^s-\mathbf{r})\Theta(\mathbf{p}^s-\mathbf{p})$.

Области разрыва коэффициентов являются поверхностями в пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p})$, поэтому имеют нулевую меру. Финитность функции $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})$ и компонент ее градиента обеспечивает конечность интеграла в бесконечных пределах.

По этим причинам интеграл равен нулю, что обосновывает эквивалентность уравнений (1) и (5). В такой интерпретации функцию распределения электронов – решение уравнений (1) и (5), можно рассматривать как плотность меры Дирака, определенной на открытых множествах в пространстве $(\mathbf{r},\mathbf{p})$. Например, в отсутствие рассеяния решение уравнения (1) имеет вид:

$$f=\int_0^t d\tilde{t}\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\,Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s). \qquad (12)$$

Плотность меры (12) соответствует мере Дирака, определяемой соотношением

$$F(t,\mathbf{r},\mathbf{p})=\int_0^t d\tilde{t}\int d\tilde{\mathbf{r}}\int d\tilde{\mathbf{p}}\,Q(\tilde{t},\tilde{\mathbf{r}},\tilde{\mathbf{p}})\exp\left\{-\int_{\tilde{t}}^t dt'\sigma^t v^{s\prime}\right\}\Theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s)\Theta(\mathbf{p}-\mathbf{p}^s). \qquad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что $dF = fd\mathbf{r}d\mathbf{p}$.

В такой интерпретации требование бесконечной дифференцируемости функции $W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)$ становится излишним. Соотношения (3) преобразуются к виду

$$\mathbf{j}=\int \mathbf{v}W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)dF(t,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}),\quad n=\int W(\mathbf{r},\boldsymbol{\alpha},\Delta)dF(t,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}). \qquad (14)$$

4. Сглаживание коэффициентов

Пусть $\bar{D}_m$ – замыкание множества D_m. Существует бесконечно дифференцируемая функция $h_m(\mathbf{r})$, равная единице при $\mathbf{r}\in D_m$, нулю при $\mathbf{r}\in\Gamma\setminus D_m$, и заключенная между нулем и единицей при $\mathbf{r}\in\bar{D}_m\cap(\Gamma\setminus D_m)$. Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством леммы, приведенным в [18, стр. 62]. Следствием данного утверждения является существование *разложения единицы* $\{e_m\}$, $0\le e_m\le 1$, $\sum_{m=0}^M e_m=1$ при $\mathbf{r}\in D_m$, $e_m=0$ при $\mathbf{r}\notin D_m$, соответствующего открытому покрытию $\{D_m\}$ множества Γ [18].

Представим функцию, выражающую, например, любое из полных макроскопических сечений $\sigma^t(\mathbf{r},v)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, в виде:

$$\sigma^t(\mathbf{r},v)=\sum_{m=0}^{M}\sigma_m^t(\mathbf{r},v)\Theta(\bar{D}_m), \tag{15}$$

где $\Theta(\bar{D}_m)$ – характеристическая функция множества $\Theta(\bar{D}_m)$, равная 1 при $\mathbf{r}\in\bar{D}_m$ и 0 при $\mathbf{r}\notin\bar{D}_m$. Аналогичное представление введем для других коэффициентов уравнений (1)-(3) – функций $\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(t,\mathbf{r})$, а также макроскопического дифференциального сечения рассеяния. Каждому из них поставим в соответствие представление в пространстве Γ следующего вида:

$$\sigma^t(\mathbf{r},v)=\sum_{m=0}^{M}\sigma_m^t(\mathbf{r},v)e_m(\mathbf{r}). \tag{16}$$

В точках пространства Γ представления (15) и (16) совпадают. При этом в представлении (15) функции являются разрывными, а в представлении (16) – бесконечно дифференцируемыми.

Решение уравнений (1)-(2) с представлением коэффициентов типа (16) может рассматриваться в пространстве обобщенных функций.

Заключение

Метод частиц разработан как алгоритм решения уравнения Власова для моделирования бесстолкновительной плазмы в самосогласованном электромагнитном поле. Дальнейшее его развитие и применение показали, что в совокупности с методом последовательных поколений [20. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.] он весьма эффективен и для моделирования ионизованных сред со столкновениями.

