



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 90 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Терехов Г.П., Павловский В.Е.

Управление
несбалансированным
сферическим роботом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Терехов Г.П., Павловский В.Е.
Управление несбалансированным сферическим роботом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.
2017. № 90. 23 с. doi:[10.20948/prepr-2017-90](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-90)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-90>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Г.П. Терехов, В.Е. Павловский

**Управление несбалансированным
сферическим роботом**

Москва 2017 г.

УДК 531.1

Г.П. Терехов, В.Е. Павловский

Управление несбалансированным сферическим роботом

Рассматривается теоретическая механическая модель робота-шара с маховиками, расположенными внутри шара. Важной особенностью модели является то, что центр масс шара и геометрический центр не совпадают. Описанная конструкция предназначена для управления движением шара по различным траекториям. В работе исследовано движение и синтезированы управления для прохождения траекторий в случае различных моделей контакта, а именно, модели абсолютно шероховатой плоскости и модели двухпараметрического трения.

Ключевые слова: робот-шар, динамика неголономных систем, динамические модели, двухпараметрическая модель трения, алгоритм управления шаром с маховиками.

Georgy P. Terehov, Vladimir E. Pavlovsky

Control of the unbalanced spherical robot

The theoretical mechanical model of the spherical robot with the flywheels located in a sphere is considered. The important feature of this work is the suggestion, that geometric center is not equal to center of mass of the system. The described design intends for motion control of a sphere on various trajectories. In this work the motion of the robot was investigated. Also, the required controls to move across desired trajectory were received. In this work two different contact-models were considered: two-parametrical model of friction and the model of absolutely rough plane.

Key words: the spherical robot, dynamic of nonholonomic systems, dynamic models, two-parametrical model of friction, control algorithm of a sphere with flywheels.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-08-00880-а, 16-01-00131-а.

1. Введение

Сферические роботы составляют особый класс мобильных роботов. Нестандартная форма помогает роботам в преодолении препятствий, и, что весьма важно, аппараты такой конструкции имеют большую герметичность и автономность. Особый интерес такие роботы представляют и для теоретических работ, так как задача построения управления и изучения динамики для подобного аппарата сводится к фундаментальной задаче механики о движении шара по плоскости.

Данное исследование ведется для шара, внутри которого расположены три маховика, оси которых взаимно ортогональны. Подобная конструкция уже была рассмотрена в работе [1], где изучена динамика и построены алгоритмы управления для такого робота в случае движения по абсолютно шероховатой плоскости, а также плоскостям с сухим трением Кулона и вязким трением. В работе [2] была решена обратная задача динамики для робота на плоскости с двухпараметрическим трением. Вместе с этим, во всех этих исследованиях предполагается совпадение центра масс системы с геометрическим центром шара. Для реальных аппаратов, однако, добиться такого совпадения – весьма непростая задача, поэтому далее предполагаем смещение центра масс робота относительно его геометрического центра. В этом смысле данная работа является развитием исследования [2].

В качестве модели контактного взаимодействия будет рассмотрена как популярная в робототехнике модель абсолютно шероховатой плоскости (например, управление роботом-шаром для подобной модели получено в [1], [3]), так и модель двухпараметрического трения, представленная в работе [4].

В обоих случаях будет построено управление для алфавита простых движений шара, из которых при необходимости объединением (конкатенацией) могут быть построены и более сложные движения. Упомянутая конкатенация может быть обеспечена остановкой шара в точках стыка базовых движений.

Описываемый в работе шар в настоящее время изготовлен группой исследователей из Ижевска (УдГУ), Санкт-Петербурга (ЗАО "Ровер", ВНИИТРАНСМАШ) и Москвы (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – механико-математический факультет МГУ – ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН), с ним ведутся успешные эксперименты.

2. Динамика и управление роботом-шаром

2.1. Описание модели. Уравнения движения

Будем рассматривать на неподвижной плоскости Sxy шар радиусом R с центром в точке O . Внутри сферической оболочки на трех взаимно-ортогональных осях находятся три одинаковых диска-маховика массами m и радиусами ρ . Расстояние от точки G пересечения осей, ортогональных маховикам (плоскостям маховиков), до центра каждого из маховиков (точек A_i) равно a , и центры маховиков лежат в экваториальной плоскости шара. Масса шара без учета маховиков – M . Далее предположим, что центр масс робота находится в точке O' , вектор \mathbf{OO}'/R^1 обозначим за ζ .

Введем подвижную систему координат (ПСК) $O'e_1e_2e_3$ с центром в точке O' , ее базисные векторы e_i предполагаются сонаправленными осям маховиков (отрезкам GA_i). Переход к подвижной системе координат осуществляется посредством матрицы перехода D , заданной на $SO(3)$. Конфигурационное многообразие системы суть $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Три угловые скорости вращения маховиков вокруг своих осей обозначим за α_i . Затем перейдем к безразмерным координатам $x'=x/R$, $y'=y/R$, $z'=z/R$, а радиус-вектор и вектор скорости обозначим $\mathbf{r}'=(x'; y'; z')^T$ и $\mathbf{v}=d/dt(\mathbf{r}')$. Далее везде под физическими характеристиками, такими как сила, скорость и т.д., понимаются безразмерные величины, если не оговорено противное.

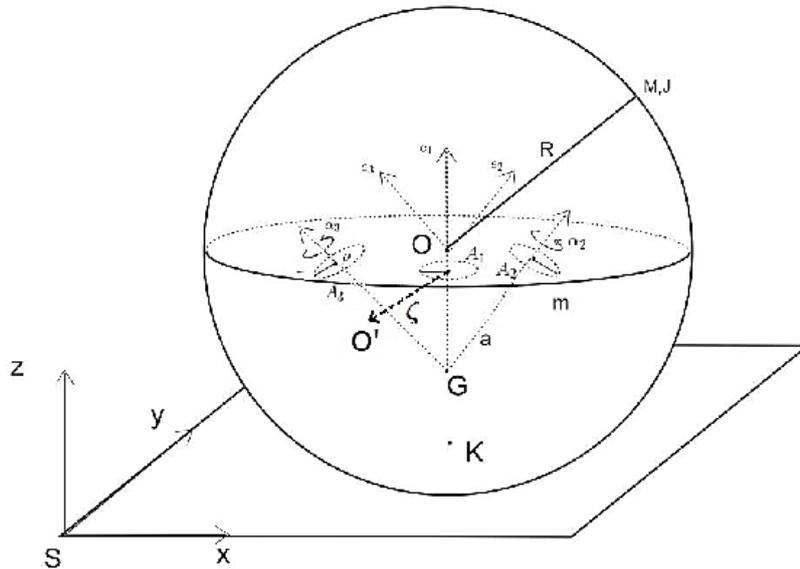


Рис.1. Модель робота-шара

Будем считать, что проекция скорости центра шара на вертикаль нулевая, что приводит к соотношению:

$$(\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]; \mathbf{e}_z) = 0.$$

¹ В тексте векторы и матрицы будем обозначать жирным шрифтом.

