



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Люпа А.А., [Трапезникова М.А.](#),
[Чечина А.А.](#), [Чурбанова Н.Г.](#)

Алгоритм явного типа для
решения задач
неизотермической
фильтрации многофазных
жидкостей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алгоритм явного типа для решения задач неизотермической фильтрации многофазных жидкостей / А.А.Люпа [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 101. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2018-101](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-101)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-101>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**А.А. Люпа, М.А. Трапезникова, А.А. Чечина,
Н.Г. Чурбанова**

**Алгоритм явного типа для решения задач
неизотермической фильтрации
многофазных жидкостей**

Москва — 2018

Люба А.А., Трапезникова М.А., Чечина А.А., Чурбанова Н.Г.

Алгоритм явного типа для решения задач неизотермической фильтрации многофазных жидкостей

В работе рассматриваются математическая модель неизотермической фильтрации слабосжимаемой жидкости, построенная по аналогии с квазигазодинамической системой уравнений, а также алгоритм явного типа для ее численной реализации. Верификация проведена с помощью тестовой задачи о просачивании двухфазной (вода-воздух) жидкости под действием силы тяжести: получено хорошее согласование результатов расчетов с результатами других авторов, представленными в литературе. Для исследования влияния тепловых воздействий на динамику процесса фильтрации выполнен расчет течения трехфазной (вода-нефть-воздух) жидкости в пористой среде с источником горячей воды на границе.

Ключевые слова: течение многофазной жидкости в пористой среде, квазигазодинамическая система уравнений, явные конечно-разностные схемы

Anastasiya Alexandrovna Lyupa, Marina Alexandrovna Trapeznikova, Antonina Alexandrovna Chechina, Natalia Gennadievna Churbanova

An algorithm of the explicit type to solve problems of non-isothermal multiphase flows in porous media

A mathematical model of non-isothermal filtration of slightly compressible fluid built by the analogy with quasigasdynamic system of equations as well as an algorithm of the explicit type for its numerical implementation are considered in the paper. Verification is performed by the test problem of two-phase fluid (water-air) infiltration due to the gravity: a good agreement of numerical results with given in the literature results of other authors has been obtained. To investigate an influence of thermal effects on the filtration dynamics computations of three-phase fluid (water-oil-air) flow in a porous medium with a hot water source on the boundary have been fulfilled.

Key words: multiphase fluid flow in a porous medium, quasigasdynamic system of equations, explicit finite difference schemes

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15095-офи_м, 18-01-00405-а, 18-01-00587-а.

1. Введение

Работа посвящена развитию оригинального подхода к моделированию процессов фильтрации, в основу которого положена математическая модель, построенная по аналогии с квазигазодинамической системой уравнений и допускающая реализацию явными численными методами [1, 2]. Интерес к алгоритмам явного типа объясняется несколькими причинами. Во-первых, такие алгоритмы хорошо масштабируются и обладают высокой эффективностью распараллеливания на современных суперкомпьютерах, в том числе гибридной архитектуры. Во-вторых, при проведении с критической точностью расчетов ряда задач нефтедобычи, для которых существенен мелкий шаг по пространству (задачи с фронтами горения, фазовыми переходами и сложным видом функций относительных фазовых проницаемостей), явные схемы с точки зрения общего времени счета могут обеспечить выигрыш по сравнению с неявными.

При моделировании течений в подземных горизонтах необходимо учитывать мультимасштабность и разнообразие происходящих физических процессов, что предъявляет определенные требования к моделям фильтрации и алгоритмам их численной реализации [3, 4]. В частности, моделирование процессов нефтедобычи должно отражать термические методы увеличения нефтеотдачи и давать оценку эффективности их воздействия на пласт. В связи с этим предлагаемая математическая модель дополнена уравнением сохранения энергии, учитывается зависимость от температуры физических параметров. Тестовые расчеты подтверждают адекватность рассматриваемого подхода.

2. Математическая модель неизотермической многофазной фильтрации

Для многих задач механики сплошной среды справедлив так называемый "принцип минимальных размеров", который состоит в том, что при численном решении этих задач нет смысла рассматривать масштабы, меньшие некоторого характерного минимального размера [5]. При выводе модели фильтрации сжимаемой жидкости в работе [1] впервые была проведена аналогия с квазигазодинамической (КГД) [6] системой уравнений, и принцип минимальных размеров был распространен на пористую среду. Если для газовой динамики минимальным размером является длина свободного пробега молекулы, то для задач фильтрации минимальным размером по пространству l можно считать масштаб осреднения, на котором несущественна микроструктура фильтрующей породы. Вводится также понятие минимального характерного масштаба по времени τ : в газовой динамике это временной интервал между столкновением молекул, а в теории фильтрации этот параметр может быть интерпретирован как время установления внутреннего равновесия в объеме с характерным размером l .