Основой метода частиц является наличие у уравнения Власова обобщенного решения. Это позволяет надеяться, что построение обобщенного решения для любого линейного или квазилинейного кинетического уравнения обоснует применимость данного метода для его численного решения.

Применение метода частиц для решения практических задач показывает, что он зачастую работает правильно еще до построения обобщенного решения. Например, это оказалось справедливым для рассеивающих сред с разрывными свойствами. В этом смысле данная работа не создает основ для построения новых численных методов, а лишь представляет собой попытку интерпретировать математически уже применяемые алгоритмы.

Предложены две интерпретации обобщенного решения кинетического уравнения в среде со столкновениями. Первая вводит меру Дирака и, по сути, исключает поверхности разрывов из рассмотрения. Вторая интерпретация предполагает сглаживание коэффициентов уравнений. Опыт применения алгоритма метода частиц для сред с разрывными показал следующее. Сила Лоренца – коэффициент при слагаемом в кинетическом уравнении, отвечающем за баланс в пространстве импульсов, – определяется решением уравнений Максвелла. Коэффициенты уравнений Максвелла усредняются на разрывах при построении полностью консервативной разностной схемы. В результате сглаживаются и функции, определяющие значения напряженностей компонент электромагнитного поля. В то же время при рассмотрении движения электронов считается, что они переходят из одной среды в другую мгновенно. Это означает, что точки разрыва не рассматриваются. Таким образом, можно сказать, что в численном алгоритме, показавшем свою эффективность в практических задачах (например, [13,14]), используются обе интерпретации обобщенного решения.

Список использованных источников

1. Гайтлер Л. Квантовая теория излучения. – М.: Иностранная литература, 1956.

2. Экспериментальная ядерная физика / под ред. Сегре Э., т.1.– М.: Иностранная литература, 1958.

3. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969.

4. Мэсси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. – М.: МИР, 1958.

5. Мотт Н., Мэсси Г. Теория атомных столкновений. – М.: МИР, 1969.

6. Мак-Даниель И. Процессы столкновений в ионизованных газах. – М.: МИР, 1967.

7. Марков М.Б., Паротькин С.В. Кинетическая модель радиационной проводимости газа // Матем. моделирование, 23:4 (2011), 41-56.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1976.

9. Courant E.D., Livingston M.S., Snyder H.S. The Strong-Focusing Synchrotron – A New High-Energy Accelerator. Phys. Rev. 88, pp. 1190-1196 (1952).

10. Демидов Б.А., Ивкин М.В., Ивонин И.А., Петров В.А., Ефремов В.П., Фортов В.Е., Килер Н. Определение профиля энерговыделения мощного электронного пучка в аэрогеле // Журнал технической физики, 1997, т.67, №11, С. 26-32.

11. Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles. – Commun. math. Phys. 56, 1977.

12. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer Simulation Using Particles. – McGraw-Hill, New York, 1981.
13. Березин А.В., Воронцов А.С., Марков М.Б., Паротькин С.В., Захаров С.В. Моделирование предпробойной стадии газового разряда. // Матем. моделирование, 2013, т.25, № 3, С.105-118.
14. Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Зинченко В.Ф., Марков М.Б., Членов А.М. Моделирование пучка ускорителя ЛИУ-10 на параллельном компьютере // Матем. моделирование, 2010, т.2, №2, С.29-44.
15. Власов А.А. Теория многих частиц. М.: ГИТТЛ, 1950.
16. Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе // Матем. моделирование, 20:5 (2008), С. 35-54.
17. Березин А.В. , Воронцов А.С., Жуковский М.Е., Марков М.Б., Паротькин С.В. Метод частиц для электронов в рассеивающей среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:9 (2015), 1566–1578; Comput. Math. Math. Phys., 55:9 (2015), С.1534-1546.
18. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: ГИФМЛ, 1965.
19. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: МИР, 1969. R.E. Edwards Functional Analysis, Theory and Applications. HOLT, Rinehart and Winston, New York, 1965.
20. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.