Далее, представим кинетический момент системы в подвижной системе координат в виде

$$\hat{k} = I \dot{\omega} + C \alpha.$$

Здесь первое слагаемое представляет собой кинетический момент системы "как целого", а второе отвечает за вращения маховиков относительно своих осей. Здесь и далее векторы с "крышкой" описаны в подвижной СК, без нее – в абсолютной (за исключением векторов управлений, которые имеет смысл рассматривать только в ПСК). Матрица C , таким образом, – это диагональная матрица, состоящая из моментов инерции маховиков относительно их осей, а матрица I соответствует тензору инерции системы как целого. Заметим, что все инерционные характеристики поделены на некоторый момент инерции \hat{J} .

Расписывая общие теоремы динамики (уравнения изменения импульса, изменения кинетического момента в абсолютной системе координат, причем первое разделено на $(M+3m)/R$, а второе – на \hat{J}), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f - \frac{g}{R} e_z, \\ \frac{dk}{dt} &= \mu^0 - b[\zeta + e_z; f], \end{aligned}$$

f – сила контактного взаимодействия, μ^0 – дополнительно возникающие в контакте моменты. Для полного вектора момента внешних сил μ верно, что $\mu = \mu^0 - b[\zeta + e_z; f]$, где $b = (M+3m)R/\hat{J}$.

Далее, для численных расчетов будут приняты следующие величины: вектор $e_\zeta = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Матрица I предполагается следующего вида:

$$I = \begin{pmatrix} v & 1 & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1 & 1 & v \end{pmatrix},$$

здесь $v = 50.6$. Диагональная матрица C состоит из одинаковых элементов $c = 0.1$. Значение величины $b = 115$. Остальные значения: $M = 4$ кг, $m = 0.61$ кг, радиус – 0.2 м, $\hat{J} = 0.002$, а $\zeta_{разм} = 2$ мм.

Для того чтобы система стала замкнутой, необходимо ещё ввести предположения о характере контактного взаимодействия, т.е. задать уравнения связи или соотношения на векторы сил и моментов.

2.2. Робот на абсолютно шероховатой плоскости

Для начала остановимся на наиболее распространенной в таких задачах так называемой "неголономной модели", т.е. предположим, что шар движется по абсолютно шероховатой плоскости и скорость точки K (точки контакта шара с

плоскостью) нулевая. Отметим, что из этого условия следует и равенство нулю вертикальной компоненты скорости центра масс шара. Иными словами, верно:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z].$$

Замечание

В рамках данной модели соотношение преобразуется к виду:

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{k} + b\boldsymbol{\omega} \|\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z\|^2 - b(\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z)(\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z) \right] = -b \left(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\zeta}; [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z]) + \frac{g}{R} [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z] \right).$$

2.2.1. Случай неподвижного центра масс

Предположим, что центр масс системы неподвижен, т.е. \mathbf{r}' – постоянный по времени вектор. Тогда из уравнения связи имеем:

$$[\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z] = 0.$$

Равенство векторного произведения нулю означает либо обращение в ноль одного из векторов-сомножителей, либо коллинеарность векторов. В случае $\boldsymbol{\omega} = 0$ получаем покоящийся шар со смещенным центром масс. В случае $\boldsymbol{\omega} \uparrow \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z$ будет наблюдаться вращение вдоль оси KO' . Наконец, случай $\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z = 0$ соответствует совпадению точки контакта с центром масс системы в каждый момент времени. Последнее является нереализуемым с конструктивной точки зрения (центр масс системы в этом случае должен находиться на сфере), поэтому такой случай рассмотрен не будет.

Далее остановимся на случае $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, т.е. шар покоится. Исходя из равенства нулю угловой скорости уравнения связи и уравнения, полученные из теоремы об изменении импульса, примут тривиальный вид $0 = 0$. Для уравнений изменения кинетического момента имеем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k} = b \left[\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}_z; \frac{g}{R} \mathbf{e}_z \right] = \frac{bg}{R} [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z].$$

Вектор $\boldsymbol{\zeta}$ в правой части уравнения постоянен в абсолютной СК вследствие того, что шар покоится, что влечет за собой и постоянство всей правой части. Таким образом, уравнение преобразуется в следующее:

$$c \boldsymbol{\alpha} = \frac{g}{R} b t \mathbf{D} [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z] + \hat{\mathbf{k}}_0,$$

где $\hat{\mathbf{k}}_0$ – некоторый постоянный вектор. Как можно заметить, это линейный разгон по угловым скоростям. Принимая во внимание уравнение стандартного электродвигателя и то, что угловая скорость маховика много больше угловой скорости системы как целого, (здесь напряжения полагаем размерными)

$$c\alpha = \kappa_1 u - \kappa_2 \alpha ,$$

получаем, что подобный режим реализуем только конечное время и достигим не для всех маховиков. Очевидно, что как только на одном маховике ограниченное напряжение выйдет на максимальное (по модулю) значение, то удержание центра масс в фиксированном положении перестанет быть возможным. Оценим время, которое система может проводить в состоянии покоя при равенстве нулю начальных условий. Введем параметр $A = \|\zeta\|$ и вектор $\gamma = A^{-1} D[\zeta; e_z]$ (единичный вектор векторного произведения). Пусть u_* – максимально допустимое управляющее напряжение (оно, очевидно, соответствует значению γ_* – максимальной из проекций вектора γ на оси ПСК). Тогда из условия $u_i = u_*$ (i – номер маховика, для которого значение напряжения первым выйдет на границу допустимых значений) получаем:

$$t = \frac{c}{\kappa_2} \left(\frac{Ru_* \kappa_1}{gbA\gamma_*} - 1 \right).$$

Для размерного пускового момента $\mu_{\max} = \hat{J} u_* \kappa_1$ (принимая во внимание то, что γ_* принимает значения на промежутке $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$, и обозначая $A = AR$) получаем, что для любой начальной конфигурации удержание центра масс возможно, если

$$\mu_{\max} \geq (M + 3m)gA,$$

а если

$$\mu_{\max} \leq \frac{(M + 3m)gA}{\sqrt{3}},$$

то для любой начальной конфигурации удержание центра масс в неподвижном состоянии невозможно. Последние соотношения можно интерпретировать несколько иначе, а именно, для заданного электродвигателя (т.е. пускового момента) с их помощью можно определить максимальное допустимое отклонение центра масс от центра шара для возможного движения. Очевидно, что эта величина равна

$$A_{\max} = \frac{\mu_{\max}}{(M + 3m)g}.$$

В частности, при пусковом моменте, равном 0.01 Нм, массах $M = 4$, $m = 0.6$ получим $A_{\max} = 0.17$ мм.

2.2.2. Вращение вокруг вертикали

Рассмотрим теперь аналог вращения на месте неголономного сбалансированного шара – вращение относительно вертикальной оси. Такое движение использовалось в качестве одного из составляющих алфавита, с помощью него можно добиться поворота на заданный угол, не меняя положение шара. В случае несбалансированного шара далее будем считать "траекторией

шара" след его центра O на плоскости S_{xy} (или, что то же самое, след точки контакта K). В случае вращения вокруг вертикали определенная выше траектория вырождается в точку.

Таким образом, выполнено условие $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. В силу соотношения $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$ получаем эволюцию вектора $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= B \cos \Theta, \\ \zeta_y &= B \sin \Theta, \\ \zeta_z &= \text{const}, \\ \frac{d}{dt}\Theta &= \omega.\end{aligned}$$

Уравнение, полученное из теоремы об изменении кинетического момента, примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{k} + \omega \begin{pmatrix} -\zeta_x(1+\zeta_z) \\ -\zeta_y(1+\zeta_z) \\ A^2 - \zeta_z^2 \end{pmatrix} \right] = -\frac{bg}{R} [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z].$$

Теперь следует отметить, что если $\zeta = \pm A$, что соответствует нахождению центра масс в верхнем или нижнем положении равновесия (с практической точки зрения, разумеется, важнее второе), то полученная система полностью редуцируется к аналогичной задаче для несбалансированного шара. Именно такой способ поворота на месте и предлагается взять в дальнейшем за алфавитный. В противном же случае центр масс не придет в нижнее положение равновесия в конце движения, а значит, робот не сможет в результате оказаться в состоянии покоя. Тем не менее, подобное движение может быть использовано в качестве составной части более сложного движения, реализующего какую-либо конкретную составную траекторию.

2.2.3. Движение по прямой

Теперь предположим, что траектория центра шара совпадает с частью оси S_x . В этом случае из условия $\mathbf{v}_O = v_{Ox}$ и соотношения $\mathbf{v}_O = [\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}_z]$ получаем соотношение $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\mathbf{e}_y$. Далее, согласно определению вектора $\boldsymbol{\zeta}$ и формулам Пуассона, получаем, что $\zeta_y = \text{const}$. Для построения алфавитного движения будем считать, что $\zeta_y = 0$. Если же это не так, то для начала необходимо повернуть шар на месте до достижения данного условия, в противном случае все сказанное для предыдущего пункта перенесется и на этот случай. Иными словами, по окончании "управляемого" движения перевод центра масс в нижнее положение равновесия достигнут не будет. В частности, при таких условиях алфавитное движение – движение по отрезку – не является возможным. В то же время также можно использовать такое движение как часть составного. Отметим, что при движении из состояния покоя (которое соответствует положению равновесия) условие $\zeta_y = 0$ выполняется, а значит, использование

такого движения как алфавитного оправдано. Аналогично предыдущим пунктам можно вывести, что:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= A \sin \Theta , \\ \zeta_z &= A \cos \Theta , \\ \frac{d}{dt} \Theta &= \omega (t) , \\ A &= \|\zeta\| ,\end{aligned}$$

где угол Θ – угол между вектором ζ и вертикалью. Уравнение на кинетический момент в абсолютной системе координат может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{k} + \left((A^2 + 1) \omega + 2\omega \zeta_z \right) \mathbf{e}_y \right] = -b \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \zeta_x \mathbf{e}_y .$$

При этом, очевидно, имеет смысл рассматривать уравнение в проекции на ось S_y . Если рассматривать движение из состояния покоя, то уравнение можно переписать в таком виде:

$$\frac{dk_y}{dt} = -b \left[(A^2 + 1) \frac{d\omega}{dt} + 2 \frac{d\omega}{dt} \zeta_z - \zeta_x \left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \right] .$$

Снова заметим, что выражение в правой части – известная функция времени $\mu(t)$ при заданном $\omega(t)$ или $\Theta(t)$. Тогда можно определить функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau .$$

Явный вид этой функции:

$$\varphi \left(\Theta, \frac{d\Theta}{dt}, \frac{d^2\Theta}{dt^2} \right) = \varphi_0 - b \frac{d\Theta}{dt} (A^2 + 1) + A \frac{d\Theta}{dt} \cos \Theta + A \int_0^t \left(\frac{d^2\Theta}{dt^2} \cos \Theta - \frac{g}{R} \sin \Theta \right) dt .$$

Теперь, вводя вектор \mathbf{e} – вектор \mathbf{e}_y в подвижной системе координат, можно написать векторное уравнение для нахождения \mathbf{a} в подвижном базисе:

$$\mathbf{C} \mathbf{a} = (\varphi \mathbf{E} - \omega \mathbf{I}) \mathbf{e} .$$

Стоит сделать здесь одну важную ремарку: из условия $(\zeta; \mathbf{e}_y) = 0$ и ортогональности оператора \mathbf{D} следует, что $(\mathbf{e}; \hat{\zeta}) = 0$.