Уравнение неразрывности фазы α классической модели фильтрации [7, 8] может быть представлено в виде:

$$\varphi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha. \quad (*)$$

Здесь и далее S_α – насыщенность, ρ_α – плотность, \mathbf{u}_α – скорость фильтрации, q_α – источник флюида, φ – пористость породы.

Это уравнение было модифицировано с учетом минимальных размеров.

Во-первых, оно приобрело дополнительный диссипативный член (регуляризатор) с малым параметром l (c_α – скорость звука):

$$\varphi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha + \operatorname{div} \frac{lc_\alpha}{2} \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha). \quad (**)$$

Присутствие регуляризатора дало новые вычислительные возможности, в частности позволило использовать явную схему с центральными разностями для аппроксимации конвективных членов этого уравнения.

Во-вторых, была проведена гиперболизация полученного уравнения – появилась вторая производная по времени с малым параметром τ , за счет чего повысилась устойчивость соответствующей явной разностной схемы [2, 9, 10].

Интерес представляет обобщение предложенной модели на случай неизотермической фильтрации [11]. Такая модель может быть использована для численного анализа современных технологий добычи высоковязкой нефти, основанных на применении тепловых методов повышения нефтеотдачи пластов (например, в пласт закачиваются различные теплоносители – горячая вода, пар).

В приведенной ниже модифицированной модели учитываются три подвижные фазы, обозначенные индексом α . Индекс α принимает значения: w – жидкая водная фаза, n – жидкая углеводородная фаза (в англоязычной литературе NAPL – Non-Aqueous Phase Liquid), g – газовая фаза. Также учитывается неподвижная твердая фаза, обозначенная индексом r (пористый скелет). Сделаны следующие допущения: пористая среда – недеформируемая изотропная, подвижные фазы – слабосжимаемые, несмешивающиеся и невзаимодействующие, газ – идеальный, скелет – несжимаемый.

$$\varphi \frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2(\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t^2} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha + \operatorname{div} \frac{lc_\alpha}{2} \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha), \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = -K \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} (\operatorname{grad} P_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} E_{\alpha} + (1 - \varphi) \rho_r E_r \right] + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} H_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right) = \\ = \operatorname{div} \lambda_{\text{eff}} \operatorname{grad} T + \sum_{\alpha} \operatorname{div} \frac{l c_{\alpha}}{2} \rho_{\alpha} \operatorname{grad} T, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho_g = \rho_{0g} \frac{P_g}{P_{0g}} \frac{T_0}{T}, \quad \rho_{\alpha} = \rho_{0\alpha} [1 + \beta_{\alpha} (P_{\alpha} - P_{0\alpha}) - \eta_{\alpha} (T - T_0)], \quad \alpha = w, n \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 1. \quad (5)$$

Использованы обозначения: P_{α} – давление, T – температура (одинаковая для всех фаз), E_{α} – внутренняя энергия, H_{α} – энтальпия, K – абсолютная проницаемость, k_{α} – относительная фазовая проницаемость, μ_{α} – динамическая вязкость, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, λ_{eff} – эффективный коэффициент теплопроводности, β_{α} – коэффициент изотермической сжимаемости жидкости, η_{α} – коэффициент теплового расширения, константы $\rho_{0\alpha}$, $P_{0\alpha}$ и T_0 – характерные значения соответствующих величин. Плотность породы ρ_r считается постоянной.

Модель включает: модифицированное уравнение неразрывности (1) и обобщенный закон Дарси (2) для каждой подвижной фазы, единое для всей системы уравнение сохранения энергии (3) (также модифицированное по аналогии с КГД системой), уравнения состояния (4), замыкающее соотношение (5). В уравнении (3) присутствует эффективный коэффициент теплопроводности:

$$\lambda_{\text{eff}} = \varphi \sum_{\alpha} S_{\alpha} \lambda_{\alpha} + (1 - \varphi) \lambda_r. \quad (6)$$

Энтальпия (в том числе энтальпия твердой фазы) вычисляется следующим образом:

$$H_{\alpha} = H_{\alpha 0} + \int_{T_0}^T C_{P\alpha}(T) dT, \quad (7)$$

где $C_{P\alpha}$ – теплоемкость вещества при постоянном давлении.

Связь между внутренней энергией и энтальпией:

$$E_\alpha = H_\alpha - \frac{P_\alpha}{\rho_\alpha}, \quad E_r = H_r. \quad (8)$$

Зависимости от температуры коэффициентов теплопроводности $\lambda_\alpha(T)$, теплоемкостей $C_{P\alpha}(T)$ и динамических вязкостей $\mu_\alpha(T)$ находятся по эмпирическим формулам (см., например, [11]).

Приведенная модель учитывает капиллярные силы. В случае трехфазного течения жидкости для капиллярного давления используется приближенная модель Паркера [12]:

$$\begin{aligned} P_n - P_w &= P_{c\,nw}(S_w) = \frac{1}{\gamma\delta_{nw}} [(S_{we})^{\frac{N}{1-N}} - 1]^{\frac{1}{N}}, \\ P_g - P_n &= P_{c\,gn}(S_g) = \frac{1}{\gamma\delta_{gn}} [(1 - S_{ge})^{\frac{N}{1-N}} - 1]^{\frac{1}{N}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $P_{c\,nw}$ – капиллярное давление на границе вода-NAPL, а $P_{c\,gn}$ – капиллярное давление на границе NAPL-газ, γ и N – параметры из соответствующего приближения ван Генухтена для капиллярного давления в случае двухфазной системы вода-газ, δ_{nw} и δ_{gn} – известные коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей. Эффективная насыщенность S_{ae} с учетом остаточных насыщенностей S_{ar} определяется следующим образом:

$$S_{ae} = \frac{S_\alpha - S_{ar}}{1 - \sum_\alpha S_{ar}}. \quad (10)$$

Относительные фазовые проницаемости (ОФП) для трехфазного течения определяются в соответствии с первой моделью Стоуна [7, 13]:

$$\begin{aligned} k_w(S_w) &= S_{we}^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}})^{\frac{N-1}{N}}]^2, \\ k_n(S_w, S_n) &= \frac{S_{ne} k_{nw}(S_w) k_{ng}(S_n)}{(1 - S_{we})(S_{we} + S_{ne})}, \\ k_g(S_g) &= S_{ge}^{\frac{1}{2}} [1 - (1 - S_{ge}^{\frac{N}{N-1}})^{\frac{N-1}{N}}]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь используется эффективная насыщенность (10) и выражения:

$$k_{nw}(S_w) = (1 - S_{we})^{\frac{1}{2}} \left(1 - S_{we}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{2(N-1)}{N}}, \quad k_{ng}(S_n) = S_{ne}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - S_{ne}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{(N-1)}{N}} \right)^2. \quad (12)$$

3. Вычислительный алгоритм явного типа

Представленная модель может быть численно реализована с помощью алгоритма явного типа. При построении алгоритма рассматриваются прямоугольные расчетные области, покрытые неразнесенными ортогональными сетками. Как известно, модель многофазной фильтрации может быть сведена к различным математическим формулировкам [13], например, в терминах "давление одной фазы – насыщенности других фаз". Такая формулировка используется, в частности, при решении задач фильтрации с помощью IMPES (IMplicit Pressure – EXplicit Saturation) метода [7]: путем алгебраических преобразований уравнений модели получается уравнение для давления одной из фаз (или для среднего давления фаз), которое решается неявным методом, а для определения независимых насыщенностей используются исходные уравнения неразрывности фаз, из которых насыщенности вычисляются явно.

В разработанном алгоритме в качестве основных искоемых функций могут выступать, например, давление воды P_w , водонасыщенность S_w , нефтенасыщенность S_n и температура T , для которых задаются начальные и граничные условия (может быть взят другой набор независимых переменных). В отличие от IMPES метода не выводится уравнение для давления, не используются неявные схемы, искоемые функции не определяются непосредственно из уравнений.

Основные этапы алгоритма:

- Для всех фаз находим произведение $\rho_\alpha S_\alpha$ с помощью трехслойной явной разностной схемы, аппроксимирующей модифицированное уравнение неразрывности (1).

- Находим внутреннюю энергию, а именно

$$E = \varphi \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha} E_{\alpha} + (1 - \varphi) \rho_r E_r \quad (13)$$

из уравнения (3) по явной схеме.

- Основные искоемые функции находим с помощью решения локально в каждой расчетной точке системы нелинейных алгебраических уравнений, составленной из уравнений состояния (4) и выражения для внутренней энергии (13) с учетом замыкающих соотношений (5) и (8). В правых частях уравнений системы стоят найденные на предыдущих этапах значения $\rho_{\alpha} S_{\alpha}$ и E . Решение

этой системы проводится методом Ньютона и требует всего нескольких итераций. Подробно вычислительный алгоритм рассмотрен в работе [11].

Многопроцессорная реализация алгоритма основана на принципе геометрического параллелизма. Расчетная область разбивается на подобласти. В зависимости от размерности задачи, априорных оценок общего времени счета и количества доступных процессоров разбиение осуществляется в одном, двух или трех направлениях в соответствии с оригинальным алгоритмом оптимального распределения расчетной области по процессорам [14]. Счет в подобластях происходит одновременно на разных процессорах — на ядрах центральных процессоров (CPU) или на графических платах (GPU). На внутренних границах подобластей выполняются обмены данными, при этом данные объединяются в крупные блоки, так что на каждом слое по времени выполняется одна операция двустороннего обмена. Итерации метода Ньютона обменов не требуют. При расчетах на GPU также осуществляется загрузка данных из оперативной памяти узла вычислительной системы в собственную память GPU и обратно.