Будем рассматривать треугольный профиль угловой скорости (т.е. условие $\omega(t) = E(T - |t - T|)$) с угловым ускорением, равным по модулю E . Время движения - $2T$, Первая половина движения представляет собой разгон, вторая - торможение. Дополнительно будем предполагать, что $\theta(0) = -\pi/2$, что соответствует нахождению центра масс робота в нижнем положении равновесия в начальный момент времени. Именно такое движение является наиболее важным с практической точки зрения. Исходя из практических соображений,

потребуем, чтобы целевой угол поворота был равен 2π , что соответствует полному обороту центра масс в плоскости движения, а значит, шар пройдет расстояние, равное длине экваториальной окружности. Очевидно, что движение по большим отрезкам можно получить как комбинацию нескольких таких движений. Конечно, теоретически достаточно перевести центр масс в верхнее положение равновесия, которое, очевидно, неустойчиво, но, с учетом ошибок при управлении и измерении, это приведет к тому, что в реальных экспериментах такое движение будет невозможно. Для угла Θ при таком выборе $\omega(t)$ верно, что

$$\Theta(t) = \begin{cases} \frac{Et^2}{2} - \frac{\pi}{2}, & \text{при } t \leq T, \\ -\frac{\pi}{2} - Et^2 + 2ETt - \frac{Et^2}{2}, & \text{при } t \in [T, 2T]. \end{cases}$$

Ниже приведем графики для необходимых управляющих напряжений для шара. Значения безразмерных коэффициентов электродвигателя $\kappa_1=2.6$, $\kappa_2=0.03$.

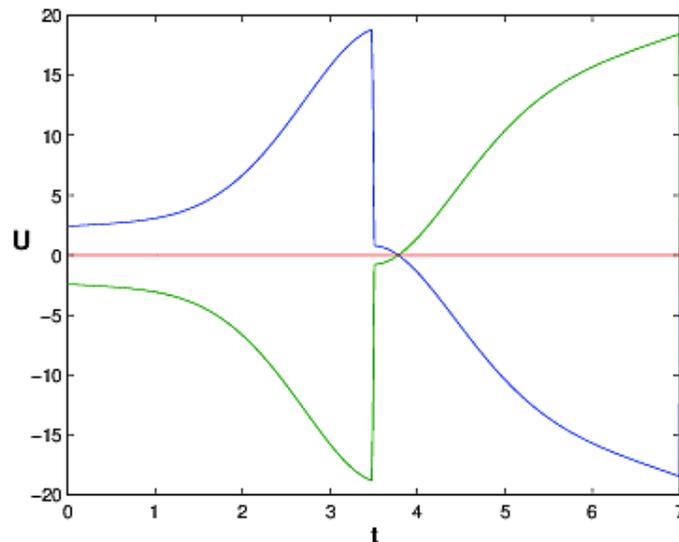


Рис.2. Управляющее напряжение U при векторе $e = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

2.2.4. Криволинейное движение

Вместе с тем, помимо движения по отрезку и поворота на месте, с практической точки зрения желательно иметь в качестве базовых движений и криволинейные траектории. Уравнения для построения движения по любой кривой могут быть получены, если принять во внимание, что $x=x(s)$, $y=y(s)$, $s=s(t)$ (s – натуральный параметр). Таким образом, чтобы полностью определить закон движения, нужно задать $k(s)$, $s(t)$ и $\omega_z(t)$, где $k(s)$ – кривизна кривой.

Итак, пусть задан закон движения центра шара (напомним, под траекторией понимается именно траектория этой точки). Пользуясь тем, что $v_o = [\omega; e_z]$, легко найти горизонтальные компоненты вектора угловой скорости. Наконец, задавая желаемый закон вращения $\omega_z(t)$ в качестве входных

параметров, можем получить все три компоненты вектора ω . Следующий этап – разрешение уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = [\omega; \zeta]$$

относительно неизвестного вектора ζ . Далее, из кинематического соотношения $v = [\omega; \zeta + e_z]$ находим зависимость $v(t)$, после чего, подставляя ее в уравнение на кинетический момент, находим искомые управления.

Поясним здесь следующее. У такого подхода есть один существенный недостаток. Задавая ω , зависимость $\zeta(t)$ можно найти, разрешив соответствующее дифференциальное уравнение. Однако при произвольном выборе угловой скорости в конце движения по траектории центр масс системы может не перейти в одно из положений равновесия (причем, как упоминалось в предыдущем параграфе, с практической точки зрения желательным является перевод центра масс в нижнее, устойчивое положение). Поэтому рассмотрим иной подход.

Назовем *элементарной траекторией* такую траекторию геометрического центра шара, которая получается при переводе центра масс из нижнего положения равновесия в нижнее. Заметим, что если в конце движения центр масс окажется в нижнем положении равновесия, а его скорость будет нулевой, то и скорость геометрического центра тоже окажется равной нулю.

Пусть на всем движении $\omega_z \equiv 0$, тогда система уравнений на компоненты вектора ζ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_x}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{\partial x}{\partial s} \zeta_z, \\ \frac{d\zeta_y}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{\partial y}{\partial s} \zeta_z, \\ \frac{d\zeta_z}{dt} &= -\frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \zeta_y + \frac{\partial x}{\partial s} \zeta_x \right). \end{aligned}$$

Введем угол ψ так, что $\cos \psi = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\sin \psi = \frac{\partial y}{\partial s}$. Так как $\|\zeta\| = A$, перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} \zeta_x &= A \cos \beta \cos \gamma, \\ \zeta_y &= A \cos \beta \sin \gamma, \\ \zeta_z &= A \sin \beta. \end{aligned}$$

Перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \frac{ds}{dt} \cos(\psi(s) - \gamma), \\ \frac{d\gamma}{dt} \cos \beta &= \frac{ds}{dt} \sin \beta \sin(\psi(s) - \gamma). \end{aligned}$$

Наконец, производя замену $\zeta = \psi - \gamma$, получим:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \zeta ,$$

$$\frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \cos \beta - \sin \zeta \sin \beta \right) = 0 .$$

Наконец, заметим, что $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ есть не что иное, как кривизна $k(s)$ заданной кривой (возможно, со знаком минус).

Как говорилось выше, задание функций $s(t)$ и $k(s)$ не гарантирует прихода центра масс в конце движения в нижнее положение равновесия. Пусть задание кривой, по которой планируется движение, определяется функцией $k(s)$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы задать либо функцию $\zeta(t)$, либо $\beta(t)$, чтобы траектория стала элементарной, а после чего уже найти $s(t)$.

Приведем пример для окружности. Кривизна $k(s) = 1/\rho = \text{const}$, а значит,

$$\frac{d\beta}{d\zeta} = - \frac{\rho \cos \zeta \cos \beta}{\cos \beta - \rho \sin \beta \sin \zeta} .$$

Теперь, если переписать это уравнение в виде

$$(\cos \beta - \rho \sin \beta \sin \zeta) d\beta + \rho \cos \zeta \cos \beta d\zeta = 0 ,$$

можно заметить, что оно допускает следующий интеграл:

$$\sin \beta + \rho \sin \zeta \cos \beta = -1 ,$$

так как в начальный момент времени выполнено условие нахождения центра масс в нижнем положении равновесия $\beta(0) = -\pi/2$. Кроме того, из этого соотношения следуют сразу несколько важных фактов. В частности, легко заметить, что $\sin \zeta(0) = 0$. Также интересно то, что угол β может отклониться от значения $-\pi/2$ на величину не более чем $2 \operatorname{arctg} \rho$, а значит, при таком движении по окружности перевод центра масс шара в верхнее положение равновесия невозможен в принципе. Далее, из этого интеграла можно получить

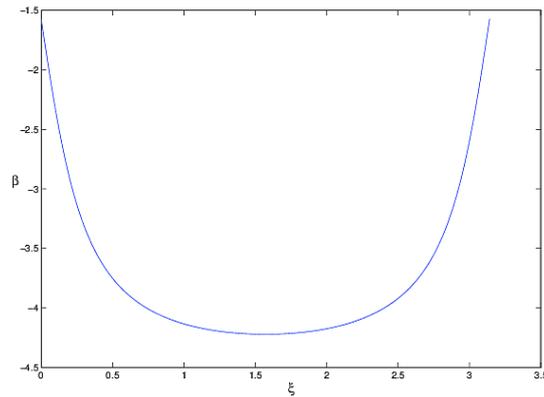
$$\rho \sin \zeta = -\operatorname{tg} \chi ,$$

$$\chi = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} .$$

Отсюда легко составить удобное уравнение для определения угла χ (а значит, и угла β) при заданном $\zeta(t)$:

$$\chi = -\operatorname{arctg} (\rho \sin \zeta) .$$

При этом нахождение $\zeta(t)$ при заданном $\chi(t)$ гораздо менее удобно.

Рис.3. Зависимость $\beta(\xi)$.

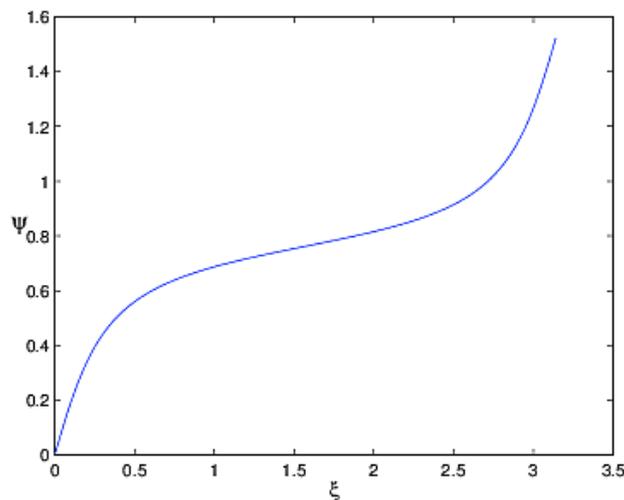
Далее же, принимая во внимания выше сказанное, можно заметить, что угол ψ также всецело определяется углом ξ . Действительно,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2 \frac{d\xi}{dt}}{1 + \rho^2 \sin^2 \xi},$$

а значит,

$$\psi(\xi) = \psi(0) + \frac{2}{\rho^2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 + \rho^2} \operatorname{tg} \xi \right).$$

Ниже показана полученная зависимость $\psi(\xi)$.

Рис.4. Зависимость $\psi(\xi)$.

С учетом последнего факта имеет смысл искать такое $\xi(t)$, что $\xi(0) = 0$, а $\xi(T) = \pi$ (T – полное время движения), а также требовать монотонного возрастания этой функции. Это обеспечит с одной стороны то, что движение будет элементарным, а с другой – шар будет катиться по дуге в одном направлении, что и является желаемым результатом. Заметим, что в таком случае пройденная дуга однозначно определяется параметром ρ , т.е.

$$\psi_{\text{полн}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \rho^2}}.$$

Теперь приступим к построению графиков. Выберем

$$\xi(t) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos \eta t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{\eta}\right].$$

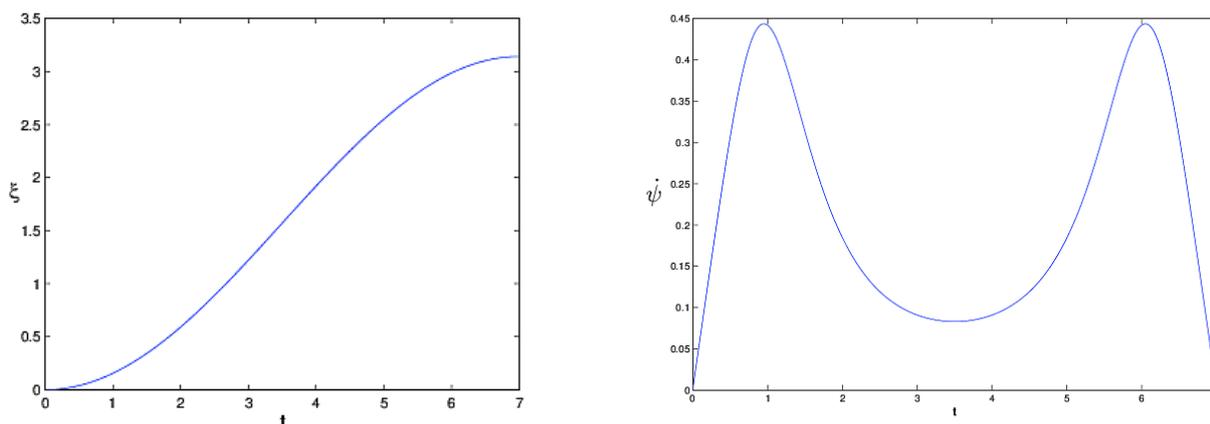


Рис.5. Зависимости $\xi(t)$ и $\frac{d\xi}{dt}$.