4. Верификация модели и алгоритма

Предложенные модель и алгоритм с успехом использовались для решения тестовых и модельных задач фильтрации, в том числе на гибридных суперкомпьютерах. В случае изотермического течения одной жидкости в пористой среде верификация проводилась с помощью задачи о плоскорадиальном притоке к скважине [8], численное решение сравнивалось с точным аналитическим [1, 10]. Для оценки адекватности разработанного подхода в многофазном случае проводилось сравнение численных результатов, полученных авторами с помощью различных методов [9]. Качественно оценивалась физическая корректность полученных результатов при моделировании неизотермических течений [11].

В данной работе проведем верификацию предложенных модели и алгоритма с помощью задачи дренажа, подробно исследованной в книге [15]. Постановку иллюстрирует рис. 1.

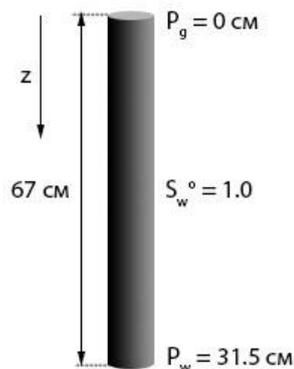


Рис. 1. Постановка задачи дренажа

Имеется трубка длиной 67 см, диаметром 2 см, заполненная полностью водонасыщенной пористой средой (мокрым песком). Моделируется процесс двухфазного просачивания (дренаж): вода под действием силы тяжести движется вниз и вытекает из трубки, сверху в трубку поступает воздух. Источники отсутствуют, накачки жидкостей не происходит. В начальный момент для давления воды в трубке зададим гидростатическое распределение, давление воздуха будем считать равным давлению воды. Верхняя граница открыта, так что давление воздуха на ней в ходе всего вычислительного эксперимента равно атмосферному давлению, а для воды ставится условие непротекания. На нижней границе, наоборот, задано постоянное давление воды, так чтобы обеспечить ее вытекание, а условие непротекания ставится для воздуха.

Модель и алгоритм упрощаются. Температура считается постоянной, так что уравнение энергии исключается из системы, зависимость физических параметров от температуры не учитывается. Остается одно капиллярное давление – классическое приближение ван Генухтена для двухфазной системы вода–газ [7, 13, 15]. Используются ОФП для водной и газовой фаз в соответствии с (11) (нефтяная фаза исключается). Значения параметров, соответствующие [15], представлены в таблицах 1 и 2, система единиц измерения – СГС. Среда считается однородной.

Поскольку трубка тонкая, задача решается в одномерной постановке. Шаг расчетной сетки по пространству фиксирован: $h = 0.67$ см.

В качестве основных искомых функций в алгоритме выбраны давление воздуха P_g и водонасыщенность S_w .

Таблица 1

Параметры фаз

Физическая величина	Вода	Воздух
Характерная плотность, г/см ³	0.9982	0.000129
Динамическая вязкость, г/(см·с)	0.01	0.0015
Характерное давление, г/(см·с ²)	10 ⁶	10 ⁶
Коэффициент сжимаемости, (см·с ²)/г	4.4·10 ⁻⁸	1
Остаточная насыщенность	0.12	0

Константы модели

Пористость среды	0.37
Абсолютная проницаемость, см ²	$5 \cdot 10^{-7}$
Ускорение свободного падения, см/с ²	981
Показатель степени N в (9), (11)	10
Коэффициент $\gamma \delta_{gw}$ в (9), (см \cdot с ²)/г	$4 \cdot 10^{-5}$

Сравним решения поставленной задачи, полученные численно на основе классической и модифицированных моделей фильтрации, реализованных с помощью алгоритма из раздела 3 данной работы.

В первом случае (назовем условно "метод I") уравнение неразрывности (*) аппроксимируется явной двухслойной схемой с направленными против потока разностями. Устойчивый счет возможен при $\Delta t \leq 10^{-4}$ с.

Во втором случае (метод II) уравнение (***) параболического типа, модифицированное за счет введения регуляризатора, аппроксимируется также явной двухслойной по времени схемой, однако для дискретизации конвективного члена используются центральные разности. Известно, что схема с центральными разностями для уравнения (*) абсолютно неустойчива, в чем можно убедиться с помощью расчетов – наблюдаются осцилляции в решении при длительном счете. Присутствие дополнительного диффузионного члена в уравнении (***) делает эту схему условно устойчивой: шаг по времени, как и в методе I, $\Delta t \leq 10^{-4}$ с. Преимущества – второй порядок аппроксимации по пространству.

В третьем случае (метод III) модифицированное уравнение гиперболического типа (1) аппроксимируется явной трехслойной схемой с центральными разностями, имеющей второй порядок как по времени, так и по пространству. Регуляризатор гарантирует сглаживание решения, а вторая производная по времени – повышение устойчивости схемы: шаг по времени $\Delta t = 10^{-3}$ с обеспечивает устойчивый счет, то есть гиперболизация приводит к увеличению допустимого шага по времени на порядок.

Малые параметры подбираются эмпирически. Для простоты коэффициент $\frac{l c_{\alpha}}{2}$ для обеих фаз будем считать одинаковым. Из физических соображений и оценок, сделанных авторами в предыдущих работах [2, 9], для рассматриваемой задачи этот коэффициент не должен превосходить 1.0 см²/с. В расчетах использовалось значение $\frac{l c_{\alpha}}{2} = 10^{-2}$ см²/с. Параметр τ выбирался равным шагу

по времени, то есть $\tau = 10^{-3}$ с. Соответствующие результаты расчетов представлены на рисунках 2, 3. Значения водонасыщенности, полученные по методам II и III при указанных шагах по времени и малых параметрах, отличаются в пятом знаке после запятой и на графиках визуально совпадают. Таким образом, при правильно подобранном τ гиперболизация не влияет на точность решения.

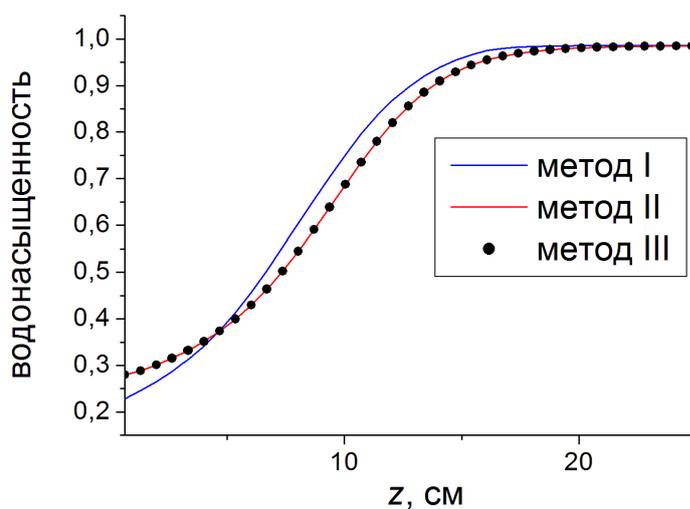


Рис. 2. Распределение водонасыщенности по глубине на момент времени $t = 900$ с при решении задачи дренажа разными численными методами

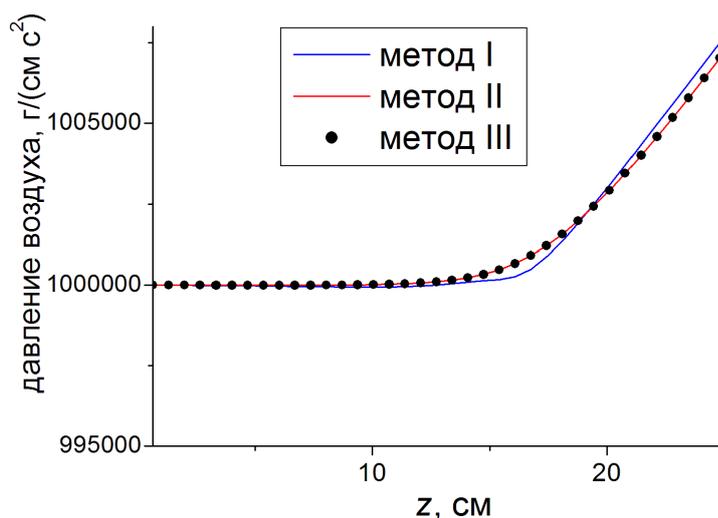


Рис. 3. Распределение давления воздуха по глубине на момент времени $t = 900$ с при решении задачи дренажа разными численными методами