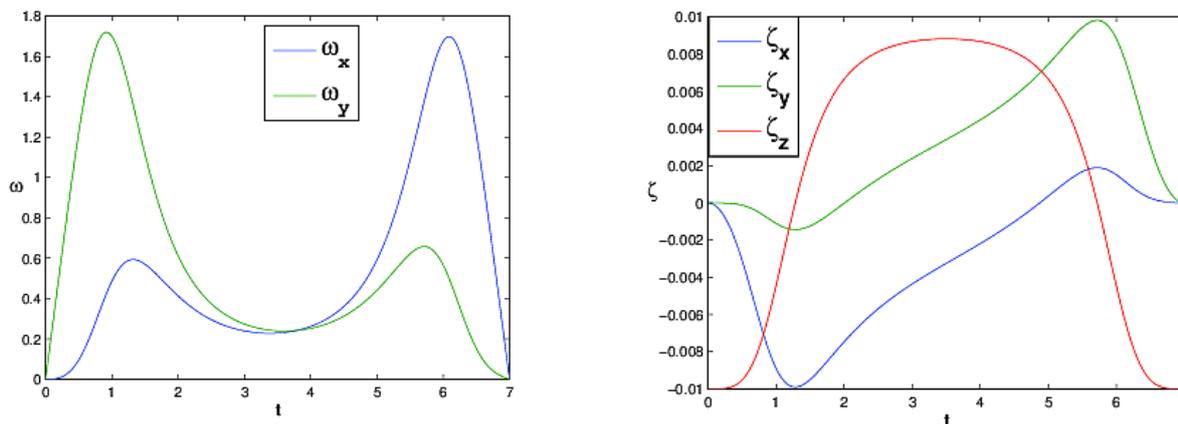


Рис.6. Зависимости $\omega(t)$ и $\zeta(t)$.

Для вычисления управлений в данном случае необходимо искать зависимость $D(t)$. Для этого на многообразии $SO(3)$ нужно ввести какие-либо локальные координаты. В данной работе в качестве них будут выступать углы Эйлера. Вектор этих углов – вектор локальных координат $\mathbf{q} = (\Theta, \Phi, \Psi)^T$ –

находится из дифференциального уравнения $\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}$, где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & -\sin \vartheta \cos \psi \\ 0 & 1 & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Параметры в уравнениях электродвигателей приняты такими же, как и до этого, значение $\eta = \frac{\pi}{7}$. Ниже приведены графики углов Эйлера и управляющих напряжений.

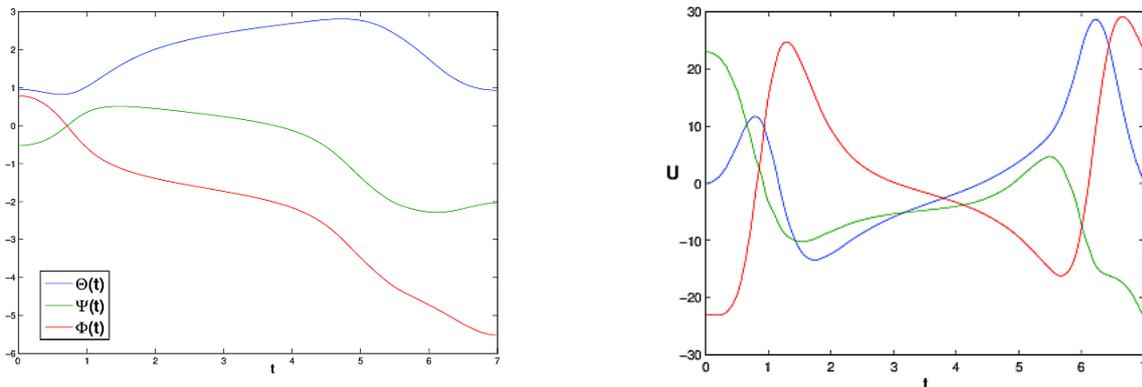


Рис.7. Углы Эйлера (слева) и управляющие напряжения (справа).

2.3. Схемы управления для двухпараметрической модели трения

Предположим теперь, что модель контактного взаимодействия подчиняется законам, описанным в [4]. В работе [2] была решена задача об управлении сбалансированным шаром в условиях этой модели. Здесь для начала кратко приведем необходимые определения и результаты из [2] и [4], так как они необходимы в дальнейшем.

- Предполагается, что пятно контакта между шаром и плоскостью представляет собой сферический сегмент, причем радиус этого сегмента R_s , а радиус сферы, его задающей – R_f . Таким образом, пятно контакта определяется параметрами $\delta = \frac{R}{R_f}$ и $\varepsilon = \frac{R_s}{R}$. В каждой точке этого пятна контакта выполнен закон сухого трения Кулона.

- Введем вспомогательный базис (векторы в нем будут индексированы римскими цифрами) так, что первая ось будет направлена вдоль скорости скольжения u шара, третья – вертикально, а вторая – дополнять этот репер до правой тройки.

- Функции сил и моментов контактного взаимодействия являются π -антипериодическими функциями переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, которые определяются исходя из соотношений:

$$\begin{aligned}\delta u &= r \cos \theta_1, \\ \omega_I &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ \omega_{II} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \omega_{III} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3.\end{aligned}$$

Эти угловые переменные будем называть углами режима.

• Для поворота сбалансированного шара на месте верно, что существует ненулевая и постоянная по модулю по времени компонента момента μ_z , которую можно отождествить с моментом трения покоя.

• Для движения по отрезку можно показать, что меняются лишь значения θ_I . Верно, что $f(\theta_I)$ непрерывна и возрастает на промежутке $\theta_I \in (0, \pi)$, момент $\mu(\theta_I)$ также непрерывен по θ_I и является убывающей функцией при $\theta_I \in (0, \theta_*)$ и возрастающей при $\theta_I \in (\theta_*, \pi)$, где $\theta_* = \pi - \arctg \delta^{-1}$. Существует значение $\theta_I = \theta_f \in (\pi/2, \theta_*)$, такое, что $f(\theta_f) = 0$. Величину $\mu(\theta_f) < 0$ можно отождествить с моментом трения покоя для прямолинейного движения.

• Для криволинейного движения верно, что существенными являются лишь компоненты f_I и μ_{II} . Остальными можно пренебречь ввиду их малости.