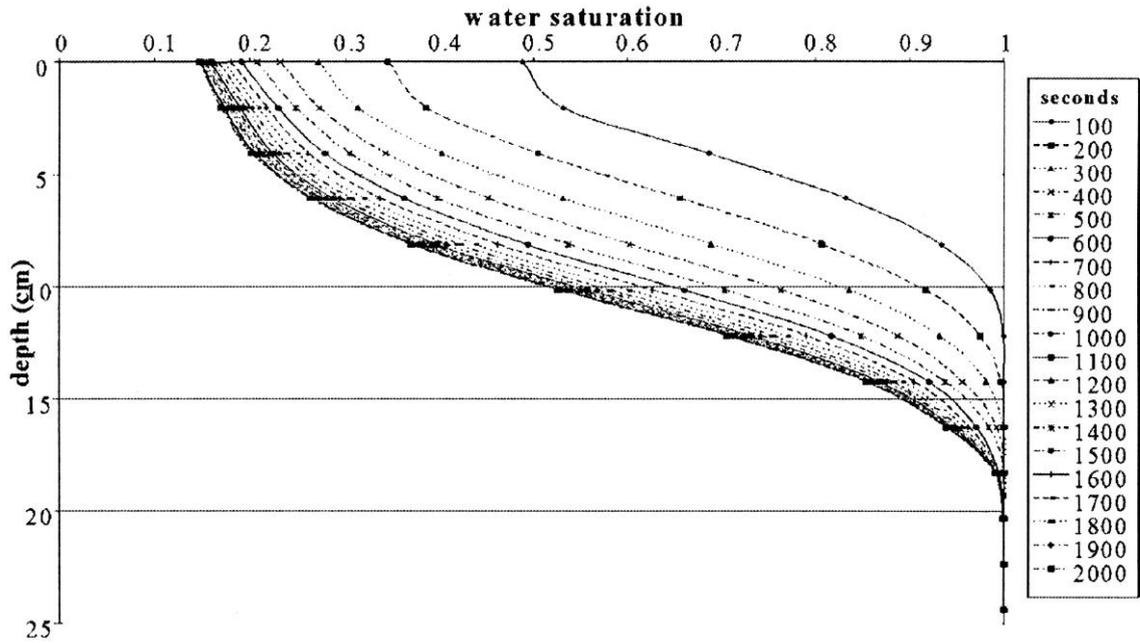


Рис. 4. Распределение водонасыщенности по глубине на разные моменты времени для задачи дренажа (рисунок взят из [15])

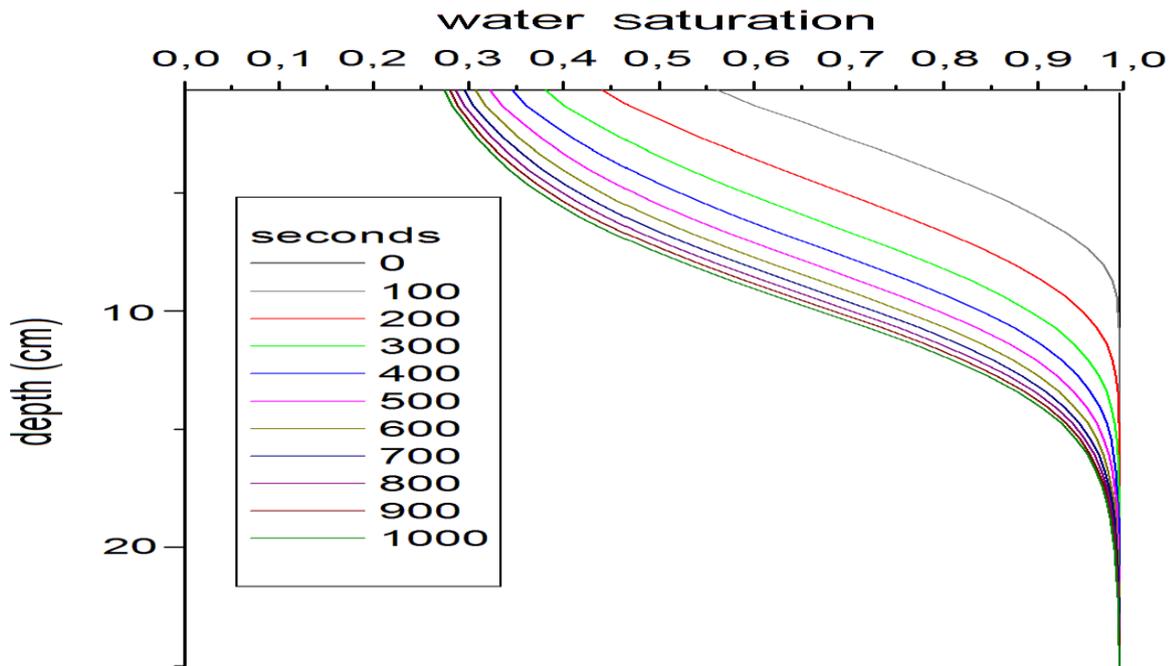


Рис. 5. Распределение водонасыщенности по глубине на разные моменты времени для задачи дренажа (результаты, полученные в данной работе по методу III)

Рис. 4 взят для сравнения из работы [15]: для рассматриваемой задачи представлено распределение водонасыщенности по глубине в определенные моменты времени. В [15] указано, что эти результаты получены численно с помощью программы NAPL Simulator (в свободном доступе,

<https://www.epa.gov/water-research/non-aqueous-phase-liquid-napl-simulator>).

Результаты расчетов, полученные с помощью предложенного в настоящей работе подхода, использующего гиперболизованное уравнение неразрывности фаз с регуляризатором (1) и вычислительный алгоритм явного типа (метод III), представлены на рис. 5. Сравнение показывает хорошее согласование результатов, что свидетельствует об адекватности разработанных модели и алгоритма.

5. Задача трехфазной фильтрации с источником на границе

С целью апробации полной математической модели неізотермической трехфазной (вода–нефть–газ) фильтрации была численно исследована следующая задача. Рассматривается течение в квадратной области с числом расчетных точек $N_x \times N_y$ при наличии источника воды на границе A_1 (см. рис. 6), температура на границе A_1 постоянна.

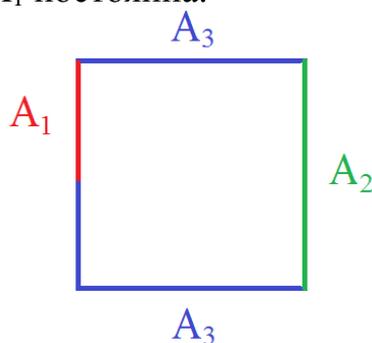


Рис. 6. Постановка задачи фильтрации с источником на границе

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
 T &= 285\text{K}, \quad P_w = P_{\text{атмосферное}}, \quad S_w = 0.1, \\
 S_o(x, y) &= 0.4 + 0.1 \cdot \sin^2(x \cdot N_x + y \cdot N_y), \\
 S_g(x, y) &= 0.4 + 0.1 \cdot \cos^2(x \cdot N_x + y \cdot N_y).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Все границы проницаемы, на границе A_2 задано постоянное значение давления, а граничные условия на A_1 следующие:

$$T = 320\text{K}, \quad P_w = 1.1 \cdot P_{\text{атмосферное}}, \quad S_w = 0.6, \quad S_o = 0.15. \tag{15}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 7: приведены поля давления, температуры и насыщенностей всех фаз на три последовательные момента времени. Видно, что фронты от источника распространяются по области и за ее границы, вода постепенно вытесняет нефть и газ, фронт температуры отличается от фронтов насыщенностей.