Для удобства далее сохраним все выражения из [2]. Если связать с кривой, являющейся следом центра шара в проекции на плоскость S_{xy} , репер Френе e_n, e_β, e_τ , за угол φ взять угол между векторами e_I и e_τ , то в проекции на эти оси уравнения изменения импульса примут следующий вид ($\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$):

$$\begin{aligned}\frac{d^2 s}{dt^2} &= n(\theta) \tilde{f}_I(\theta) \cos \varphi, \\ k(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= n(\theta) \tilde{f}_I(\theta) \sin \varphi, \\ \frac{dv_z}{dt} &= n - \frac{g}{R},\end{aligned}$$

здесь $\tilde{f}_I = \frac{R}{g} f_I$. Выражения для f и μ можно найти в [2]. Последнее уравнение, в частности, показывает, что для несбалансированного шара сила реакции опоры не равна g/R . Для моментов имеем следующее соотношение:

$$\mu = \mu^0 - b [\zeta + e_z; f] = n(\theta) \left((\mu^0 - b [e_z; f]) - b [\zeta; f] \right).$$

Первое слагаемое здесь соответствует моменту, создаваемому для сбалансированного шара, второе зависит от смещения центра масс.

Как можно заметить, полученная полная система существенно сложна для исследования, поэтому далее будут разобраны лишь частные случаи.

2.3.1. Удержание конфигурации и поворот на месте

Для начала рассмотрим поворот шара относительно вертикали, проходящей через его геометрический центр. Таким образом, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, а значит, верно, что все силы будут нулевыми. У момента же будет только одна ненулевая компонента - вертикальная. В этом случае система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{R} , \\ \frac{dv}{dt} &= 0 , \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \boldsymbol{\mu}^0_z - b \frac{g}{R} [\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{e}_z] , \\ v_z &= 0 . \end{aligned}$$

Но, поскольку имеется соотношение, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\zeta}]$, получаем, что либо скорость постоянна и ненулевая, либо центр масс находится на оси вращения. Первый случай неприменим при нулевых начальных условиях, второй же полностью соответствует уже рассмотренному в [2] случаю.

Что касается удержания конфигурации, то эта задача редуцируется к уже рассмотренной выше.

Однако, учитывая феномен трения покоя, этот случай должен быть рассмотрен для момента $\mu^0(\theta_f) + \frac{gb\zeta_x}{R}$.

2.3.2. Движение по отрезку

Предположим, что движение происходит по прямой линии, причем отсутствуют как закручивание так и верчение. т.е. $\omega_I = \omega_z = 0$. Без ограничения общности примем $\mathbf{v}_O = v\mathbf{e}_x$, тогда $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_y$. Справедливо в таком случае, что

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= n \tilde{f} \mathbf{e}_x , \\ \boldsymbol{\mu} &= n(\tilde{\mu}_0 - b(1 + \zeta_z)\tilde{f})\mathbf{e}_y . \end{aligned}$$

Кроме того, как и для неголономной задачи, будем считать, что $\zeta_y \equiv 0$. Таким образом, сохраняются найденные ранее кинематические соотношения, а именно:

$$\begin{aligned} \zeta_x &= A \sin \psi , \\ \zeta_z &= A \cos \psi , \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega . \end{aligned}$$

Так как

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x + \omega [\mathbf{e}_y; \boldsymbol{\zeta}] ,$$

продифференцировав, получаем следующую систему уравнений:

$$n = \frac{g}{R} - \left(\frac{d\omega}{dt} \zeta_x + \omega^2 \zeta_z \right) ,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \zeta_z - \omega^2 \zeta_x = n \tilde{f} .$$

В проекции на ось S_y уравнение изменения кинетического момента будет иметь следующий вид (заметим, $k_x = k_z = \text{const} = 0$ в рассматриваемых примерах):

$$\frac{d}{dt} (k_y + b\omega (A^2 + 1 + 2A\zeta_z)) = n \tilde{\mu} - bA\zeta_x \left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) .$$

Это уравнение служит для нахождения управлений, поэтому остановимся подробнее на анализе уравнений изменения импульса и выборе желаемого профиля угловой скорости. Будем так же, как и в предыдущем пункте, полагать, что в начальный момент центр масс находится в нижнем положении равновесия, и за элементарное движение требуется переместить его в ту же точку, пройдя путь, равный длине экватора сферической поверхности робота.

Задав явным образом зависимость $\psi(t)$, перепишем исходную систему в следующем виде, для удобства обозначив $\theta = \theta_I$:

$$n = \frac{g}{R} - A \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \sin \psi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cos \psi \right) ,$$

$$\frac{dv}{dt} + A \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \cos \psi - \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin \psi \right) = n \tilde{f}(\theta) ,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = r \sin \theta .$$

В силу последнего уравнения нетрудно получить, что

$$u = \frac{r}{\delta} \cos \theta \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2} \frac{d\psi}{dt} \operatorname{ctg} \theta - \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\delta \sin^2 \theta} .$$

Теперь, приняв

$$H_\psi(t) = \frac{d^2\psi}{dt^2} (1 + A \cos \psi) - A \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin \psi ,$$

второе уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\delta (n_\psi \tilde{f}(\theta) - H_\psi) \sin^2 \theta - \frac{d^2\psi}{dt^2} \sin \theta \cos \theta}{\frac{d\psi}{dt}} .$$

Чтобы решить задачу Коши, необходимо задать начальное условие для угла θ . С учетом того, что в начальный момент времени знаменатель в уравнении для нахождения θ обращается в ноль, для θ_0 имеем следующее уравнение, полученное путем приравнивания нулю числителя:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\frac{d^2\psi(0)}{dt^2}}{\delta \left(n_\psi(0) \tilde{f}(0) - H_\psi(0) \right)} .$$

Учитывая, что $\psi(0) = -\pi/2$, можно получить выражения для n_ψ и H_ψ :

$$n_\psi(0) = \frac{g}{R} + A \frac{d^2\psi(0)}{dt^2} ,$$

$$H_\psi(0) = \frac{d^2\psi(0)}{dt^2} .$$

Аналогично предыдущим пунктам положим

$$\psi = -\frac{A}{\eta} \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3\eta t}{2} + \cos \frac{\eta t}{2} \right) - \frac{3\pi}{2} ,$$

$$A = \frac{3\pi\eta}{2} ,$$

откуда

$$\frac{d^2\psi(0)}{dt^2} = \frac{3\pi\eta^2}{2} .$$

Окончательно уравнение на θ_0 принимает вид:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{\delta \left(\left(\frac{2g}{3\pi\eta^2 R} + A \right) \tilde{f}(\theta_0) - 1 \right)} .$$