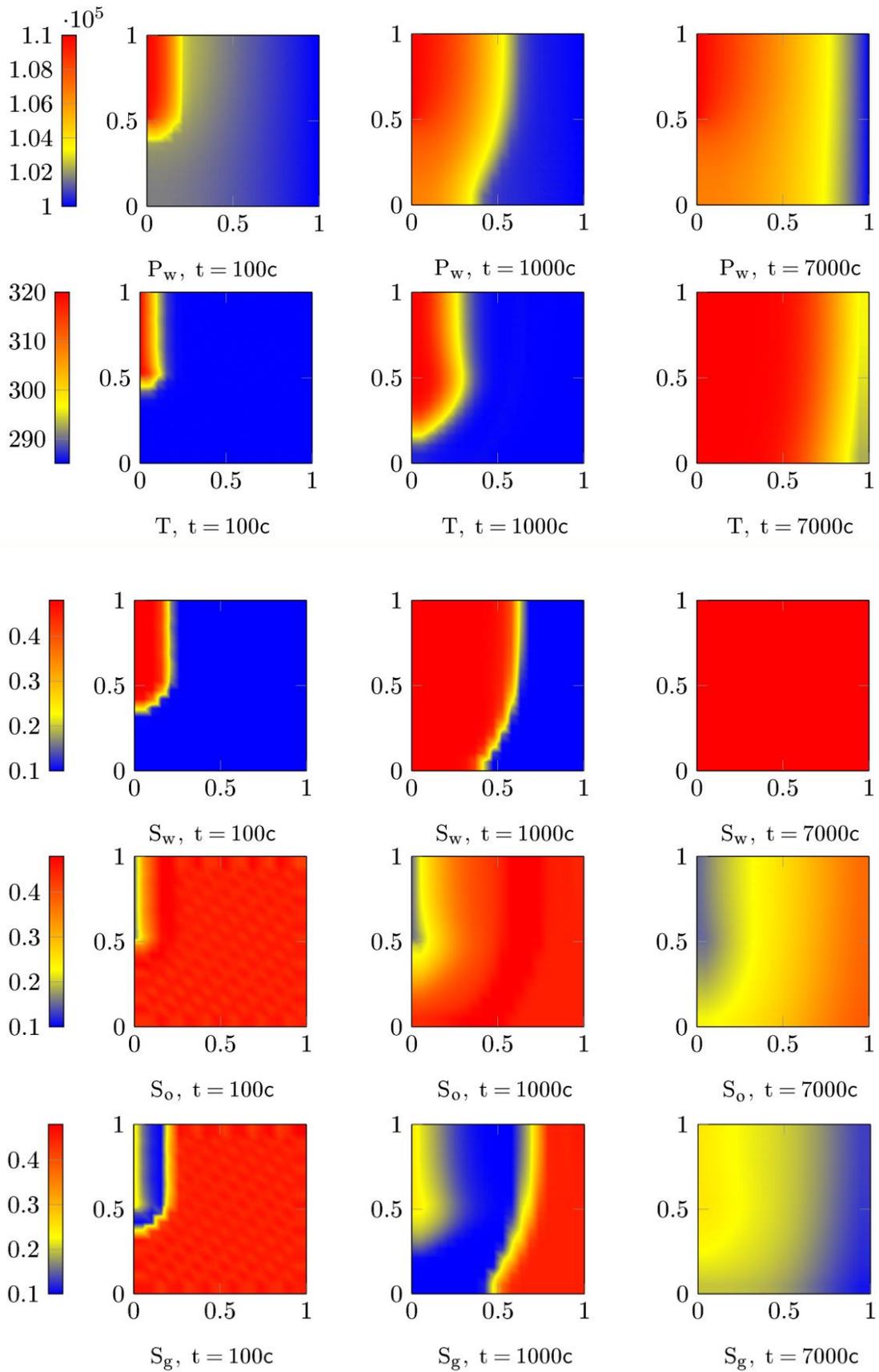


Рис. 7. Эволюция во времени полей давления воды (P_w), температуры (T), водонасыщенности (S_w), нефтенасыщенности (S_o) и насыщенности газа (S_g)

6. Заключение

Представленные в работе исследования имеют практическую ценность и могут найти применение в различных научных и инженерно-технических разработках. Предложенный алгоритм явного типа эффективно адаптируется к современным вычислительным системам сверхвысокой производительности, что дает возможность проводить гидродинамические расчеты на подробных сетках с критической точностью за разумное время.

Библиографический список

- [1] Трапезникова М.А., Белоцерковская М.С., Четверушкин Б.Н. Аналог кинетически-согласованных схем для моделирования задачи фильтрации // Математическое моделирование. – 2002. – Т.14, №10. – С. 69-76.
- [2] Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. – 2010. – Т.22, №4. – С. 99-109.
- [3] Simulation of Flow in Porous Media: Applications in Energy and Environment / P. Bastian et al. (Eds.), Radon Series on Computational and Applied Mathematics, Vol. 12, De Gruyter, Berlin, 2013.
- [4] Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Fractured Porous Media: Modelling and Benchmarking. Benchmarking Initiatives / O. Kolditz et al. (Eds.), Springer, 2016. – doi:10.1007/978-3-319-29224-3
- [5] Четверушкин Б.Н. К вопросу об ограничении снизу на масштабы в механике сплошной среды / Время, хаос, математические проблемы, Вып.4. – М.: Изд-во МГУ, 2009, С. 75-96.
- [6] Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [7] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [8] Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [9] Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 7. – С. 52-60.
- [10] Chetverushkin, Boris N.; Churbanova, Natalia G.; Kuleshov, Andrey A.; Lyupa, Anastasiya A.; Trapeznikova, Marina A. Application of kinetic approach to porous medium flow simulation in environmental hydrology problems on high-performance computing systems // RJNAMM. – 2016. – Vol. 31 (4). – P. 187-196. – doi:10.1515/rnam-2016-0019

- [11] Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование неизотермической многофазной фильтрации с применением явных разностных схем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 103. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-103
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-103>
- [12] Parker, J.C.; Lenhard, R.J.; Kuppusami, T. A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media // Water Resources Research. – 1987. – Vol. 23 (4). – P. 618-624.
- [13] Helmig, R. Multiphase flow and transport processes in the subsurface – A contribution to the modeling of hydrosystems. – Springer, 1997.
- [14] Trapeznikova, M., Churbanova, N., Lyupa, A., Morozov, D. Simulation of multiphase flows in the subsurface on GPU-based supercomputers // In: Parallel Computing: Accelerating Computational Science and Engineering, Advances in Parallel Computing, M. Bader et al. (Eds.), IOS Press, Amsterdam, 2014 (25). – P. 324–333.
- [15] Pinder, G.F.; Gray, W.G. Essentials of Multiphase Flow and Transport in Porous Media. – John Wiley & Sons, 2008.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Математическая модель неизотермической многофазной фильтрации	3
3. Вычислительный алгоритм явного типа.....	7
4. Верификация модели и алгоритма	8
5. Задача трехфазной фильтрации с источником на границе	13
6. Заключение	15
Библиографический список.....	15