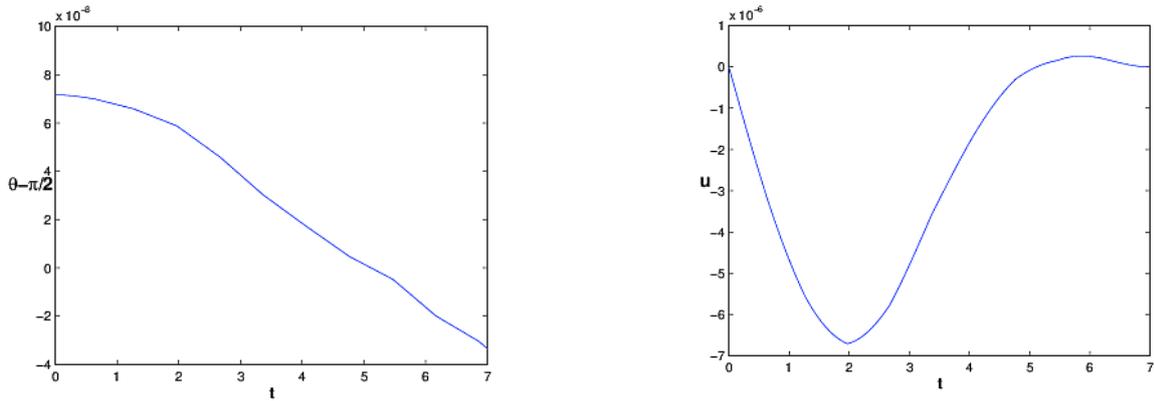
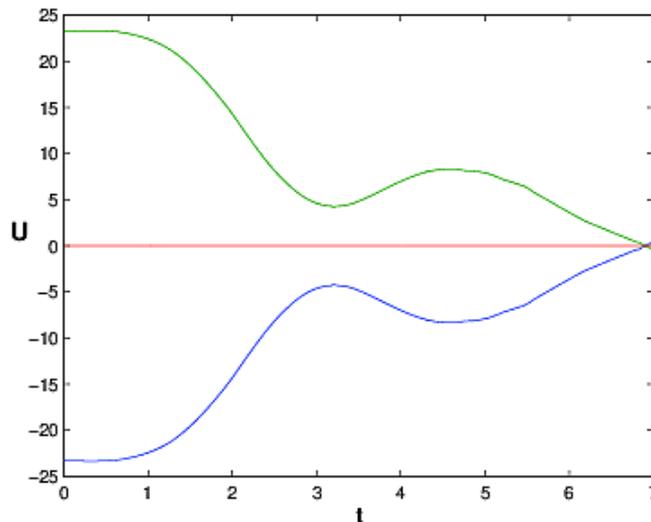
Для удобства положим

$$\lambda = \frac{2g}{3\pi\eta^2 R} + A ,$$

функция

$$F(\theta) = \frac{1}{\lambda \tilde{f}(\theta) - 1}$$

является монотонно убывающей по θ в силу возрастания функции \tilde{f} и положительности λ . Таким образом, на интервале $\left(\pi/2; \pi/2 + \tilde{f}^{-1} 1/\lambda \right)$ уравнение на θ_0 имеет единственный корень. Далее, решив задачу Коши, найдем $\theta(t)$, после чего найдем и $u(t)$ и $v(t)$. Приведем графики $\theta(t)$, $u(t)$, а также управляющих напряжений $U(t)$, приняв $\eta = \pi/7$.

Рис.8. Зависимости $\theta(t) - \pi/2, u(t)$.Рис.9. Зависимости $U(t)$.

Полученное правило управления было подтверждено моделированием.

3. Заключение

В работе исследована динамика несбалансированного робота-шара и найдены управления, реализующие заданные траектории. Тем самым для рассмотренной системы решена обратная задача динамики.

Можно отметить, что, в отличие от симметричного случая, алфавит движения робота пополняется еще движением, обеспечивающим удержание центра масс в фиксированном положении. Важным условием является движение вдоль элементарных траекторий, то есть таких траекторий, в начале и конце которых центр масс будет находиться в нижнем положении равновесия, а скорости равны нулю. Показано, что поворот на заданный угол сводится к уже исследованной в [1] и [3] задаче, в то время как алгоритмы для движения по отрезку или окружности будут отличаться от алгоритмов, полученных для симметричного (сбалансированного) шара.

Кроме того, показано, что элементарное движение по дуге определенного радиуса без верчения полностью определяет эту дугу.

Показано, что для двухпараметрической модели трения верно, что удержание центра масс сводится к аналогичной неголономной задаче, но с несколько другим моментом, а задача элементарного поворота на месте полностью редуцируется к повороту на месте сбалансированного шара. Для движения по элементарному отрезку предложены управления, это движение реализующие.

Ниже на рисунке 10 показан макет-прототип шара с маховиками, описанного в данной работе. Макет построен и управляется по изложенной в работе схеме.



Рис.10. Макет-прототип шара с маховиками.

4. Список литературы

1. А.В. Борисов, А.А. Килин, И.С. Мамаев. Как управлять шаром Чаплыгина с помощью роторов // Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар. Сб. работ.- М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований, РХД, 2013, С.131-168.
2. Г.П. Терехов, В.Е. Павловский. Управление роботом-шаром с помощью маховиков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. № 16, 31 с. doi:10.20948/prepr-2017-16, http://keldysh.ru/papers/2017/prep2017_16.pdf
3. В.Е. Павловский, Г.П. Терехов. Управление мобильным сферическим информационным роботом с тремя ортогональными маховиками // Спецтехника и связь, №3. 2012. С.19-25.
4. А.В. Карапетян. Двухпараметрическая модель трения // ПММ, т.73, вып.4, 2009, С.515-519.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение.....	3
2. Динамика и управление роботом-шаром.....	4
2.1. Описание модели. Уравнения движения	4
2.2. Робот на абсолютно шероховатой плоскости	5
2.2.1. Случай неподвижного центра масс	6
2.2.2. Вращение вокруг вертикали	7
2.2.3. Движение по прямой.....	8
2.2.4. Криволинейное движение	10
2.3. Схемы управления для двухпараметрической модели трения.....	15
2.3.1. Удержание конфигурации и поворот на месте	17
2.3.2. Движение по отрезку	17
3. Заключение	20
4. Список литературы	22